

# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 物理科

030115

以小搏大—螺旋停降器原理探究

學校名稱：澎湖縣立馬公國民中學

作者：  國二 陳淑容  國二 陳育祈  國二 陳苡晴	指導老師：  吳子偉  陳河開
---	-----------------------------

關鍵詞： 摩擦力、螺線形軌跡、tracker 分析

# 以小搏大—螺旋降停器原理探究

## 摘要

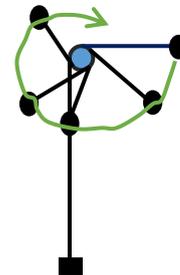
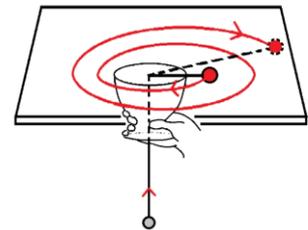
本研究探究螺旋降停器的原理，以一棉線連接重錘與輕物，跨掛於橫軸上，施放前由手持輕物於一端，使重錘懸掛。當施放輕物時，觀察重錘下降到停止的過程與輕物受到重錘作用力而產生的螺旋運動。

本研究以施放角度、重錘與輕物配重比、旋轉橫軸直徑、旋轉軸材質與棉線粗細等變因，探討不同變因對重錘降停效果與輕物繞行旋轉軸的影響。研究結果發現：1.施放角度會影響重錘降停距離， $90^\circ$ 降停距離最短，其摩擦力與繩子張力等之合力最大；2.重錘與輕物的配重比愈大，重錘降停距離愈長，輕物的旋轉速度愈快；3.旋轉橫軸直徑愈大，重錘降停距離愈短；4.粗棉線使重錘降停距離較小，且較快停止；5.旋轉軸的表面材質愈粗糙，重錘的降停距離愈短。

## 壹、研究動機

在物理雙月刊第 38 卷第 5 期談到「螺旋甩球」，說明較輕的小球能夠透過旋轉所產生的轉動慣量，將連結在一起的重球逆勢向上移動。我們發想，是否將一大一小的重物以棉線連接，將其掛於軸上，透過重力由較重的物體拉動較輕的物體，觀察較輕的物體受到棉線張力而加速纏繞在軸上的現象，並使得較重的物體在短時間內停止落下。

我們認為重錘落下緩慢停止的現象，可能跟重錘重力所形成的繩子拉力與輕物重力兩者之合力、旋轉軸的摩擦力以及圓周運動產生的轉動慣量形成的繩子張力有關。因此繩子材質、旋轉軸直徑大小、旋轉軸的材質以及重錘及輕物的重量比，都是我們研究想要探討的變項。而影響兩個重物運動的因素有哪些？運動的軌跡有何特徵？是本研究的主要動機。

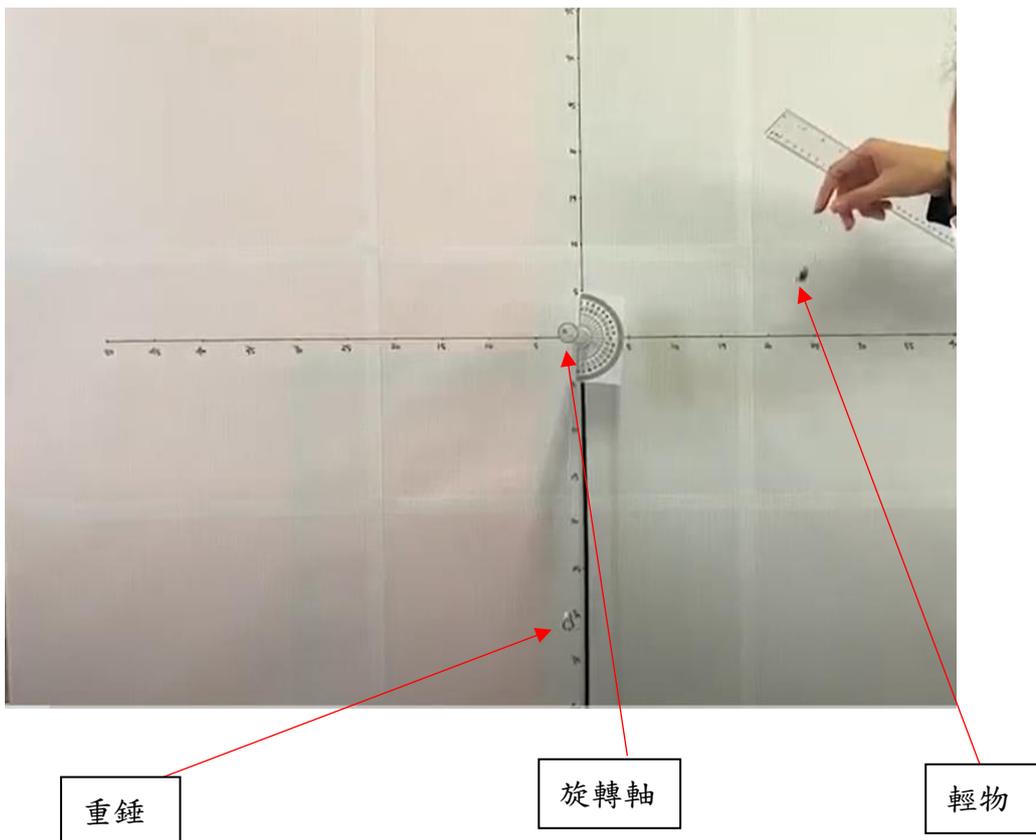


## 貳、研究目的

- 一、探討輕物在不同的施放角度落下時，重錘的降停效果與輕物的螺旋運動。
- 二、探討重錘與輕物在不同的重量配比時，重錘的降停效果與輕物的螺旋運動。
- 三、探討不同直徑的旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響。
- 四、探討不同粗細棉線對於重錘與輕物的運動影響。
- 五、探討不同材質的旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響。

## 參、研究器材：

本研究實驗裝置如下圖所示



## 肆、研究方法

本研究以實驗設計法為主要研究方法，各個分項實驗的操縱變因與觀察變因如下

### 一、探究不同角度施放輕物，重錘的降停效果與輕物的螺旋運動特徵

(一) 操作方法：調整重錘線與輕物線夾角自  $10^\circ \sim 170^\circ$ ，每  $10^\circ$  測量一次。

(二) 觀察變因：

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間，後面簡稱「落下時間」。
3. 輕物纏繞在旋轉軸上的圈數。

### 二、探討重錘與輕物在不同重量配比時，重錘的降停效果與輕物的螺旋運動特徵

(一) 操作方法：

利用油黏土將重錘配重，調整重錘與輕物重量比為  $5:1$ 、 $15:1$ 、 $24:1$ 、 $34:1$ ，以重錘棉線與輕物棉線呈  $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $135^\circ$  等角度施放輕物。

(二) 觀察變因：

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間。
3. 輕物纏繞在旋轉軸上的圈數。

### 三、探討不同直徑的旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響

(一) 操作方法：選定外徑分別為  $3.8\text{mm}$ 、 $5.5\text{mm}$ 、 $8\text{mm}$ 、 $10.8\text{mm}$  等四種不同粗細的吸管

做為旋轉軸。以 5：1、15：1、24：1、34：1 等配重比，分別於 45°、90°、135° 施放。

(二) 觀察變因：

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間。
3. 輕物纏繞在旋轉軸上的圈數。

四、探討不同粗細棉線對於重錘與輕物的運動影響

(一) 操作方法：選用兩種粗細不同的棉線連接重錘與輕物，以 5：1、15：1、24：1、34：1 等配重比，分別於 45°、90°、135° 施放。

(二) 觀察變因：

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間。
3. 輕物纏繞在旋轉軸上的圈數。

五、探討不同材質的旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響

(一) 操作方法：取用 3 類周長約為 2.1 公分之玻離吸管、塑膠吸管、不鏽鋼吸管做為旋轉軸，以 5：1、15：1、24：1、34：1 等配重比，分別於 45°、90°、135° 施放。

(二) 觀察變因：

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間。
3. 輕物纏繞在旋轉軸上的圈數。

## 伍、研究結果

### 一、輕物在不同角度施放時的運動情形

#### (一) 重錘的停降距離與角度的關係

研究小組取用 50cm 在每個不同角度各測量 1 次，發現施放角度接近 90° 時，重錘落下距離較短、輕物繞在旋轉軸的圈數最多、時間最長。然後隨著角度變大與變小，重錘落下距離變長、輕物繞在旋轉軸的圈數變少、時間變短。

因此，研究小組最後選定 45°、90°、135° 做為固定施放，重錘與輕物在不同配重的運動變化，各測量 10 次並取平均值。

表 1 不同角度施放輕物之平均運動變化 (棉線長 50 公分)

重錘與輕物比	施放角度	落下距離 (公分)	旋轉軸上的圈數	總時間 (秒)
5：1	45	17.00	4.1	0.98
	90	12.47	6.1	1.62
	135	15.43	5.1	0.82
10：1	45	20.48	3.1	0.51
	90	17.53	4.2	0.64
	135	18.18	4.1	0.60

重錘與輕物比	施放角度	落下距離 (公分)	旋轉軸上的圈數	總時間 (秒)
15 : 1	45	無法降停 (輕物旋轉速度過快, 棉線繞盡後反彈再繞開)		
	90	21.10	3.8	0.49
	135	20.09	4.0	0.37

由表 1 可以看出, 在三種配重組合, 在總時間皆呈現相同趨勢: 在 90° 施放輕物, 重錘落下的距離最短, 所需的總時間最長。

## (二) 重錘的停降距離、速度變化與時間的關係

本研究的重錘以螺帽包覆油黏土方式製作, 因此體積夠大且油黏土顏色為鮮艷的橘色, 因此研究小組採用 tracker 軟體來分析重錘的停降歷程。為了能夠分析得更加仔細, 採用手機 1/8 慢動作功能, 以 240fps (每秒 240 影格) 拍攝, 匯入 tracker 後分析, 得到結果如表 2 所示。

表 2 重錘停降距離、速度變化與時間關係分析表 (棉線長 50 公分)

實驗類別	歷經影格數 / 歷經時間 (秒)	重錘停降位置分析圖
配重比 5 : 1 45° 施放	182 / 0.758	
配重比 5 : 1 90° 施放	126 / 0.525	

實驗類別	歷經影格數／歷經時間 (秒)	重錘停降位置分析圖
配重比 5 : 1 135 ° 施放	99 / 0.413	
配重比 10 : 1 45 ° 施放	149 / 0.621	
配重比 10 : 1 90 ° 施放	121 / 0.504	
配重比 10 : 1 135 ° 施放	92 / 0.383	

實驗類別	歷經影格數／歷經時間（秒）	重錘停降位置分析圖
配重比 15 : 1 45 °施放	147 / 0.612	
配重比 15 : 1 90 °施放	130 / 0.542	
配重比 15 : 1 135 °施放	114 / 0.475	

分析表 2，在相同的配重比、不同施放角度之停降影格數／時間，皆發現以 135° 最快停降（影格數最少）、45° 最慢停降。除此之外，重錘在開始落下到停止前，落下的速度變化皆呈現倒鐘型曲線（如表 2 之質量 A(t, Vy) 表），代表一開始落下時速度是愈來愈快，隨即減速直到停止。

在重錘降停距離部份，表 2 之質量 A (t, y) 表，並不容易比較出距離變化。因此，仍是以表 1 為平均數據為主。其中 5:1 及 10:1 兩種配重組合有相同結果：在 90° 施放輕物，重錘落下的距離較其他二個角度短，圈數較多，花費的總時間較長。代表 90° 施放時，重錘很快就停住，輕物則在重錘停住後仍然繞行旋轉軸纏繞較多圈數。而 45° 施放時，重錘較慢停住，輕物繞行的圈數較少。而在 15:1 配重時，因為重錘質量較大，導致輕物旋轉速度過快，在棉線繞盡後，輕物撞擊旋轉軸後反彈再鬆開，使得 45° 施放時，無法使重錘降停。

推測重錘質量大，也容易使得輕物撞擊旋轉軸後鬆開，影響停降效果。

### (三) 輕物施放後的運動軌跡分析

由於每一次實驗的物體運動速度太快，每次實驗在極短時間即停止，輕物的軌跡不容易利用影片搭配 tracker 軟體追蹤，因此輕物的軌跡改採微觀分析方式：研究小組將實驗影片以分格影像輸出（使用 free video to jpg converter 軟體），摘錄如表 3，分析出重錘降停與輕物旋繞的關係。

表 3 重錘運動分格影像（順序由左到右、由上至下）



以藍色標示為重錘位置、紅色標示為輕物位置，發現重錘在編號第 5 號照片後就不再下降，此時輕物位置距離施放點尚未繞過旋轉軸 1 圈。與研究小組原先假設的現象不同，重錘先停止後，輕物才開始繞纏旋轉軸，也推測影響重錘的降停的因素，與纏繞旋轉軸的圈數無關。

(四) 輕物施放後的運動軌跡分析

以相同方式，研究小組將影片轉成每個影格後，輸入於 iPad 並在表面上貼上一透明投影片，以描點方式記錄輕物的螺旋運動軌跡，如圖 1。

輕重配比 5 : 1 ; 45 度	輕重配比 5 : 1 ; 90 度	輕重配比 5 : 1 ; 135 度
輕重配比 10 : 1 ; 45 度	輕重配比 10 : 1 ; 90 度	輕重配比 10 : 1 ; 135 度
輕重配比 15 : 1 ; 45 度	輕重配比 15 : 1 ; 90 度	輕重配比 15 : 1 ; 135 度

圖 1 輕物螺線運動軌跡描點圖 (x表示重錘停止下降的時間點)

由圖 1 可約略看出二個部份：

1. 不同角度施放之輕物軌跡 (圖 1 同一列比較): 不同角度施放, 在重錘停止前, 軌跡曲率有明顯差異: 施放角度  $45^\circ$ , 曲率較大; 施放角度  $135^\circ$ , 曲率較小。此外, 輕物在  $90^\circ$  時, 因為重錘較快停住, 螺線運動的輕物端棉線較長, 使得繞行旋轉軸的運動軌跡較多。

2. 不同輕重配重比 (圖 3 同一欄比較): 重錘愈重, 降停距離愈大, 輕物端的棉線較短, 繞行旋轉軸的圈數較少 ( $15:1 < 10:1 < 5:1$ ) 但歷經的影格就愈少, 代表輕物速度愈快。

## 二、重錘與輕物在不同重量比時的運動情形

研究小組固定將輕物於  $90^\circ$  施放, 逐步增加配重比, 結果如下表 4

表 4 不同重量配比之平均運動變化 (棉線長 50 公分)

配重比	重錘落下距離 (公分)	旋轉軸上的圈數	落下時間 (秒)
6:1	11.80	6.4	1.992
8:1	13.00	5.2	1.246
10:1	14.65	4.6	0.869
12:1	16.15	3.8	0.837
14:1	17.00	3.4	0.682
16:1	17.90	3.4	0.747
18:1	19.10	3.3	0.602
20:1	19.20	2.7	0.573

20:1 在棉線 50 公分時, 已達極限。由於棉線 50 公分時, 在重錘重量遠大於輕物時, 容易因為旋轉速度過快而在繞完時反彈, 造成纏繞圈數的誤差, 甚至會使整個降停效果消失, 因反彈鬆開, 讓重錘落到地面。此外, 隨著重錘的重量增加, 整體運動時間變短。

根據表 2, 將能夠代表摩擦作用時間的指標: 重錘落下距離, 整合成折線圖如圖 2 所示。

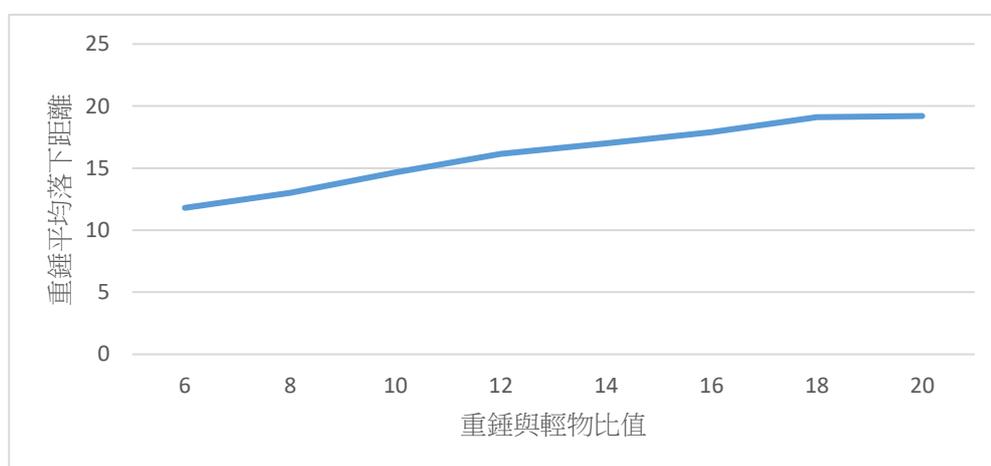


圖 2 不同重錘與輕物比之重錘降停情形 (棉線長 50 公分)

根據圖 2, 在其他條件不變下, 當重錘愈重時, 落下的距離就愈長、旋轉軸的圈數愈少、整體運轉時間愈短。當重錘重量大於輕物的 20 倍時, 輕物纏繞在旋轉軸上的吸管產生的摩擦力, 不再能夠負擔重錘向下產生的動量, 導致後續的實驗失敗。

因此, 研究小組選用相同的 100 公分棉線重新操作, 目的在於延長棉線繞行的時間, 避免因重錘過重而太快繞盡。研究小組最後決定以 5:1、15:1、24:1、34:1 等配重比進行比較, 研究結果整理如表 5。

表 5 不同重錘輕物比對於運動情形的影響（棉線長 100 公分）

配重比	施放角度	落下距離 (公分)	旋轉軸上的 圈數	落下時間 (秒)	備註
5 : 1	90	69.65	5.2	3.612	輕物無法全部纏繞在旋轉軸上,平均剩餘長度 22.94cm
15 : 1	90	73.86	12.2	2.490	輕物端棉線平均剩餘長度 3.61cm
24 : 1	90	77.75	10.4	2.138	輕物端反彈後垂掛長度 4.42cm
34 : 1	90	76.05	10.0	1.465	輕物旋轉用盡棉線後會反彈跳開

由表 5 可知，配重比值愈大，重錘降停落下距離就愈長、輕物在旋轉軸上的圈數愈少、時間愈短，其中 5 : 1 的重量形成的動能不足以讓輕物一端的棉線全部纏繞在旋轉軸上。但是由於 24 : 1、34 : 1 的重量配比大，作用的時間極短，且不易觀察真正的纏繞圈數。

### 三、旋轉軸的半徑對於重錘與輕物的運動狀態影響

研究小組找尋不同口徑、但相同材質的透明吸管做為旋轉軸，以游標尺測量外徑分別為 3.8mm、5.5mm、8.0mm、10.8mm。整理研究資料如表 6。

表 6 不同旋轉軸半徑之平均運動狀態 (1) (棉線長 100 公分)

吸管外徑 (mm)	配重比	施放角度	落下距 離(cm)	旋轉軸 上圈數	落下時間 (秒)	備註
10.8	5:1	90	58.54	4.8	3.530	輕物端棉線平均剩餘長度 24.3 公分
8.0	5:1	90	57.80	4.0	3.310	輕物端棉線平均剩餘長度 29.4 公分
5.5	5:1	90	69.65	5.2	3.610	輕物端棉線平均剩餘長度 22.9 公分
3.8	5:1	90	68.60	5.3	3.910	輕物端棉線平均剩餘長度 24.2 公分
10.8	15:1	90	71.91	6.2	1.520	輕物端棉線平均剩餘長度 5.56 公分
8.0	15:1	90	72.85	9.1	2.020	輕物端棉線平均剩餘長度 3.95 公分
5.5	15:1	90	73.86	11.7	2.490	輕物端棉線平均剩餘長度 3.61 公分
3.8	15 : 1	90	75.00	17.4	4.440	無
10.8	24:1		重錘無法成功停住 (纏繞完又彈開)			
8.0	24:1	90	75.60	6.8	1.520	輕物端反彈後垂掛長度 6.4 公分

吸管外徑 (mm)	配重比	施放角度	落下距離(cm)	旋轉軸 上圈數	落下時間 (秒)	備註
5.5	24:1	90	77.75	10.4	2.140	輕物端反彈後垂掛 長度 4.42 公分
3.8	24:1	90	82.20	14.8	2.930	無

表 6 顯示在 5:1 配重時，輕物端的棉線沒有繞完，都還剩下 20 公分以上。較粗的吸管，如外徑 10.8mm 與 8.0mm，重錘停止前下降距離較短。但是此兩種配重條件下的運動的過程無法使輕物端的棉線全部繞完，因此留下不等的線段，無法從圈數及時間來比較運動情形。綜合比較 4 種不同旋轉軸外徑時，可以看出趨勢：旋轉軸外徑較大者，重錘落下到停止前的移動距離較短，整體作用時間也較短。

另外，研究小組測量多次的平均值表現，旋轉軸較粗的情況，在重錘過重的情形下，無法使重錘降停。推測來自 2 個原因：1. 因為重錘較重，整個運動時間很短，輕物無法纏繞足夠圈數形成夠大的摩擦力來停住重錘。2. 因為重錘過重，使得輕物進行螺旋運動的向心力過大，導致旋轉速度太快，使得輕物撞擊旋轉軸後反彈鬆開。

為此，研究小組縮短棉線為 50 公分，以 5:1、10:1、15:1 的配重比，針對外徑 10.8mm 的吸管與 5.5mm 吸管，再測量一次，得到表 7。

表 7 不同旋轉軸半徑之平均運動狀態 (2) (棉線長 50 公分)

吸管外徑 (mm)	配重比	施放角度	落下距離 (公分)	旋轉軸上的 圈數	落下時間 (秒)
5.5	5:1	90	12.50	6.1	1.620
10.8	5:1	90	11.60	3.3	0.980
5.5	10:1	90	17.50	4.2	0.640
10.8	10:1	90	16.40	3.0	0.620
5.5	15:1	90	21.10	3.8	0.490
10.8	15:1	90		無法成功	

表 7 得到同樣的結果：做為旋轉軸的吸管外徑愈長，重錘下降到停止的距離就愈短，整體運動時間愈短。然後旋轉軸外徑愈大，重錘太重者，無法成功降停停止，推測應該在輕物繞纏旋轉軸時圈數不足，無法使棉繩與棉繩彼此疊加產生足夠的摩擦力所致。

#### 四、探討不同粗細棉線對於重錘與輕物的運動影響

研究小組找尋另一種較粗的棉線，其外徑約在 1.0mm，針對不同配重比、不同施放角度進行實驗各 10 次，測量所得平均值結果如表 8。

表 8 不同粗細棉線對平均運動影響（棉線長 50 公分）

種類	配重比	施放角度	落下距離 (公分)	旋轉軸上的 圈數	落下時間 (秒)
粗棉線	10 : 1	45	19.28	3.1	0.79
細棉線	10 : 1	45	20.48	3.1	0.51
粗棉線	10 : 1	90	16.99	3.9	0.86
細棉線	10 : 1	90	17.53	4.2	0.64
粗棉線	10 : 1	135	17.15	3.9	0.90
細棉線	10 : 1	135	18.18	4.1	0.60

根據表 8，相同配重比下，不同施放角度，細棉線和粗棉線都有相同的趨勢：

落下距離：45° > 135° > 90°；吸管上的圈數：90° > 135° > 45°；落下時間：90° > 135° > 45°

無論是哪一種施放角度，粗棉線落下的距離，較細棉線的短，圈數也較小，運動總時間則較長。推測較粗的棉線產生摩擦力較大，較少的圈數交疊下即可產生降停效果的摩擦力。然而粗棉線因為重量較重，繞行的速度較慢，造成整體運動的時間增加。

#### 五、探討不同材質旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響

將外徑約為 5.8 公分的玻璃吸管、塑膠（PVC）吸管、不鏽鋼吸管做為旋轉軸，以 100 公分棉線繫在不同配重比的重錘與輕物，將其運動的數據整理如表 9。

表 9 不同材質旋轉軸對平均運動影響

旋轉軸材質	配重比	施放角度	落下距離	旋轉軸上 的圈數	落下時間 (秒)	備註
玻璃	5 : 1	90	62.76	6.4	4.070	輕物端棉線平均剩餘 長度 31.25cm
不鏽鋼	5 : 1	90	64.8	4.4	3.510	輕物端棉線平均剩餘 長度 29cm
塑膠	5 : 1	90	69.65	5.2	3.610	輕物端棉線平均剩餘 長度 22.94cm
玻璃	15 : 1	90	74.38	12.8	2.750	
不鏽鋼	15 : 1	90	75.08	12.8	2.700	輕物端棉線平均剩餘 長度 1.8m
塑膠	15 : 1	90	73.86	11.7	2.490	輕物端棉線平均剩餘 長度 3.61cm
玻璃	24 : 1	90	80.34	10.0	2.120	
不鏽鋼	24 : 1	90	79.28	7.8	1.700	輕物端反彈後垂掛長 度 7.6cm
塑膠	24 : 1	90	77.75	10.4	2.140	輕物端反彈後垂掛長 度 4.42cm

旋轉軸材質	配重比	施放角度	落下距離	旋轉軸上的圈數	落下時間 (秒)	備註
玻璃	34 : 1	90	83.10	9.2	1.660	
不鏽鋼	34 : 1	90	81.64	7.2	1.600	輕物端反彈後垂掛長度 6.3cm
塑膠	34 : 1	90	76.05	9.0	1.470	輕物端反彈後垂掛長度 6.57cm

從表 9 可發現，以玻璃、塑膠材質在旋轉軸上的圈數較多。

將落下距離依材質分別以圖表呈現，如圖 3 所示。發現所有材質皆隨著配重比值增加而延長落下距離。塑膠材質旋轉軸的在 15 : 1、24 : 1、34 : 1 的配重比，落下距離最小。

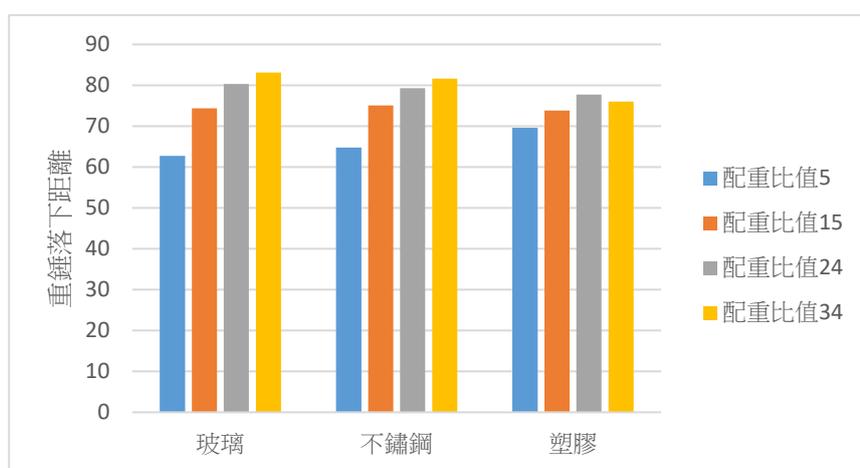


圖 3 不同材質旋轉軸之重錘落下情形

## 陸、討論

### 一、重錘的降停現象

#### (一) 重錘的降停時間

根據表 2 的連續照片，可以發現重錘在編號第 5 號照片後就不再下降，此時輕物位置距離施放點尚未繞過旋轉軸 1 圈。因此，可以推論重錘降停瞬間的受力情形理論，在開始施放輕物後，重錘的重力與由連接二者之間的繩子和旋轉軸接觸面的摩擦力以及輕物受到重錘拉動而繞行的繩子張力相互抵消【重錘重力=繩子與旋轉軸摩擦力+輕物繞行到另一端對繩子的張力】，之後隨著接繩子與旋轉軸接觸面積增加、輕物繞行位置的改變，螺旋運動半徑的變化，使重錘至最後停止。

因此，會影響重錘降停的變因應有繩子的材質、旋轉軸材質、重錘與輕物重量比、旋轉軸的外徑與棉線長度，皆會影響重錘落下的距離。

### 二、輕物的螺旋圓周運動

#### (一) 不同角度施放時的輕物軌跡

根據圖 1，不同角度施放時，最明顯的不同就是施放後，輕物受到重錘拉動的移動軌

跡，其中 45 度施放時，初期的螺線軌跡曲率（彎曲程度）較大。推測原因與整體的合力有關（合力如下圖 4 所示），因為輕物受到重力與繩子張力的合力最小，因此繞行的曲率較大。

另外，隨著重錘與輕物的重量比值增加，同一個角度施放後，輕物初期的曲率逐漸變小，推測應是重錘重量增加，使得繩子方向的作用力變大，使得同樣施放角度的合力變大，而使曲率變小。

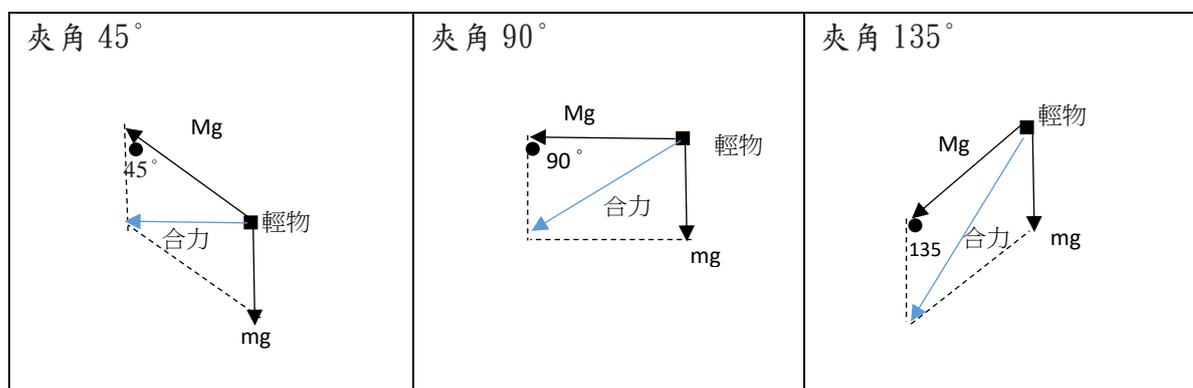


圖 4 不同角度施放輕物時所受到的合力示意圖

## (二) 重錘降停後之輕物螺線運動軌跡：

依照圖 1 所示，輕物會繞行旋轉軸進行圓周運動，並隨著棉線捲繞在旋轉軸上，使得圓周運動的半徑愈來愈小，形成螺線軌跡。如圖 5 所示。

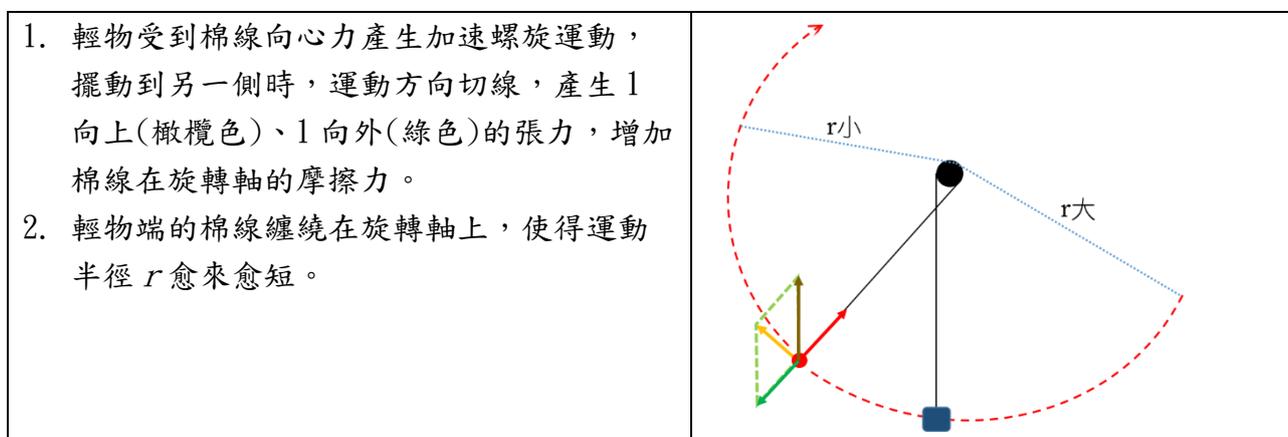


圖 5 輕物螺旋運動軌跡示意圖

由於輕物旋轉的動作過於快速，我們很難透過錄影標示座標的方式來定位，進而建立螺線方程式，但根據上一段分析結果，當重錘已經停止下降，連接輕物的棉繩每轉動 1 圈，就少掉一段固定的旋轉半徑，可以視為螺線運動。其方程式可以寫成  $r = a + b\theta$ ，可以將  $r$  的起始值視為棉線總長度－重錘落下距離，隨著捲繞旋轉軸而遞減，配合精準的座標標示，可以求出  $a$ 、 $b$  值，建立本研究的螺線方程式，例如：

1. 假設重錘落下約 20 公分後停止，輕物便開始以 30 公分長的半徑呈現螺線軌跡，則起始點在 (30,0) 位置
2. 開始轉動後，半徑  $r$  隨著繞行的角度  $\theta$  而縮小，則  
 $x$  座標為  $(30-\theta/2\pi*4.4) * \cos(\theta)$   
 $y$  座標為  $(30-\theta/2\pi*4.4) * -\sin(\theta)$   
 依  $(x,y)$  方程式將各個參數代入，畫出 6 圈的螺線圖(如右圖 6)。

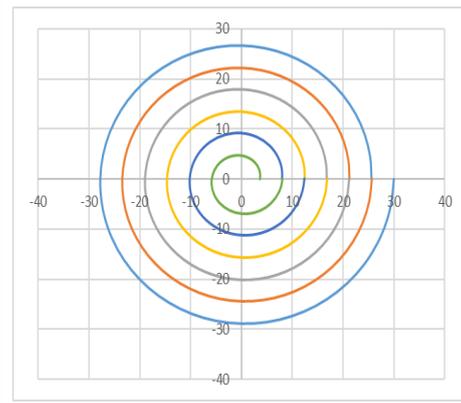


圖 6 重錘降停後之輕物螺線軌跡示意圖

### 三、重錘與輕物的運動理論

#### (一) 重錘降停分析：

1. 因為重量較重，受到重力吸引向下落下，連帶拉動繩子另一端的輕物往繩子張力與輕物重力的合力方向移動，輕物因為繩子的張力給予單擺運動的向心力而進行圓周運動，重錘因為繩子與旋轉軸的摩擦力以及輕物進行圓周運動帶動繩子的張力而停止落下。
2. 本研究將輕物置於與重錘線夾角  $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $135^\circ$  等位置施放，在不同角度施放，輕物受到的合力不同。合力來自輕物本身受到的向下重力  $mg$  以及繩子受到重錘的張力  $Mg$ 。分析施放點夾角  $135^\circ$ ，會使在輕物端的重力與繩子張力的夾角卻形成  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ，而施放點夾角  $45^\circ$ ，則是輕物端的重力與繩子張力的夾角卻形成  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ 。兩力的合力關係為夾角越小，則合力就越大，所以施放點夾角  $135^\circ$  反而是相對角度較小的，故合力最大，重錘運動到停止的時間最短； $45^\circ$  的合力最小，重錘運動的時間最長。因此，合力的大小會影響到重錘的落下時間。
3. 值得的觀察的是，雖然  $135^\circ$  有較大的合力，但重錘落下的距離卻不是最短，反而夾角  $90^\circ$  時，重錘落下的距離最短；推論可能是  $135^\circ$  的合力最大，但棉線與吸管周長接觸的面積反而相對較小，所以摩擦力較小，重錘掉落較快，影響了重錘的落下距離，而夾角  $90^\circ$  時，合力不是最大，但棉線與吸管周長接觸的面積相對較大，增加了摩擦力，比合力最大的  $135^\circ$  時更快停止。顯示下降過程受到接觸摩擦力與重力間的合力所影響，代表讓重錘停止的作用力，不僅僅是繩子與旋轉軸接觸面的摩擦力，也與合力有所關連。

#### (二) 輕物運動分析：

1. 根據圓周運動原理，物體有速度之外，還必需受到向心力的作用。本實驗中的棉繩受到重錘的作用，對棉繩的一端形成張力，而這張力提供了輕物掉落時的向心力，使得輕物同時縮短往下擺動的擺長且同時受到向心力。當擺動到另一端時，擺長變短，轉動慣量變小，擺動的角速度會變快，而快速轉動會使繩子張力更大，增加摩擦力。
2. 輕物因為受到向心力的作用，開始繞旋轉軸進行圓周運動，由於旋轉軸的直徑會使圓周運動的半徑縮短，輕物的圓周運動會逐漸縮小半徑呈現螺旋軌跡，直到棉繩繞完為止。

#### (三) 重錘與輕物運動公式推導：以圖 5 為例，假設以下參數：

M：重錘質量，m：輕物質量，g：重力加速度，T：繩子張力，f：繩子與旋轉軸的摩擦力， $\theta$ ：釋放點之繩子與重物繩子(鉛直方向)間的角度， $a_N$ ：輕物指向繩子方向的加速度。則向心(繩子)方向的受力情形：

$$Mg - T - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = (M + m)a_N \quad (1)$$

$$\text{由(1)} \Rightarrow Mg - (M + m)a_N - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = T \quad (2)$$

因為輕物施放後呈現旋轉運動，假設  $r$ ：輕物螺旋運動的半徑； $I$ ：輕物的轉動慣量； $\alpha$ ：輕物的角加速度。而轉動之力矩

$$\tau = Tr = I\alpha = mr^2\alpha \Rightarrow T = mra \quad (3)$$

$$\text{由(2)(3)} \Rightarrow Mg - (M + m)a_N - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = mra$$

而根據  $mg \cos(180^\circ - \theta) = -mg \cos \theta$

$$\Rightarrow \frac{Mg - (M + m)a_N - f - mg \cos \theta}{mr} = \alpha \quad (\text{角加速度}) \quad (4)$$

$$\text{另切線(垂直繩子)方向的受力情形：} mg \sin(180^\circ - \theta) = ma_T \Rightarrow g \sin \theta = a_T \quad (5)$$

$a_T$ ：輕物垂直繩子方向的加速度。

另外，查表得知， $\sin 45^\circ \doteq 0.707$ ， $\sin 90^\circ = 1$ ， $\sin 135^\circ \doteq 0.707$

$$\therefore \sin \theta : 90^\circ > 135^\circ = 45^\circ$$

$\cos 45^\circ \doteq 0.707$ ， $\sin 90^\circ = 0$ ， $\cos 45^\circ \doteq -0.707$

$$\therefore \cos \theta : 45^\circ > 90^\circ > 135^\circ$$

所以在公式(4)中，角加速度  $\alpha$  會因減去  $mg \cos \theta$ ，而使得角加速度  $\alpha$  變為  $135^\circ > 90^\circ > 45^\circ$ ，這會影響輕物在旋轉時的角速度，進而影響總個過程的落下時間值。通常角加速度  $\alpha$  大，則角速度大，最後落下時間值較小。另外，切線加速度  $a_T$  會影響重錘的落下距離，因為切線加速度  $a_T$  愈大，圓周運動的速率會愈大，但當輕物的圓周運動帶動繩子轉過去時，因繩子繞轉軸而增加了繩子與轉軸間的摩擦力，若摩擦力足夠時，則重錘就不再下降，從圖 1 軌跡圖的透明投影片中可看出這個停降的結果，所以切線加速度  $a_T$  越大，則重錘落下距離越短。

#### 四、本作品各變因綜整

(一) 施放角度：相同的配重比，不同施放角度，都有一致性的趨勢

1. 落下距離： $45^\circ > 135^\circ > 90^\circ$ ；吸管上的圈數： $90^\circ > 135^\circ > 45^\circ$ ；落下時間： $90^\circ > 45^\circ > 135^\circ$ 。

2. 由公式(5)得知， $\sin \theta : 90^\circ > 45^\circ = 135^\circ$ ，以  $90^\circ$  的切線加速度  $a_T$  最大，仔細觀察拍攝的實驗影片，當棉線開始繞吸管後，重物會有明顯停止下降的現象，所以當  $a_T$  越大，降停會較快，落下距離會較短；而在切線方向的加速度  $a_T$ ，在施放角度  $45^\circ = 135^\circ$ ，推估由於公式(4)的角加速度  $\alpha$  上有減掉  $mg \cos \theta$ ，所以  $135^\circ$  的角加速度  $\alpha$

會較大，也會造成停降較  $45^\circ$  快，落下距離較  $45^\circ$  短。

3. 旋轉軸上的圈數和重物落下的距離呈現相反的結果，反而是  $90^\circ > 135^\circ > 45^\circ$ ，我們推論如果落下距離短，會有較長的棉線可以繞吸管旋轉，所以反而可以繞較多圈；而且整體繞完所測得的落下時間，則與圈數的多寡一致，越多圈數則整體的落下時間越長，顯示整個停降機制都與  $a_T$  和  $\alpha$  的作用有關。
4. 當兩端棉線夾角  $90^\circ$  時，形成最大的摩擦力總和。主要因為輕物進行圓周運動，擺動到另一端時，因為合力使輕物速度增加，轉動慣量變大，對棉繩形成與向心力相反的張力，加上棉線與吸管周長接觸的面積相對較大，增加接觸的摩擦力。
5. 從表 2 的 tracker 分析重錘停降距離、速度變化與時間關係表中發現， $135^\circ$  的重錘是最快停止降落的，而且鉛直方向的速度有最大值，主要是角度  $135^\circ$  因重錘與輕物的重力合力最大(見圖 4)，所以產生了最大的速率，其速率是切線與向心方向的合成結果。而且當配重比增加時，重錘在鉛直方向的速度也增加了(見表 2)。但整體的落下時間卻不會因此而最短，主要是因為快速掉落，然後重錘降停，這時輕物的轉動靠著初始速率，然後靠著角加速度  $\alpha$  (見公式 4) 使輕物繞旋轉軸轉動到停止，所以後段的角加速度  $\alpha$  也會影響落下時間值的大小。

## (二) 重錘與輕物的配重比：

1. 配重愈重，合力的作用力愈大，重錘停止前移動的距離就愈長，所以同時輕物的旋轉圈數就會愈少。
2. 如果持續增加配重，反而輕物容易因為旋轉速度太快反彈，導致最終無法停止重錘，過重的重錘不利於降停的效果。
3. 在相同都是 10:1 的配重，而不同的配比組合，發現如果提高重錘的質量，會使得落下時間變短；從公式(4)裡，重物  $M$  越大會產生較大的重力  $Mg$  來拉動整個系統，但也會造成較大的反向力  $(M + m)a_N$ ，不過作用力的增減後，重物  $M$  的質量越大，產生了較大的角加速度  $\alpha$ ，所以落下時間變短了。

## (三) 旋轉軸的直徑：

1. 在相同的角度及相同的配重比下  
吸管外徑： $3.8\text{mm} > 5.5\text{mm} > 8.0\text{mm} > 10.8\text{mm}$ ；  
落下距離： $3.8\text{mm} > 5.5\text{mm} > 8.0\text{mm} > 10.8\text{mm}$ ；  
圈數： $3.8\text{mm} > 5.5\text{mm} > 8.0\text{mm} > 10.8\text{mm}$ ；  
落下時間： $3.8\text{mm} > 5.5\text{mm} > 8.0\text{mm} > 10.8\text{mm}$ ；  
全部的情況都產生了一致性的結果。吸管的外徑越小，落下的距離越長，推論主要是因為旋轉軸直徑較大者，棉線與吸管周長接觸的面積較多，所以摩擦力較大(摘自參考四)，所以重物不容易下降。然而配重比提高時，反而因為輕物旋轉速度太快而反彈，不易使重錘停住。
2. 旋轉圈數與落下時間也和落下距離呈現一致性，推估主要是因為每轉動一圈時，吸管直徑小的因棉線繞轉之圓周運動半徑  $r$  的變化較少，由公式(4)可看出，分母的變化率不大，使得分母仍處於較大的數值，所以角加速度  $\alpha$  的數值還是很小，所以整個過程需要較長的轉動時間，因此落下時間也就越長；而吸管直徑小所以旋轉圈數也就

需要越多圈才能繞完棉線。

#### (四) 棉線寬度粗細：

- 1.現象為落下距離：細棉線 > 粗棉線；吸管上的圈數：細棉線 > 粗棉線；落下時間：粗棉線 > 細棉線。
- 2.研究小組推估可能粗棉線因產生的接觸面較大，摩擦力較大，所以落下距離粗棉線較短；而從公式(4)看出，粗棉線摩擦力較大，會產生較小的角加速度 $\alpha$ ，所以轉動較慢，加上粗棉線也較重，會導致落下時間變長。值得一提的是，通常落下距離越短，則會剩下較多棉線可以纏繞，所以圈數會較多，但粗棉線圈數卻較少，推論應該是粗棉線的角加速度 $\alpha$ 太小，所以來不及讓重錘立即停降時，重錘又繼續往下掉落，才會造成剩下可以纏繞的棉線變少，因此圈數下降，細棉線及粗棉線兩者的圈數差異不大。
- 3.摩擦力確實影響了落下距離及落下時間，如果摩擦力較大，則落下距離較短，落下時間較長；但吸管上的圈數因受到角加速度 $\alpha$ 的大小以及重錘何時完全停降所剩餘的棉線長度有關，所以關係較為複雜。

#### (五) 旋轉軸材質：

1. 塑膠吸管材質的落下距離較玻璃吸管及不鏽鋼吸管材質短，推論塑膠吸管表面的摩擦係數較大，具有較大的摩擦力，導致落下距離較短。而且所有材質皆隨著配重比值的增加而增加了落下距離。
2. 旋轉軸材質所產生的摩擦力對於落下時間及吸管上的圈數之影響不太，看不出彼此間的規律性，推論可能因為塑膠、玻璃及不鏽鋼的摩擦係數差異並不大，所以摩擦力的影響主要還是會表現在落下距離上。

## 柒、結論

本研究探討了螺旋降停器的運動原理，分析結果發現重錘降停與輕物形成螺旋運動為其主要特徵。根據研究結果做出以下結論：

- 一、棉線兩端夾角不同，造成的停降落下距離就不同，其中以 $90^\circ$ 的落下距離最短，停降效果最明顯。整個停降機制都與切線加速度 $a_T$ 和角加速度 $\alpha$ 的作用有關。
- 二、重錘與輕物的配重比影響停降落下距離與作用時間，重錘愈重，落下距離越長，越不容易停止。重錘越重，使輕物螺旋運動的角加速度 $\alpha$ 越大；但如果重錘太重，反而輕物容易因為旋轉速度太快反彈，而使整個重錘掉落。
- 三、旋轉軸的直徑較大，使輕物螺旋運動半徑變化大，由公式(4)可看出，分母快速變小，所以角加速度 $\alpha$ 的數值變大，加上接觸面積變大，增加了接觸摩擦力，更容易使重錘停降。
- 四、棉線的寬度愈粗，產生的接觸面較大，摩擦力較大，較容易使重錘落下距離變短而停降。但摩擦力較大者，會產生較小的角加速度 $\alpha$ ，所以轉動較慢，加上粗棉線也較重，導致落下時間變長。但吸管上的圈數因受到角加速度 $\alpha$ 的大小以及重錘何時完全停降所剩餘的棉線長度有關，所以會形成各有利弊的複雜關係。
- 五、旋轉軸的材質愈粗糙，容易產生較大的摩擦力，使得重錘容易停降。

## 捌、參考文獻

1. Hewitt (2018)。觀念物理 2：轉動力學·萬有引力。台北市：天下文化。
2. 張慧貞 (2016, October 1). 螺旋甩球」認識「角動量」。Retrieved April 1, 2022, from <https://pb.ps-taiwan.org/modules/news/article.php?storyid=223>
3. 宋瓊珠 (2022)。跟著教授學數學！生活數學。台北市：大心文創。
4. 張瑋真、鄭郁錡等 (2019)。修正教科書的「摩」力觀點—摩擦力跟接觸面積真的有關係。新北市：第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。

## 【評語】 030115

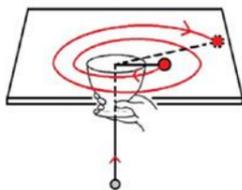
本研究探討透過平行重力方向的螺旋運動擺，做為另一端重物的下降停止器。想法相當有趣。不過在於影響停降的轉軸摩擦力部分，僅在結論處做討論，實驗部分較少。可以再增加這一部分的分析讓作品更有說服力。

# 作品海報

## 壹、研究動機

### 發想起源：

「螺旋甩球」，說明較輕的小球能夠透過旋轉所產生的轉動慣量，將連結在一起的重球逆勢向上移動。



### 延伸研究：

「將一大一小的重物以棉線連接，將其掛於軸上，使較重的物體透過重力拉動較輕的物體，觀察輕物受到棉線張力而加速纏繞在軸上，使得較重的物體在短時間內停降的現象。」

### 影響結果之相關因素：

1. 重錘對棉線的張力與輕物重力兩者之合力
2. 棉線在旋轉軸上的摩擦力
3. 輕物圓周運動產生的轉動慣量形成的棉線張力

## 伍、研究結果

### 一、輕物在不同角度施放時的運動情形

表 1 不同角度施放之平均運動變化 (棉線長 50 公分)

重錘：輕物	施放角度	停降距離 (公分)	歷經影格數/歷經時間 (秒)	總運動時間 (秒)
5 : 1	45	17.0	182 / 0.758	0.98
	90	12.5	126 / 0.525	1.62
	135	15.4	99 / 0.413	0.82
10 : 1	45	20.5	149 / 0.621	0.51
	90	17.5	121 / 0.504	0.64
	135	18.2	92 / 0.383	0.60
15 : 1	45	無法降停 (輕物旋轉速度過快，棉線繞圈後反彈再繞圈)	147 / 0.612	-
	90	21.1	130 / 0.542	0.49
	135	20.1	114 / 0.475	0.37

### 歸納：

1. 以配重 5 : 1 及 10 : 1 時，以 90 度施放，重錘下降距離最短。當棉線延長至 100 公分時，在各種配重比，皆以 90 度之停降距離最短。
2. 以 tracker 追蹤影格數，以 135 度停降時間最短。
3. 不同的角度施放，輕物繞行總時間，其中 135 度花費時間最短，45 度花費時間最長 (表 1)。
4. 重錘停止下降的瞬間，輕物距離施放點繞軸心約旋轉 135 度 (圖 3)。
5. 輕物的運動軌跡可分為以下：
  - a) 當重錘下降時，輕物在不同角度施放時，曲率有明顯差異，以 45 度角之曲率最大。
  - b) 當重錘停降後，輕物繞行旋轉軸呈螺旋軌跡，其中以 90 度角之繞行軌跡最多圈。

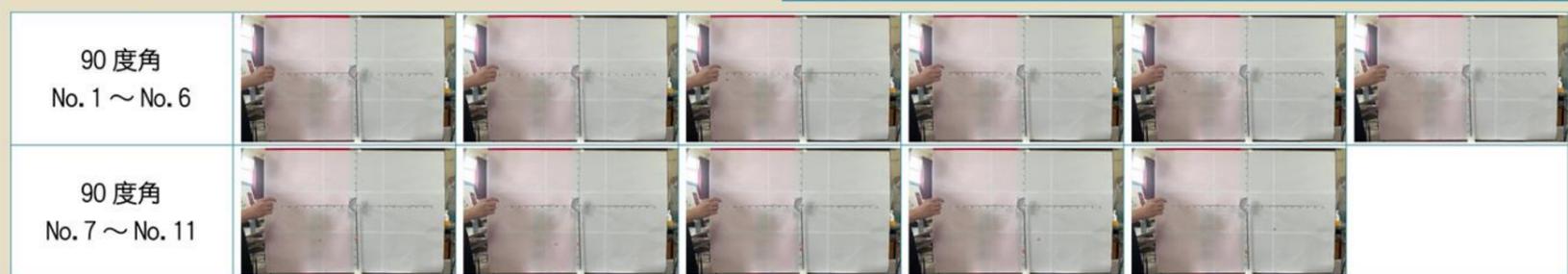


圖 1 輕物以 90 度角施放時，重錘停降位置圖

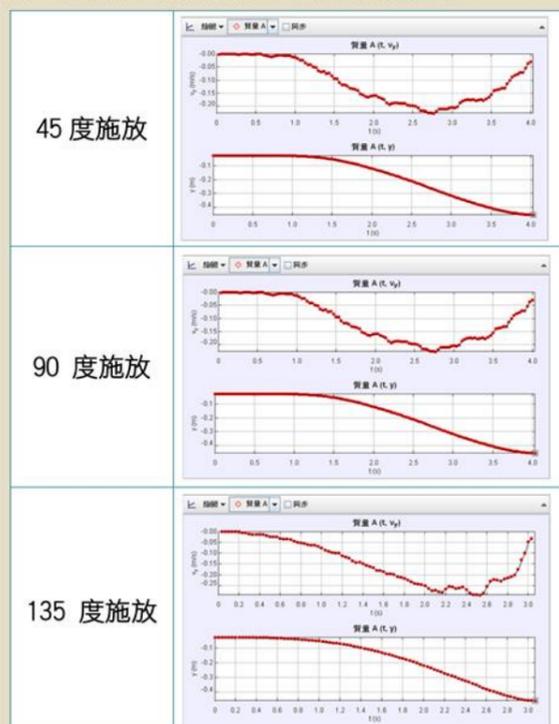


圖 2 重錘停降距離、速度變化與時間關係分析表 (棉線長 50 公分配重比 10 : 1)

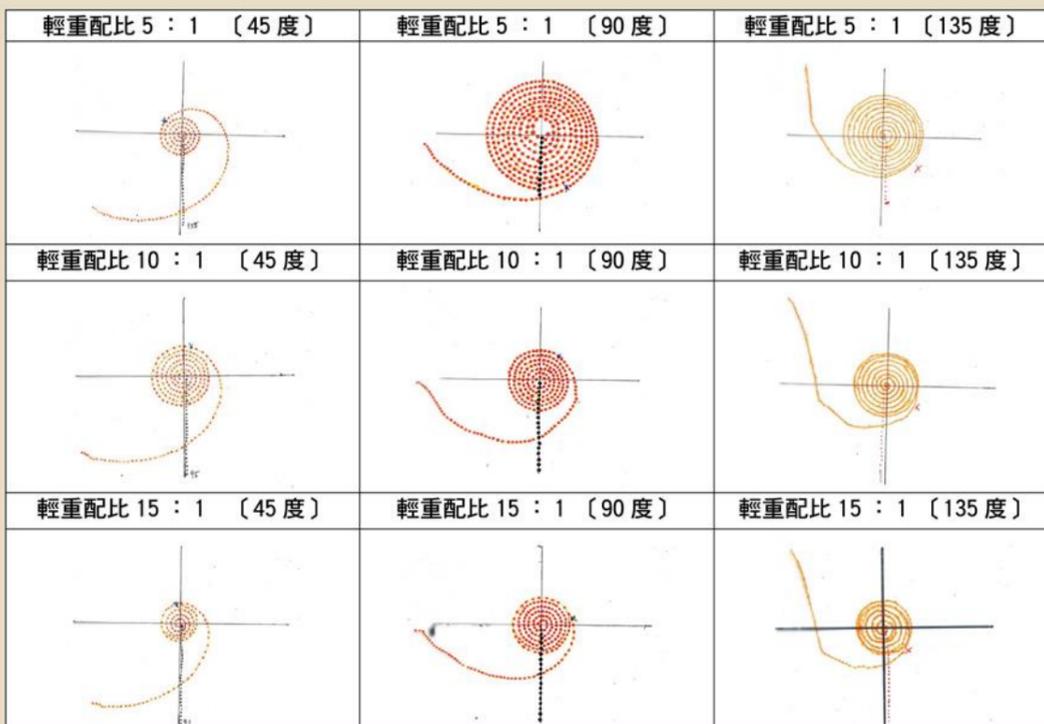


圖 3 輕物螺旋運動軌跡描點圖 (×表示重錘停止下降的時間點)

## 貳、研究目的

- 一、探討輕物在不同的施放角度落下時，重錘的停降效果與輕物的螺旋運動。
- 二、探討重錘與輕物在不同的重量配比時，停降效果與螺旋運動。
- 三、探討不同外徑旋轉軸對於重錘輕物的運動影響。
- 四、探討不同粗細棉線對於重錘與輕物的運動影響。
- 五、探討不同材質轉軸對於重錘與輕物的運動影響。

## 參、研究器材 (現場展示)

## 肆、研究方法

### 操縱變因

1. 不同角度施放
2. 重錘與輕物在不同重量配比
3. 不同外徑的旋轉軸
4. 不同粗細棉線
5. 不同材質的旋轉軸

### 應變變因

1. 重錘從起點到停止落下距離。
2. 輕物從施放到繞行結束的時間。

## 二、重錘與輕物在不同重量比時的運動情形

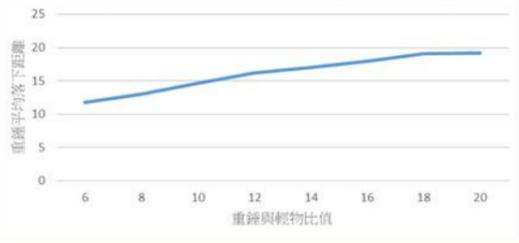


圖 4 不同重錘與輕物比值之重錘停降情形

表 2 不同重錘輕物配比較於運動情形的影響 (棉線 100 公分)

配重比	施放角度	落下距離 (公分)	總花費時間 (秒)
5 : 1	90	69.7	3.612
15 : 1	90	73.9	2.490
24 : 1	90	77.8	2.138
34 : 1	90	76.1	1.465

歸納：

1. 當重錘愈重時，落下的距離就愈長、旋轉軸圈數愈少、整體花費時間愈短。
2. 當棉線 50 公分時，重錘與輕物重量配比 20 : 1 以上，輕物繞在旋轉軸上的摩擦力，無法使重錘停降。
3. 當棉線 100 公分時，重錘與輕物重量配比 5 : 1，形成的動能無法讓輕物端的棉線全部纏繞在旋轉軸上。
4. 重量配比 24 : 1、34 : 1 的重量比太大，作用的時間極短且速度快，輕物容易繞完後又反彈，不易觀察纏繞圈數。

## 三、重錘與輕物相同配重比、但不同重量組合的運動差異

表 3 重錘輕物在相同配重比但不同內容時的運動情形

配重組合	施放角度	落下距離 (公分)	總花費時間 (秒)
10 克 : 1 克	90	67.4	5.326
15 克 : 1.5 克	90	67.3	4.983
20 克 : 2 克	90	73.4	3.408

歸納：

重錘所停降的距離有所不同，重錘較重者，落下的距離較長，花費時間較短，代表輕物旋轉的速度較快速。推測在重錘與輕物的組合，配重比例的影響仍以重錘為主。

## 四、旋轉軸的外徑對於重錘與輕物的運動狀態影響

表 4 不同外徑旋轉軸之平均運動狀態 (棉線長 100 公分)

吸管外徑 (mm)	配重比	施放角度	落下距離 (cm)	總花費時間 (秒)	備註
10.8	5:1	90	58.54	3.530	輕物端棉線平均剩餘長度 24.3 公分
8.0	5:1	90	57.80	3.310	輕物端棉線平均剩餘長度 29.4 公分
5.5	5:1	90	69.65	3.610	輕物端棉線平均剩餘長度 22.9 公分
3.8	5:1	90	68.60	3.910	輕物端棉線平均剩餘長度 24.2 公分
10.8	15:1	90	71.91	1.520	輕物端棉線平均剩餘長度 5.56 公分
8.0	15:1	90	72.85	2.020	輕物端棉線平均剩餘長度 3.95 公分
5.5	15:1	90	73.86	2.490	輕物端棉線平均剩餘長度 3.61 公分
3.8	15:1	90	75.00	4.440	無
10.8	24:1	重錘無法成功停住 (纏繞完又彈開)			
8.0	24:1	90	75.60	1.520	輕物端反彈後垂掛長度 6.4 公分
5.5	24:1	90	77.75	2.140	輕物端反彈後垂掛長度 4.42 公分
3.8	24:1	90	82.20	2.930	無

歸納：

1. 重錘過重時無法使重錘停降。推測原因如下：
  - a) 重錘較重，運動時間很短，輕物無法纏繞足夠圈數形成夠大的摩擦力來停住重錘。
  - b) 重錘過重，使得輕物進行螺旋運動的向心力過大，導致旋轉速度太快，使得輕物撞擊旋轉軸後反彈鬆開。
2. 做為旋轉軸的吸管外徑愈大，重錘下降到停止的距離就愈短，整體運動時間愈短。
3. 旋轉軸外徑愈大，重錘太重者無法成功停降，推測應該在輕物纏繞旋轉軸時，因棉線繞行疊加的摩擦力不足所致。

## 五、探討不同粗細棉線對於重錘與輕物的運動影響

表 5 不同粗細棉線對平均運動影響

種類	配重比	施放角度	落下距離	總花費時間 (秒)
粗棉線	10 : 1	45	19.3	0.790
細棉線	10 : 1	45	20.5	0.510
粗棉線	10 : 1	90	17.0	0.860
細棉線	10 : 1	90	17.5	0.640
粗棉線	10 : 1	135	17.2	0.900
細棉線	10 : 1	135	18.2	0.600

歸納：

1. 粗棉線較細棉線落下的距離短，運動總時間則較長。推測較粗的棉線產生摩擦力較大，較少的圈數交疊下即可產生停降效果的摩擦力。
2. 粗棉線因為重量較重，繞行的速度較慢，造成整體運動的時間增加。

## 六、探討不同材質旋轉軸對於重錘與輕物的運動影響

表 6 不同材質旋轉軸對平均運動影響

旋轉軸材質	配重比	施放角度	落下距離	花費時間 (秒)	輕物端棉線平均剩餘長度
玻璃	5 : 1	90	62.8	4.071	31.3cm
不鏽鋼	5 : 1	90	64.8	3.506	29.0cm
塑膠	5 : 1	90	69.7	3.612	22.9cm
玻璃	15 : 1	90	74.4	2.754	0
不鏽鋼	15 : 1	90	75.1	2.698	1.8m
塑膠	15 : 1	90	73.9	2.490	3.6cm
玻璃	24 : 1	90	80.3	2.122	0
不鏽鋼	24 : 1	90	79.3	1.702	7.6cm
塑膠	24 : 1	90	77.8	2.140	4.4cm
玻璃	34 : 1	90	83.1	1.664	0
不鏽鋼	34 : 1	90	81.6	1.600	6.3cm
塑膠	34 : 1	90	76.1	1.470	6.6cm

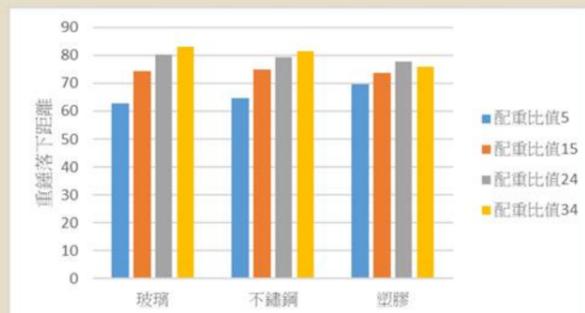


圖 5 不同材質旋轉軸之重錘落下情形

歸納：

1. 所有材質皆隨著配重比值增加而增大落下距離。
2. 塑膠材質旋轉軸在 15 : 1、24 : 1、34 : 1 的配重比，落下距離最小，代表棉線繞行旋轉軸的摩擦力最大。
3. 配重比 5 : 1 時，三種材質輕物皆沒有繞完。

## 陸、討論

### 一、重錘的停降現象

根據圖 1，重錘的停降分析如下

1. 【重錘重力=棉線與旋轉軸摩擦力+輕物螺線運動繞行對棉線的張力】，隨著棉線與旋轉軸接觸面積增加與輕物繞行位置的改變，使重錘停降。
2. 棉線粗細、旋轉軸材質、重錘與輕物重量比、旋轉軸的外徑與棉線長度，皆會影響重錘落下的距離。
3. 摩擦力愈大者，重錘下降到停的距離愈短；旋轉軸外徑較大者，棉線與吸管周長接觸的面積較多，所以摩擦力較大，重錘下降到停的距離愈短。

### 二、輕物的螺旋圓周運動

1. 輕物受到棉線向心力產生加速螺旋運動，擺動到另一側時，運動方向切線，產生 1 向上、1 向外的張力，增加棉線在旋轉軸的摩擦力。
2. 輕物端棉線纏繞在旋轉軸，使得運動半徑  $r$  愈來愈短。

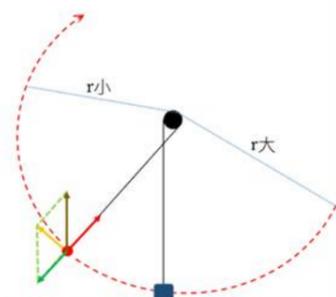


圖 6 輕物螺旋運動軌跡示意圖

3. 假設重錘落下約 20 公分後停止，輕物便開始以 30 公分長的半徑呈現螺線軌跡，則起始點在 (30, 0) 位置。

4. 開始轉動後，半徑  $r$  會隨著與  $x$  軸的角度  $\omega$  而縮小，則  $x$  座標為

$$(30 - \omega/2\pi * 4.4) * \cos(\omega)$$

$y$  座標為

$$(30 - \omega/2\pi * 4.4) * -\sin(\omega)$$

5. 依  $(x, y)$  方程式將各個參數代入，畫出 6 圈的螺線軌跡圖。

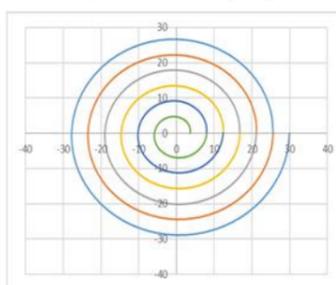


圖 7 重錘停降後的輕物螺線軌跡示意圖與說明

### 三、重錘與輕物的運動理論

重錘與輕物運動公式推導：

(以圖 6 為例，假設以下參數)

- $M$ ：重錘質量， $m$ ：輕物質量， $g$ ：重力加速度，  
 $T$ ：運動時棉線張力， $f$ ：棉線與旋轉軸的摩擦力，  
 $\theta$ ：釋放點之棉線與重物棉線(鉛直方向)間的角度，  
 $a_N$ ：輕物指向棉線方向的加速度。

當重錘下降拉動輕物時，整體受力與運動狀態為

$$Mg - T - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = (M + m)a_N \quad (1)$$

則向心(棉線)方向的受力情形：

$$\text{由 (1)} \Rightarrow Mg - (M + m)a_N - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = T \quad (2)$$

因為輕物施放後呈現旋轉運動，

假設

- $r$ ：輕物螺旋運動的半徑； $I$ ：輕物的轉動慣量；  
 $\alpha$ ：輕物的角加速度。

$$\text{而轉動之力矩 } \tau = Tr = I\alpha = mr^2\alpha \Rightarrow T = mr\alpha \quad (3)$$

$$\text{由 (2) (3)} \Rightarrow Mg - (M + m)a_N - f + mg \cos(180^\circ - \theta) = mr\alpha$$

而根據  $mg \cos(180^\circ - \theta) = -mg \cos \theta$

$$\Rightarrow \frac{Mg - (M + m)a_N - f - mg \cos \theta}{mr} = \alpha \quad (\text{角加速度}) \quad (4)$$

另切線(垂直棉線)方向受力情形：

$$mg \sin(180^\circ - \theta) = ma_T \Rightarrow g \sin \theta = a_T \quad (5)$$

$a_T$ ：輕物垂直棉線方向的加速度。

### (一) 重錘落下時間：

1. 公式(4)中，角加速度  $\alpha$  因減去  $mg \cos \theta$ ，使得角加速度  $\alpha$  受到施放角度影響，在 135 度時最大，45 度時最小，進而影響總個過程的落下時間值。
2. 當棉線較粗，旋轉軸外徑大... 等摩擦力較大的狀況，會產生較小的角加速度  $\alpha$ ，所以轉動較慢，加上粗棉線也較重，導致落下時間變長。
3. 45 度施放時，輕物軌跡曲率較大，推測是角加速度  $\alpha$  最小所致。

### (二) 重錘落下距離：

1. 切線加速度  $a_T$  會影響重錘的落下距離，因為切線加速度  $a_T$  愈大，圓周運動的速率會愈大，輕物圓周運動使棉線繞轉軸而增加了與轉軸間的摩擦力，使重錘落下距離越短。
2. 重錘越重，使輕物螺旋運動的角加速度  $\alpha$  越大；但如果重錘太重，反而輕物容易因為旋轉速度太快反彈，而使整個重錘掉落。

### (三) 施放角度：

由公式(5)得知， $\sin \theta$ ：90 度 > 45 度 = 135 度，以 90 度的切線加速度  $a_T$  最大，降停效果明顯，落下距離會較短；由於公式(4)的角加速度  $\alpha$  上有減掉  $mg \cos \theta$ ，所以 135 度的角加速度  $\alpha$  會較大，也會造成停降較 45 度快，落下距離較 45 度短。

### 四、施放角度與配重比的影響

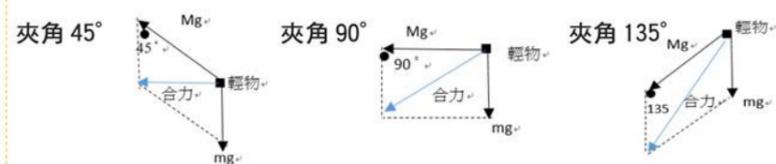


圖 8 不同角度施放輕物時所受到的合力示意圖

1. 合力的大小會影響到重錘的落下時間，夾角 135 度合力最大(如圖 8)，重錘運動到停止的時間最短。在相同都是 10 : 1 的配重，而不同的配比組合，發現如果提高重錘的質量，會使得落下時間變短。
2. 從公式(4)裡，重物  $M$  越大會產生較大的重力  $Mg$  來拉動整個系統，但也會造成較大的  $(M + m)a_N$ ，不過作用力的增減後，重物  $M$  的質量越大，產生了較大的角加速度  $\alpha$ ，所以落下時間變短了。

## 柒、結論

- 一. 施放角度不同，造成的停降落下距離就不同，其中以 90 度的落下距離最短，停降效果最明顯。整個停降機制都與切線加速度  $a_T$  和角加速度  $\alpha$  的作用有關。
- 二. 重錘與輕物的配重比影響停降落下距離與作用時間，重錘愈重，落下距離越長，越不容易停止。
- 三. 旋轉軸的外徑較大，使輕物螺旋運動半徑變化大，角加速度  $\alpha$  的數值變大，隨著接觸面積變大，增加接觸摩擦力，更容易使重錘停降。
- 四. 棉線的寬度愈粗，產生的接觸面較大，摩擦力較大，使重錘停降距離變短。
- 五. 旋轉軸的材質愈粗糙，愈容易產生較大的摩擦力，使得重錘容易停降。