

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 物理科

第三名

030114

支離破「碎」~探討兩互溶流體間形成碎形圖案
之機制

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者： 國二 謝凱丞 國二 謝侑家 國二 洪君安	指導老師： 韓顏吉 陳炳彰
---	-----------------------------

關鍵詞：fractal fingers、碎形、不穩定性

探討兩互溶流體間形成碎形圖案之機制

摘要

本研究主要想了解兩互溶流體間形成碎形圖案之機制，並找出實驗證據，經由將不同濃度的染色液滴滴到不同濃度的壓克力顏料溶液上，並使用 iPhone 8 手機以 240 fps 拍攝液滴擴展過程，得知酒精液滴因表面張力小，而向外流動，且因流體間互溶之緣故，造成流速的不連續性(虎皮紋的流痕)，而在外圍產生不均勻的堆積(島紋)，當堆積過多時，便會發生突破(顯微攝影拍到突破瞬間)，而長出手指，同時堆積會由突破口轉移到手指指尖，當堆積夠多時，指尖又會再分裂出新的碎形手指，如此往復下去，就形成碎形圖案。

此外，碎形手指的圖案，跟利希滕貝格圖極為相似，經使用方格覆蓋法，計算出碎形維度約為 1.82，與利希滕貝格圖的理論值 1.71 接近，確實是碎形圖案的一種。

壹、研究動機

本組在 2023 IYPT 的比賽題目看到『The effect of fractal fingering can be observed if a droplet of an ink-alcohol mixture is deposited onto diluted acrylic paint. How are the geometry and dynamics of the fingers influenced by relevant parameters?』，大意是說；如果將一滴墨水-酒精混合物沉積在稀釋的丙烯酸顏料上，可以觀察到碎形手指的效果。手指的幾何形狀和動態是如何被相關參數影響的？

關於此一問題，本組感到非常有趣，便上網找了一些關於「碎形」的資料，感到非常的神奇，在我們的生活周遭有那麼多關於「碎形」的例子，因此本組想利用此科展的機會，嘗試去重現碎形手指的效果，並了解產生此圖案的背後機制以及影響此行為的相關因素。


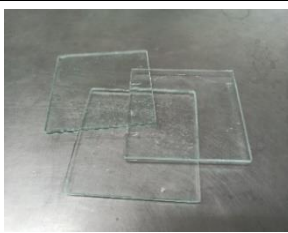






貳、研究目的

- 一、初步測試酒精液滴(95%)滴在壓克力顏料表面的擴展行為。
- 二、探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴展行為。
- 三、探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。
- 四、探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響。
- 五、探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響。
- 六、探討碎形手指形成的過程。
- 七、探討印度墨水、矽油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。
- 八、探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。
- 九、碎形手指技法應用。

參、研究設備及器材

一、研究器材

			
壓克力顏料(白色)	酒精(95度)	壓克力助流劑	壓克力潑灑劑
			
矽油	異丙醇	印度墨水	吳竹牌墨汁

			
食用色素	玻璃基板	滴管與燒杯	篩子
			
培養皿	玉米糖膠	數位顯微攝影機	精密電子天平

二、實驗裝置

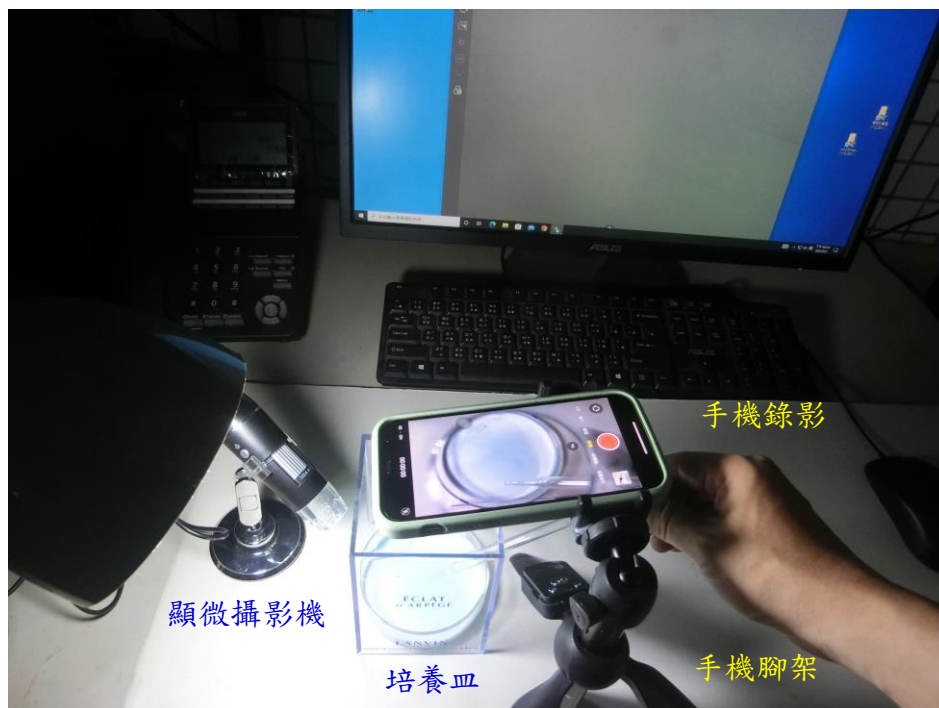


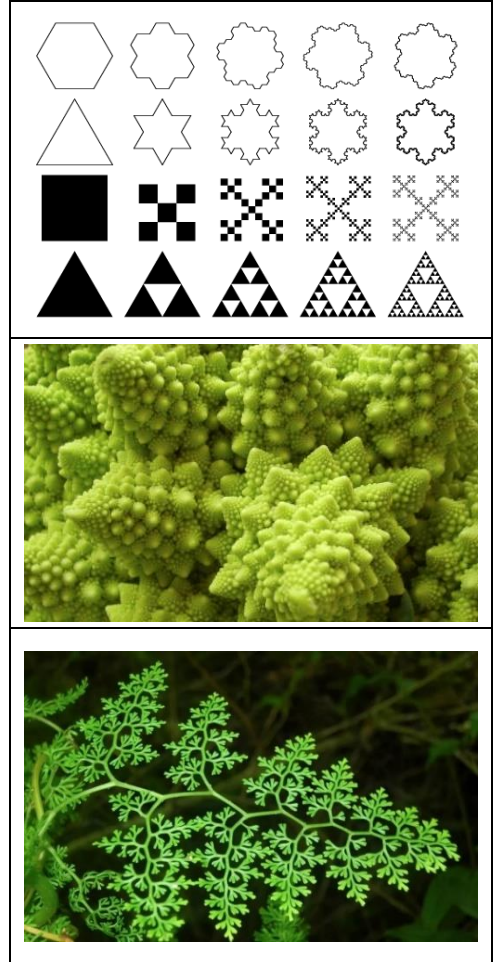
圖 1 實驗裝置圖

肆、研究原理與方法

一、研究原理

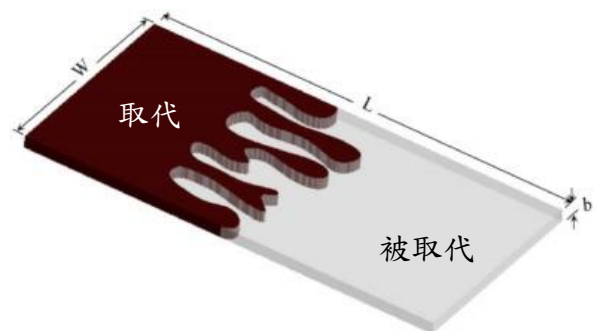
(一) 碎形(fractal)

碎形（英語：fractal，源自拉丁語：fractus，有「零碎」、「破裂」之意），又稱分形、殘形，通常被定義為「一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都（至少近似地）是整體縮小後的形狀」，即具有**自相似**（self-similarity）的性質。也就是說，這類形狀在不同的放大倍率下看起來一樣。因此可以簡單地理解為：一個**自相似**（self-similarity）的性質碎形物件就是一個粗糙的或零碎的幾何形狀，它可以被分成若干部分，且每一部分都（至少近似地）是整體形狀的一個縮小尺寸的“複製品”。碎形是**非線性動力**過程的結果，大自然的外貌及結構皆是經由非線性動力過程而產生的結果，也就是說，在非線性動力現象中才能發現碎形的蹤跡。比如說，在水的流動或是在晶體成長的現象中，可能發現碎形。



(二) Hele-shaw flow

Hele-Shaw flow 是一種流體流動，發生在兩個緊密間隔的平行板或兩個玻璃板之間的狹窄間隙或通道中，兩塊玻璃板被一層薄薄的透明流體（例如空氣或水）隔開。流動的特點是沒有任何垂直於間隙或通道的流動，並且流體的速度與間隙中心線的距離成線性變化。



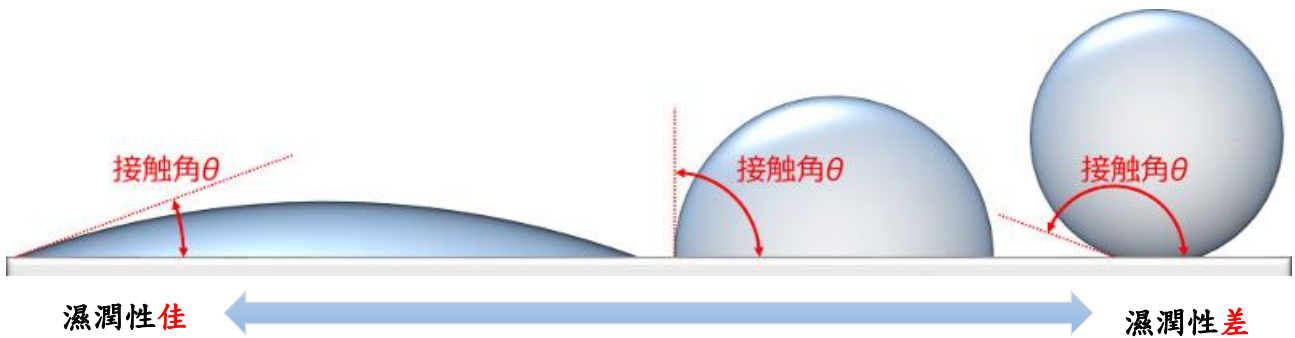
Saffman-Taylor instability

Hele-shaw cell 是由兩塊間隔很近、平行的玻璃片組成，其中含有高黏度流體，而在通道的一端注入粘性較低的流體，則兩液體的界面處就會發生 Saffman-Taylor instability 的現象。

(三) 接觸角

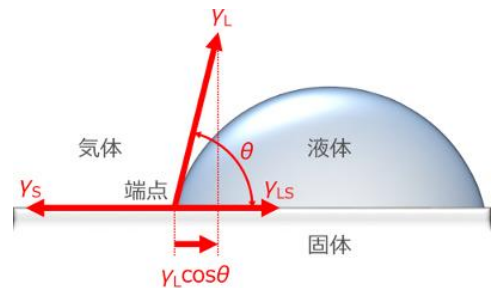
接觸角 (contact angle) 是意指在液體/氣體界面接觸固體表面而形成的夾角。接觸角是由三個不同界面相互作用的一個系統。

當液滴滴在固體表面時，會將其弄濕，液體與物體表面弄濕的難易程度（液體附著的難易程度）稱為“濕潤性”，也可以說液體在一種固體表面鋪展的能力或傾向性。



接觸角與表面張力的關係：楊氏方程

當從水平方向觀察固體表面的液滴形狀時，端點處的接觸角為右圖中的 θ ，假設液滴輪廓曲線與固體表面的交點為“端點”。



此時，固體表面張力（氣/固界面張力） γ_S 、液/固界面

張力 γ_{LS} 、液體表面張力（氣/液界面張力） γ_L 作用於端點。當潤濕狀態穩定時，終點既不向左也不向右移動，而這三個力處於平衡狀態。

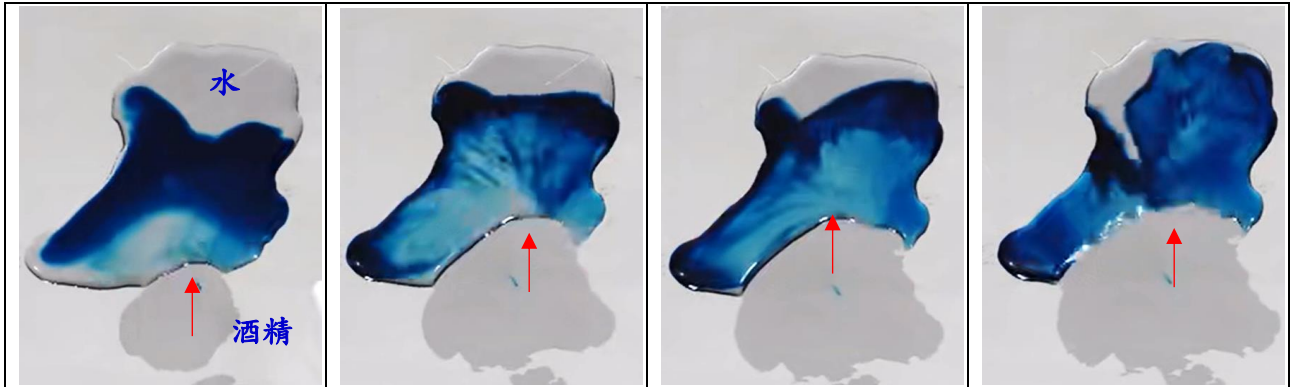
下面的楊氏公式顯示了這三種力的平衡

$$\gamma_S = \gamma_L \cos \theta + \gamma_{LS} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{\gamma_S - \gamma_{LS}}{\gamma_L}$$

因此，潤濕性，即接觸角的大小，是由液體和固體的表面性質決定的。因此提高濕潤性的方法有二：(1) 降低液體表面張力 γ_L ，(2) 增大體表面張力 γ_S 。在某些情況下，在液體中加入表面活性劑以改善濕潤性，利用表面活性劑的作用降低液體的表面張力所致。

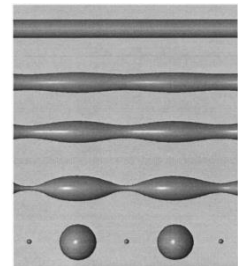
(四) 馬拉高尼效應(Marangoni effect)

馬拉高尼效應是指由表面張力梯度引起的流體流動。當具有不同表面張力的兩種流體接觸時，由於具有高表面張力的液體比具有低表面張力的液體對周圍液體的拉力更強，因此表面張力梯度的存在自然會導致液體從低表面張力區域流走。馬拉高尼效應可以發生在液體表面或兩種不相容流體的界面上。



(五) 普拉托-瑞利不穩定性(Plateau-Rayleigh instability)

Plateau-Rayleigh 不穩定性，是一種發生在薄液柱或射流中的流體不穩定性。當液柱或射流由於表面張力和重力之間的競爭而分裂成液滴時，就會發生不穩定性。當液柱或射流又長又細時，表面張力占主導地位並將液體拉成使其表面積最小的形狀，通常為圓柱形。然而，如果液柱或射流受到擾動或輕微彎曲，這種圓柱形狀會變得不穩定，並由於作用在液體上的重力而分裂成更小的液滴。



這種不穩定性是許多自然和技術過程中液滴形成的原因，例如雨水、海浪、噴墨印刷和噴漆。Plateau-Rayleigh 不穩定性是流體力學中的一個重要現象，在物理、化學和工程等各個領域都得到了廣泛的研究。

(六) 利希滕貝格圖(Lichtenberg figure)

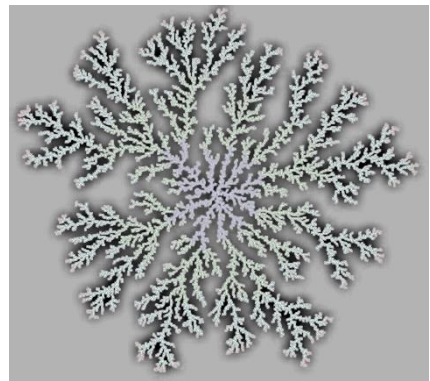
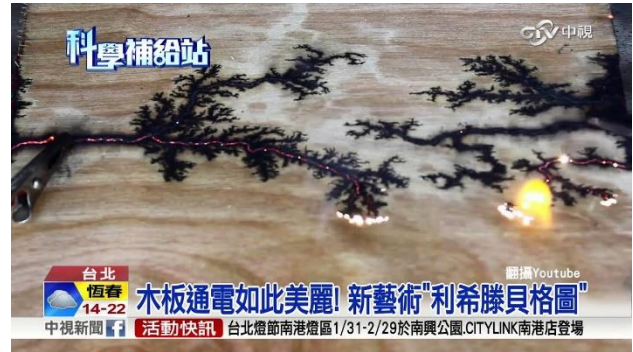
利希滕貝格圖，是有時出現在絕緣材料表面或內部的分支放電情形，且具有碎形特性的自然現象。

在利希滕貝格圖觀察到的分支能表現出自相似模式碎形特性。它們的出現和生長似乎與稱為擴散限制聚集(DLA)的過程有關。

Niemeyer、Pietronero 和 Weismann 於 1984 年開發了一種將電場與 DLA 相結合的有用宏觀模型，稱為電介質擊穿模型(DBM)。儘管空氣和壓克力塑料的電擊穿機制有很大不同，但事實證明和分支放電是相關的。自然閃電所採取的分支形式也具有碎形特徵。

擴散限制聚集 (DLA)是這樣一個過程，即由於布朗運動而進行隨機游動的粒子聚集在一起以形成此類粒子的聚集體。該理論由 TA Witten Jr.和 LM Sander 於 1981 年提出，適用於擴散是系統中主要傳輸方式的任何系統中的聚集。DLA 可以在許多系統中觀察到，例如電沉積、Hele-Shaw Low、礦床和電介質擊穿。

在 DLA 過程中形成的聚集體被稱為布朗樹。這些聚集體是碎形的一個例子。在 2D 中，對於不受晶格限制的自由粒子，這些碎形表現出大約 1.71 的維數。



二、研究方法

實驗一：測試酒精、水及壓克力顏料三者間的物理性質。

(一) 壓克力顏料溶解度特性測試

- 1、將 1g 的壓克力顏料擠入燒杯中，並分別加入 25ml 的酒精和水。
- 2、加入後立刻拍照記錄，接著再靜置 24h 後再拍照一次，觀察其溶解的情形。

(二) 液滴大小測試

- 1、將小燒杯至於精密天平上，並歸零。
- 2、使用滴管，一滴一滴的將水滴入燒杯中，並同時讀取天平讀數，紀錄之。
- 3、總共滴 100 滴，前 10 滴數據捨棄不用。

實驗二：初步測試酒精液滴滴在壓克力顏料表面的擴展行為。

將染色後的酒精液滴(95%)滴在壓克力顏料表面

- 1、先將白色壓克力顏料均勻塗抹在玻璃基板上。
- 2、將數滴藍色食用色素滴入酒精(95%)中染色。
- 3、用滴管將染色的酒精液滴滴到壓克力顏料表面，並拍攝其擴展行為。

※ 上述所用之壓克力顏料，皆以購買時的狀態使用，並未經過稀釋之處理。

實驗三：探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴張行為。

- 1、本組分別配置濃度為 85.5%、76%、66.5%、57%、38%、19%酒精溶液。
- 2、用滴管將染色的酒精液滴滴到濕潤壓克力顏料表面，並拍攝其擴展行為。
- 3、食用色素濃度固定為 1 滴/ml。

實驗四：初步測試要如何形成碎形手指的圖案？

- 1、先將白色壓克力顏料均勻塗抹在玻璃基板上。
- 2、用滴管將染色的酒精液滴(95%)連續滴到濕潤的壓克力顏料表面，觀察其邊界行為。

實驗五：探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。

- 1、調配五種濃度不同的壓克力顏料，用電子秤秤取 10g 的壓克力顏料，分別用量筒加水
10、15、20、25、30、40ml
- 2、用滴管將染色的酒精液滴(95%)分別滴到不同濃度壓克力顏料上，觀察其邊界行為。

實驗六：探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響。

- 1、固定壓克力顏料濃度，秤取 10g 壓克力顏料並加水 20ml。
- 2、配置不同濃度的酒精液滴，分別為 85.5%、76%、57%、52.3%、47.5%、38%。
- 3、將不同濃度的酒精液滴滴在壓克力顏料水溶液上，並以手機拍攝其擴散過程。

實驗七：探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響。

- 1、固定壓克力顏料濃度，秤取 10g 壓克力顏料並加水 20ml。
- 2、使用三種液滴，A：酒精 4ml+1ml 藍色食用色素、B：酒精 4ml+1ml 吳竹墨汁、C：異丙醇 4ml+1ml 紅色食用色素，滴在稀釋的壓克力顏料(10g 顏料+20ml 水)。
- 3、將不同成分的液滴滴在壓克力顏料水溶液上，並以手機拍攝其擴散過程。

實驗八：利用顯微攝影技術觀察碎形手指形成的過程。

- 1、配置酒精液滴，濃度：酒精(95%)4ml 加吳竹墨汁至 5ml。
- 2、配置壓克力顏料濃度：10g 壓克力顏料+水 20ml
- 3、架好數位顯微攝影機，並事先調好焦距。
- 4、算好數位顯微攝影機的視野，滴入酒精液滴，並同時開始攝影。
- 5、改變酒精液滴的染色劑，改成酒精(95%)4ml 加藍色食用色素至 5ml，並重新拍攝
- 6、將倍率調至最大，酒精(95%)5ml+5 滴墨水，並重新拍攝。

實驗九：探討印度墨水、矽油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。

- 1、固定壓克力顏料濃度，10g 壓克力顏料+水 20ml。
- 2、先滴入印度墨水，再滴入矽油，最後滴入酒精，並以手機拍攝其擴散過程。

實驗九：探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。

- 1、秤取 1.0g 的玉米糖膠粉，加水 100ml 泡成玉米糖膠原液。
- 2、配置 95%、76%、67.5%、57%、38%、19%的酒精水溶液。
- 3、將不同濃度的酒精液滴，滴在玉米糖膠溶液上，拍下其擴散後，所形成的圖形。
- 4、將染色劑改成吳竹墨水，其比例分別為純吳竹墨汁、墨汁 2+酒精 1、墨汁 1+酒精 1、墨汁 1+酒精 4
- 5、同樣將不同濃度的酒精液滴，滴在玉米糖膠溶液上，拍下其擴散後，所形成的圖形。

伍、研究結果與討論

實驗一：測試酒精、水及壓克力顏料三者間的物理性質。

一、壓克力顏料溶解度特性測試

將壓克力顏料分別加入酒精和水，觀察溶解的情形。

經過 24hr 靜置，我們發現酒精中的壓克力顏料基本上還保持著最初的形狀，而在水中的顏料基本上整個化開，並在底部重新沉澱。由此得知壓克力顏料是不易溶於酒精中的，但是可以溶於水中的。

本組推測，酒精滴在壓克力顏料表面時，所產生的溶解效果極差，因

此其向外擴展行為，主要是受到酒精自身表面張力與壓克力顏料的表面張力差異所致。

二、液滴大小測試

先將小燒杯置於精密天平上歸零，在逐漸滴入水滴，紀錄平讀數的變化，結果如下

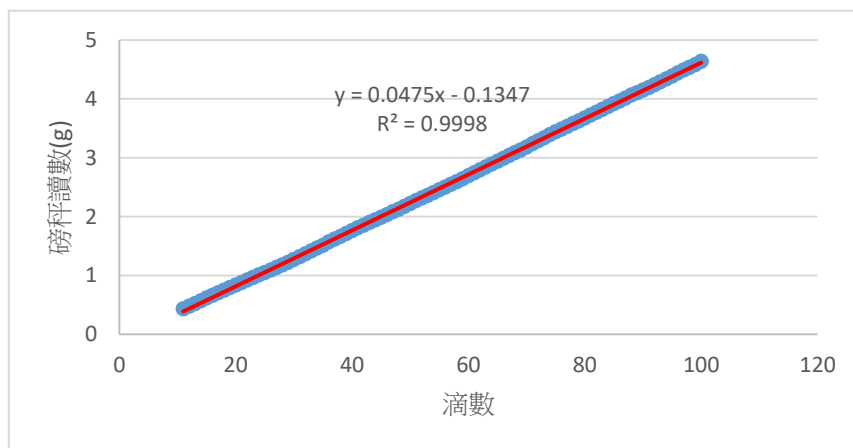


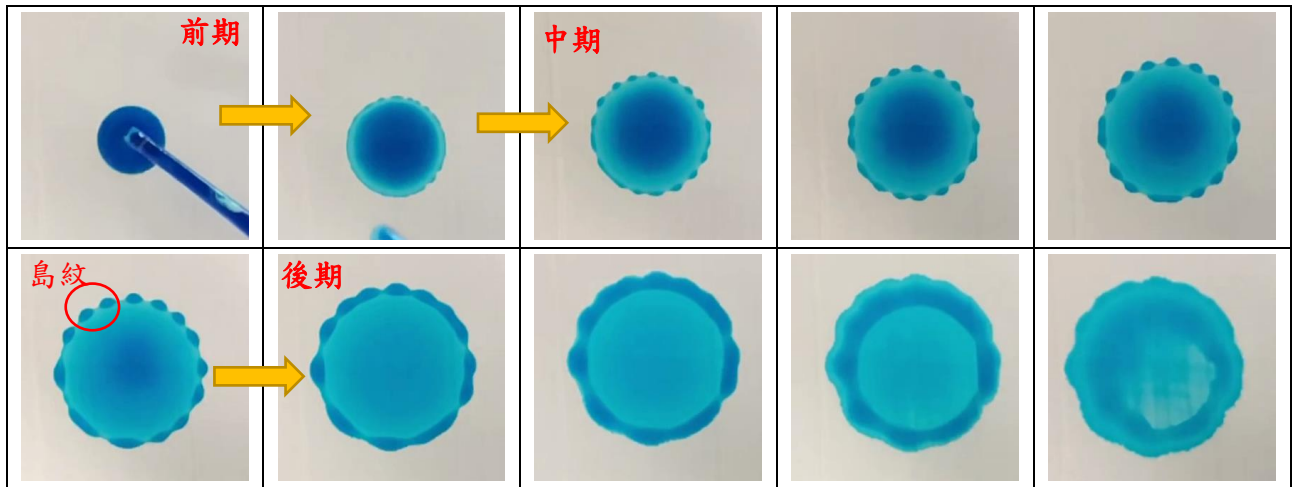
圖 2 液滴滴數與其重量之關係圖

根據計算，滴液平均重量為 0.0472g，標準差為 0.00332g，約為 7%，若是以液滴大小而言，液滴半徑誤差約為 2.3%，而經計算每滴液滴平均半徑約為 0.224±0.005 cm

實驗二：初步測試酒精液滴滴在壓克力顏料表面的擴展行為。

一、將染色後的酒精(95%)滴在壓克力顏料表面(未稀釋)

利用攝影的方式，記錄其動態變化。



說明：

- 1、當染色的酒精滴上壓克力顏料表面時，液滴的位能轉變為向外流動的動能，因此**前期**的擴展行為主要是受到液滴落下高度影響，而本組將液滴的落下高度控制在 2cm 左右，除了可以降低慣性力的影響外，也能避免液滴飛濺的行為發生。而在流體力學中，常用韋伯數 We （Weber number）來描述液滴撞擊慣性力與表面張力的比值，韋伯數愈小代表表面張力愈重要。

$$We = \frac{\rho DV^2}{\sigma}$$

其中 ρ 為液滴密度， D 為液滴直徑， V 為液滴撞擊速度， σ 為液體的表面張力。

- 2、而到了**中期**，液滴主要受到壓克力顏料的黏滯力及酒精液滴和壓克力表面間的表面張力差影響，再展開階段邊緣會形成一顆一顆類似**島紋**的堆積，這是因為當液滴開展過大時，外圍受表面張力拉扯而形成的不連續情形，在物理學上稱之為 **Plateau-Rayleigh instability**，然後隨著外圍堆積，島紋逐漸變大而互相連接成一圓環。
- 3、而到了**後期**，液滴半徑不再增加，反而有逐漸內縮之情形，本組認為，隨著時間增加液滴逐漸向外堆積，造成外厚內薄的情形，且內層酒精與空氣接觸面積較大，蒸散速度較快，所以造成內外酒精濃度不平均，而產生所謂的**馬拉高尼效應**，內層酒精濃度低表面張力大，外層濃度高，表面張力小，則液滴會由張力小的地方像張力大的地方流動。

二、利用 tracker 程式分析液滴擴張行為

為了瞭解酒精液滴在壓克力顏料表面的動態擴張行為，本組利用 tracker 程式分析拍攝的影片。(圖上顯示時間需乘以 1/8 才是真實時間)

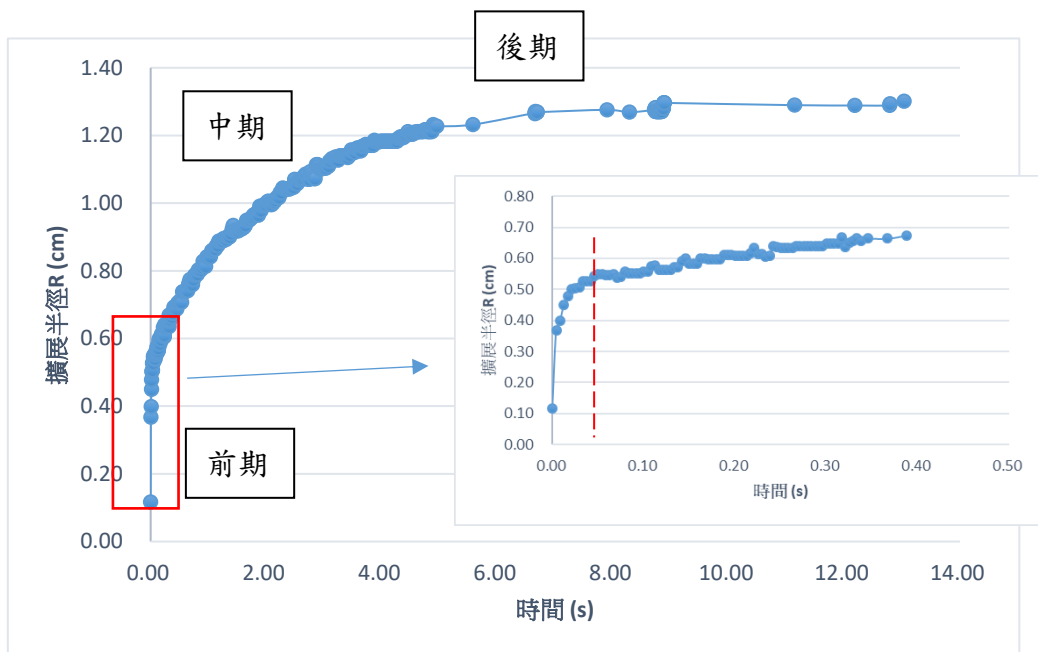
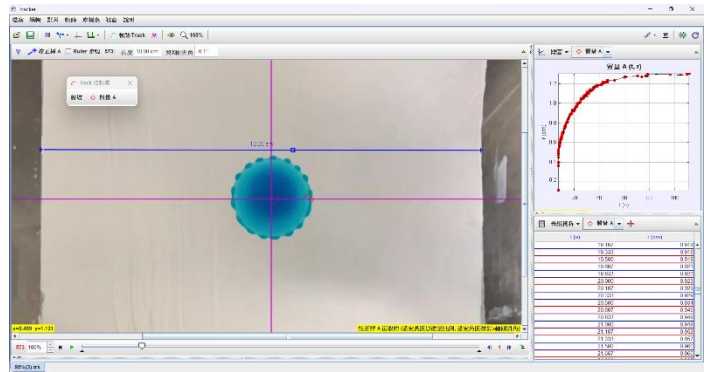


圖 3 95%酒精液滴滴在壓克力顏料表面，形成的擴展半徑 R 隨時間變化情形。

由圖 3 可以明顯看出大約在半徑約為 0.6cm 處左右，增長的趨勢明顯變緩，也代表液滴外圍開始堆積。

此外，根據查找到的文獻；任天熹（2010 年 5 月），液滴狀及移動表面之研究，國立中央大學機械工程學系博士論文。及林怡亭等（2007 年 8 月），水珠滴落到固液表面之擴散探討，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組物理科。中提到，圖案半徑 R 和時間 t 的關係式形式為

$$R = k \times t^n \quad \text{其中 } k \text{ 為常數}$$

因此本組分別將圖案半徑 R 與時間 t 取自然對數來進行分析。

$$\ln(R) = n \times \ln(t) + \ln(k)$$

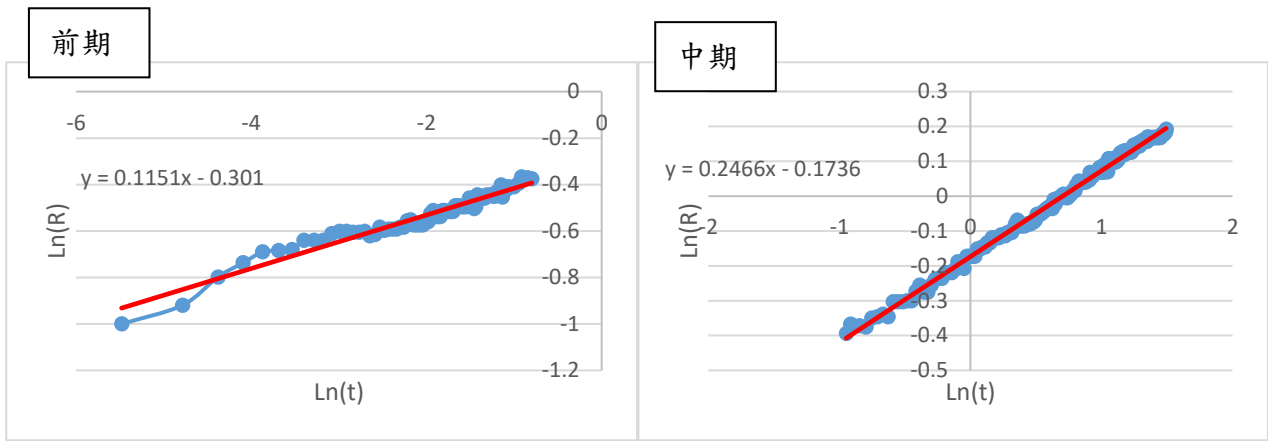


圖 4 不同時期，圖案半徑 R 與時間 t 取自然對數後的關係圖。

由圖 4 分析知，不同時期所求得的 n 值不同，原則上後期的擴張速度較慢，n 值也就越大。

實驗三：探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴展行為。

本組分別配置濃度為 85.5%、76%、66.5%、57%、38%、19%酒精溶液，如前項實驗操作，將其滴在未稀釋的壓克力顏料表面。其結果如下；

每影格時間為 1/240 秒

	0 格	150 格	300 格	500 格	700 格	900 格	1200 格	1500 格	1800 格	2100 格
85.5%										
76%										
66.5%										
57%										
38%										
19%										

表 1 不同濃度酒精液滴在壓克力顏料表面，島為產生時間、位置、數目列表

	95%	85.5%	76%	66.5%	57%	38%	19%
開始產生島紋的時間 t (s)	0.39	0.55	0.77	1.05			
開始產生島紋的半徑 r (cm)	0.674	0.703	0.721	0.802			
最大擴展半徑(cm)	1.271	1.247	1.224	1.123	0.997	0.572	0.515
最多島紋數	17	17	16	13	0	0	0

說明；

- 1、由表 1 知，液滴酒精濃度越高，產生島紋時所需的時間越少，位置半徑也越短。
- 2、隨著酒精液滴濃度降低，產生的島紋數也越少，當濃度為 57% 時便無島紋的產生。
- 3、而當酒精液滴濃度降至 38% 時，酒精液滴將不會擴展開來。

本組認為酒精液滴的表面張力越低，越具濕潤性，在壓克力顏料表面越容易展開，外圍也較易過度堆積，而形成島紋現象。

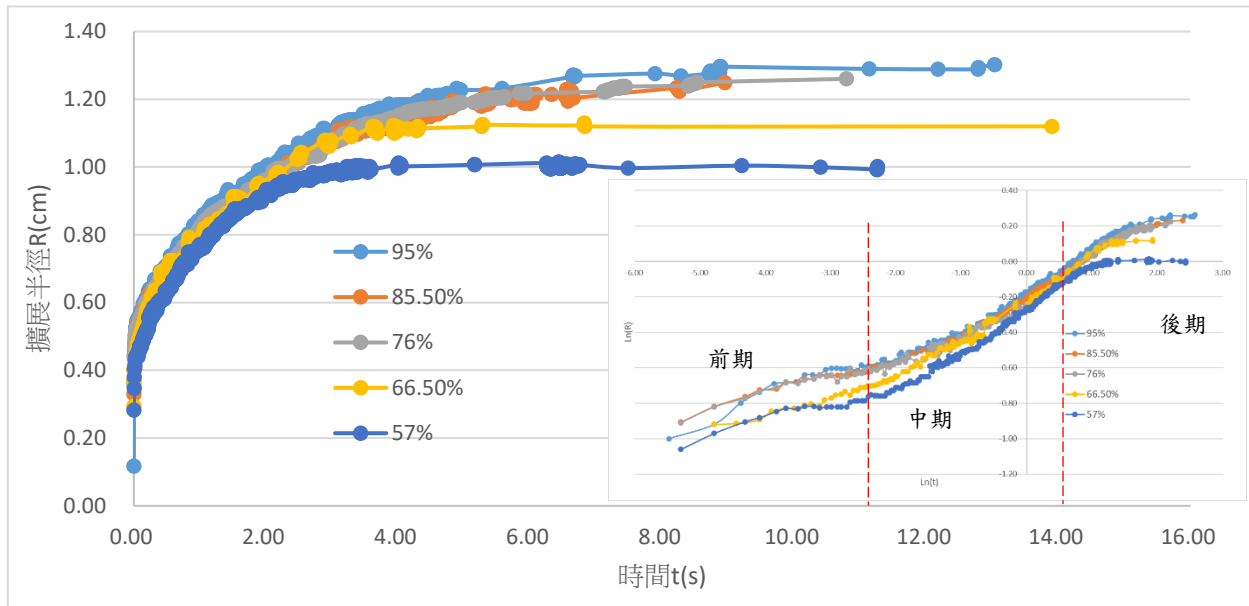


圖 5 不同濃度酒精液滴在壓克力顏料表面擴展半徑與時間關係圖

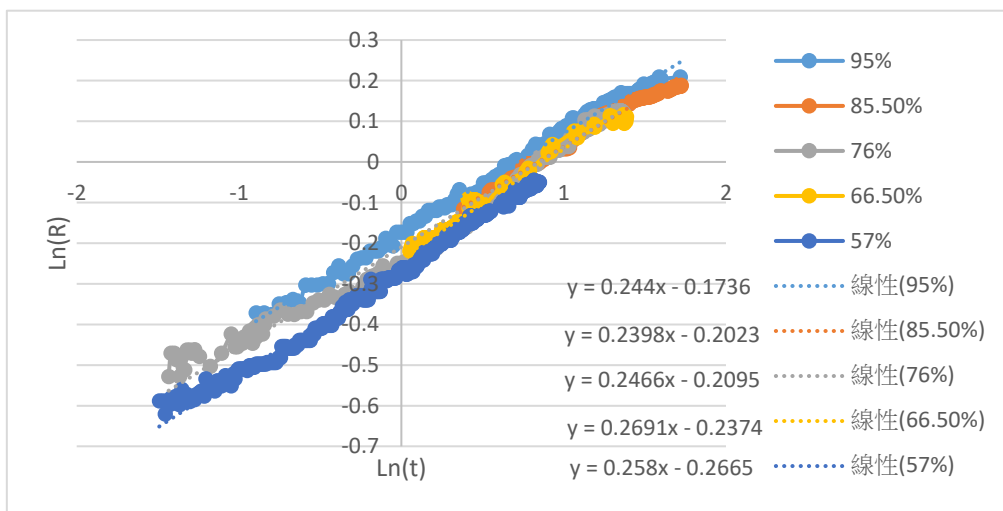
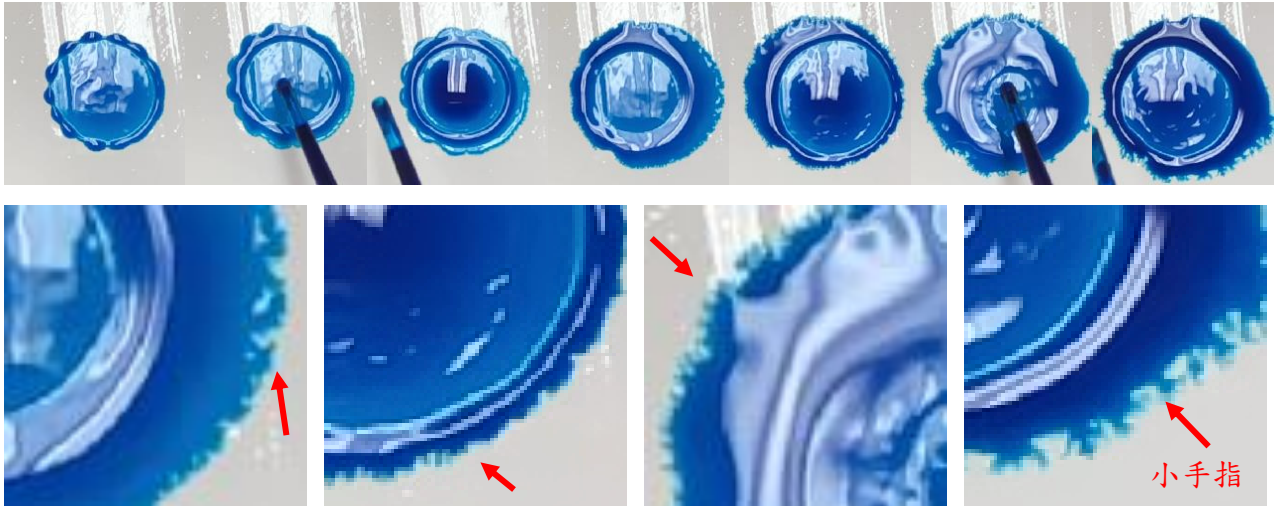


圖 6 不同濃度酒精液滴在壓克力顏料表面在擴展中期時，Ln(R)與 Ln(t)之關係圖

說明；由圖 6 得知中期的液滴擴展半徑與時間的關係式約為 $d=kt^{1/4}$ ，而不同酒精液滴濃度，只會影響分析出來的截距，也就表示 k 值是與酒精液滴濃度有關的。

實驗四：初步測試要如何形成碎形手指的圖案？

前項實驗將染色的液滴滴在壓克力顏料表面，隨然在其外圍有產生島紋的圖案，但並沒有產生碎形手指的圖案出來，組嘗試將酒精液滴連續的滴在相同位置，觀察其擴散之行為，期待有碎形手指的產生。



當重複滴下液滴時，向外擴散的液滴會在最外圍的島紋處重複堆積，然後再一點一點慢慢突破邊界，產生出類似小手指的情形。但距離產生出碎形手指的圖案還有點距離，手指不易伸長，因此本組試著將壓克力顏料稀釋看看效果如何。

實驗五：探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。

本組調配五種濃度的壓克力顏料，10g 的壓克力顏料分別加水 10、15、20、25、30、40ml，而在加水之前會先加入 1ml 的助流劑幫助壓克力顏料溶於水中。

由圖 7 可以得知，這不同濃度的壓克力顏料，黏滯特性皆不相同，濃度越高，壓克力顏料越黏。

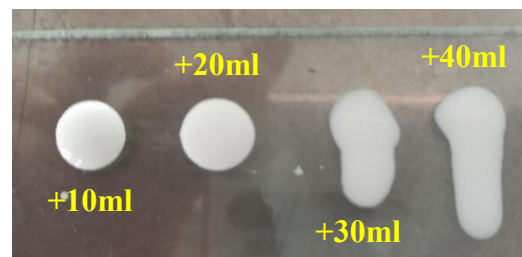


圖 7 不同濃度壓克力顏料的黏滯情形。

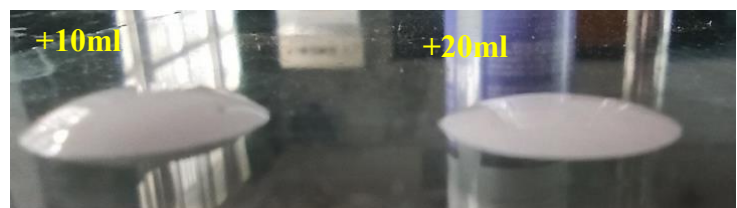
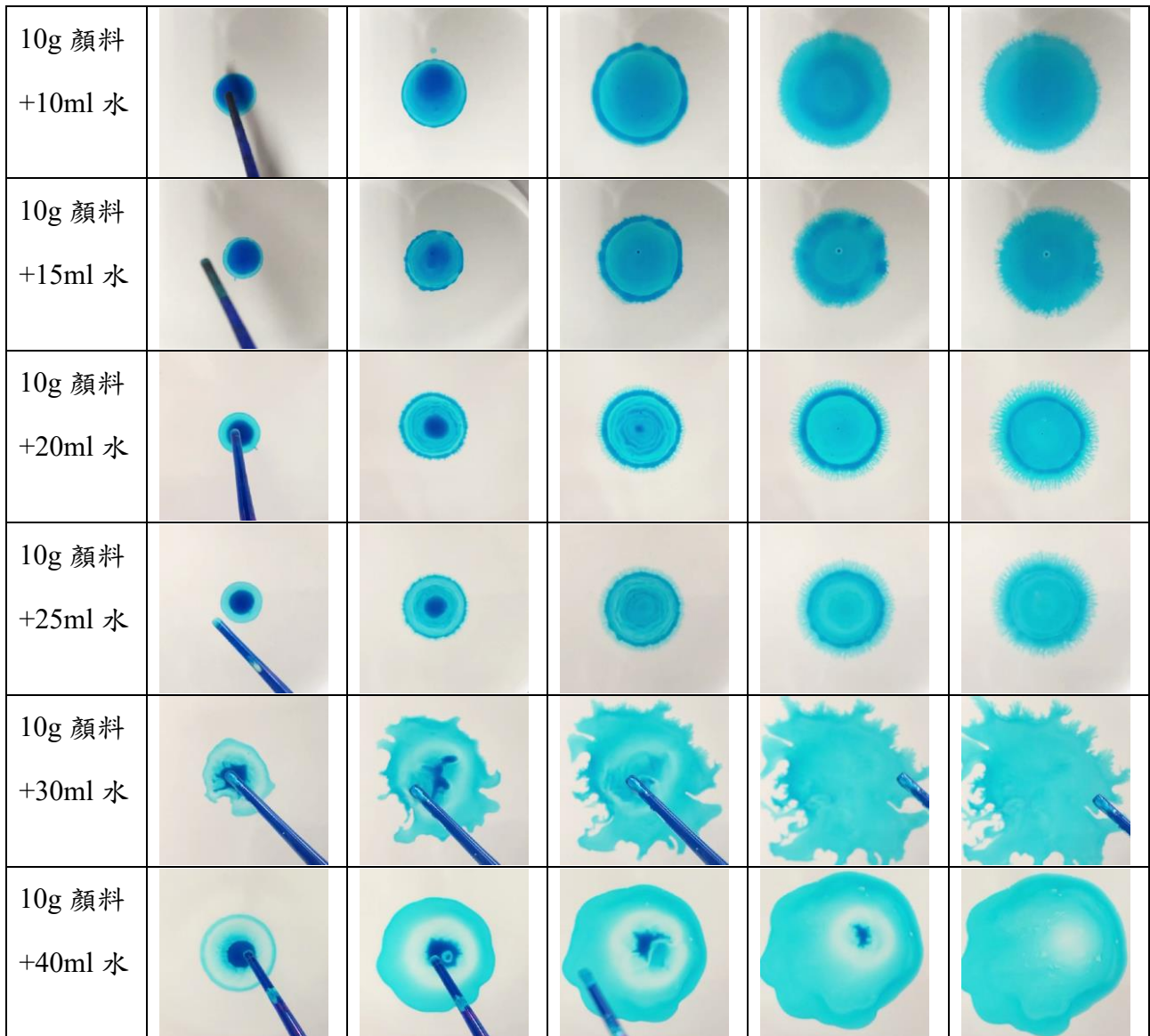


圖 8 +10ml 水和+20 ml 水兩種濃度壓克力顏料的濕潤情形。

酒精濃度 95%

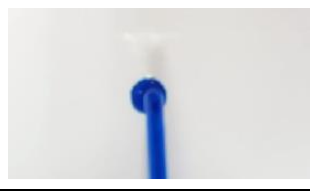

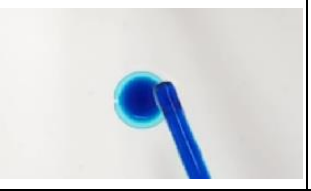
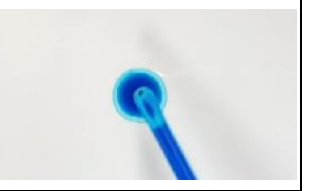

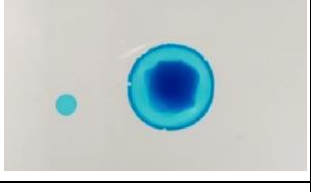
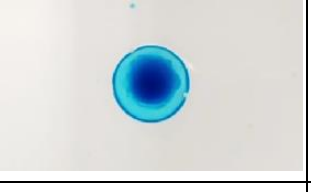
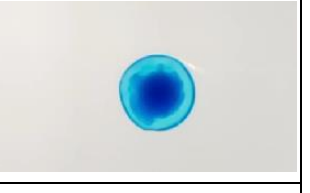


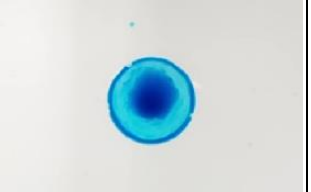
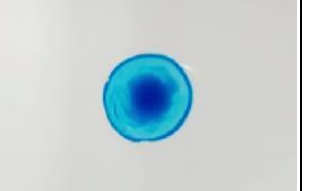


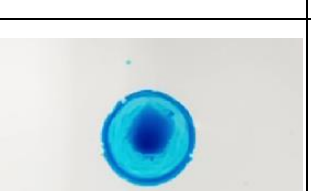
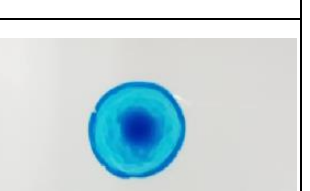
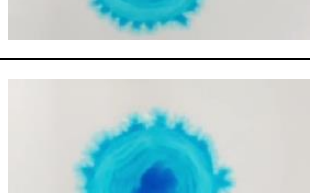
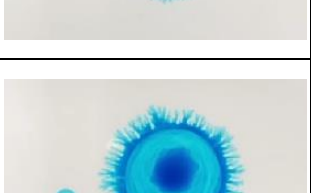
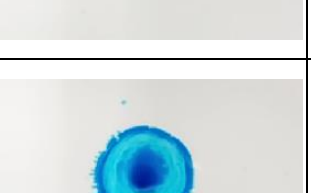

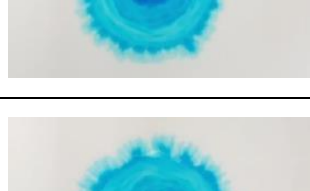

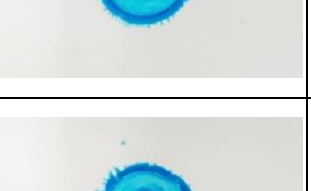
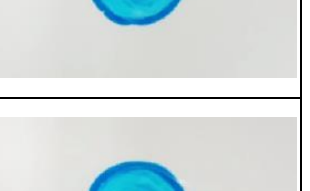


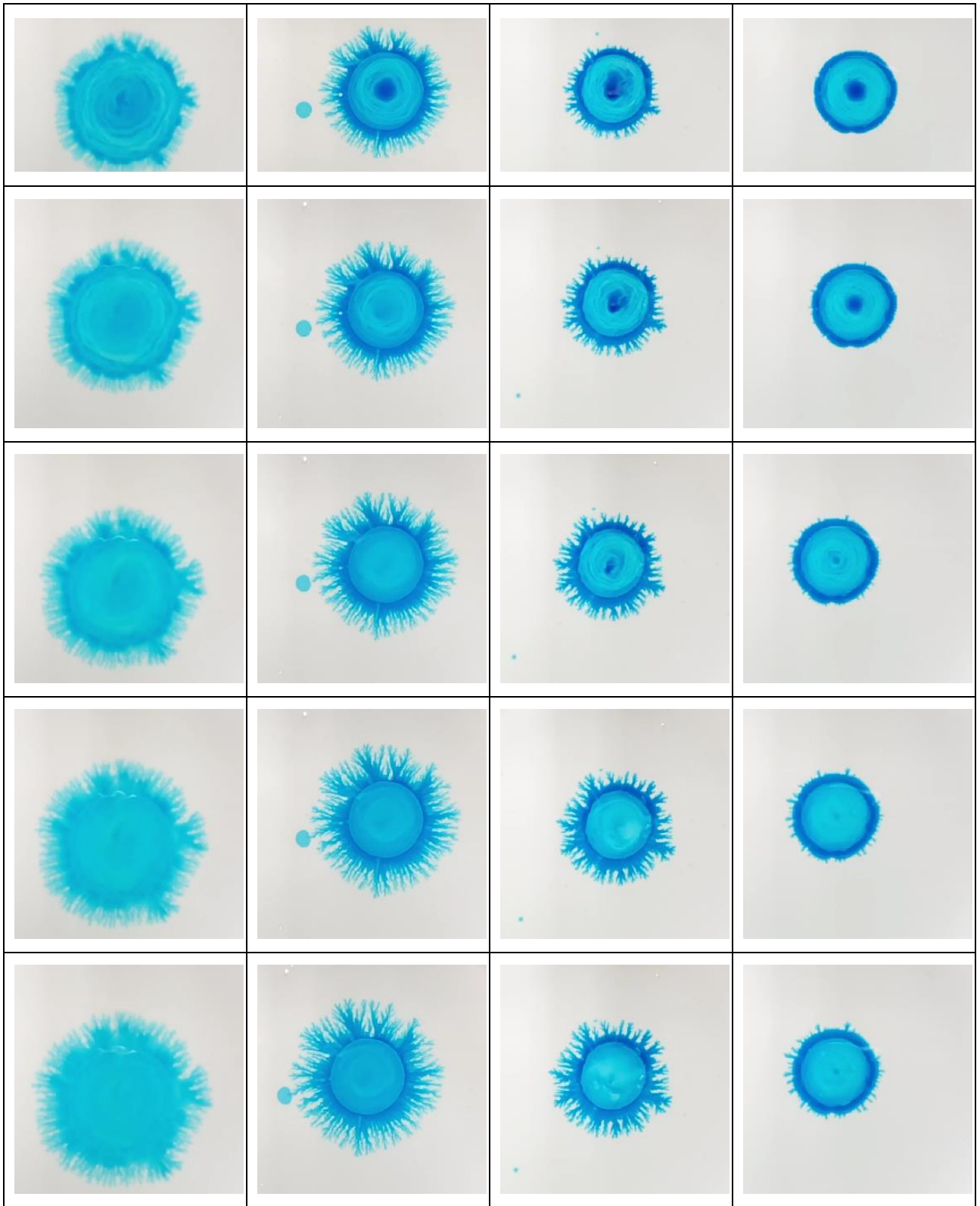
由實驗結果來看：

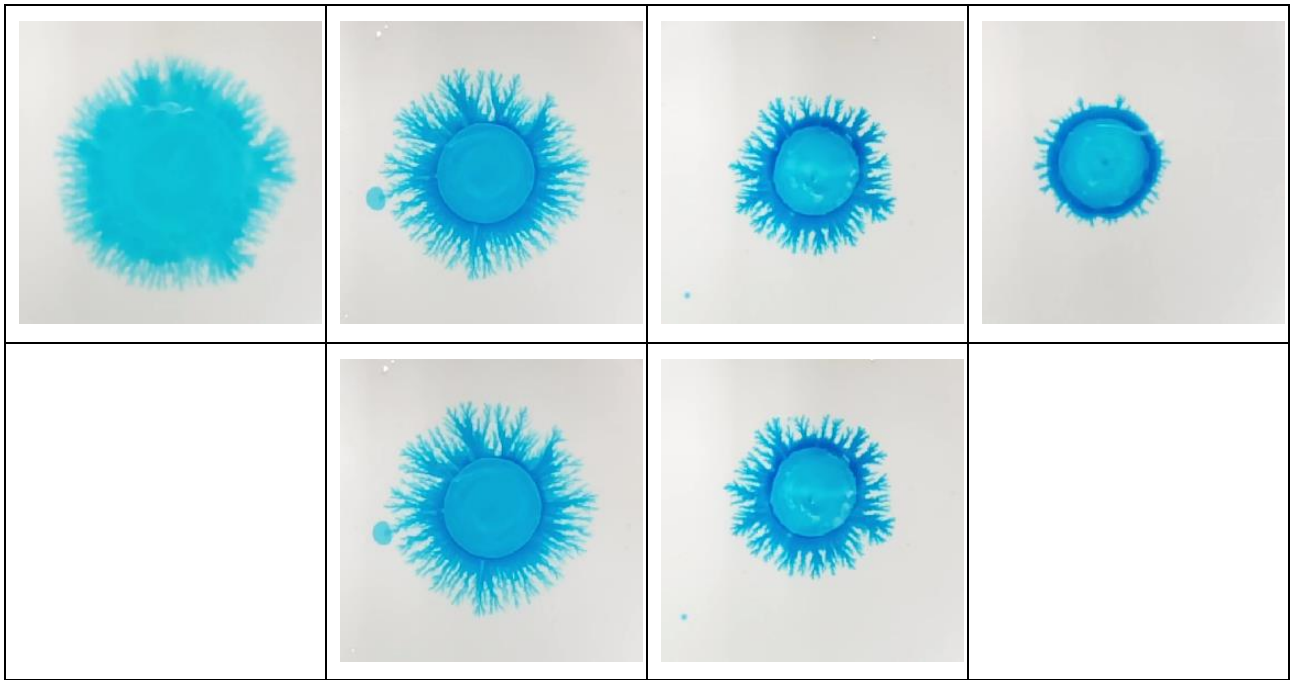
- 1、當壓克力顏料加水稀釋，再滴入 95% 染色的酒精液滴後，確實能在其邊界長出明顯的手指圖案，而且是再加水 20 及 25ml 時，效果最好。水加太少，長出的手指細且短，而水加太多，酒精液滴迅速溶入，產生極大的擾動，邊界不易堆積，無法長出手指圖案來。

實驗六：探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響。

根據前項實驗結果，本組固定壓克力顏料濃度為 10g 壓克力顏料加水 20ml，然後滴上不同濃度的酒精液滴，分別為 85.5%、76%、57%、52.3%、47.5%、38%，並觀察其變化情形。結果如下：

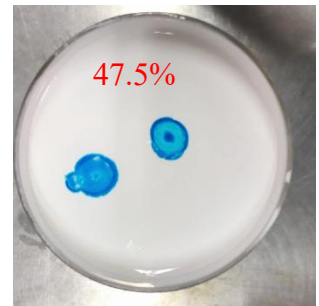
85.5%	76%	57%	52.3%
			
			
			
			
			
			





說明：

- 1、根據實驗測試，在壓克力料濃度為 10g 顏料+20ml 水的條件下，產生手指圖形所需的最小酒精濃度約為 52.3~47.5%，若酒精濃度太低，便無法有效的產生碎形手指。
- 2、此外，根據觀察，碎形手指一開始會從外圍的特定位置優先長出，而這些優先長出的手指，到後期相對來講會變得比較粗。本組認為根據前面酒精滴在壓克力表面的擴展行為，酒精在外圍的堆積並不會是均勻的，因此會由堆積較多處優先突破長出手指。
- 3、本組同樣分析酒精液滴外圍擴展的情形，並且都取對數，發現隨



著酒精濃度降低， n 值越來越小，且 k 值越來越小。

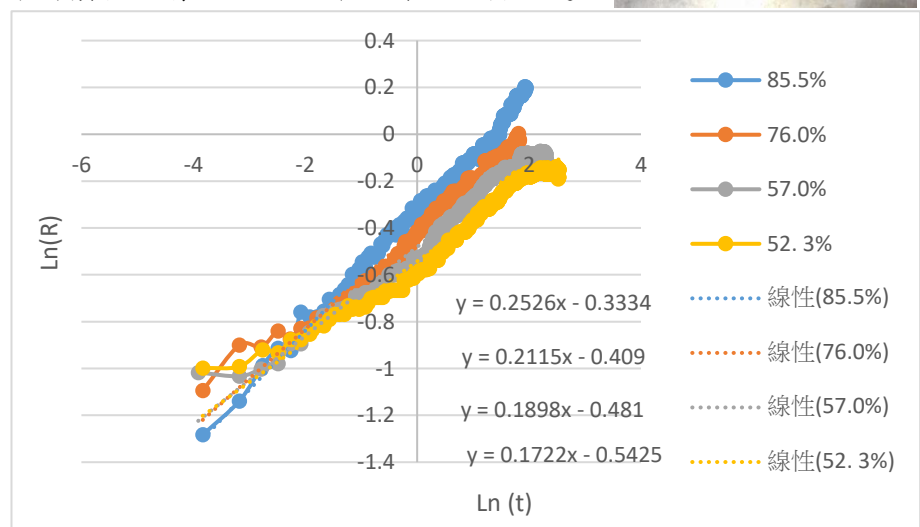
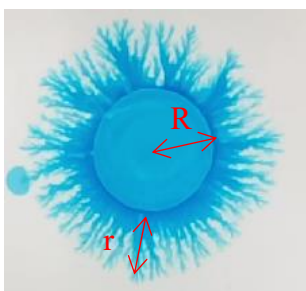


圖 9 不同酒精濃度，圖案半徑 R 對數與時間 t 對數之關係圖

接著本組將指尖的位置半徑減去液滴圖案外圍圓形半徑 R ，可得出手指長度 r ，並將其與時間作圖。

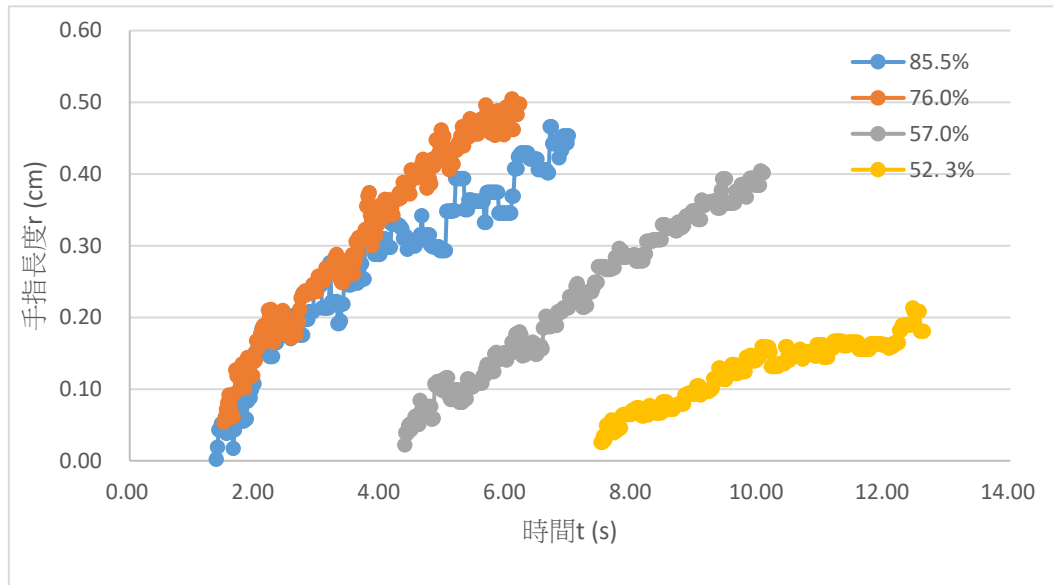
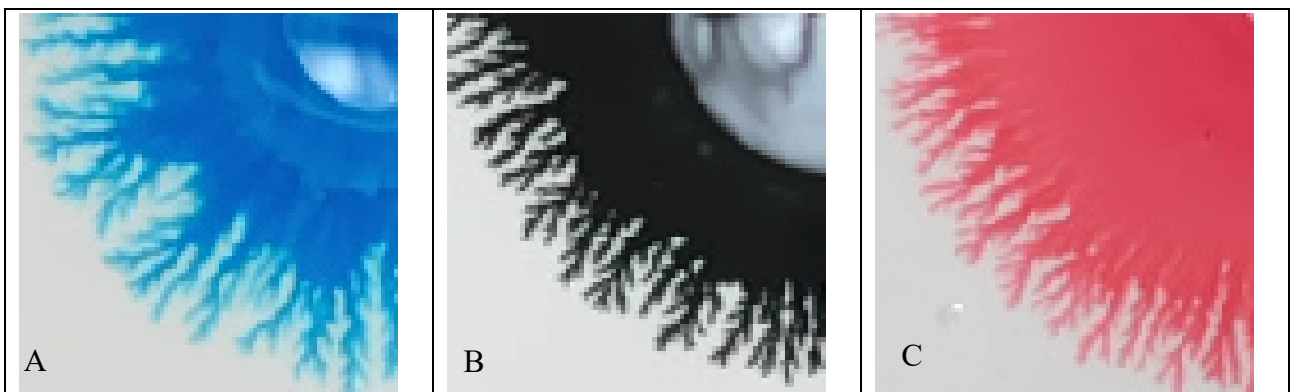


圖 10 不同酒精濃度，手指長度 r 隨時間變化之情形。

由圖 10 得知，酒精濃度越低，產生手指的時間就越晚，且手指也越短。此外，手指在伸長的同時，酒精的外圍還會持續擴展，會吞噬掉手指根部，因此在酒精濃度 85.5% 和 76% 所生長的手指差異不大。

實驗七：探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響。

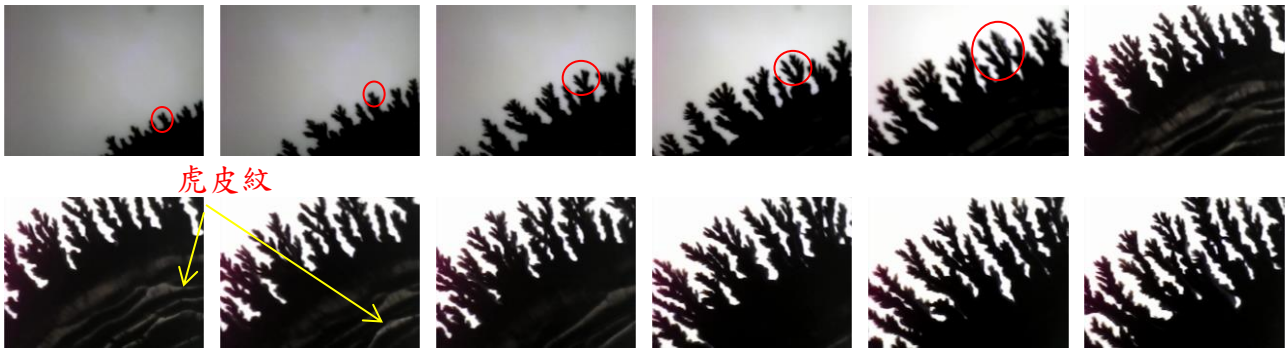
使用三種液滴，A：酒精 4ml+1ml 藍色食用色素、B：酒精 4ml+1ml 吳竹墨汁、C：異丙醇 4ml+1ml 紅色食用色素，滴在稀釋的壓克力顏料(10g 顏料+20ml 水)。



觀察發現，長出的手指差異不大，但是吳竹墨汁的顯色效果比較佳，且顏色以較凝練，本組認為墨汁密度比較大，墨汁粒子重，所以擴散過程不易暈開，而導致。但分裂的形式沒有差異。

實驗八：利用顯微攝影技術觀察碎形手指形成的過程。

為了更清楚觀察碎形手指生成的過程，本組以數位顯微攝影機來拍攝形成的細節。



根據仔細的觀察碎形手指的分裂情形，每根手指的末端，都隨時呈現 y 字形的小分叉，而手指分裂成長的示意圖如下，手指先在末端堆積，再分裂處新手指，然後新手指末端再堆積，又分裂出新手指，如此往復下去，而形成所謂的碎形手指圖案。

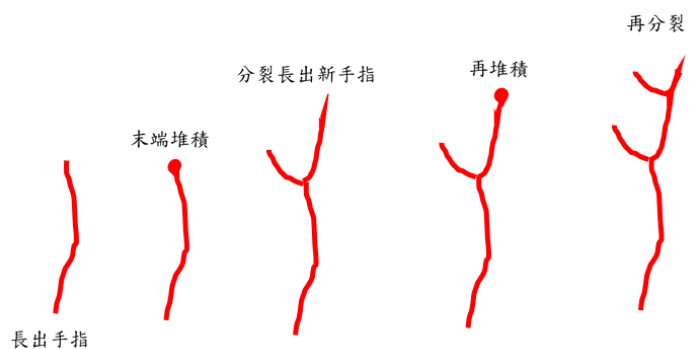
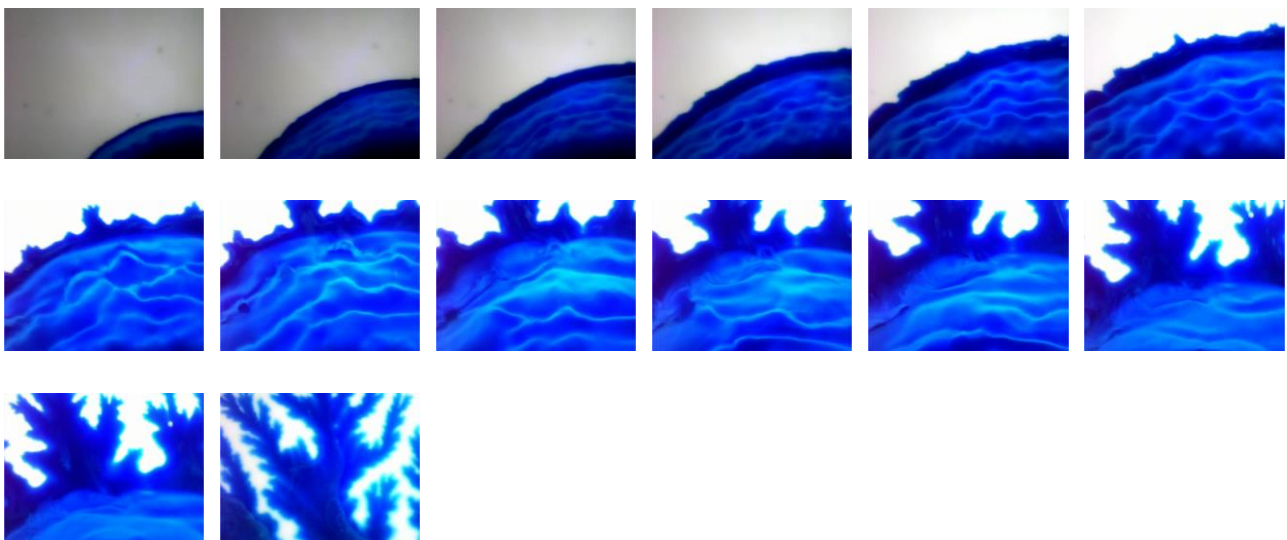


圖 11 碎形手指成長分裂過程示意圖



根據所查到的文獻得知，之所以會產生虎皮紋的情形是因為流體流到某一長度時，速度減慢，內部溶解擴散出來的液體來不及提供足夠的動能讓前沿繼續保持原來的速度前行，於是前沿慢下來甚至停頓不前，等到內部傳遞到前沿的能量持續增加，前沿累積的能量足以克服其前行的阻力時，前沿再次往前突進，然後又慢下來，又累積足夠的能量，又再次前進，

且在突進過程中和壓克力顏料的接觸混合狀況不一，而形成與老虎身上條紋一般的流痕，稱之為虎皮紋。

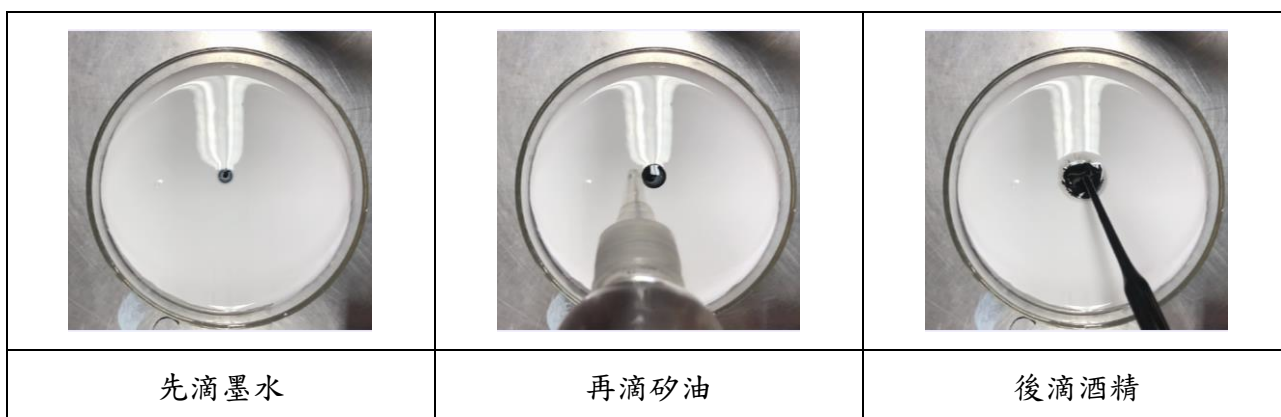
手酒精向外流動的流速的不連續情形，也容易導致外圍形成不均勻堆積，進而在堆積處突破而產生手指。且可看出突破後酒精會向突破處流動，而使得後續在指尖重新堆積，然後分裂。

為了更清楚看出突破的瞬間，本組將染劑濃度調低，倍率放大

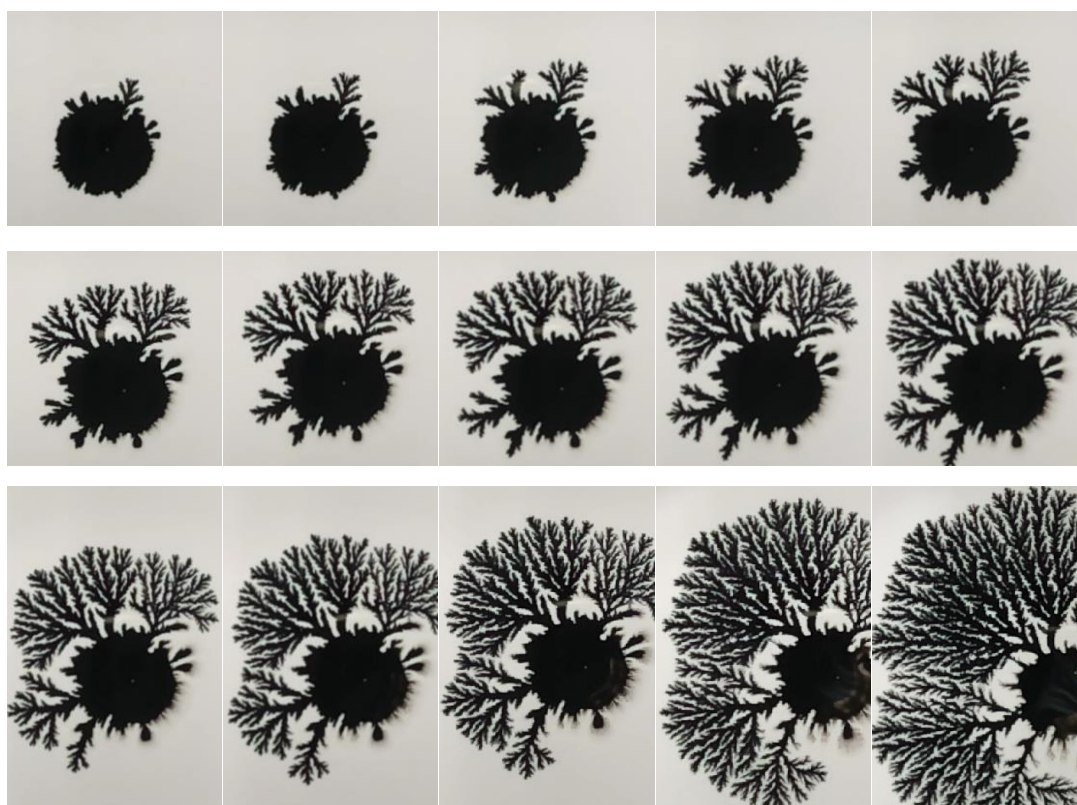


根據拍攝到的影片，可以清楚的看到，當邊緣堆積逐漸變厚，凸起，手指便從凸起處長出來，本組認為酒精擴散時邊緣會逐漸產生不均勻堆積，然後手指便是從堆積處長出來。

實驗九：探討印度墨水、矽油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。



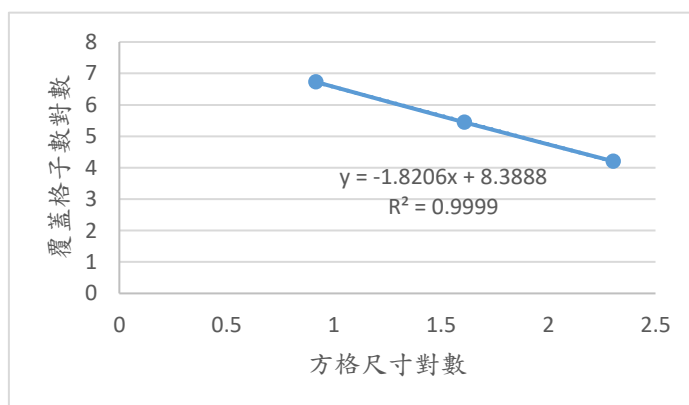
根據查到的資料得知矽油的表面張力係數及密度與酒精幾乎近似，唯一與酒精的差異在於矽油不溶於水，因此先滴墨水再滴矽油，只能使墨水稍稍向外擴散，但是後面滴入酒精後，酒精除了擴散外，還會與稀釋後的壓克力顏料互溶，造成墨水迅速往外擴展，且因為外圍包覆一層矽油，使的表面張力差不致於快速減弱，因此可以使碎形手指長得非常豐富，也有利於碎形維度的計算。



為了計算此碎形的維度，本組參考了中華民國第四十七屆中小學科學展覽會，量化大自然——以碎形維度觀點分析培地茅根系成長與抓地力之研究，所提到的**方格覆蓋法**的方式來計算碎形維度，並依照其步驟計算碎形維度。

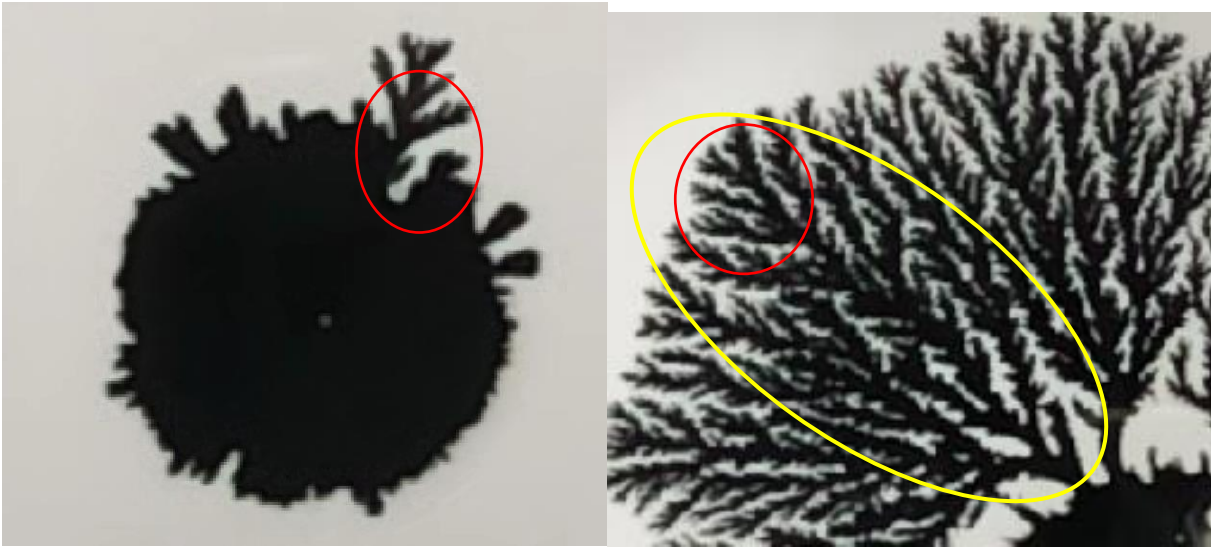
方格圖			
方格大小	10	5	2.5
格數	67	231	836

將圖中依不同方格大小之覆蓋方格數進行對數值的計算後，所得之各點，進行線性回歸計算後之斜率大小，即為此樣本之碎形維度。此例樣本之碎形維度約為**1.82**。與之前提到利希滕貝格圖的理論維度 1.77 相近。



23 圖 12 碎形手指之碎形維度之回歸計算。

自相似行為觀察



- 1、觀察發現，初期長出的手指圖案，與末期長出的手指圖案極度相似。
- 2、同樣可以發現，末期長出的手指圖案，與整體的手指生長脈絡液及相似。
- 3、再與利希滕貝格圖比較，也極為相似。

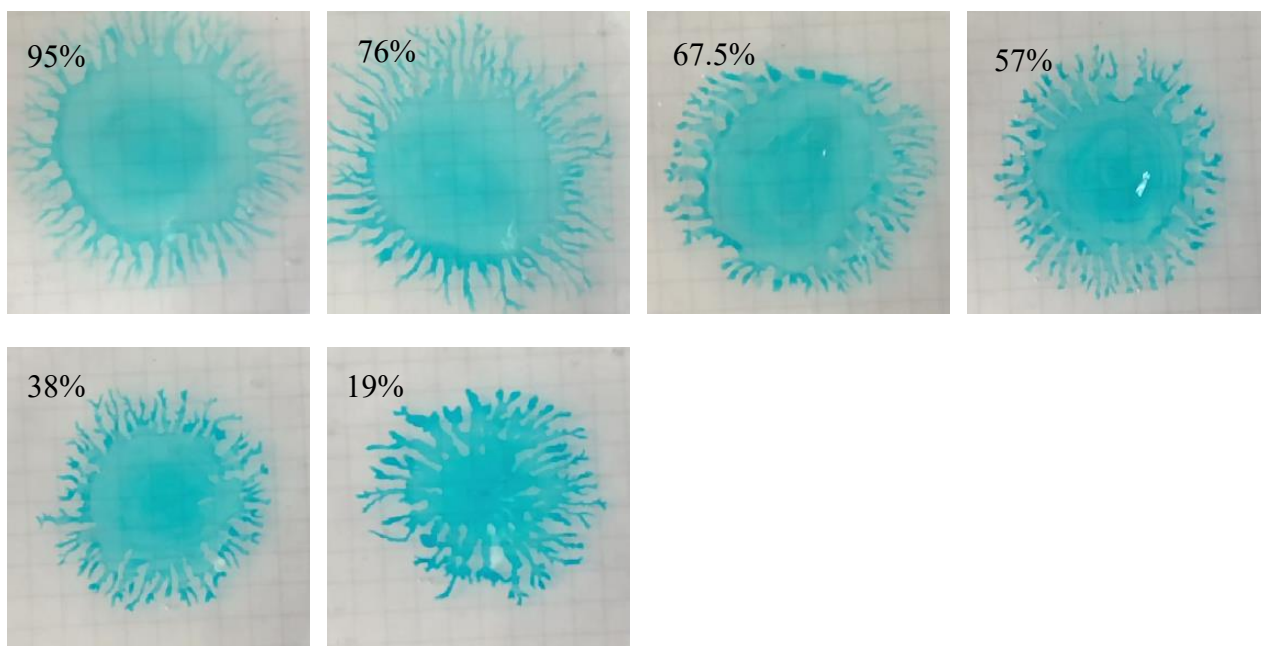


因此本組認為長出的手指圖案，確實是一種碎形圖案。

利希滕貝格圖

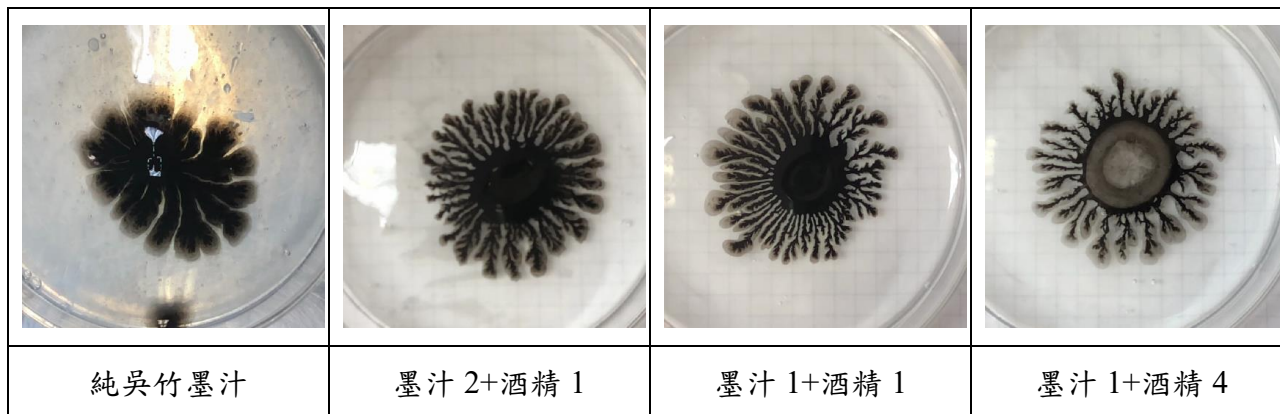
實驗十：探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。

本組為了瞭解除了酒精滴在稀釋的壓克力顏料上會產生碎形手指的情形外，是否也能在其它高黏度的液體上呈現相同的情形，本組選用了黃原膠或者叫玉米糖膠，在食品加工上，用來增稠用的。本組先秤取 1.0g 的玉米糖膠粉，加水 100ml 泡成玉米糖膠原液，再滴入不同濃度的染色酒精液滴。



由實驗結果來看酒精液滴滴在玉米糖膠水溶液上，也會產生碎形手指的情形，且也是在手指末端堆積後再分裂出新手指，而和稀釋的壓克力顏料的差別在於，酒精液滴在玉米糖膠水溶液上比較容易擴散，阻力較小，因此酒精液滴濃度較低時，依然會有碎形手指的情形，只是因為流動較快，手指較為細長，分裂次數相對較少。

為了凸顯效果，改用吳竹墨水實驗



由結果吳竹墨汁也會產生碎形手指的效果，且墨汁濃度越低，手指就越細。

實驗十一：探討碎形手指在藝術上的應用。

一、美術課，作畫的新技法



二、生活與科技課，新穎的手工藝品



陸、結論

一、初步測試酒精液滴(95%)滴在壓克力顏料表面的擴展行為。

- 1、當染色的酒精滴上壓克力顏料表面時，可分為前中後三期來看，前期撞擊後的瞬間，主要是受慣性力影響，但可藉由降低液滴落下高度來消除。
- 2、而到了**中期**，液滴主要受到壓克力顏料的黏滯力及酒精液滴和壓克力表面間的表面張力差影響，在展開階段的邊緣會形成一顆一顆類似**島紋**的堆積，這是因為當液滴開展過大時，外圍受表面張力拉扯而形成的不連續情形。
- 3、而到了**後期**，液滴半徑不再增加，反而有逐漸內縮之情形，本組認為，隨著時間增加液滴逐漸向外堆積，造成外厚內薄的情形，且內層酒精與空氣接觸面積較大，蒸散速度較快，所以造成內外酒精濃度不平均，而產生所謂的**馬拉高尼效應**，內層酒精濃度低表面張力大，外層濃度高，表面張力小，則液滴會由張力小的地方向張力大的地方流動。

二、探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴張行為

- 1、由表 1 知，液滴酒精濃度越高，產生島紋時所需的時間越少，位置半徑也越短。
- 2、隨著酒精液滴濃度降低，產生的島紋數也越少，當濃度為 57%時便無島紋的產生。
- 3、而當酒精液滴濃度降至 38%時，酒精液滴將不會擴展開來。
- 4、**中期**的液滴擴展半徑與時間的關係式約為 $d=kt^{1/4}$ ，而不同酒精液滴濃度，只會影響分析出來的截距，也就表示 k 值是與酒精液滴濃度有關的

三、探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。

當壓克力顏料加水稀釋，再滴入 95%染色的酒精液滴後，確實能在其邊界長出明顯的手指圖案，而且是在加水 2ml 及 25ml 時，效果最好。水加太少，長出的手指細且短，而水加太多，酒精液滴迅速溶入，產生極大的擾動，邊界不易堆積，無法長出手指圖案來。

四、探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響

- 1、根據實驗測試，在壓克力料濃度為 10g 顏料+20ml 水的條件下，產生手指圖形所需的最小酒精濃度約為 52.3~47.5%，若酒精濃度太低，便無法有效的產生碎形手指。
- 2、此外，根據觀察，碎形手指一開始會從外圍的特定位置優先長出，而這些優先長出的手指，到後期相對來講會變得比較粗。本組認為根據前面酒精滴在壓克力表面的擴展行

為，酒精在外圍的堆積並不會是均勻的，因此會由堆積較多處優先突破長出手指。

3、本組同樣分析酒精液滴外圍擴展的情形，並且都取對數，發現隨著酒精濃度降低， n 值越來越小，且 k 值越來越小。

4、酒精濃度越低，產生手指的時間就越晚，且手指也越短。此外，手指在伸長的同時，酒精的外圍還會持續擴展，會吞噬掉手指根部，因此在酒精濃度 85.5% 和 76% 所生長的手指差異不大。

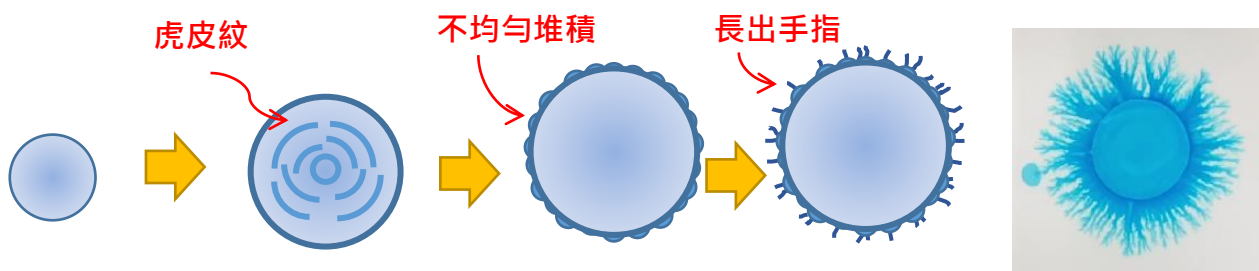
五、探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響

觀察發現，長出的手指差異不大，但是吳竹墨汁的顯色效果比較佳，且顏色以較凝練，本組認為墨汁密度比較大，墨汁粒子重，所以擴散過程不易暈開，而導致。但分裂的形式沒有差異。

六、探討碎形手指形成的過程

1、酒精液滴在前期擴展的過程，因酒精和壓克力顏料的互溶關係會導致流速的不穩定性，而會產生虎皮紋的流痕，也因此造成外圍的不均勻堆積現象。

2、外圍堆積過多時，首先會從堆積最密集處開始突破，長出碎形手指，且同時外圍堆積的情形也逐漸減弱，改流動到碎形手指的指尖，重新堆積。當堆積夠多時，又會再分裂出新的碎形手指，類似 y 字形，而這樣的自相似性質，正是碎形的精髓。



七、探討印度墨水、矽油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。

1、先滴墨汁，再滴矽油，最後滴入酒精，會產生豐富的碎形手指圖形。這是因為墨汁外圍包覆一層矽油，維持較小表面張力，增加手指向外流動的動力，也因此可以使碎形手指長得非常豐富，也有利於碎形維度的計算。

2、本研究所產生的碎形手指圖案與利希滕貝格圖極為雷同，兩者皆可以擴散限制聚集

(DLA)來做說明，而本組利用方格覆蓋法計算碎形手指的維度為 1.82 與希滕貝格圖的理論維度 1.71 近似，**正可以說明本實驗長出手指的情形，確實是一種碎形的表現。**

八、探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。

酒精液滴滴在玉米糖膠水溶液上，也會產生相同碎形手指的情形，而和稀釋的壓克力顏料的差別在於，酒精液滴在玉米糖膠水溶液上比較容易擴散，阻力較小，因此酒精液滴濃度較低時，就會有碎形手指的情形，只是因為流動較快，手指較為細長，分裂次數相對較少而以。

九、碎形手指技法應用。

碎形手指的圖案確實漂亮，本組拜訪了美術及生技老師，老師認為這樣有趣的圖案，可以應用到美術作品以及生計作品當中。

柒、參考資料及其他

- 1、碎形- 維基百科，自由的百科全書 – Wikipedia。取自：<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/分形>
- 2、《分形理论及其应用》，作者：朱华，姬翠翠，科學出版社，北京。
- 3、碎形 – 奇怪的形狀·無窮的應用，《科學發展》2003 年 10 月，370 期，48~53 頁
- 4、Saffman–Taylor instability – Wikipedia，取自：
https://en.wikipedia.org/wiki/Saffman%E2%80%93Taylor_instability
- 5、《科學發展》2003 年 10 月，370 期，48~53 頁
- 6、L. Keiser, H. Bense, P. Colinet, J. Bico, and E. Reyssat. “Marangoni Bursting: Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer.” PRL 118, 074504 (2017)
- 7、任天熹(2010 年 5 月)，液滴狀及移動表面之研究，國立中央大學機械工程學系博士論文。
- 8、林怡李等(2007 年 8 月)，水珠滴落到固液表面之擴散探討，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組物理科。
- 9、蔡旻真(2007 年 8 月)，量化大自然 – 以碎形維度觀點分析培地茅根系成長與抓地力之研究，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會，高中組物理科。

【評語】 030114

本研究透過液體互溶與表面張力的差異，研究液體所形成的碎形維度。研究發展的過程有相當詳實的紀錄。同時透過科學的方法分析維度的問題，是一件相當有趣的研究。

作品海報

支離破「碎」

~探討兩互溶流體間形成碎形圖案之機制

壹、研究動機

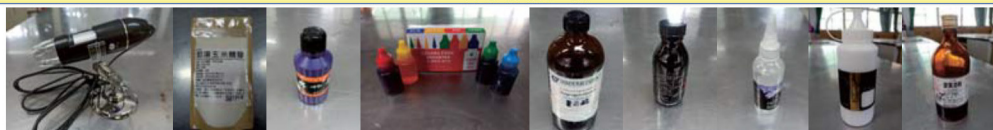
本組在2023 IYPT 的比賽題目看到『The effect of fractal fingering can be observed if a droplet of an ink-alcohol mixture is deposited onto diluted acrylic paint. How are the geometry and dynamics of the fingers influenced by relevant parameters?』。大意是說；如果將一滴墨水-酒精混合物沉積在稀釋的丙烯酸顏料上，可以觀察到碎形手指的效果。手指的幾何形狀和動態是如何被相關參數影響的？

關於此一問題，本組感到非常有趣，便上網找了一些關於「碎形」的資料，感到非常的神奇，在我們的生活周遭有那麼多關於「碎形」的例子，因此本組想利用此科展的機會，嘗試去重現碎形手指的效果，並了解產生此圖案的背後機制以及影響此行為的相關因素。

貳、研究目的

- 一、初步測試酒精液滴(95%)滴在壓克力顏料表面的擴展行為。
- 二、探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴展行為。
- 三、探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。
- 四、探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響。
- 五、探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響。
- 六、探討碎形手指形成的過程。
- 七、探討印度墨水、砂油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。
- 八、探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。
- 九、碎形手指技法應用。

參、研究設備及器材



數位顯微攝影機 玉米糖膠 吳竹墨水 食用色素 異丙醇 印度墨水 砂油 壓克力顏料 酒精(95%)

肆、研究原理

碎形(fractal)

碎形，又稱分形、殘形，通常被定義為「一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都（至少近似地）是整體縮小後的形狀」，即具有自相似（self-similarity）的性質。自然界中常見景象，諸如海岸線、山峰、雲彩、等等，都是碎形的一種。

利希滕貝格圖(Lichtenberg figure)

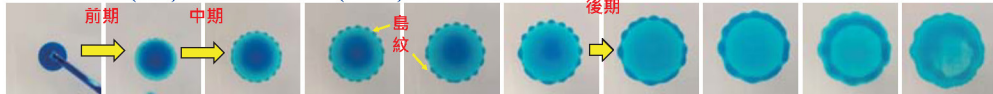
在利希滕貝格圖觀察到的分支能表現出自相似模式碎形特性。它們的出現和生長似乎與稱為擴散限制聚集(DLA)的過程有關。擴散限制聚集(DLA)是這樣一個過程，即由於布朗運動而進行隨機游動的粒子聚集在一起以形成此類粒子的聚集體。適用於擴散是系統中主要傳輸方式的任何系統中的聚集。DLA可以在許多系統中觀察到，例如電沉積、Hele-Shaw Flow、礦床和電介質擊穿。在2D中，對於不受晶格限制的自由粒子，這些碎形表現出大約1.71的維數。



伍、研究結果與討論

實驗一：初步測試酒精液滴滴在壓克力顏料(未稀釋)表面的擴展行為。

將染色後的酒精(95%)滴在壓克力顏料表面(未稀釋)，兩者不易互溶



1、**前期**的擴展行為主要是受到液滴落下高度影響，而本組將液滴的落下高度控制在2cm左右，除了可以降低慣性力的影響外，也能避免液滴飛濺的行為發生。

2、**中期**，液滴主要受到壓克力顏料的黏滯力及酒精液滴和壓克力顏料表面間的張力差影響，過大時，外圍受表面張力拉扯而形成的不連續情形，在展開階段邊緣會形成一顆一顆類似島紋的堆積，這樣的堆積模式在物理學上稱之為Plateau-Rayleigh instability，本組猜測這是導致碎形手指的原因之一。

3、**後期**，液滴半徑不再增加，反而有逐漸內縮之情形，本組認為，隨著時間增加液滴逐漸向外堆積，造成外厚內薄的情形，且內層酒精與空氣接觸面積較大，蒸發速度較快，所以造成內外酒精濃度不平均，而產生所謂的馬拉高尼效應。

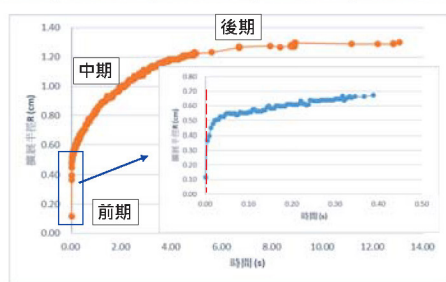


圖1 95%酒精液滴滴在壓克力顏料表面，形成的擴展半徑R隨時間變化情形。

根據文獻得知，圖案半徑R和時間t的關係式形式為 $R = kt^n$ 其中k為常數

因此本組分別將圖案半徑R與時間t取自然對數來進行分析。

$$\ln(R) = n \times \ln(t) + \ln(k)$$

由圖知前期n值較小，而中期的n值約為0.247。

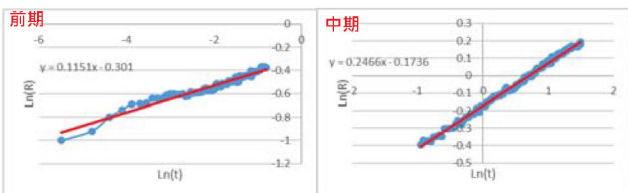
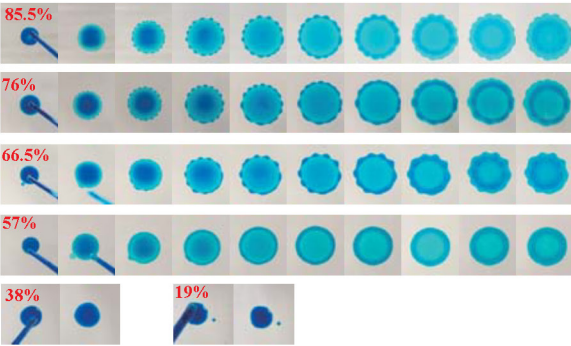


圖2 不同時期，圖案半徑R與時間t取自然對數後的關係圖。

實驗二：探討不同濃度酒精溶液滴在壓克力顏料表面的擴展行為。

配置濃度為85.5%、76%、66.5%、57%、38%、19%酒精溶液，將其滴在未稀釋的壓克力顏料表面。其結果如下； 每影格時間為1/240秒



	95%	85.5%	76%	66.5%	57%	38%	19%
開始產生島紋的時間t (s)	0.39	0.55	0.77	1.05			
開始產生島紋的半徑r (cm)	0.67	0.70	0.72	0.80			
最大擴展半徑(cm)	1.27	1.25	1.22	1.12	1.00	0.57	0.52
最多島紋數	17	17	16	13	0	0	0

- 說明：1、由表知，液滴酒精濃度越高，產生島紋時所需的時間越少，位置半徑也越短。
 2、隨著酒精液滴濃度降低，產生的島紋數也越少，當濃度為57%時便無島紋的產生
 3、而當酒精液滴濃度降至38%時，酒精液滴將不會擴展開來。

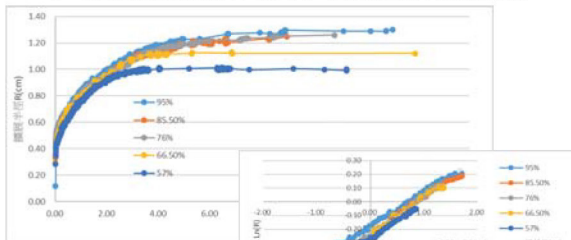


圖3 不同濃度酒精液滴在壓克力顏料表面擴展半徑與時間關係圖

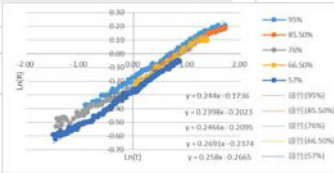
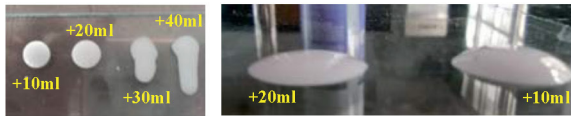


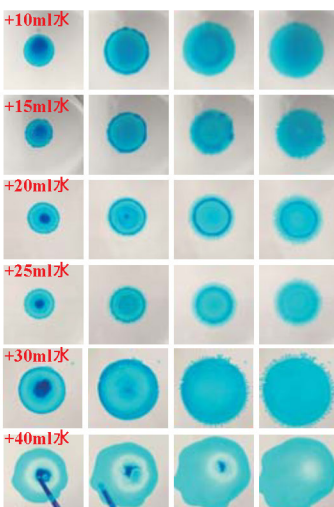
圖4 不同濃度酒精液滴在壓克力顏料表面在擴展中期時，Ln(R)與Ln(t)之關係圖

實驗三：探討壓克力顏料稀釋程度對酒精液滴擴散之影響。



調配六種濃度的壓克力顏料，10g的壓克力顏料分別加水10、15、20、25、30、40ml，這不同濃度的壓克力顏料，黏滯特性皆不相同

邊界確實長出明顯的手指圖案，而且再加水20及25ml時，效果最好。水加的少，長出的手指細且密，而水加太多，酒精液滴迅速溶入，產生極大的擾動，邊界不易堆積，無法長出手指圖案來。



實驗四：探討酒精液滴濃度對形成碎形手指之影響。

根據前項實驗結果，本組固定壓克力顏料濃度為10g壓克力顏料加水20ml，然後滴上不同濃度的酒精液滴，分別為85.5%、76%、57%、52.3%、47.5%、38%，並觀察其變化情形。結果如下：

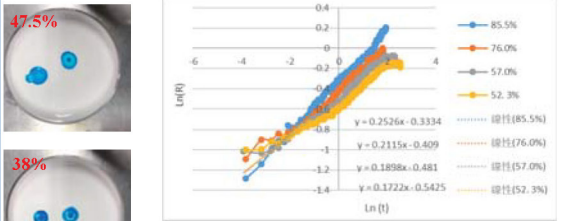
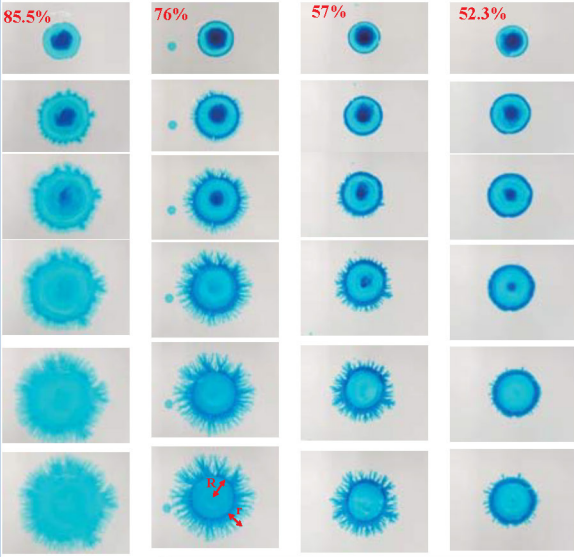


圖5 不同酒精濃度，圖案半徑R對數與時間t對數之關係圖。

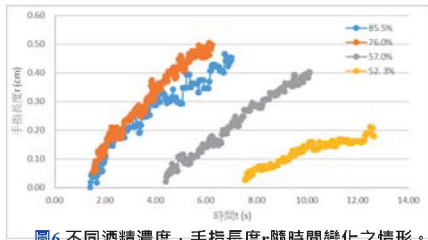
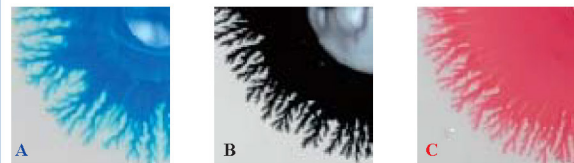


圖6 不同酒精濃度，手指長度r隨時間變化之情形。

由圖5得知，酒精液滴濃度越高，n值越大，並非為定值，與實驗二的形式不同。而由圖6得知酒精濃度越高，擴展速度越快，越早長出手指，手指也長得比較長。

實驗五：探討不同染料及液滴種類對碎形手指形態的影響。

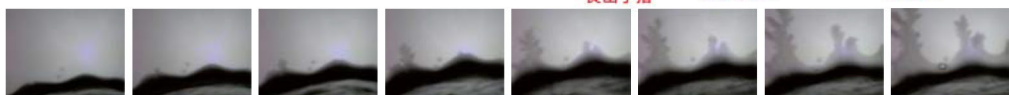
使用三種液滴，A：酒精4ml+1ml藍色食用色素、B：酒精4ml+1ml吳竹墨汁、C：異丙醇4ml+1ml紅色食用色素，滴在稀釋的壓克力顏料(10g顏料+20ml水)。



觀察發現，三者長出的手指外型差異不大，但是吳竹墨汁的顯色效果比較佳，且顯色以較凝練，本組認為墨汁密度比較大，墨汁粒子重，所以擴散過程不易量開而導致，但最終分裂的形式沒有差異。此外使用異丙醇液滴，所形成的手指型態也無明顯差異，因此手指的形成主要是取決於液滴本身與顏料互溶過程中，表面壓力差所致。

實驗六：利用顯微攝影技術觀察碎形手指形成的過程。

為了更清楚觀察碎形手指生成的過程，本組以數位顯微攝影機來拍攝形成的細節。



根據拍攝到的影片，可以清楚的看到，當邊緣堆積逐漸變厚，凸起，手指便從凸起處長出來，本組認為酒精擴散時邊緣會逐漸產生不均勻堆積，然後手指便是從堆積處長出來。

實驗七：探討印度墨水、矽油及酒精三者產生碎形手指的情形及其維度計算。

矽油的表面張力係數及密度與酒精幾乎近似，唯一與酒精的差異在於矽油不溶於水，因此先滴墨水再滴矽油，最後滴入酒精，且因為外圍包裹一層矽油，使的表面張力差不致於快速減弱，因此可以使碎形手指長得非常豐富，也有利於碎形維度的計算。

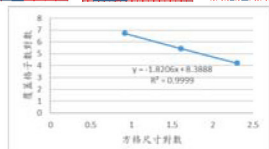
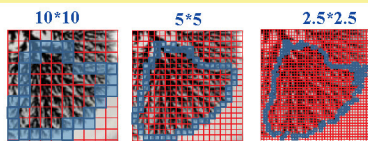
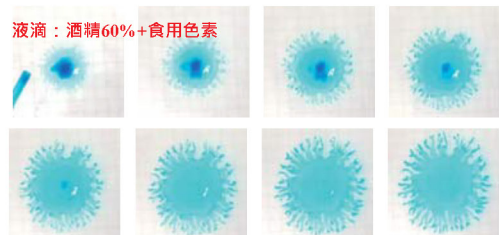


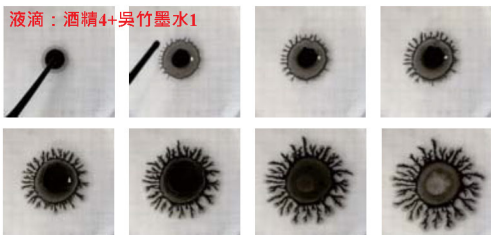
圖7 碎形手指之碎形維度之回歸計算。

實驗八：探討壓克力顏料改成玉米糖膠水溶液對產生碎形手指圖案之影響。

液滴：酒精60%+食用色素



液滴：酒精4+吳竹墨水1

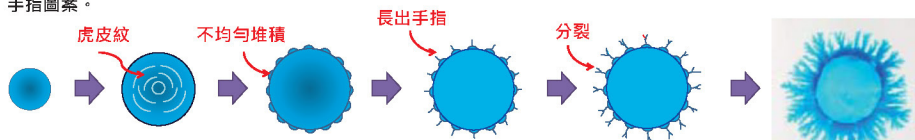


實驗九：探討碎形手指在藝術上的應用。



陸、結論

- 一、由酒精滴在壓克力顏料表面的結果得知，酒精液滴在開展過程中，在其外圍形成島狀的堆積，由後面實驗得知，而正是因為如此的堆積，才能夠長出碎形手指。
- 二、酒精液滴滴在稀釋壓克力顏料上，在前期擴展的過程中，兩者互溶，造成流速不穩定而使外圍產生不均勻堆積，然後在堆積處突破，長出手指，接著堆積轉移到手指指尖，然後又再次突破，分裂出新的手指，如此往復下去，就形成所謂的碎形手指圖案。



- 三、滴墨汁，再滴矽油，最後滴入酒精，會產生豐富的碎形手指圖形。這是因為酒精液滴往外互溶過程，推動著矽油及墨汁往外擴展，但因矽油不溶於水，因此能保持著較大的表面張力差，造成手指可以長得比較長。
- 四、本研究所產生的碎形手指圖案與利希滕貝格圖極為雷同，兩者皆可以擴散限制聚集 (DLA)來做說明，而本組利用方格覆蓋法計算碎形手指的維度為1.82，且觀察比較手指的自相似情形，證實手指圖案是一種碎形的表現。
- 五、利用改變酒精濃度、添加矽油及液滴大小等，可以生出許多漂亮的碎形手指圖案，並應用到美術作品以及生技作品當中。

柒、參考資料及其他

- 1、L. Keiser, H. Bense, P. Colinet, J. Bico, and E. Reyssat. "Marangoni Bursting: Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer." PRL 118, 074504 (2017)
- 2、任天熹 (2010年5月)，液滴狀及移動表面之研究，國立中央大學機械工程學系博士論文。
- 3、林怡亭等 (2007年8月)，水珠滴落到固液表面之擴散探討，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組物理科。
- 4、蔡受真 (2007年8月)，量化大自然 - 以碎形維度觀點分析培地茅根系成長與抓地力之研究，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會，高中組物理科。