

# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組 物理科

佳作

030105

抓不住你？衝出重圍！~以 tracker 追蹤圓周運動甩離軌跡之探究

學校名稱：高雄市立國昌國民中學

作者：  國三 鄭穎澤  國三 葉姮如  國三 毛利揚	指導老師：  陳惠玲
-----------------------------------------------	------------------

關鍵詞：圓周運動、摩擦力、向心力

# 抓不住你？衝出重圍！

## ~以 tracker 追蹤圓周運動甩離軌跡之探究

### 摘要

從新聞事件發想，用圓桌轉盤模擬物體圓周運動，並用 tracker 追蹤甩離的軌跡。

從實驗得知，轉盤轉速越快，物體離轉盤圓心越遠，需要的向心力愈大，當超越桌子最大靜摩擦能提供的向心力時，物體向外加速移動，隨著不足的動摩擦力，轉出螺旋軌跡。

利用座標 xy 圖顯示質點的甩離軌跡，實際相片作圖，測量影格相關數據，還原甩離真相。

長形物體受摩擦力作用，若轉彎時前後離圓心半徑不同，造成速差，會自轉甩出。

從甩離軌跡型態與加速現象，發現甩離的過程，向心力漸減、切線加速力量漸增。

綜合實測數據，我們沙盤推演出履帶甩離運動細部機制。二探現場發現路口特殊，速限前後急轉彎，十噸履帶向心拉力暴增，建議大車提早切外線，減速過彎，是唯一安全之路。

### 壹、前言

#### 一、研究動機

一天上學途中，看到台 17 路邊有個超大履帶，底下壓垮一輛白車。當日新聞報導那是一輛曳引車轉彎時，導致車上笨重的履帶直接滑出，飛落壓垮路邊的小客車。看了影片我們很好奇，究竟是甚麼原因讓原本在曳引車上的履帶如此驚悚的滑落？轉彎甩離是甚麼軌跡？於是我們設計各種變因，利用 tracker 軟體追蹤圓桌轉盤上物體的甩離軌跡，希望能用實測數據軌跡，找到蛛絲馬跡，還原當時履帶掉落的情形，解開出軌的秘密。

#### 二、研究目的與架構圖

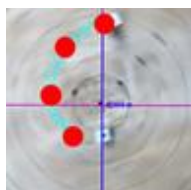
##### (一)現場探勘：

- 1.探勘履帶掉落現場各項條件



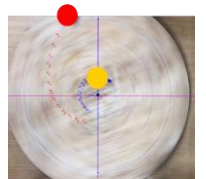
##### (二) 初階實驗(單點探究)：

- 1.單點測試實驗+圖表解釋
- 2.不同高度鉛塊甩離軌跡



##### (三) 進階實驗(雙點探究)：

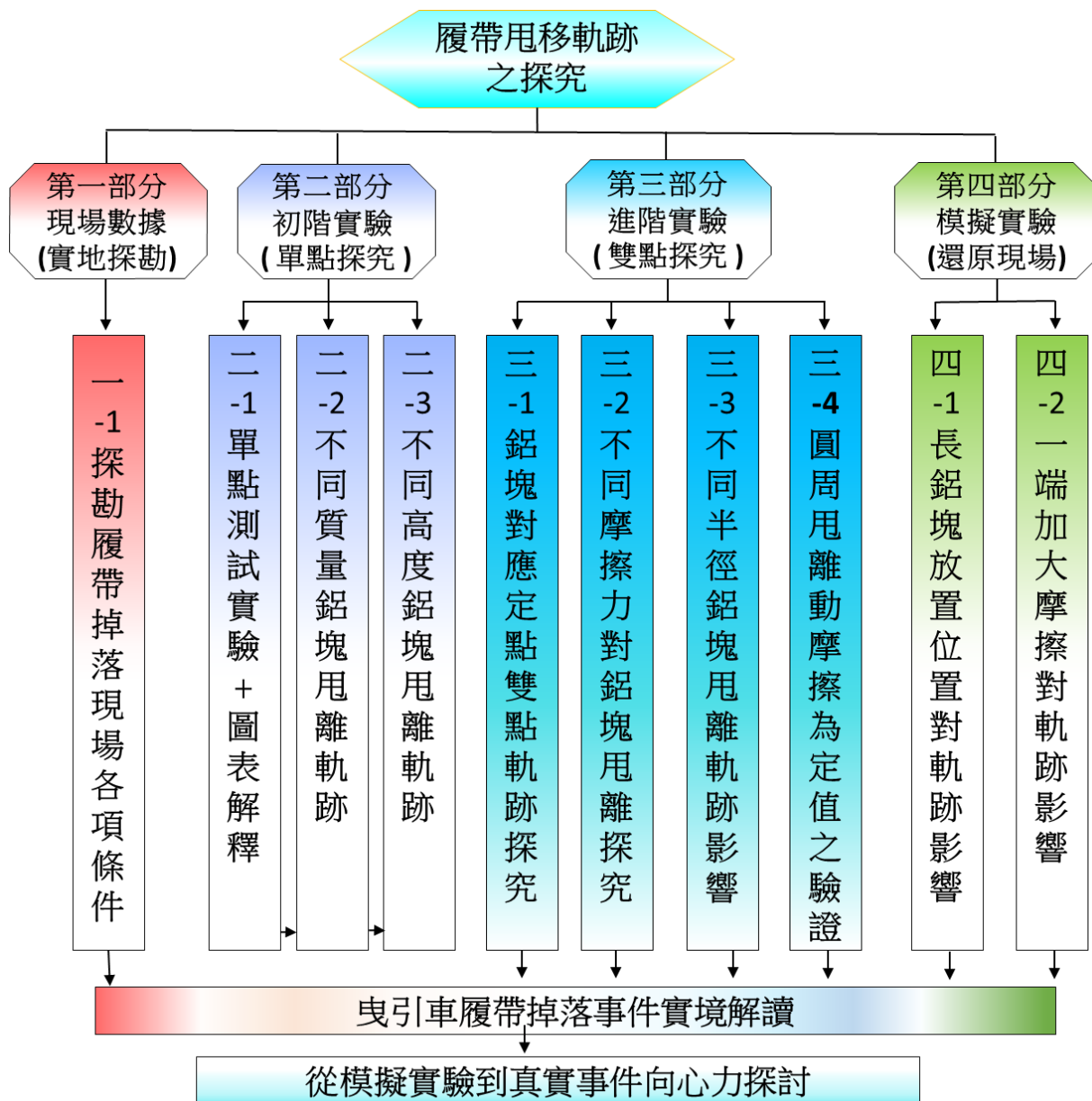
- 1.鉛塊對應定點雙點軌跡探究
- 2.不同摩擦力甩離軌跡影響
- 3.不同半徑甩離軌跡影響
- 4.圓周甩離動摩擦為定值之驗證



##### (四) 長形體模擬實驗(還原現場)：

- 1 長方體放置位置對軌跡影響
- 2.長形體一端加大摩擦對軌跡影響





### 三、文獻回顧

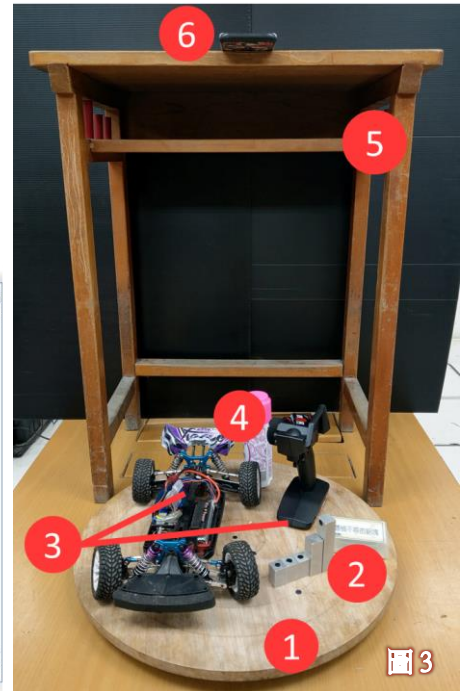
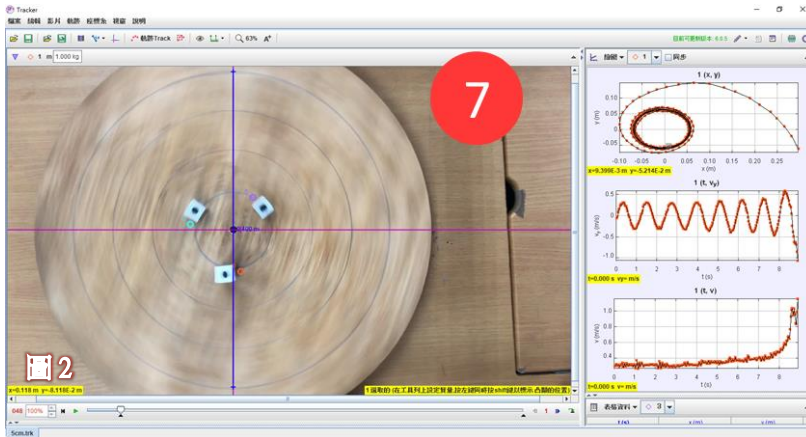
(一) [新聞頁面](#) 摘錄(2021年10月29日)：

高雄今天清晨6點多，26歲劉姓男子駕駛曳引車行經楠梓區德中路北往南至大學29路彎道時，疑似因載運的重型機具履帶未綑綁牢固，過彎時直接用向路邊轎車與機車，10公噸重的履帶瞬間將轎車壓成廢鐵，驚悚瞬間都被監視器錄下，研判事故是因為履帶沒有綁好過彎不慎翻落。



## 貳、研究設備及器材

- |             |              |
|-------------|--------------|
| 1.可旋轉的圓桌    | 5.學生桌        |
| 2.標準鋁塊      | 6.手機         |
| 3.四輪驅動車及遙控器 | 7.Tracker 軟體 |
| 4.滑石粉       |              |



## 參、研究過程與結果

### 第一部分：事件現場數據(實地探勘)

為了瞭解事發現場狀況，我們實際到場並使用 google map 找出履帶掉落地點及搜尋了曳引車與當地速限等相關資料。

#### (一)履帶掉落新聞影片截圖



**發現：**

我們看見車子由內線切到外線，後方履帶開始向外轉動甩離。

## (二)曳引車路線圖



**發現：** A 點到 B 點之間的距離大約是 30 公尺，此處速限為 60km/h。

從地圖取轉彎前後的方向交叉，發現內線轉彎角度約為 150 度，一般彎道外線應該更大。但是曳引車由內線切外線再急轉約 140 度。

## (三)司機關鍵路口視野

我們想找出駕駛人視野，於是商請爸爸開車從行車紀錄器，匯出影片截圖如下

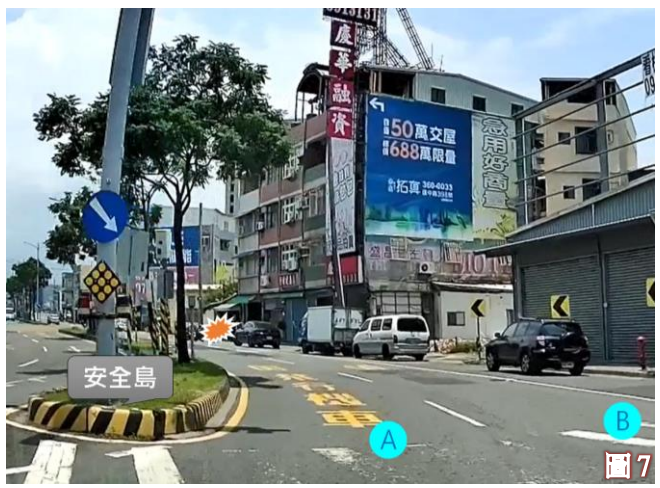
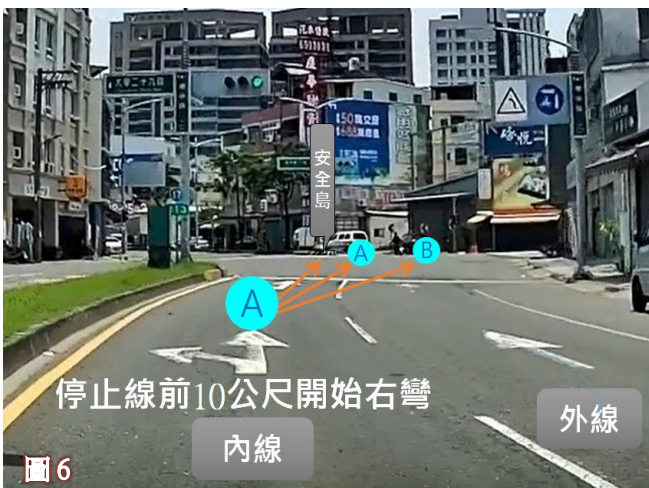
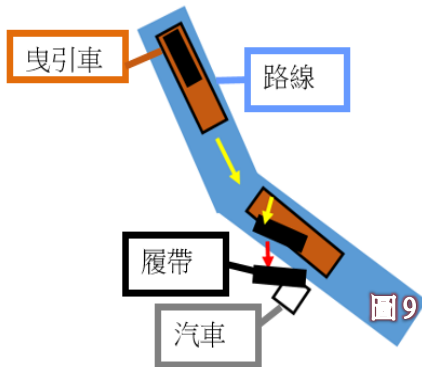


圖 6 推測司機先走內線，此路口非直線，約停止線前 10 公尺，需要向右切才能到對面路口內線，從影片曳引車更進一步切到外線後，遇到彎度最大的路段，轉彎圓心角由 150 度急彎到 140 度曲率更大，引發後側固定繩斷裂轉出，掉落在圖示標誌處。

#### (四)曳引車及履帶重量與長度

經查詢履帶的重量大約是 10 公噸，曳引車的重量大約是 35-43 公噸。履帶長度約 10.8 公尺，載運履帶的板台約長 12 公尺



#### 發想：

經過觀察現場以及更詳盡的了解曳引車及履帶後，我們畫出事件示意圖，開始懷疑履帶的掉落是否跟曳引車轉彎的彎度或履帶的形狀有關？於是著手進行後續實驗。

### 第二部分：初階實驗(單點探究)

#### 前置作業

1. 取一半徑 25cm 圓形轉桌。
2. 以圓心往外每 5cm 畫一圓，依序形成半徑為 5，10，15cm，20cm 之圓
3. 實驗期間，在圓桌正上方約 1 公尺處固定手機以攝影紀錄。



#### 整體步驟

1. 取各種鋁塊，置於適當半徑圓周
2. 為求加速穩定，以遙控車輪接觸圓桌側面，轉動圓桌
3. 由慢而快加速，直到鋁塊開以圓弧軌跡，甩出圓桌，即停止攝影。
4. 以 Tracker 軟體，分析影片中鋁塊質點甩離軌跡及各種數據

**附註：**鋁塊規格：本實驗鋁塊 A(小)，B(中)，C(大)底面積同為  $4\text{cm}^2$

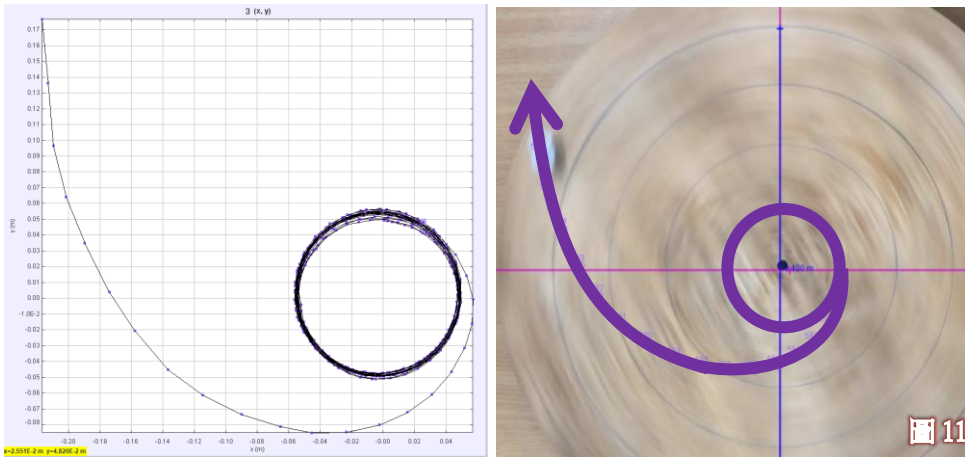
高度分別為 2.9 cm，5.6 cm，8.4 cm。

質量分別為 28.73 g，55.79 g，83.82 g。

**實驗二(一)：單點測試實驗+圖表解釋**：以 A(小)鋁塊放在圓桌半徑 5 公分為例

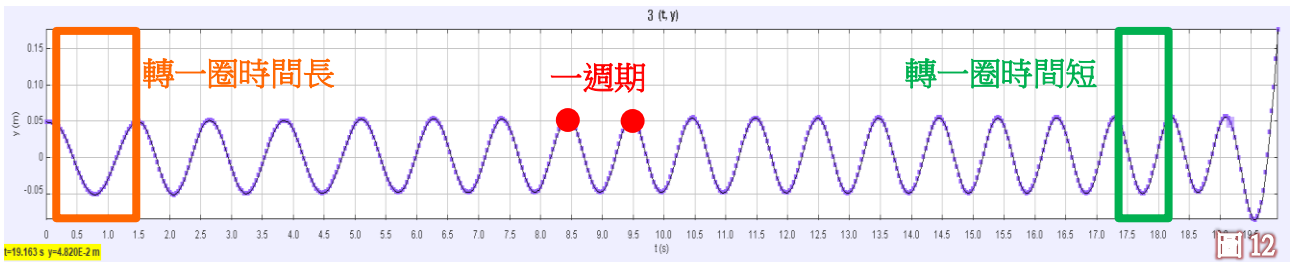
1. 逐步加速甩離前後相關圖表敘述

**(1) y-x 圖**



y-x 圖示表示鋁塊旋轉的軌跡，呈現出來的圖形為鋁塊旋轉形成的圓形加上鋁塊飛出的線段。後續實驗為了讓數據更清楚，會將圖表拉長成長方形，原本中間的圓形會變成橢圓形。

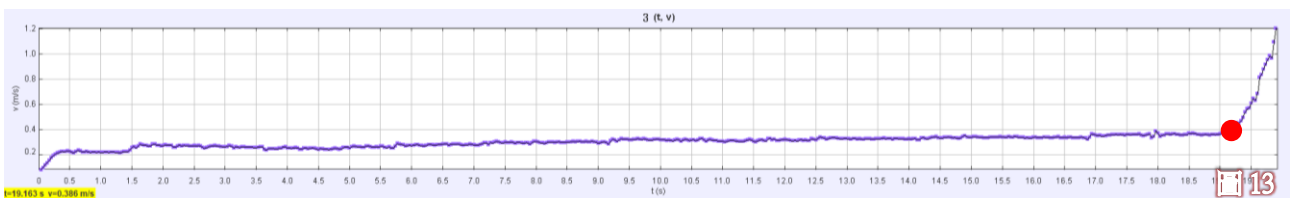
**(2) y-t 圖**



y-t 圖中最高點到相鄰的另一最高點(圖中的兩個紅點)代表鋁塊轉完一圈回到原點，從圖中鋁塊旋轉一圈所需時間逐漸縮短可得知鋁塊的轉速有增加。

y-t 圖在圓周運動中無法敘述平面甩離，之後的實驗僅用來參考甩離前的週期。

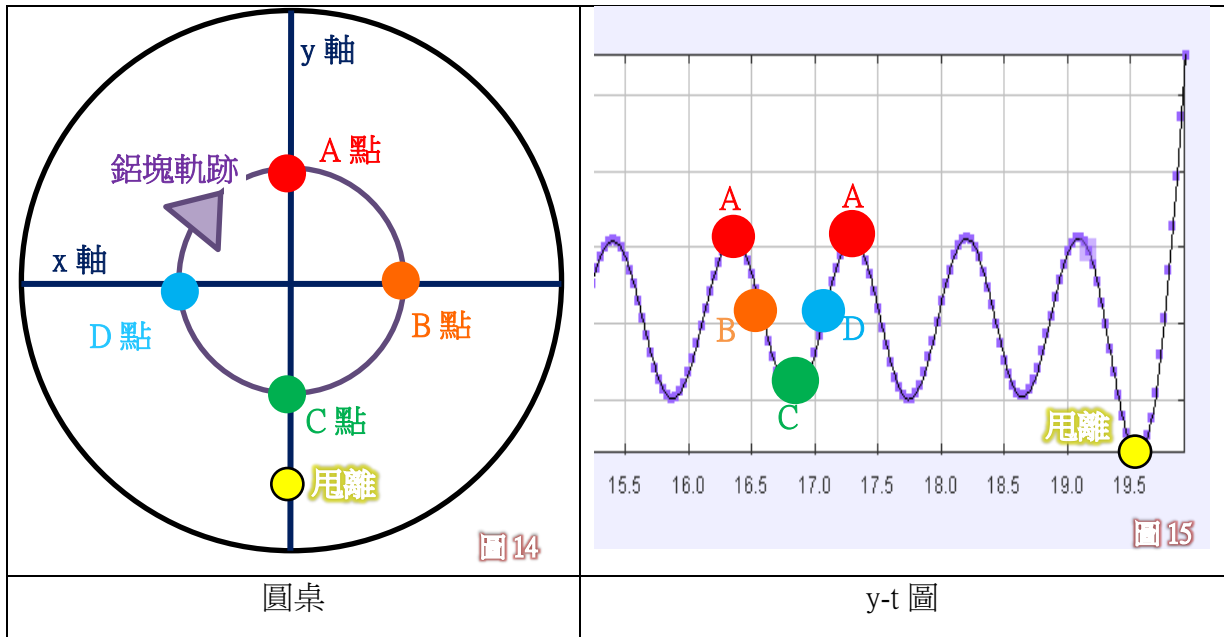
**(3) v-t 圖 (v：為鋁塊絕對速率)**



圖中的曲線緩緩上升，代表鋁塊轉動的速率增加。到了後段紅點之後速率急速上升，表示紅點後桌面的摩擦力小於鋁塊向心力，抓不回鋁塊回原軌跡，鋁塊移動往外**加速**飛出。

## 2. 定義 y-t 圖標點

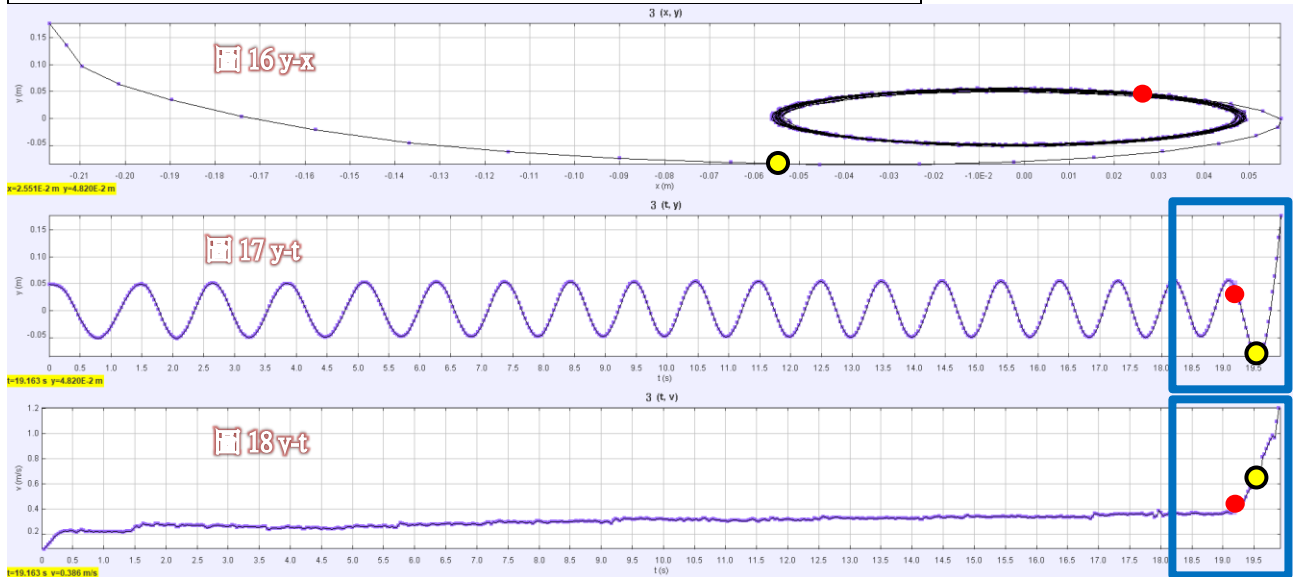
### y-t 圖標點



A 點為鋁塊轉到最上方，呈現在 y-t 圖上是波的最高點。C 點為鋁塊甩離前轉到最下方 y-t 圖上的黃點比其他的 C 點都低，代表此時鋁塊已經偏離圓周往外移動。

## 3. 鋁塊甩離瞬間三種圖位置對照 ~ 找鋁塊飛出的速率及位置

### y-x 圖、y-t 圖、v-t 圖 tracker 甩離瞬間(紅點)與甩離(黃點)兩點對照



(1) v-t 圖中可以看出紅點是「速率穩定上升」和「速率急速上升」的分界點，表示這個點(速率)所需向心力與圓桌靜摩擦力相當。

(2) y-x 圖中紅點之後的鋁塊軌跡遠離圓心旋轉飛出。

(3) y-t 圖中的黃點位置比其他的最低點還低，代表鋁塊已經遠離圓心。

從以上敘述可以找出鋁塊甩離瞬間對應的速率、位置及各種數據。







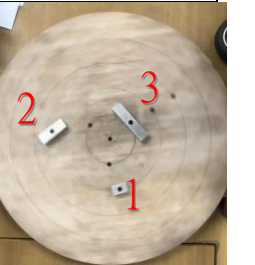
小結論：y-t 圖、v-t 圖紅點前段的數據是加速的過程，

要研究鋁塊甩飛的數據，只取最後一段圖表(上圖藍色方框)來分析數據。

**實驗二(二)：不同質量鋁塊，橫放在相同半徑甩離軌跡之探討**

1.步驟：同前述整體步驟簡述，將 A，B，C 不同大小鋁塊中心同時橫放於半徑 5 公分圓周上，進行加速轉動，觀察鋁塊甩離順序。

2.結果：

實驗編號	1	2	3	4
				
鋁塊甩離順序	大→中→小	中→小→大	中→小→大	中→小→大

3.發現：我們做多次實驗，每一次實驗鋁塊甩離的順序沒有規則性，多次同時甩出。

4.小結論：鋁塊啟動甩移不受質量影響。

**實驗二(三)：不同高度鋁塊，直立在相同半徑甩離軌跡之探討**

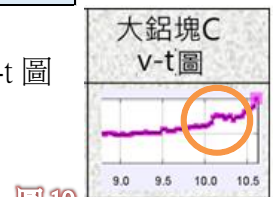
1.步驟：將 A，B，C 不同大小鋁塊，同時置於半徑 5 公分圓周上，同前述整體步驟簡述加速轉動，取開始甩移到邊桌的軌跡數據來分析。

2.觀察與結果：

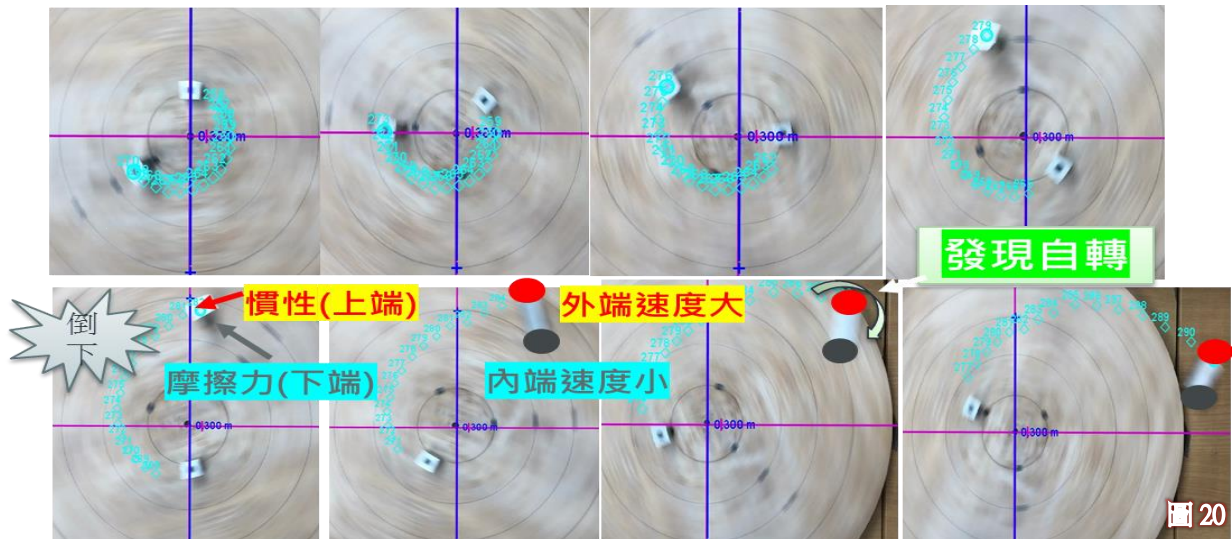
表1：大中小鋁塊甩離 tracker 對應圖表數據

鋁塊	小	中	大
質量(kg)	0.029	0.056	0.084
鋁塊啟動甩移時間(s)	9.732	8.998	7.965
鋁塊甩到邊界時間(s)	10.265	9.598	8.365
鋁塊啟動速率(m/s)	0.503	0.486	0.446
鋁塊甩到邊界速率(m/s)	1.043	1.176	0.937
鋁塊甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.683	1.625	1.471
鋁塊到圓桌邊界相對降速(m/s)	0.640	0.449	0.534
鋁塊啟動-甩到邊界動能差(kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	0.012	0.032	0.028
軌跡估計長度(m)	0.404	倒下不計	
甩離平均作用力(kg · m/s <sup>2</sup> )	0.030		

(1)隨著轉速增加，大、中鋁塊皆有倒下現象，一倒下就甩離出去，v-t 圖有明顯波動。甩離順序：大鋁塊 C→中鋁塊 B→小鋁塊 A。



## (2)中鋁塊 B 倒下過程影格呈現



**3 發現**：長型鋁塊倒下兩端有速差，引發同方向自轉。

鋁塊啟動，加速衝出，相對於圓桌邊緣，相對降速，以小鋁塊降最多。

### 4 討論

- (1)**甩離順序**：質量不影響甩離順序，立起來卻不同。大鋁塊 C 的啟動速率為 0.446m/s，小鋁塊 A 為 0.503m/s，我們推測是倒下後，鋁塊外端離圓心較遠，需要較大的向心力，當摩擦力不足以提供時，倒下立刻啟動甩離。
- (2)**自轉現象**：當鋁塊直立，下端被摩擦力帶著轉(速度較小)，上端向切線方向倒下落在外圈(速度較大)，速差造成一邊甩離一邊自轉的現象。
- (3)**降速**：大鋁塊 C 甩到邊界之瞬間速率為 0.981(m/s)，而當時圓桌邊界轉速為 1.471(m/s)，發現相對減慢，這和我們 tracker 所看到的加速甩離有些矛盾，需要設計進一步的實驗來解惑。
- (4)**計算平均作用力**：我們從公式  $K = \frac{1}{2}mv^2$   $\Delta K = FS$  推得  $F = \frac{\Delta K}{S}$ ，用動能差除以軌跡長度來算平均作用力。

**發想**：從單點初階實驗，粗略觀察到鋁塊會加速甩離，也看見相對桌邊減慢...，我們想知道摩擦力、向心力與切線方向合力的關係，於是考慮從雙點軌跡重新出發，細緻化真實軌跡。

## 第三部分：進階實驗(雙點探究)

**探究(一)**：鋁塊單點對應固定點軌跡探究(甩出瞬間特寫)

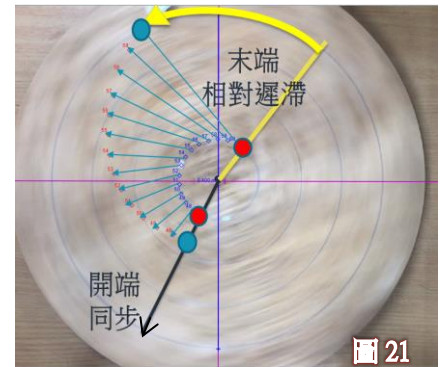
1.實驗設計：取小鋁塊 A 在半徑 5 公分處放置，標示鋁塊位置與放置固定點，進行整體步驟實驗，取 5-20 公分區間，作圖探究小鋁塊與固定點，動態偏移軌跡的相關性。

2.結果：同一瞬間，鋁塊移動點與固定點以藍色箭頭連接。

(1)單點鋁塊軌跡：像先切線衝出再螺旋向外走。

雙點對照：是先輻射離心方向再螺旋向外走。

(2) 末端黃線由圓心出發穿過放置點，發現實際軌跡相對遲滯落後。



**發想：**從遲滯現象，發現桌面摩擦力並非單純的向心力，移動中鋁塊受力如何變化？不同摩擦力、不同半徑轉速、，是如何影響螺旋軌跡？

**設立假說：**用離軌跡切線方向有一力，造成加速，使鋁塊甩離速度變快。

### 探究(二)：不同摩擦力對鋁塊甩離軌跡影響之探討

#### 1 實驗設計：

(1)取小鋁塊 A 在半徑 5 公分處放置並標示鋁塊位置與放置固定點，進行整體步驟實驗。

(2) 在桌面塗抹滑石粉減少摩擦力，重複步驟 1，以 tracker 細部分析甩離 10-20cm 間距軌跡

#### 2 實驗結果 I

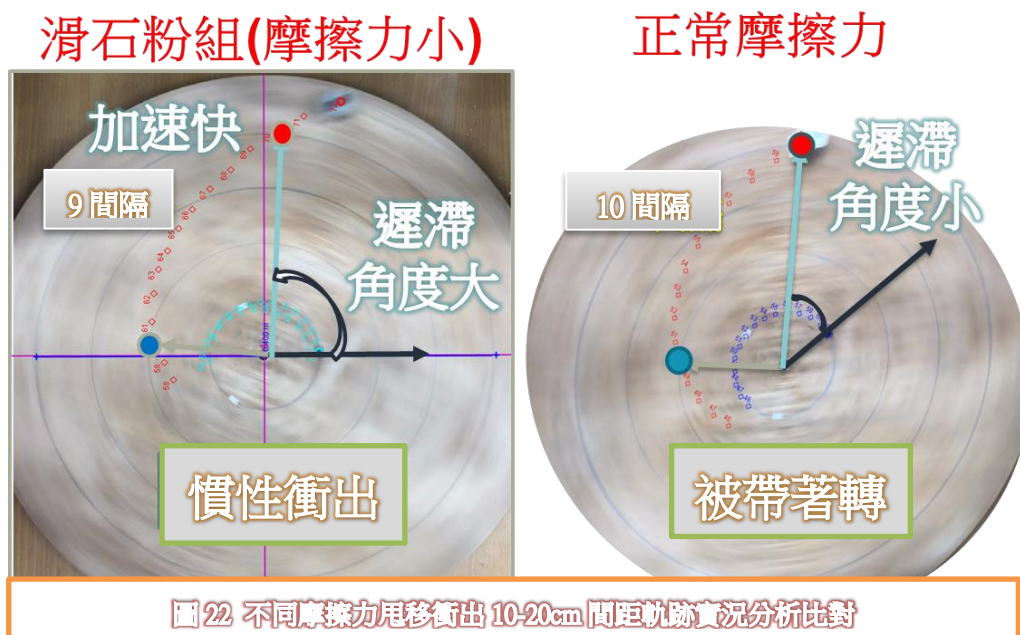


圖 22 不同摩擦力甩移衝出 10-20cm 間距軌跡實況分析比對

表2	甩出時間(s)	甩出速率(m/s)	通過10公分時間(s)	通過10公分速率(m/s)	通過20公分時間(s)	通過20公分速率(m/s)	平均加速(m/s <sup>2</sup> )	甩離軌跡曲率	遲滯角度
小摩擦力	1.367	0.356	2.033	0.575	2.333	0.825	0.833	漸小	大
正常摩擦力	1.333	0.450	1.667	0.609	2.000	0.864	0.766	差異不大	小

### 3.討論：

從數據中，鋁塊甩離皆有加快的趨勢，其中以小摩擦力的加速較大，末段較像直線衝出去。大摩擦力組鋁塊軌跡像被帶著轉。

### 4.小結論 I：

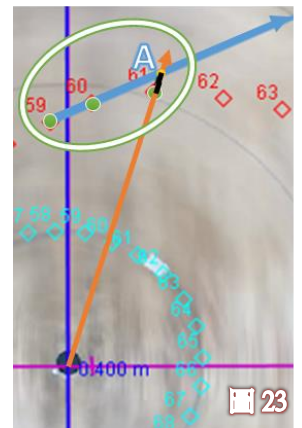
以慣性座標而言，摩擦力小的鋁塊甩離，加速快，末端曲率小

以相對加速座標而言，摩擦力小的鋁塊甩離，相對落後於固定點圓桌邊緣，遲滯角度大

**發想：**摩擦力小，造成鋁塊軌跡跟不上圓桌，使得更加直線切出去，數據顯示加速更快，那麼甩離時，摩擦力似乎不是課本教導的向心力方向，究竟為何？

### 5.進階作圖與數據結果 II

- 做法說明：以三軌跡點為一組，用前兩點連出藍色射線，橘色線條方向為圓心對準第三點外插到切線 A，取第三點與切線交點 A 之距離(黑色線段)表示向心力的相對大小。
- 因為受力必為加速度運動，短時間內視為等加速運動。因此 A 開頭的黑色線段位移，可推導出向心力，公式如下。



位移  $S = \frac{1}{2} at^2$  黑線

S 與 a 成正比  
向心力  $F = ma$   
F 與 a 成正比

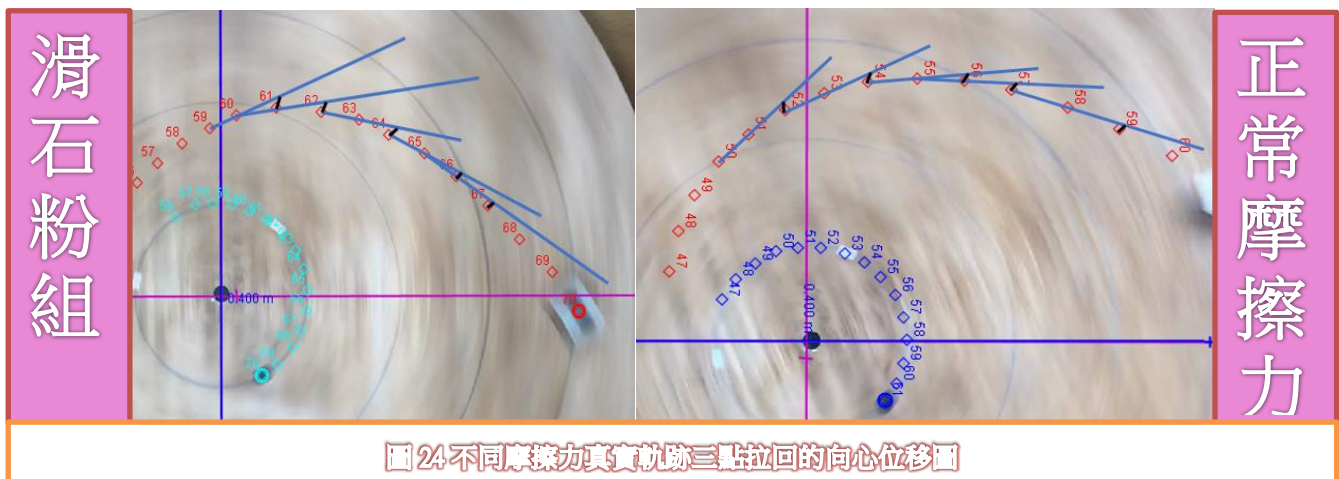
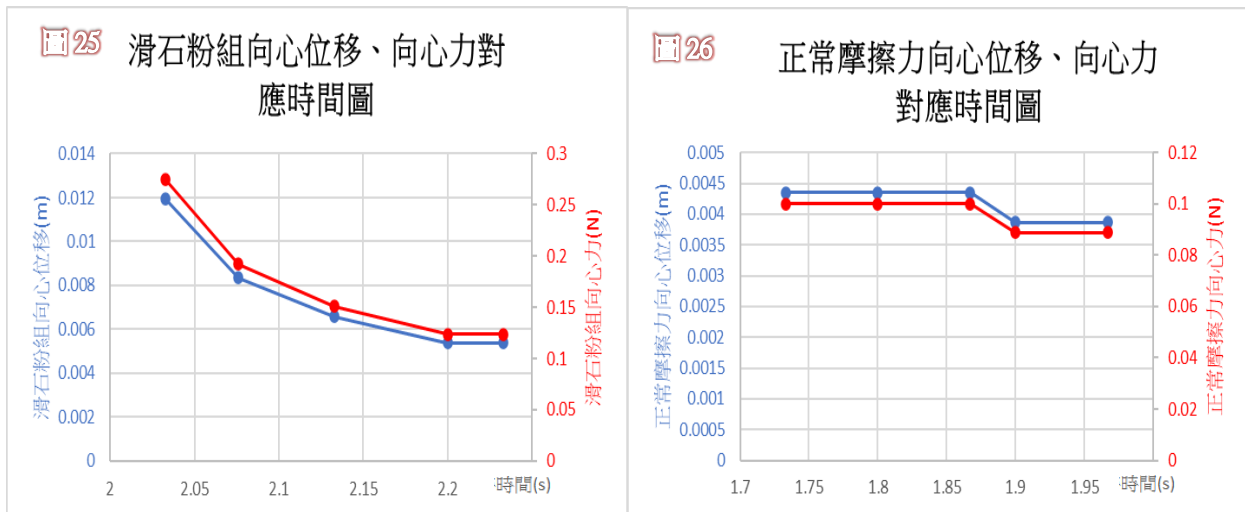


圖 24 不同摩擦力真實軌跡三點拉回的向心位移圖

(3)以 tracker 測出向心位移，做出**向心位移對應圖(藍色)**，副座標做**向心力對應時間圖(紅色)**。  
(鋁塊質量 0.02873 kg，三點軌跡向心偏移時間差為 1.5 時間間隔，tracker 時間間隔為 1/30 秒)



- 6.小結論 II：1.從圖片作圖，看見滑石粉組軌跡的**向心力**越來越小，從斜率可見減幅變小，  
向心力對時間的變化不是線性。。
- 2.正常摩擦力組軌跡的向心力從數據看出有變小，圖片作圖不明顯。

### 7.推導甩離合力分力

整合探究二 I、II 的數據與作圖，我們看見  
曲率小加速大、圓桌向心力變小的證據  
於是重作鋁塊甩離的力圖 27 推導如下：

- (1)非直線運動瞬間軌跡的垂直方向，必受**垂直軌跡向心力**(如黑色箭頭)由動摩擦力提供
- (2)分力，我們選擇

**圓桌向心力**與**圓桌切線加速的力**兩方向

(3)鋁塊移動的過程中，桌面提供的動摩擦力，  
為一定值前提下，只要鋁塊向心力減少，圓  
桌切線方向分力增就會增加，間接帶動鋁塊  
加速往外甩移。



**修正假說：**我們重新定義甩離動摩擦力方向為**瞬時軌跡向心力**。  
此力又分成**圓桌向心力**與**圓桌切線力**之分力

### 探究(三)：不同半徑相同鋁塊甩離軌跡影響實驗 (滑石粉組小摩擦力)

1.實驗設計：取三個鋁塊 A 分別在半徑 5、10、15 公分處設置移動點與固定點，追蹤各半徑鋁塊移動軌跡與固定點軌跡相關性。

#### 2.實驗結果

各鋁塊甩離軌跡與對應放置定點瞬時間兩點距離

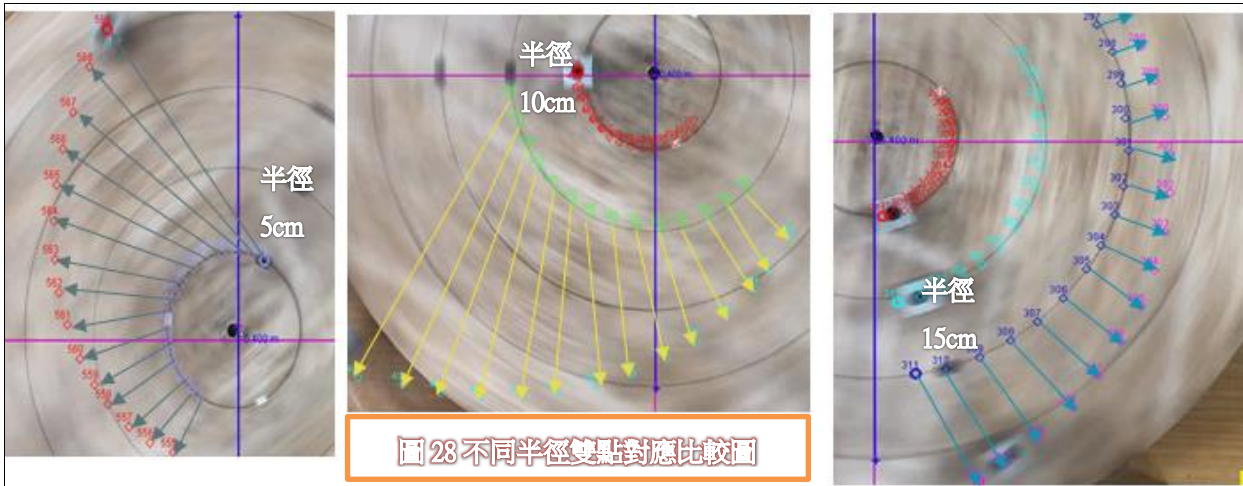


表 3：不同半徑鋁塊甩離 tracker 對應圖表數據

半徑(cm)	5	10	15
鋁塊質量(kg)	0.02873	0.02873	0.02873
啟動時間(s)	18.33	11.798	9.865
鋁塊啟動甩移之瞬間速率(m/s)	0.429	0.603	0.743
啟動向心加速度	3.681	3.636	3.680
啟動角速率	8.580	6.030	4.953
甩到邊界時間(s)	18.963	13.430	10.332
甩移至邊界之瞬間速率(m/s)	0.806	0.852	0.792
甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.240	0.942	0.799
鋁塊到圓桌邊界相對降速(m/s)	0.434	0.090	0.007

#### 3.結果與討論

(1)根據向心力公式  $a=V^2/r$  算出三者啟動加速度各為 3.681，3.636，3.680  $m/s^2$ ，由於質量皆控制為小鋁塊，確定最大靜摩擦力差異不大，取大鋁塊值計算最大靜摩擦力，最大靜摩擦係

$$\mu = \frac{v^2}{Rg} = a/g = 0.38$$

(2)半徑 15cm 最靠外側，相同角速度，向心力需最大，固定動摩擦不夠帶動時，優先甩離。

(3)加速的圓桌，半徑 5 公分的鋁塊啟動最晚，甩到邊界比較圓桌瞬速，發現掉速最大，推測為拖過桌面的距離最遠，受動摩擦力作負功導致相對於桌邊遲滯較大。

- 4.小結論：(1)放置不同半徑的鋁塊啟動時，向心加速度很接近，代表桌面最大靜摩擦力固定  
 (2)鋁塊加速往外甩離偏移過程中，鋁塊所經過路徑越長，甩出桌邊緣瞬間速率，  
 相對於同步的圓桌邊緣，降速最大。

### 探究四：圓周甩離動摩擦為定值之實驗設計與驗證

緣起：我們從雙點設計的探究(二)中，可以知道桌面最大靜摩擦力是固定的，圓周運動中的物體，有沒有數據能證明動摩擦力也是這樣？

(一)實驗步驟：

- 1.取一條虎克彈簧，做出伸長量與外力與的關係，抓彈性係數
- 2.取一圓形轉桌，塗滑石粉。
- 3.找出圓心並以圖釘將彈簧前端固定，將彈簧後端以細線固定於長型鋁塊中央(質量 95.5g)
- 4.以遙控車輪轉動圓桌，使鋁塊持續移動直到甩至圓桌邊界，即停止實驗。
- 5.將影片放入 Tracker 找出鋁塊離離圓心距離、鋁塊速度與彈簧伸長量做分析。



(二)結果：

彈簧的彈性常數  
 $9.9002(\text{gw/cm})$   
 $=9.7022(\text{N/m})$ 。

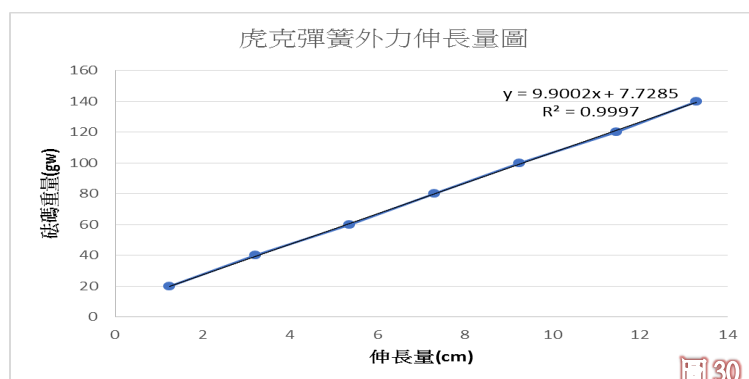


表4彈簧正向抓取長型鋁塊進行圓周運動相關數據

對應時間(s)	彈簧總長(cm)	彈簧伸長量(cm)	半徑(cm)	鋁塊瞬時速率(m/s)	圓桌向心力(N)	彈簧拉力(N)	桌面摩擦力(N)
0.50	10.25	0.00	13.4	0.18	0.022	0.00	0.02
1.00	10.25	0.00	13.4	0.24	0.041	0.00	0.04
1.50	10.25	0.00	13.33	0.28	0.056	0.00	0.06
2.00	10.25	0.00	13.45	0.33	0.075	0.00	0.08
2.50	10.25	0.00	13.48	0.38	0.103	0.00	0.10
3.00	10.25	0.00	13.62	0.46	0.145	0.00	0.14
3.50	10.25	0.00	13.53	0.51	0.180	0.00	0.18
4.00	10.25	0.00	13.58	0.60	0.250	0.00	0.25
4.50	10.25	0.00	13.74	0.66	0.300	0.00	0.30
5.00	10.76	0.51	13.64	0.71	0.356	0.05	0.31
5.50	11.57	1.32	14	0.81	0.449	0.13	0.32
6.00	13.25	3.00	14.95	0.97	0.596	0.29	0.31
6.50	14.15	3.90	15.86	1.07	0.684	0.38	0.31
7.00	15.88	5.63	18.36	1.28	0.858	0.55	0.31
7.50	16.96	6.71	19.35	1.39	0.954	0.65	0.30
8.00	19.31	9.06	21.43	1.64	1.199	0.88	0.32
8.50	20.41	10.16	23.32	1.78	1.293	0.99	0.31

(三)討論：

1. 圓桌轉動加速時，保持彈簧被鉛塊穩定向外動態伸長至圓桌邊界，此時鉛塊向心力由彈簧拉力與桌面動摩擦力提供，因此**桌面動摩擦力=鉛塊向心力-彈簧拉力**
2. 從上表我們觀察到彈簧在圓桌轉動前 4.5 秒沒有伸長，彈簧相對無拉力，代表此時桌面摩擦力為**靜摩擦力**，我們從 5 秒開始觀察。
3. 我們發現在彈簧動態伸長至鉛塊甩離到邊界，桌面動摩擦力數據趨於固定，平均 0.31N。  
根據動摩擦力  $F = \mu N = \mu mg$ ，我們實驗時塗滑石粉的大鉛塊與桌面的動摩擦係數為  $\mu = 0.31\text{N} / (0.095 \times 9.8)\text{N} = 0.33$ 。
4. 若再考慮虎克彈簧內摩擦力 7.73gw 合 0.075N，動摩擦係數修正為  $\mu = 0.235\text{N} / (0.095 \times 9.8)\text{N} = 0.25$ 。

(四)小結論：

彈簧加速向外拉至邊界時，拉住鉛塊的圓桌向心力為彈簧拉力+桌面摩擦力所提供。  
以此驗證鉛塊圓周運動甩離時，桌面動摩擦力為一定值。

#### 第四部分：模擬實驗(還原現場)

##### 實驗四(一)：長型鉛塊擺放方式在低摩擦力下甩離軌跡

緣起：瞭解小鉛塊甩離的原理軌跡後，那麼像履帶的長形物體在圓周運動甩離是什麼狀況？

1. 實驗步驟：

取一塊長 8.5cm 長條形鉛塊，中心置於 5 公分圓上，圓桌旋轉時，定義鉛塊前端為甲、中心為乙、後端為丙。在低摩擦力情況下中心乙皆在 5 公分處，分別進行斜放程度不同的三組實驗，結果如下表所示。





## 2.結果

表5：長型鋁塊三點旋轉軌跡表列比較~前端紫色(甲)、中心藍色(乙)、後端紅色(丙)

	放置一：甲前 5cm 圓上	放置二：甲前在 5cm 圓 與圓心二分之一處	放置三：甲前 向內與圓心呈一直線
鋁塊擺放截圖			
鋁塊開始甩離 瞬間截圖			
鋁塊中央點 (乙中)甩離至 邊界瞬間截圖			

3.推論：不論哪種擺法，不論外端在前或在後，最後皆從外端啟動，自轉帶領衝出圓桌。因此我們參考數次軌跡，製作出外側內側端速率探討示意圖，解釋鋁塊由外端帶動的自轉現象。

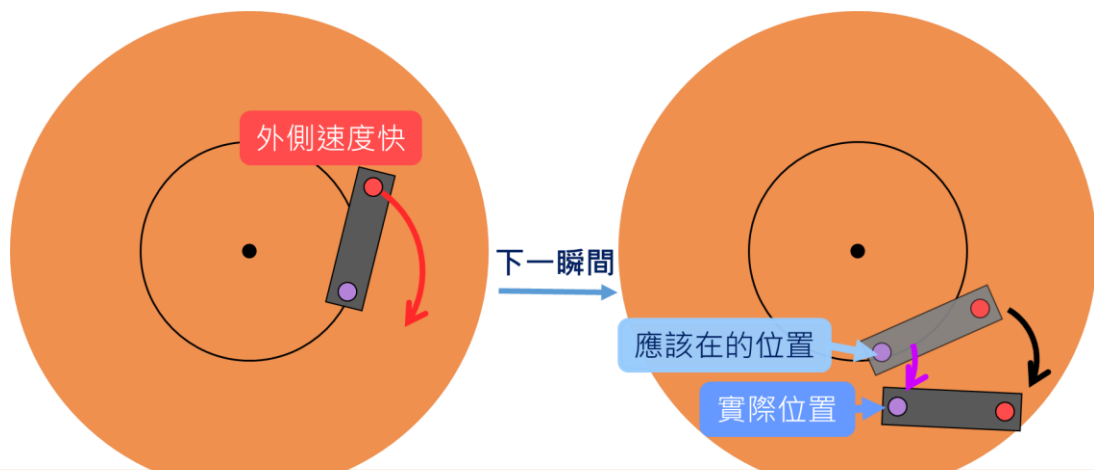


圖 32 長鋁塊外側內側端速率差異示意圖

不分前後點，距離圓心越遠的位置移動的速率越快，外端紅點會先開始甩移，導致鋁塊軌跡呈現自轉的現象，外側點再受到摩擦力切線加速力的作用，速差更大，若桌面夠大，外側點會甩到前方，帶動整個鋁塊甩出圓桌。

## 實驗四(二)：增加前端摩擦力對甩離軌跡影響實驗

緣起：我們看新聞得知履帶是後方固定不確實引起的甩移。因此將長鋁塊，前方加大摩擦力，去作圓周運動，探究前後點運動模式。

### 1. 實驗步驟：

同整體實驗步驟：木桌鋪滑石粉，改取一塊長 8.5cm 的鋁塊橫放，在鋁塊前端下方，取一小段雙面膠黏貼以加大摩擦力，另一端則保持不變，放在圓桌上方，鋁塊中心置於 5cm 圓切線上。如圖所示標示三點---前端紫色(甲)、中心藍色(乙)、後端紅色(丙)，比較甩離軌跡。



### 2. 軌跡結果

我們將同瞬間三點軌跡還原成長型鋁塊，以中央定點疊圖，很明顯可看出自轉。

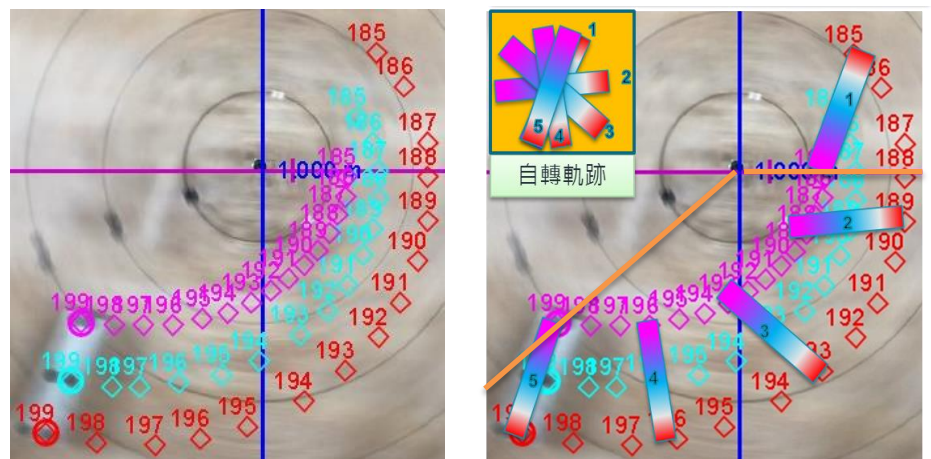


圖 34 增大一端摩擦力，長形體甩離自轉比對示意

### 3. 實驗數據：

表 6 長型鋁塊一端摩擦甩離三點 tracker 各數據表列比較 ~前端(甲)、中心(乙)、後端(丙)

鋁塊抓點	前(加大摩擦力)	中	後
鋁塊質量(kg)	0.08382	0.0838	0.0838
鋁塊各點啟動甩移時間	6.765	6.532	6.465
鋁塊各點啟動甩移之瞬間速率(m/s)	0.396	0.472	0.615
鋁塊開始甩移圓桌之瞬間速率(m/s)	0.348	0.318	0.347
圓桌施力鋁塊各點加速差值(m/s)	0.048	0.154	0.268
鋁塊各點甩到邊界時間(s)	7.432	7.365	7.298
鋁塊各點甩移至邊界之瞬間速率(m/s)	0.964	1.035	1.265
鋁塊各點甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.624	1.57	1.57
鋁塊到圓桌邊界各點相對降速(m/s)	0.66	0.535	0.305

## 4.討論

### (1)甩離啟動

- 勺.啟動由摩擦力小的末端發動外移，摩擦力大的前端才跟著偏轉，有時間差。
- 夕.鋁塊前端開始甩移之瞬間速率為  $0.396(\text{m/s})$ ，圓桌之瞬間速率為  $0.348(\text{m/s})$ ，發現甩離後相對於半徑  $5\text{cm}$  的定點速率，瞬間是加速甩出
- 冂.鋁塊前端增大摩擦力時被圓桌帶著走，但摩擦力較小的後端，直接甩出外端，導致甩移瞬間加速幅度會最大。

### (2)甩出邊桌

- 勺.鋁塊前端甩移至邊界之瞬間速率為  $0.964(\text{m/s})$ ，同時圓桌邊緣瞬間速率為  $1.624(\text{m/s})$ ，明顯看見當甩離圓桌瞬間，相對於圓桌邊緣速率，是減速。
- 夕.同一鋁塊三端速率有很大不同，判斷是鋁塊自轉導致

## 5.小結論

- 相對於原始內圈放置點，摩擦力帶著甩離的鋁塊加速向外走，
- 相對於外圈邊桌旋轉速率，甩離過程到外邊，是相對減速，摩擦力持續做負功，。

## 肆、整體討論

### 一、實驗細節

#### (一)手撥加速圓桌

- 一開始是用手撥動圓桌側面來轉動，但實驗後從(v,t)圖有明顯數據異常跳動，懷疑是手撥動造成。
- 用手撥動圓桌，抓取的單點軌跡圖，很明顯鋁塊加速甩離之前，就已慢慢離開原放置定點時，偏移後又靜止。這現象確定拍打會影響甩離瞬間的準確度。

#### (二)遙控車輪加速圓桌

我們改用遙控車輪加速轉動圓桌側面，速率明顯穩定很多。之後的實驗，轉桌動力全部用遙控車輪穩定加速

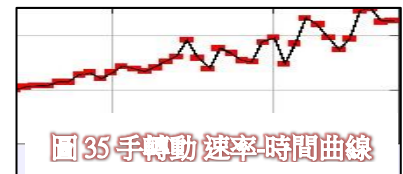


圖 35 手轉動 速率-時間曲線

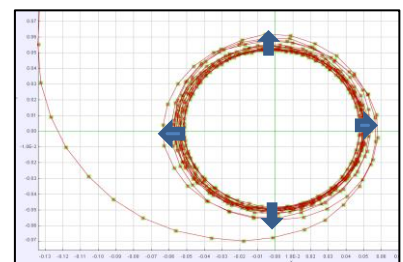


圖 36 手轉動平面軌跡圖

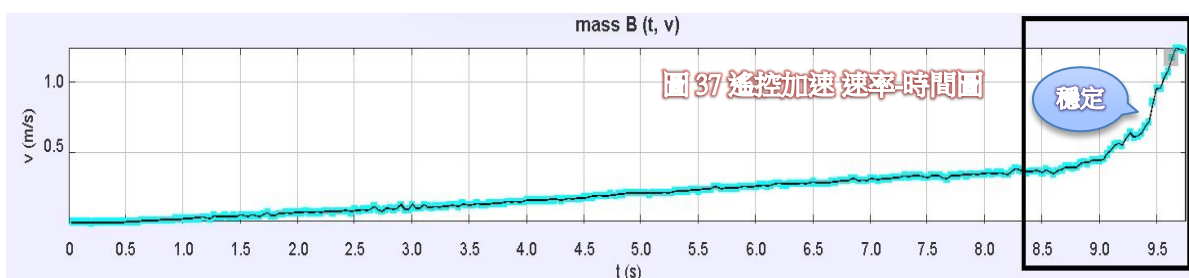


圖 37 遙控加速 速率-時間圖

### (三) 摩擦力設定探討

在蒐集新聞資料時，發現履帶原本是固定在曳引車上的。為了模擬出履帶固定力不同的情況，我們以滑石粉降低摩擦力、雙面膠增加摩擦力進行實驗。

## 二、圓周運動基礎原理探討

### (一) 向心加速度大小與半徑探討

圓周運動向心加速度公式如下

$$a_{\text{向心}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/t)^2}{R} = 4\pi^2 R/t^2 = \omega^2 R$$

考慮用移速率  $v$  有半徑因子，可以看出向心加速度  $a_{\text{向心}}$  與圓桌半徑  $R$  成正比，因此物體轉動相同角速率  $\omega$  時，半徑越大，向心加速度越大(向心力越大)。顛覆國中理化教的旋轉半徑大，向心力小的迷思。

### (二) 甩移理論與質量無關之公式推導

由於物體作圓周運動期間，啟動甩移瞬間向心力由最大靜摩擦力提供，我們列出公式

$$\begin{aligned} F_{\text{向心力}} &= F_{\text{最大靜摩擦力}} \\ F_{\text{向心力}} = ma &= m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = \mu mg = F_{\text{最大靜摩擦力}} \\ \omega^2 &= \mu g/R \end{aligned}$$

啟動瞬間，旋轉角速度只跟摩擦係數  $\mu$ 、重力加速度  $g$  與旋轉半徑  $R$  有關，與質量  $m$  無關。

### (三) 摩擦力觀點

若旋轉速率變快，最大靜摩擦力不足以提供向心力時，則啟動甩移。

$$F_{\text{動摩擦力}} < F_{\text{最大靜摩擦力}} = F_{\text{向心力}}$$

最大靜摩擦力轉變成較小的動摩擦力，抓不住鋁塊，甩出造成摩擦合力方向改變，開始非向心力方向的加速，形成甩出軌跡。

### (四) 動能差值求平均受力之理論

$$\text{動能公式為 } K = \frac{1}{2}mv^2。 \quad \frac{K_{\text{甩到邊界動能}} - K_{\text{啟動動能}}}{S_{\text{鋁塊啟動到邊界軌跡長度}}} = F_{\text{平均作用力}}$$

將啟動和甩到邊界的動能差除以軌跡長度  $S$ ，可得到這段時間的平均作用力。

鋁塊加速來自摩擦力有效分力的帶動，因此平均作用力相當於動摩擦力在軌跡切線的分力平均值。

### 三、摩擦力對圓周運動甩離軌跡之探討

#### (一)影片甩移軌跡

1.由實驗速度圖發現，甩移速率明顯加速，代表軌跡方向必受力。

由理論因為鉛塊桌面正向力相同，摩擦係數相同，所提供的**摩擦力為定值**。

2.一開始的疑惑是，甩出後的向心力是否依然保持定值？分析模型直到第三部分探究(二)，由軌跡三點作圖，發現切線拉回距離漸小，確立甩移的**向心力漸減**。

3.鉛塊甩移前一刻，摩擦力全部用在向心力；甩離後隨著軌跡切出，動摩擦力漸漸分到**切線分力**，**向心力**相對減少，更拉不回來，於是弧度漸減拋出，加速甩離桌面，如圖示。

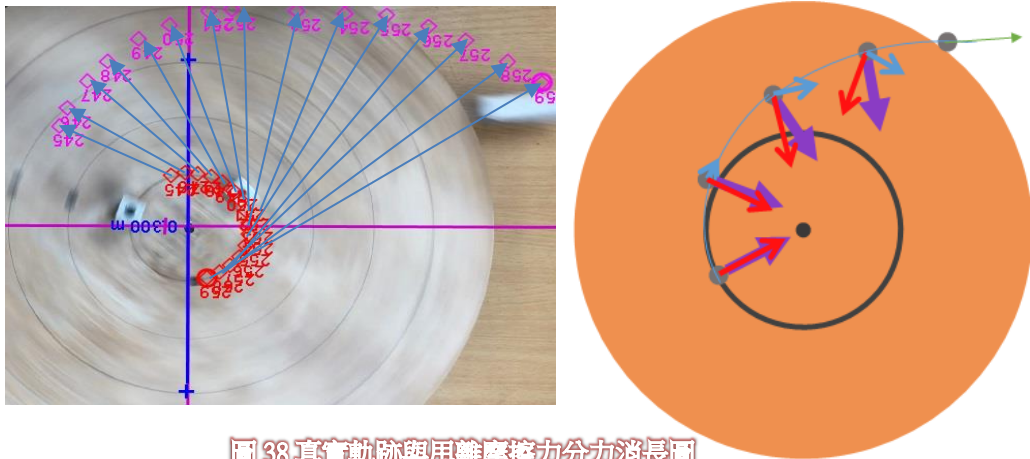


圖 38 真實軌跡與甩離摩擦力分力消長圖

#### (二)鉛塊、圓桌相對軌跡

1.圓周運動中的鉛塊速率，若往外甩離，儘管影片與現場明顯感受鉛塊加速，但是相較於邊桌速率，相對是減速。

2.我們進一步，將鉛塊甩出軌跡相對於原放置點對應半徑所在，以加速座標排除圓桌轉動，做出相對後退的軌跡示意圖。

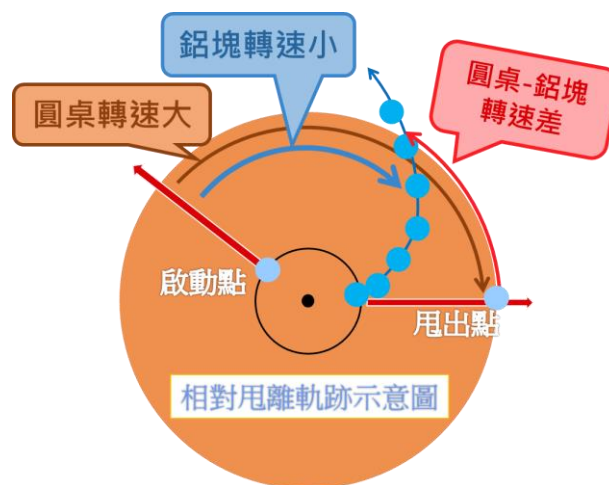


圖 39 從啟動到甩出，甩離相對後退軌跡示意圖

3.排除圓桌轉動後，鋁塊甩離軌跡非直線，推測是圓桌摩擦力造帶動鋁塊轉動，當甩離的時候，鋁塊跟不上圓桌轉速，相對後退(與圓桌轉動方向相反)甩離。

#### 四、曳引車履帶掉落事件實境解讀

##### (一)曳引車轉進內側車道的示意圖：

大型車輛因為內輪差過大及道路設計關係，在此路段直接轉進內側車道容易撞上安全島，所以曳引車駕駛必須切到外側車道。因路口特殊須立刻急轉，導致後端履帶已經在圓型軌跡的外側，引發速差。



##### (二)履帶甩出危險區

根據新聞影片曳引車行車路徑(切到外側車道)，推測不同車速、板台摩擦力下履帶掉落位置。板台與地面高度差約 1.5 公尺，由  $S = \frac{1}{2}at^2$  得出  $t = \frac{\sqrt{15}}{7} \approx 0.553s$ ，算出履帶甩出到落地的距離，依照 google 地圖比例尺，標示出履帶甩出會經過的危險區。

##### 1.直線衝出

假設長形履帶甩出時，不受到板台摩擦力影響而直線衝出，以下是三種車輛速度、兩種不同釋放時機下危險區的範圍：

狀況(1)：車輛秒速 16.67m/s(時速 60，速限)  
 $0.553s * 16.66 \text{ m/s} \approx 9.22m$

狀況(2)：車輛秒速 20m/s(時速 72)  
 $0.553s * 20 \text{ m/s} \approx 11.1m$

狀況(3)：車輛秒速 25m/s(時速 90)  
 $0.553s * 25 \text{ m/s} \approx 13.8m$



因為履帶在轉彎後隨時都有可能甩出，上圖將兩種釋放時間危險區連起來的部分，都是履帶掉落可能經過的區域。

## 2.履帶後端自轉衝出：

(1)假設長形履帶，甩出時受到板台摩擦力與前端固定力的影響，而由後端開始自轉，直到前端固定繩斷裂履帶才慣性飛出，造成危險區面積增大。

(2)因為從開始自轉到履帶慣性飛出有一段時間差，所以危險區會比不受摩擦力時離轉彎路口更遠。以下是兩種車輛速度下危險區示意圖：



圖 44 車輛時速 60km/h(速限)，時速 70km/h，(超速)，甩出前受板台摩擦力影響示意圖

### (三)建議增設告示牌：

- 1.大型車內輪差大，若直接開到內側車道，後輪可能撞上安全島
- 2.急轉彎時，車速過快會造成掉落危險區加長
- 3.如果甩出時前端受到較大的摩擦力，掉落物甩出時會自轉加大，危險區面積大增。
- 4.車輛提早轉彎，彎度小，能降低車上物體掉落的風險。
- 5.根據道路交通標誌標線號誌設置規則，警告標誌設置位置與警告標的物起點之距離，應配合行車速率，自四五公尺至二〇〇公尺為度。
- 6.我們認為應在路口前一百公尺增設「前有急轉彎，嚴禁超速」、「大型車輛嚴禁行駛內側車道」等告示牌，再配合政府降低市區速限的政策，能避免不熟悉路況的駕駛將車上物體甩出。







曲率半徑		9.1公尺(沿外線)			7公尺(沿外線)			4.5公尺(沿外線)		
時速 (km/h)	秒速 (m/s)	向心力 (kgw)	貨重倍率	繩數	向心力 (kgw)	貨重倍率	繩數	向心力 (kgw)	貨重倍率	繩數
50	13.89	21631	2.16	4.3	28120	2.81	5.6	43742	4.37	8.7
60	16.67	31148	3.11	6.2	40492	4.05	8.1	62988	6.30	12.6
70	19.44	42396	4.24	8.5	55115	5.51	11.0	85734	8.57	17.1
80	22.22	55374	5.54	11.1	71986	7.20	14.4	111979	11.20	22.4

- 1.若以歐規 5000 公斤重的貨車安全帶數量計算，曳引車載重 10 公噸重的履帶，在速限 60km/h 行駛此路口，正常沿內線，推估向心力需要繩數 8.1 條(貨重倍率 4.05)，若不減速由外線切內線在急轉彎(曲率半徑 4.5 公尺)，所需繩數會暴增到 12.6 條(貨重倍率 6.3)。
- 2.我們發現急轉彎所需的向心力是貨物本身的數倍，像十噸履帶這種極重貨物，一旦超速，急轉彎或前後固定繩索，僅由分力提供巨大的向心力，主繩更容易斷裂，造成抓不住履帶的慘劇。

## 伍、總結論

### 一、圓周運動甩離鉛塊受力機制解說圖示

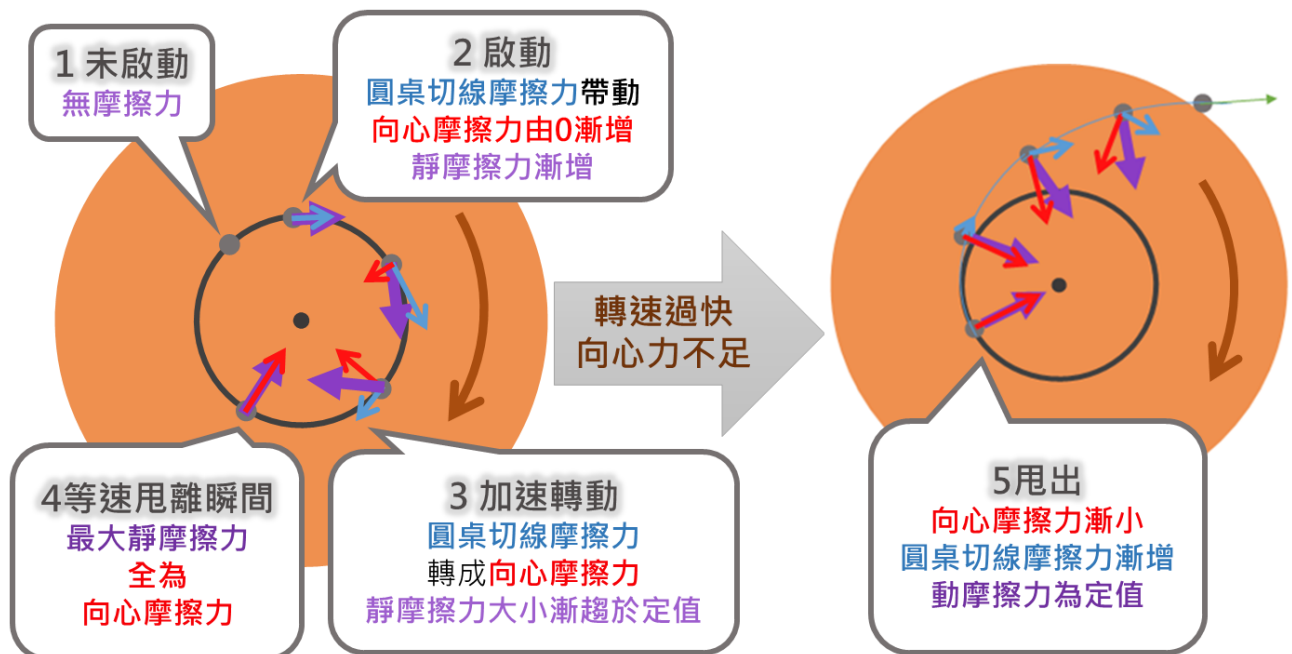
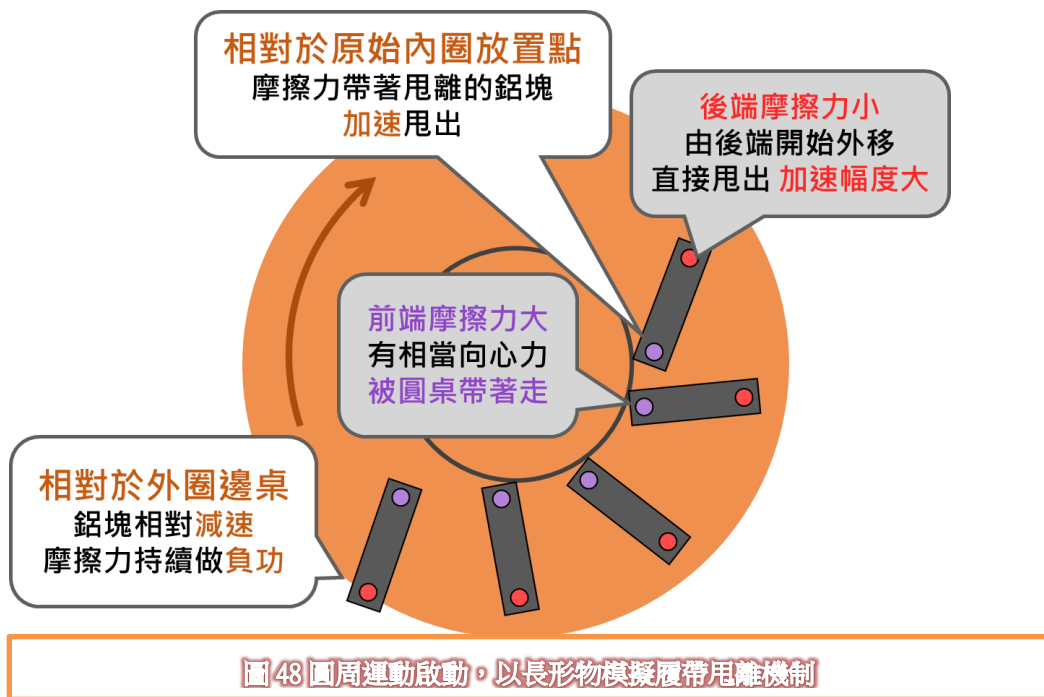


圖 47 圓周運動啟動，甩離前甩離後，鉛塊受力機制

## 二、圓周運動長形物模擬履帶甩離機制

- (一)長型鋁塊由小摩擦力端(未固定端)開始移動加速甩出
- (二)在桌面外側摩擦推力大，造成速差開始同方向自轉
- (三)甩出瞬間速度相對落後於旋轉桌邊(載物車體)
- (四)甩出旋轉桌後為慣性飛出，直到落下。



三、tracker 抓鋁塊甩離啟動速率，可以算出滑石粉轉桌的最大靜摩擦係數為 0.38；用彈簧連著鋁塊可從彈簧伸長量，間接算出動摩擦係數為 0.33，有別於課本摩擦力實驗，我們以鋁塊圓周運動模式，提供動靜摩擦相關數值。

四、貨車不減速急轉彎，導致載物所需向心力大增，若固定阻力不足以提供，則有由後端轉飛出的疑慮；針對此路口同樣車速，外線轉彎；內線轉彎、內線切外線急轉彎，履帶側綁的繩子承受力與曲率半徑 9.1m、7m、4.5m 成反比，為 1：1.3：2，當大車載重極大噸數的物體，在行車前需要確實算清楚綁繩對載物的效力，以免低估突發的路況災害。

## 陸、參考資料

一、鏡週刊。10 噸履帶過彎甩飛壓爛轎車，線上檢索日期：2021 年 10 月 29 日。

網址：<https://pse.is/4r6qet>

二、vscctk 車輛安全審驗中心 車安通訊季報(2019)。車輛裝載貨物網綁規範介紹，線上搜索

日期：2021 年 10 月 31 日。網址：[6\(vsc.org.tw\)](http://6(vsc.org.tw))

三、youtube.(2015)。圓周運動【觀念】向心力（選修物理I），線上搜索日期：2022 年 2 月

24 日。網址：[https://www.youtube.com/watch?v=sROyA4xpZXo&t=2s&ab\\_channel](https://www.youtube.com/watch?v=sROyA4xpZXo&t=2s&ab_channel)

四、youtube.(2015)。牛頓運動定律【例題】兩物重疊不相對滑動：施力於下方物體（選修物

理I）線上搜索日期：2022 年 9 月 4 日。網址：

[https://www.youtube.com/watch?v=xQqKfi5L7LM&ab\\_channel](https://www.youtube.com/watch?v=xQqKfi5L7LM&ab_channel)

五、Lambda 極客(2017)。如何用摩擦係數求加速度：詳盡的方法和事實，線上搜索日期：

2022 年 10 月 4 日。網址：[如何通過摩擦係數求加速度：詳盡的方法和事實 -](#)

[lambdageeks.com](http://lambdageeks.com)

六、國中自然科第四、五冊(翰林 2022 出版)。

## 柒、實驗歷程心得

### A 起步

履帶甩出地點距離我家很近，發生車上物件拋出擊扁路旁車讓我感到非常恐怖，那是每天騎車上學必經之地。很想知道到底物件是怎樣掉落的軌跡感到好奇。為了還原事件發生的狀況，我們到現場收集資料，還請爸爸開車模擬數次，從行車紀錄器找到關鍵視角。實驗開始嘗試多種圓形器材，例如腳踏車輪、實際模擬轉彎等各式各樣的想法，最後才決定使用圓桌及鋁塊進行實驗。

### B 實驗操作

因為從未接觸過 **tracker** 這類追蹤軌跡的軟體，我們必須查詢網路資料從零探索。還好學長幫助解惑，我們開始拍片分析自己的數據，但是實際操作問題一堆。一開始使用手機支架來錄影，發現拍攝角度不是垂直而改用學生桌；又因抓到鋁塊因會反光軌跡斷斷續續，我們加上黑色的圓形貼紙全部重拍。手轉圓桌不穩定，速率曲線跳動，我們改遙控車輪來轉動圓桌。各種的模擬情況系統補齊實驗，隨著實驗方式改良，我們漸漸得到了穩定的數據，可供探索研究。

### C 數據作圖

熟悉了 **tracker**，我們在軌跡的解釋一直與課本所說有差異而感到迷惑。剛開始使用 XY 圖，發現鋁塊軌跡不是課本說的切線噴出，也不是只有那一瞬間才被甩出去。為了更好呈現，我們用真實軌跡截圖代替。摩擦力、向心力、合力，圓桌切線、軌跡切線，從一大堆分析作圖中，用移動軌跡的切線偏離進而得到甩離向心力確實漸小，在諸多不確定中，總算得到一絲確認。

## D 討論點滴

我們從課本觀念出發，但是有新的數據推翻原本的解釋，或者觸發新的小觀念，曾經辛苦產出的推測一次次翻船...。隨著每次修正，我發現我們能夠正確解釋的數據也越來越多。...原以為只是簡單的圓周運動切線甩出，在隨著深入探究，我們理化學到所有「力」的觀念全部上陣，互換變動的力找出彼此消長，總算合理解讀，我們從一段轉圈圈的歷程衝出來，心中無比的感動。

## E 全國科展

市賽連張散佈圖都沒有，簡直不敢相信能參加國展...，硬著頭皮，我們將全部數據重抓除錯，補圖補做實驗，過程依然狀況不斷...

新作的虎克彈簧實驗原本出現較大摩擦力，後來才看到是加速過慢，導致測到不穩定的靜摩擦力...，要快速，不能停，重作就知道訣竅。

又如三點拉回向心位移到底時間差是幾個？我從滾球實驗中的加速度計算得到啟發，從 1 個 2 個修正到 1.5 個...，又如用動能算出平均作用力，原以為是動摩擦定值，都算出動摩擦係數 0.11 了，但是當組員問摩擦力跟軌跡垂直，能相乘算功嗎，我們陷入一片沉默...

後來我們改用彈簧的方法，真實算出滑石粉桌面動摩擦係數 0.33，最大靜摩擦力係數 0.38。那計算題才會有的數據，凌晨 3 點真實出現在眼前，非常不可思議。

## F 回到起點

有一天我們重新到現場觀察行車，發現那裡先右彎再左彎，真的是一個危險的路口，尤其是載重物的大車。

我們在報告上增加有關履帶在各情況的危險區，估算半徑用數據分析受力。其中讓我最為驚訝的是有關綁繩承受力的部分，在速限 60 公里時，當我算出繩子需要承受超過 4 萬公斤重的力，簡直驚呆了，綁繩需要承受的力竟然是載物 4 倍重的力！如果如履帶司機外切內線後急彎轉，數據增加到 6.3 萬，超速更是 8.6 萬公斤重...，看到增加的力也是物重的倍數，十噸履帶，秒懂安全真的不是多加幾條貨物繩能解決的。

做這研究之後，我們對此路段更有使命感，尤其是大車。我們認為需要相關單位對此路段的行車速率或車道變換方式做限制，或宣導或警語，希望我們的作品對家鄉的行車安全有些許的貢獻。

## 【評語】 030105

本研究主要分析了長形物體圓周運動時，被甩出的現象。可應用在貨車轉彎的交通警示。在研究中使用三種長方形鋁塊做直立與橫躺之測試分析。如果要應用與貨車轉彎的分析，宜多考量貨物與車子的相對重心、相對運動、與動量守恆等問題，相對於轉桌，可以將問題的分析更加貼近真實的狀況。

# 作品海報

抓不住你？衝出重圍！

~以 *tracker* 追蹤圓周運動甩離軌跡之探究

# 摘要

從新聞事件發想，用圓桌轉盤模擬物體圓周運動，並用tracker追蹤甩離的軌跡。從實驗得知，轉盤轉速越快，物體離轉盤圓心越遠，需要向心力愈大，當超越桌子最大靜摩擦能提供的向心力時，物體向外加速移動，隨著不足的動摩擦力，轉出螺旋軌跡。利用座標xy圖顯示質點的甩離軌跡，實際相片作圖，測量影格相關數據，還原甩離真相。長形物體受摩擦力作用，若轉彎時前後離圓心半徑不同，造成速差，會自轉甩出。從甩離軌跡型態與加速現象，發現甩離的過程，向心力漸減、切線加速力量漸增。綜合實測數據，我們推出履帶甩離運動細部機制。二探現場發現路口特殊，速限前後急轉彎，十噸履帶向心拉力暴增，建議載重大車提早切外線，減速過彎，是唯一安全之路。

## 壹、前言

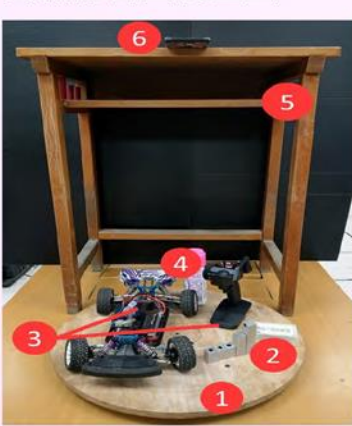
一天上學途中，看到台17路邊有個超大履帶，底下壓垮一輛白車。當日新聞報導那是一輛曳引車轉彎時，導致車上笨重的履帶直接滑出，飛落壓垮路邊的小客車。看了影片我們很好奇，究竟是甚麼原因讓原本在曳引車上的履帶如此驚悚的滑落？



轉彎甩離是甚麼軌跡？於是我們設計各種變因，並利用tracker軟體追蹤圓桌轉盤上物體的甩離軌跡，希望能用實測數據軌跡，找到蛛絲馬跡，還原當時履帶掉落的情形，解開出軌的秘密。

## 貳、研究設備與器材

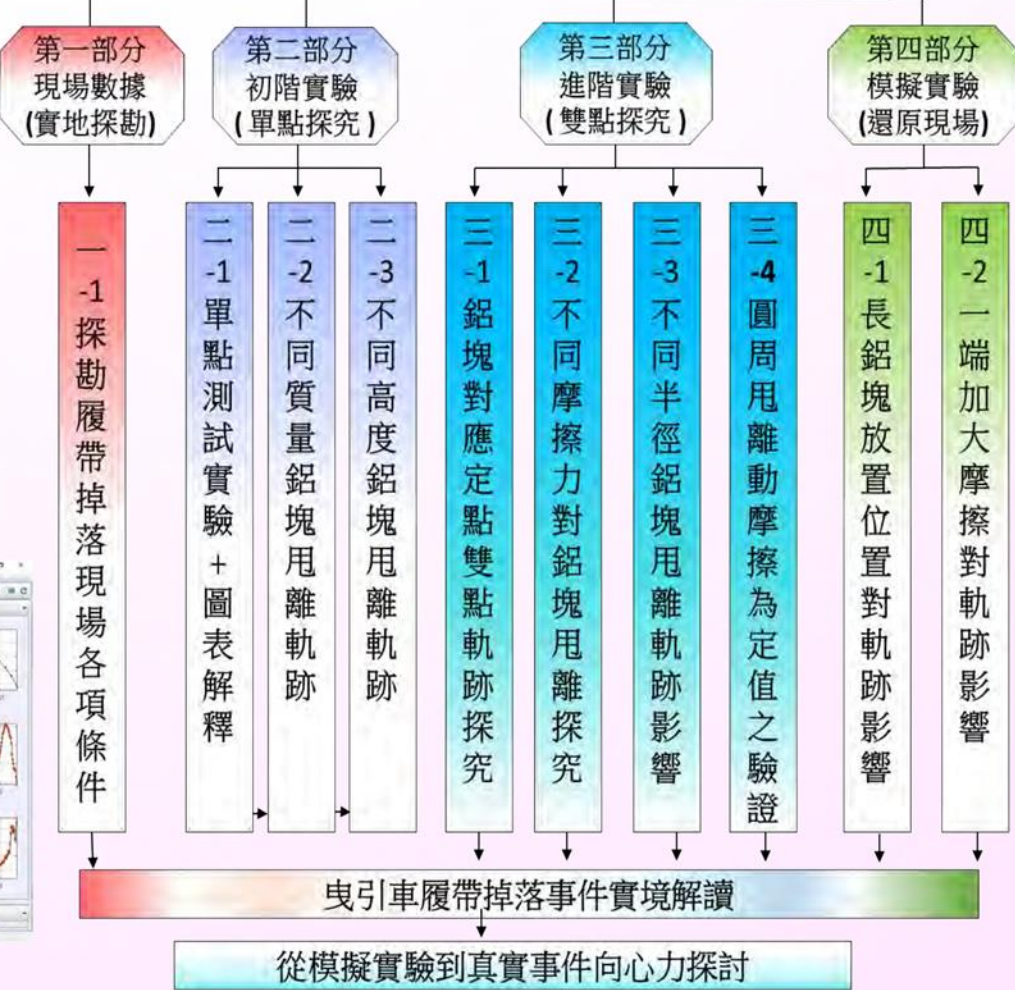
實驗器材與裝置圖：



- 1.可旋轉的圓桌
- 2.標準鋁塊
- 3.四輪驅動車
- 4.滑石粉
- 5.學生桌
- 6.手機
- 7.Tracker軟體



### 履帶甩離軌跡之探究



## 參、研究過程與結果

### 第一部分：事件現場數據(實地探勘)

#### (一)：履帶掉落新聞影片截圖



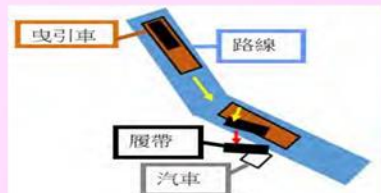
#### (二)：曳引車路線圖



#### (三)：司機關鍵路口視野



發想：經過觀察現場以及更詳盡的了解曳引車及履帶後，我們畫出事件示意圖，開始懷疑履帶的掉落是否跟曳引車轉彎的彎度或履帶的形狀有關？於是著手進行後續實驗



### 第二部分：初階實驗(單點探究)

#### 實驗前置作業

1. 取一半徑25cm圓形轉桌
2. 以圓心往外每5cm畫一圓，形成半徑為5-20cm之同心圓
3. 實驗期間，在圓桌正上方約1公尺處固定手機以攝影紀錄

#### 整體步驟簡述

1. 取鋁塊，置於適當半徑圓周
2. 以遙控車輪接觸圓桌側面轉動
3. 由慢而快直到鋁塊甩出圓桌，即停止攝影
4. 以Tracker軟體，分析鋁塊質點甩離軌跡



#### 實驗二(二)：不同質量鋁塊，橫放在相同半徑甩離軌跡之探討

實驗編號	1	2	3	4
原始放置圖				
鋁塊甩離順序	大→中→小	中→小→大	中→小→大	小→中→大

#### 實驗設計

同前述整體步驟簡述，將A, B, C不同大小鋁塊中心同時橫放於半徑5公分圓周上，進行加速轉動，觀察鋁塊甩離順序。

#### 發現

多次實驗，每一次實驗鋁塊甩離的順序沒有規則性，多次同時甩出。

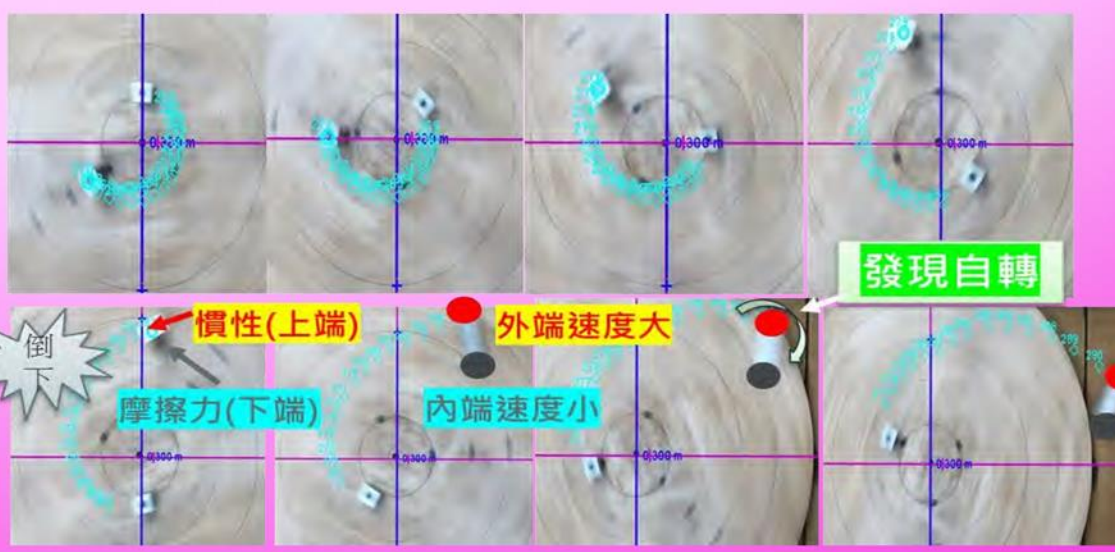
#### 結果

鋁塊啟動甩移不受質量影響。

#### 實驗二(三)不同高度鋁塊，直立在相同半徑甩離軌跡之探討

步驟：將A, B, C不同大小鋁塊等分，同時置於半徑5公分圓周上，取開始甩離的軌跡數據來分析

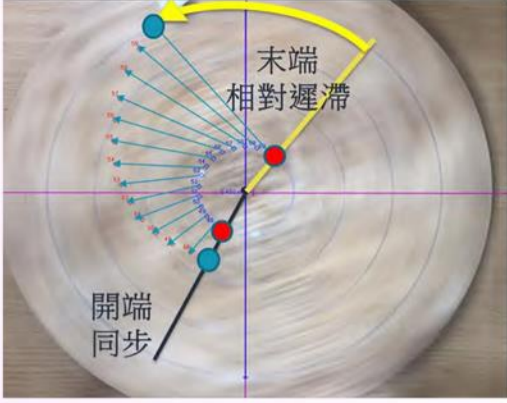
鋁塊	小	中	大
質量(kg)	0.029	0.056	0.084
鋁塊啟動甩移時間(s)	9.732	8.998	7.965
鋁塊甩到邊界時間(s)	10.265	9.598	8.365
鋁塊啟動速率(m/s)	0.503	0.486	0.446
鋁塊甩到邊界速率(m/s)	1.043	1.176	0.937
鋁塊甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.683	1.625	1.471
鋁塊到圓桌邊界相對降速(m/s)	0.640	0.449	0.534
鋁塊啟動-用到邊界動能差(kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	0.012	0.032	0.028
軌跡估計長度(m)	0.404	倒下不計	
甩離平均作用力(kg · m/s <sup>2</sup> )	0.030		





### 第三部分：進階實驗(雙點探究)

#### 探究(一)：鋁塊單點對應原處軌跡探究(甩出瞬間特寫)



**實驗設計** 取小鋁塊A在圓桌半徑5公分處放置並標示鋁塊位置與放置固定點，進行整體步驟實驗，觀察A鋁塊a偏移軌跡，與b定點軌跡的相關性。

**作圖說明：**

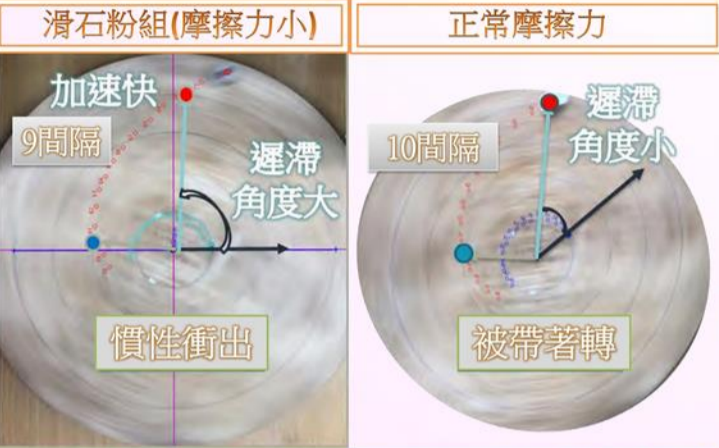
甩離期間，以藍色箭頭連接固定點與移動點。開端黑線延長連接，發現是輻射離開圓心。末端黃線由圓心出發穿過放置點，發現實際軌跡相對遲滯落後。

**討論**

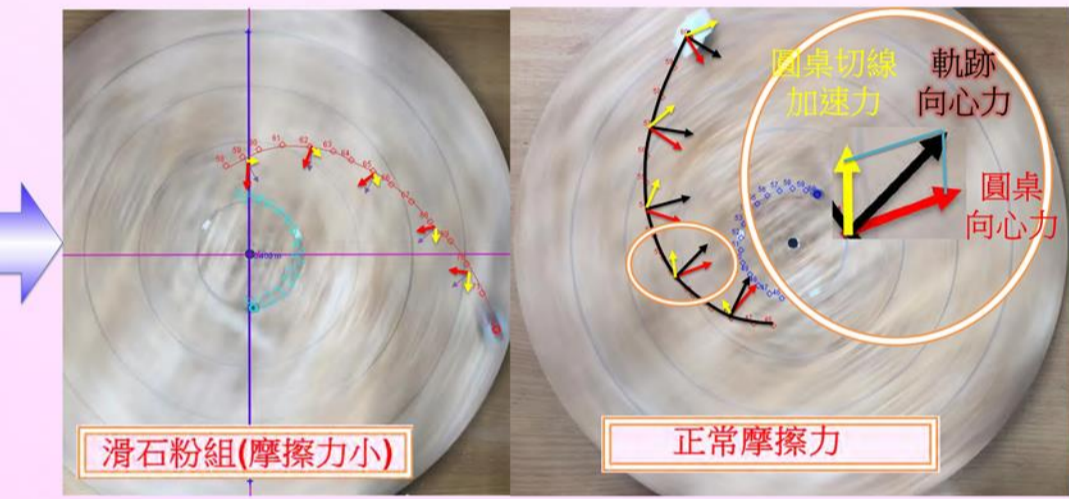
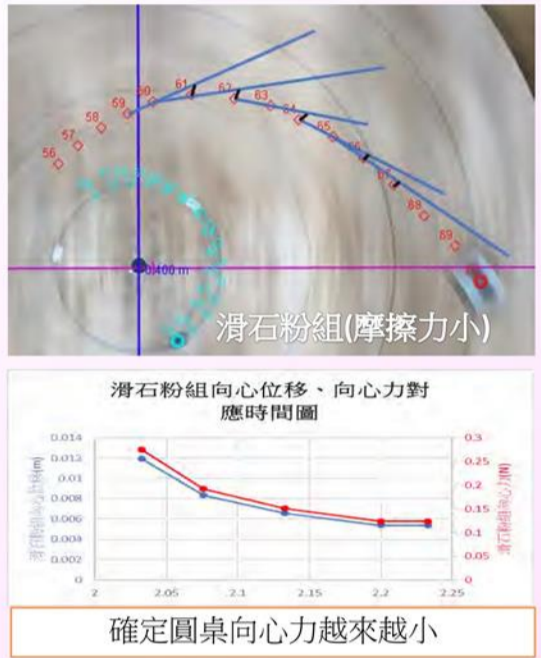
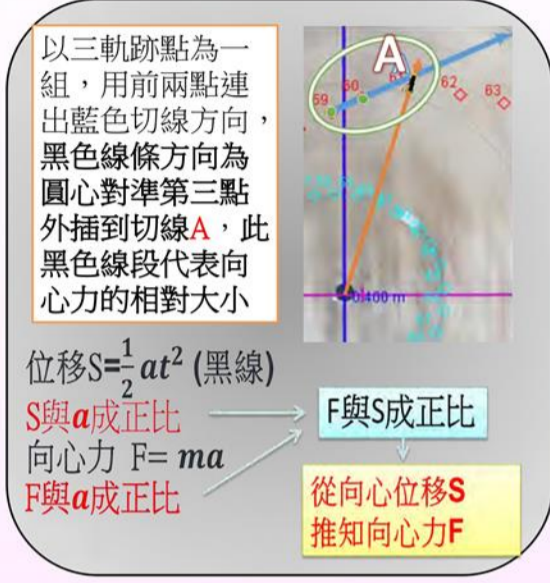
- 1.從單點探究，我們原本以為鋁塊甩離出原放置定點時是以螺旋狀向外加速移動
- 2.在雙點探究，相對於圓心，一開端只有輻射離心，後端軌跡除了離心，明顯看到相對遲滯。

**發想：從遲滯現象，發現桌面摩擦力並非單純的向心力**  
**設立假說：甩離軌跡切線方向有一力，造成加速，使鋁塊甩離速度變快。**

#### 探究(二)：不同摩擦力對鋁塊甩離軌跡影響之探討



**不同摩擦力甩移衝出10-20cm間距軌跡實況分析比對**  
**發想：摩擦力小，造成鋁塊軌跡跟不上圓桌，使得更加直線切出去，那麼甩離時摩擦力似乎不是課本教導的向心力方向，究竟為何？**



非直線運動瞬間軌跡受到垂直的軌跡向心力(如黑色箭頭)

若再分力，我們選擇圓桌向心力與圓桌切線加速力兩方向分析

實驗實作出圓桌向心力漸減，由平行四邊形法推導出圓桌切線加速力增加

**小結論：**鋁塊加速往外甩離偏移過程中，圓桌向心力漸減，圓桌切線加速力增加，摩擦力小更明顯

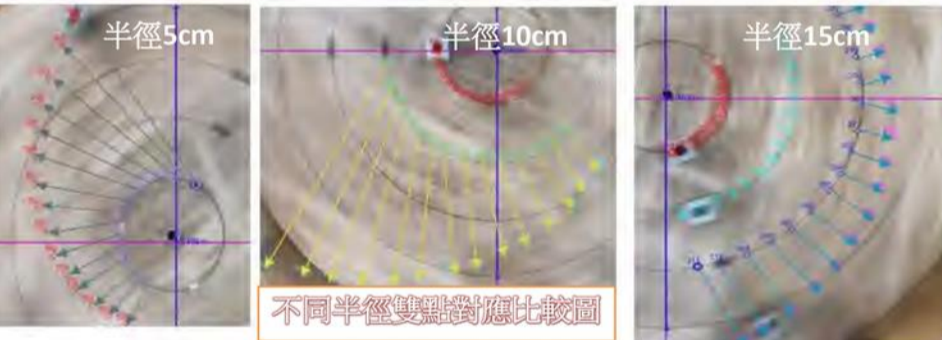
**修正假說：**

重新定義甩離摩擦力方向為瞬間軌跡向心力。此力為圓桌向心力與圓桌切線方向分力之合力。

鋁塊移動的過程中，桌面提供的動摩擦力，不論方向，為一定值，若鋁塊向心力減少，圓桌切線方向分力就會增加，帶動鋁塊加速往外甩移。

符合實驗軌跡數據現象

#### 探究(三)：不同半徑相同鋁塊甩離軌跡影響實驗(滑石粉組小摩擦力)



半徑(cm)	5	10	15
鋁塊質量(kg)	0.02873	0.02873	0.02873
啟動時間(s)	18.33	11.798	9.865
鋁塊啟動甩移之瞬間速率(m/s)	0.429	0.603	0.743
啟動向心加速度	3.681	3.636	3.680
啟動角速率	8.580	6.030	4.953
甩到邊界時間(s)	18.963	13.430	10.332
甩移至邊界之瞬間速率(m/s)	0.806	0.852	0.792
甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.240	0.942	0.799
鋁塊到圓桌邊界相對降速(m/s)	0.434	0.090	0.007

**結果與討論：**

(1)根據向心力公式 $a = v^2/r$ 算出三者啟動加速度，且質量皆控制為小鋁塊，確定最大靜摩擦力差異不大，取半徑五公分鋁塊值計算，最大靜摩擦係數  $\mu = \frac{v^2}{Rg} = a/g = 0.38$

(2)半徑15cm最靠外側，相同角速度，向心力需最大，摩擦力不夠帶動時，優先甩離。

(3)加速的圓桌，半徑5公分的鋁塊啟動最晚，甩到邊界比較圓桌瞬速，掉速最大，推測為拖過桌面的距離最遠，受動摩擦力作負功導致遲滯較大。

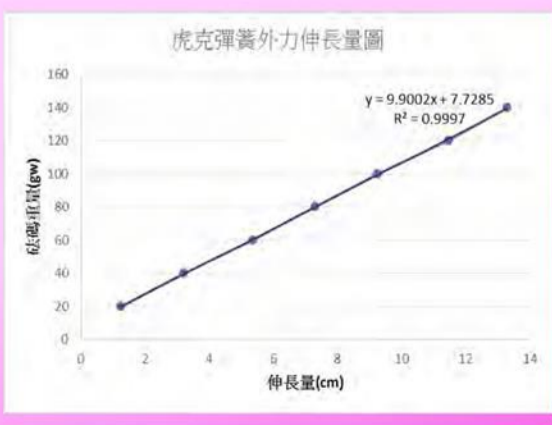
#### 探究(四)：圓周甩離動摩擦為定值之實驗設計與驗證

**緣起：**從雙點設計的探究(二)中，可知桌面最大靜摩擦力是固定的，圓周運動中的物體，有沒有數據能證明動摩擦力也是這樣？

- 步驟**
- 1.取一條虎克彈簧，抓彈性係數。
  - 2.取一圓形轉桌，塗滑石粉及找出圓心，以圖釘將彈簧前端固定，後端以細線固定於長型鋁塊中央。
  - 3.進行整體實驗步驟
  - 4.用Tracker找出鋁塊離圓心距離、鋁塊速度與彈簧伸長量做分析。

**結果** 彈簧的彈性常數 9.9002(gw/cm)=9.7022(N/m)。

對應時間(s)	彈簧總長(cm)	彈簧伸長量(cm)	半徑(cm)	鋁塊瞬時速率(m/s)	圓桌向心力(N)	彈簧拉力(N)	桌面摩擦力(N)
0.50	10.25	0.00	13.4	0.18	0.022	0.00	0.02
1.00	10.25	0.00	13.4	0.24	0.041	0.00	0.04
1.50	10.25	0.00	13.33	0.28	0.056	0.00	0.06
2.00	10.25	0.00	13.45	0.33	0.075	0.00	0.08
2.50	10.25	0.00	13.48	0.38	0.103	0.00	0.10
3.00	10.25	0.00	13.62	0.46	0.145	0.00	0.14
3.50	10.25	0.00	13.53	0.51	0.180	0.00	0.18
4.00	10.25	0.00	13.58	0.60	0.250	0.00	0.25
4.50	10.25	0.00	13.74	0.66	0.300	0.00	0.30
5.00	10.76	0.51	13.64	0.71	0.356	0.05	0.31
5.50	11.57	1.32	14	0.81	0.449	0.13	0.32
6.00	13.25	3.00	14.95	0.97	0.596	0.29	0.31
6.50	14.15	3.90	15.86	1.07	0.684	0.38	0.31
7.00	15.88	5.63	18.36	1.28	0.858	0.55	0.31
7.50	16.96	6.71	19.35	1.39	0.954	0.65	0.30
8.00	19.31	9.06	21.43	1.64	1.199	0.88	0.32
8.50	20.41	10.16	23.32	1.78	1.293	0.99	0.31

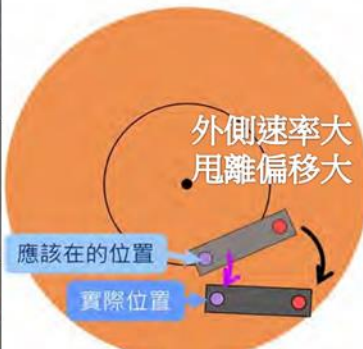
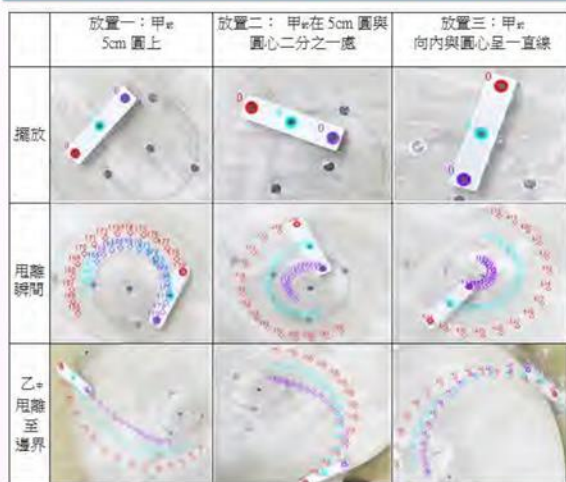


**小結論：**彈簧加速向外拉至邊界時，鋁塊圓周運動甩離時，桌面動摩擦力為一定值。



# 第四部分：模擬實驗(還原現場)

## 實驗四(一)：長型鋁塊擺放方式在低摩擦力下甩離軌跡探討



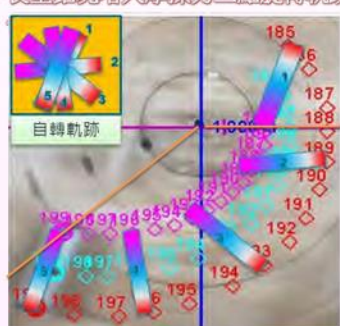
**小結論：**甩離啟動不分前後端，一律由外端帶領甩出。若外端是後端，長形鋁塊自轉更明顯。

## 實驗四(二)：增加前端摩擦力對甩離軌跡影響實驗

### 實驗步驟：

木桌鋪滑石粉，取長型鋁塊橫放。  
鋁塊前端下方，取一小段雙面膠黏貼以加大摩擦力。  
另一端保持不變，中心置於5cm圓切線上。

長型鋁塊增大前端摩擦力三點旋轉軌跡



長型鋁塊一端摩擦甩離三點traker各數據列表比較

鋁塊抓點	前(加大摩擦力)	中	後
鋁塊質量(kg)	0.08382	0.0838	0.0838
鋁塊各點啟動甩移時間	6.765	6.532	6.465
鋁塊各點啟動甩移之瞬間速率(m/s)	0.396	0.472	0.615
鋁塊開始甩移圓桌之瞬間速率(m/s)	0.348	0.318	0.347
圓桌施力鋁塊各點加速差值(m/s)	0.048	0.154	0.268
鋁塊各點甩到邊界時間(s)	7.432	7.365	7.298
鋁塊各點甩至邊界之瞬間速率(m/s)	0.964	1.035	1.265
鋁塊各點甩到邊界時圓桌轉速(m/s)	1.624	1.57	1.57
鋁塊到圓桌邊界各點相對降速(m/s)	0.66	0.535	0.305

**小結論：**  
1.相對於原始內圈放置點，摩擦力帶著甩離的鋁塊加速向外走。  
2.相對於外圈邊桌旋轉速率，甩離過程到外邊，是相對減速，摩擦力持續做負功。

# 肆、整體討論

## 二、圓周運動基礎原理探討

### (1)向心加速度大小與半徑探討

$$a_{\text{向心}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/t)^2}{R} = 4\pi^2 R/t^2 = \omega^2 R$$

向心加速度 $a_{\text{向心}}$ 與圓桌半徑 $R$ 成正比。

物體轉動相同角速率 $\omega$ 時，半徑越大，向心力越大

### (2)甩移理論與質量無關之公式推導

由於物體作圓周運動期間，啟動甩移瞬間向心力由靜摩擦力提供，

$$F_{\text{向心力}} = F_{\text{最大靜摩擦力}}$$

$$F_{\text{向心力}} = ma = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = \mu mg = F_{\text{最大靜摩擦力}}$$

$$\omega^2 = \mu g / R$$

啟動甩移瞬間時，旋轉角速度只跟桌面摩擦係數 $\mu$ 、重力加速度 $g$ 與旋轉半徑 $R$ 有關，與質量 $m$ 無關。

### (3)摩擦力觀點

$$F_{\text{動摩擦力}} < F_{\text{最大靜摩擦力}} = F_{\text{向心力}}$$

最大靜摩擦力轉變成較小的動摩擦力，抓不住鋁塊，甩出造成摩擦合力方向改變，開始非向心方向加速。

### (4)動能差值求平均受力之理論

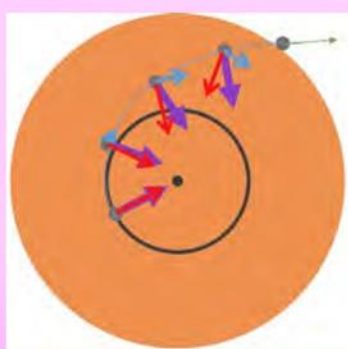
$$\frac{K_{\text{甩到邊界動能}} - K_{\text{啟動動能}}}{S_{\text{鋁塊啟動到邊界軌跡長度}}} = F_{\text{平均作用力}}$$

平均作用力相當於動摩擦力在軌跡切線的分力平均值。

## 三、摩擦力對圓周運動甩離軌跡之探討

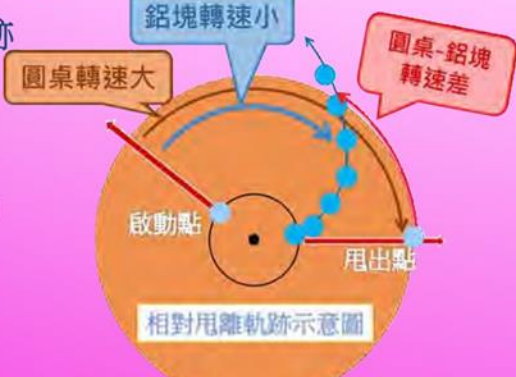
### (一)影片甩移軌跡

- 1.甩移速率加速，軌跡方向必受力。桌面正向力相同，摩擦係數相同，提供的摩擦力為定值。
- 2.由第三部分探究(二)軌跡三點作圖確立甩移的向心力漸減。
- 3.鋁塊甩離後，弧度漸減拋出，加速甩離桌面，如右圖示。



### (二)鋁塊、圓桌相對軌跡

- 1.圓周運動中的鋁塊速率，相對於邊桌速率是減速。
- 2.排除圓桌轉動，做出相對後退的軌跡示意圖。推測是鋁塊跟不上圓桌轉速，相對後退甩離。



## 四、曳引車履帶掉落事件實境解讀

### (一)曳引車轉進內側車道的示意圖

大型車輛在此路段直接轉進內側車道容易撞上安全島。立刻急轉導致後端履帶已經在圓型軌跡的外側，引發速差。



### (二)履帶甩出危險區

由 $S=1/2 at^2$ 和 $t=v15/7 \approx 0.553s$ 做出不同車速履帶甩出的危險區。

#### 1.直線衝出

假設長形履帶甩出時，不受到板台摩擦力直線衝出，危險區的範圍如右圖說明：



#### 2.履帶後端自轉衝出

若長形履帶甩出時受到板台摩擦力與前端固定力的影響，由後端開始自轉，直到前端固定繩斷裂履帶才慣性飛出，危險區面積增大。以下是兩種車輛速度下危險區示意圖：



### (三)建議增設告示牌

- 1.車輛提早轉彎，彎度小，能降低車上物體掉落的風險。
- 2.我們認為應在路口前一百公尺增設「前有S型急轉彎，嚴禁超速」、「大型車輛嚴禁行駛內側車道」等告示牌，避免駕駛將車上物體甩出。



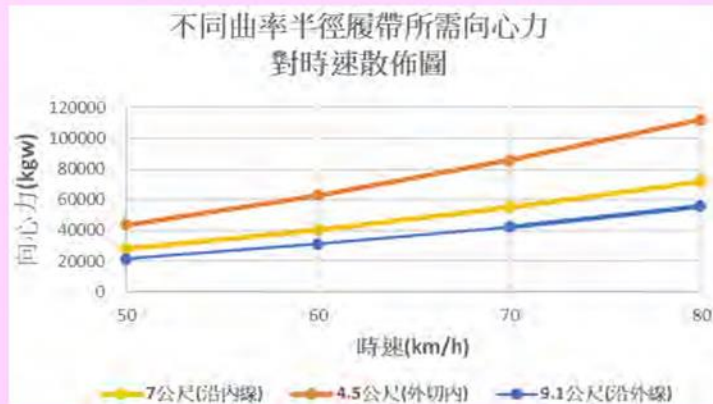
## 五、從模擬實驗到真實事件向心力探討

### (一)以google衛星圖做沿內線車道及提早切外線車道的粗估曲率半徑如圖：



### (二)將現場各種條件代入 $F=mv^2/r$ 算出側綁繩子需要的水平向心力如下：

不同曲率半徑履帶所需向心力(換算kgw)/對比貨物重量的倍率/5000公斤繩子數										
曲率半徑		9.1公尺(沿外線)			7公尺(沿內線)			4.5公尺(內切外切內)		
時速(km/h)	秒速(m/s)	向心力(kgw)	貨重倍率	繩數	向心力(kgw)	貨重倍率	繩數	向心力(kgw)	貨重倍率	繩數
50	13.89	21631	2.16	4.3	28120	2.81	5.6	43742	4.37	8.7
60	16.67	31148	3.11	6.2	40492	4.05	8.1	62988	6.30	12.6
70	19.44	42396	4.24	8.5	55115	5.51	11.0	85734	8.57	17.1
80	22.22	55374	5.54	11.1	71986	7.20	14.4	111979	11.20	22.4



從數據推導出急轉彎所需的向心力是貨物本身的數倍，像十噸履帶這種極重貨物，一旦超速、急轉彎或僅有前後固定繩索，側向有效施力不足，主繩更容易斷裂。

## 伍、總結論

- 一、針對此路口同樣車速，外線轉彎、內線轉彎、內外內線切急轉彎，履帶側綁繩有效力與曲率半徑成反比，約為1:1.3:2。當大車載重極大噸數的物體，需要確實算清楚綁繩對載物的效力，以免低估突發的路況災害。
- 二、行駛內線的大型車輛因內輪差需要內外內切車道，引發貨物向心力大增，因應特殊轉彎彎道，此路口，應嚴禁大貨車行駛內側車道。
- 三、除了立告示牌、加設減速帶之外，建議在兩個路口間繪製兩條行車引導線(如圖黃色虛線)，引導駕駛順利轉彎，避免車輛直行到對向車道，或切到太過外側面臨急轉彎，抓不住重物，衝出甩移。

