

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

030102

探究神奇四連桿與其機構型態之關係

學校名稱：桃園市立中興國民中學

作者： 國二 黃耀民 國二 林宥葳	指導老師： 張良弘 張怡雯
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：四連桿、葛氏定理、能量守恆定律

摘要

本研究先根據功能原理與能量守恆定律，推算出四連桿機構中省力與費力的裝置，發現影響因素有桿長及搖桿角度，接著聚焦於桿長，尋找不同型態的長度範圍。以 GGB 為主，扣條為輔作為研究設備，將所有情況分為四桿相同、三桿相同及兩桿相同，運用基本原理找出形成機構的條件，再利用葛式判別法則推論構成葛氏機構與三搖桿時不等式的分界點，以及葛氏機構對應的型態，並將結論以樹狀圖呈現。

最後，在模擬投石器的實驗中，觀察到在特定從動桿長度下，彈簧拉力越大時，球的拋力大小與前一項的差距會有「遞減」、「持平」或「遞增」的現象，原因是主動桿做等角度圓周運動時，從動桿是做加速度運動，且這個現象可以在實驗中紀錄的球拋出之水平距離中看出來。

壹、前言

一、研究動機

去年，學校的學長們代表學校參加生活科技競賽，我們在看成果影片時，裡頭有提到比賽中製作的運輸車，運用到了平行四連桿的構造，而生活中也有很多連桿機構的運用，像是與我們息息相關的腳踏車、電風扇等等，因此引起我們的好奇心，於是我們開始思考，除了平行四連桿外，還有甚麼不同的連桿機構？如果改變機構中連桿的長度，會產生甚麼變化？而不同的機構可以運用在哪裡？如何設計可以做出省力或費力的裝置？我們對此產生了濃厚的興趣，並決定展開此次研究。

二、研究目的

- (一) 根據功能原理與能量守恆定律，探討四連桿機構中省力與費力裝置的影響因素與關係。
- (二) 利用 GGB 與扣條模擬四連桿機構，依據桿件的長度，分成四桿皆等長(四同)、四桿中三桿等長(三同)、四桿中兩桿等長(二同)，實驗在不同條件下所對應的機構型態。
- (三) 根據基本原理，算出上方討論中可以構成機構的條件，並利用葛式判別法則，推論構成葛氏機構與三搖桿時，不等式的分界點，以及葛氏機構對應的基本型態。

- (四) 觀察機構中主動桿與從動桿的移動軌跡，討論不同軌跡交點數對應的機構型態，發展特殊的判別方法，並解釋如何應用於生活例子中。
- (五) 模擬投石器，控制主動桿長度與彈簧拉力大小，推算球的拋力大小，分析如何設計省力的裝置，推論最佳的拋射角度，並解釋球的拋力大小與水平距離之間的關聯。

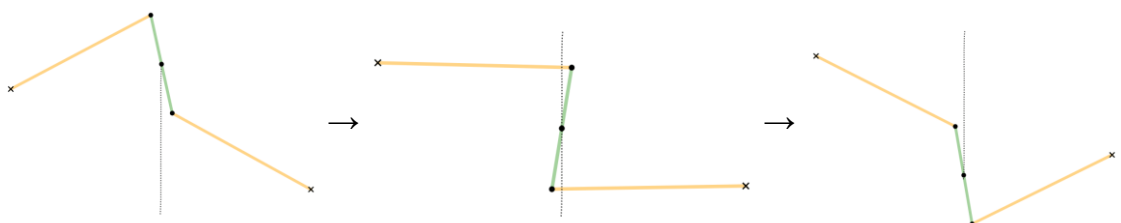
三、文獻探討

(一) 常見的連桿機構

1. 近似直線運動的連桿

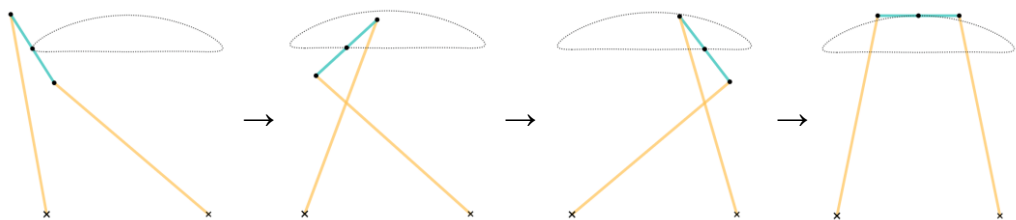
十七世紀末期，在鉋床及銑床發明之前，很難加工筆直的、平坦的表面。此時有許多工程師設法用只有迴轉對的連桿機構產生直線運動，其中最為人所知的可能是瓦特在早期蒸汽機上導引活塞的機構。雖然此機構沒有產生真正的直線，但在相當距離內可以產生近似直線的軌跡[1]。

瓦特連桿機構 (1784 年)



另外，切比雪夫連桿機構是一種可將旋轉運動轉換為近似直線運動的連桿機構，屬於平面四桿機構，且其構形中有出現交叉四邊形[2]。

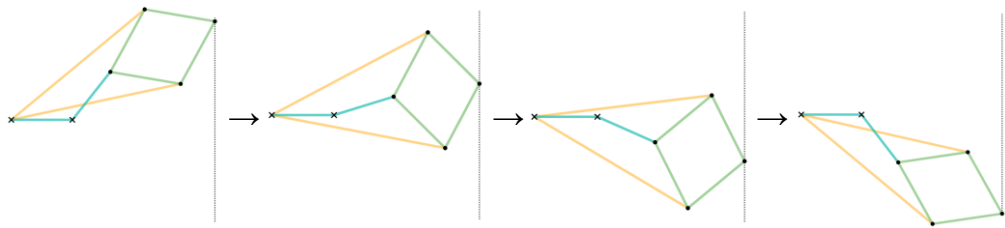
切比雪夫連桿機構 (1850 年)



2. 直線運動的連桿

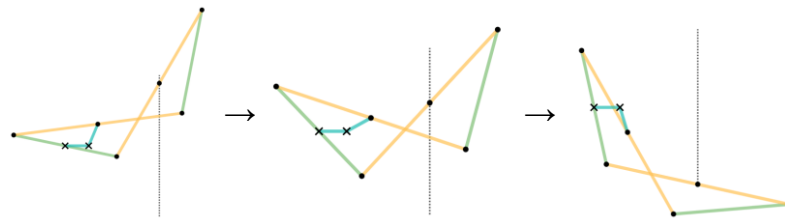
最後在科技進步之下，出現了真正直線運動的連桿。波塞利耶-利普金機械是第一個真正可以將轉動運動轉換為直線運動的平面直線運動機構[3]。

波塞利耶-利普金倒置器 (1864 年)



哈特氏直線運動機構是在無滑動件的條件下可以進行直線運動的機構，以反平行四邊形為基礎，可以將旋轉的運動轉換為真正的直線運動[4]。

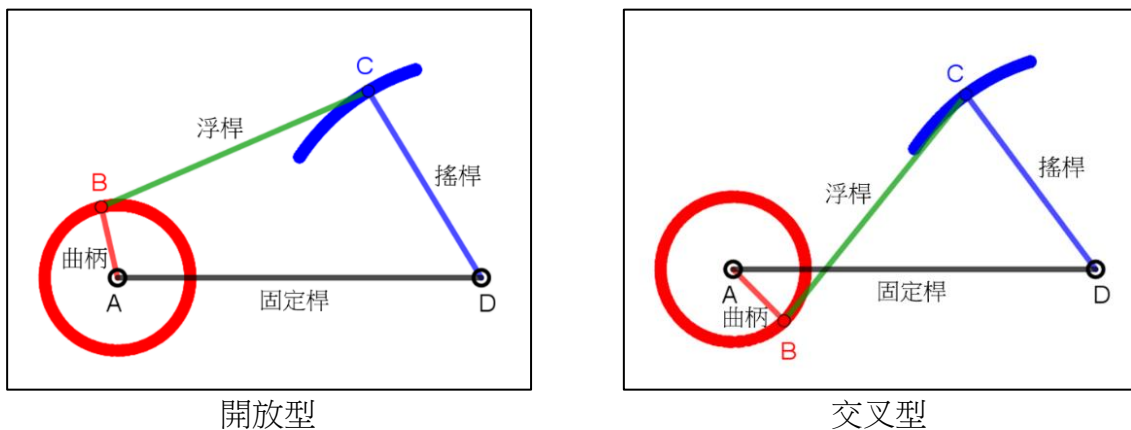
哈特倒置器 (1784 年)



3. 平面四連桿機構

平面四連桿機構是由四個剛性機件用低對連結組成的，各個運動機件均在相互平行的平面內運動的機構[5]。以下針對此類型的機構做介紹。

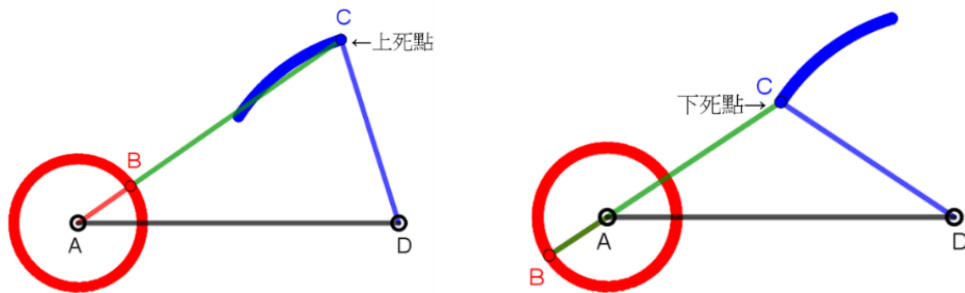
(二) 平面四連桿機構之名詞解釋[6]



圖一：連桿機構的各桿名稱

1. 曲柄：可作「360度」迴轉運動之連桿，一般作為「主動桿」，如圖一中的 \overline{AB} 。
2. 搖桿：僅能作「特定角度」搖擺運動之連桿，一般作為「從動桿」，如圖一中的 \overline{CD} 。
3. 浮桿：連接主動桿與從動桿，因其位置不固定，故稱為浮桿，也可稱為連接桿、耦桿，如圖一中的 \overline{BC} 。
4. 固定桿：不做任何運動之連桿，一般作為連桿機構的固定與支撐，也可稱為地桿、機架，如圖一中的 \overline{AD} 。

5. 死點：若曲柄與浮桿成一直線時，由浮桿所傳送之推力或拉力，無法使搖桿繼續旋轉，則此位置稱為死點或靜點。下圖中有兩個死點，分別為上死點以及下死點。



(三) 平面四連桿機構之基本型態[7]

基本原理：必須滿足任三邊之和必大於第四邊，如上圖一中， $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AD}$ 。

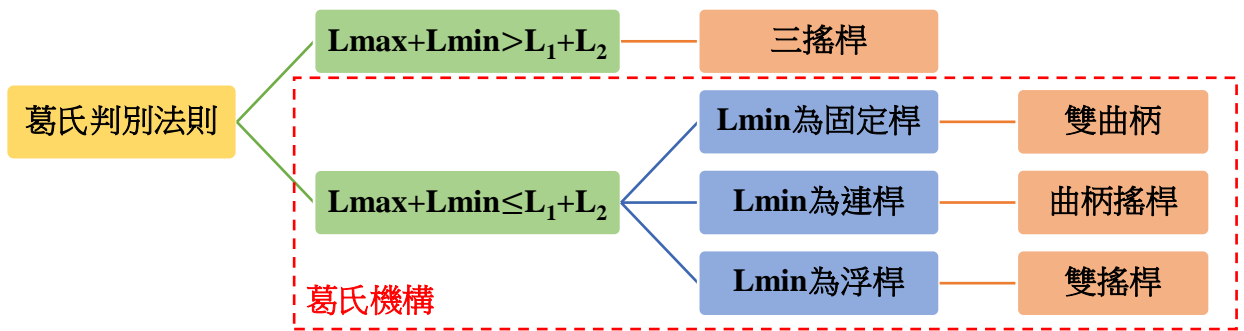
如下表，四連桿機構之基本型態有三種，分別是曲柄搖桿機構、雙搖桿機構及雙曲柄機構，因為這些型態都符合葛式定理(詳見四)，故又稱作葛氏機構。

曲柄搖桿機構	雙搖桿機構	雙曲柄機構
\overline{AB} 為曲柄， \overline{CD} 為搖桿	\overline{AB} 、 \overline{CD} 皆為搖桿	\overline{AB} 、 \overline{CD} 皆為曲柄

(四) 葛氏定理[5]

設 L_{max} 為最長桿， L_{min} 為最短桿，其餘兩桿分別是 L_1 、 L_2 ，沒有大小之分；

1. 如果 $L_{max} + L_{min} > L_1 + L_2$ ，則此四連桿機構為「三搖桿」(非葛氏機構)；
2. 如果 $L_{max} + L_{min} \leq L_1 + L_2$ ，則此四連桿機構為葛氏機構，根據最短桿 L_{min} 的角色可以分成以下三種情形：
 - (1) 若 L_{min} 為固定桿，則為「雙曲柄」；
 - (2) 若 L_{min} 為連桿，則為「曲柄搖桿」，其中 L_{min} 為曲柄；
 - (3) 若 L_{min} 為浮桿，則為「雙搖桿」。

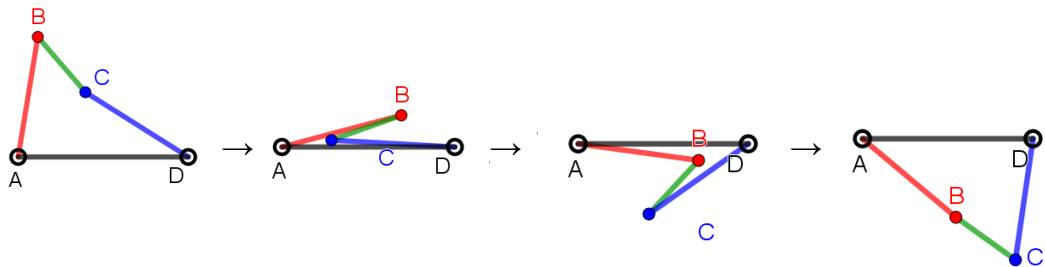


圖二：葛氏判別法則之樹狀圖

「三搖桿」與「雙搖桿」的差異：

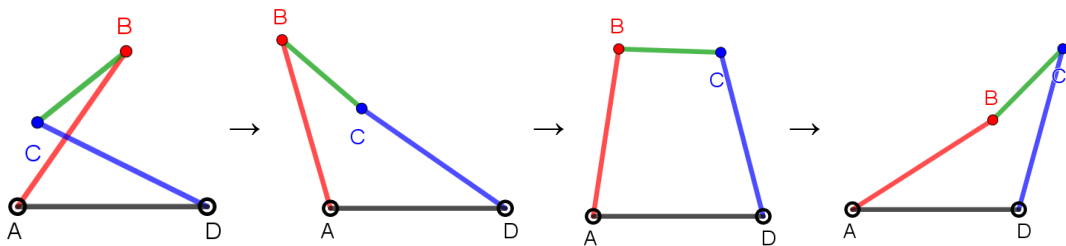
- 三搖桿：可以運動的三支桿件(兩支連桿以及浮桿)都只能在有限的角度內來回擺動。

舉例：圖中的浮桿 \overline{BC} 不能轉 360°



- 雙搖桿：浮桿可以做 360° 相對迴轉，僅兩支連桿在有限的角度內來回擺動。

舉例：圖中的浮桿 \overline{BC} 可以轉 360°



(五) 過去相關之研究

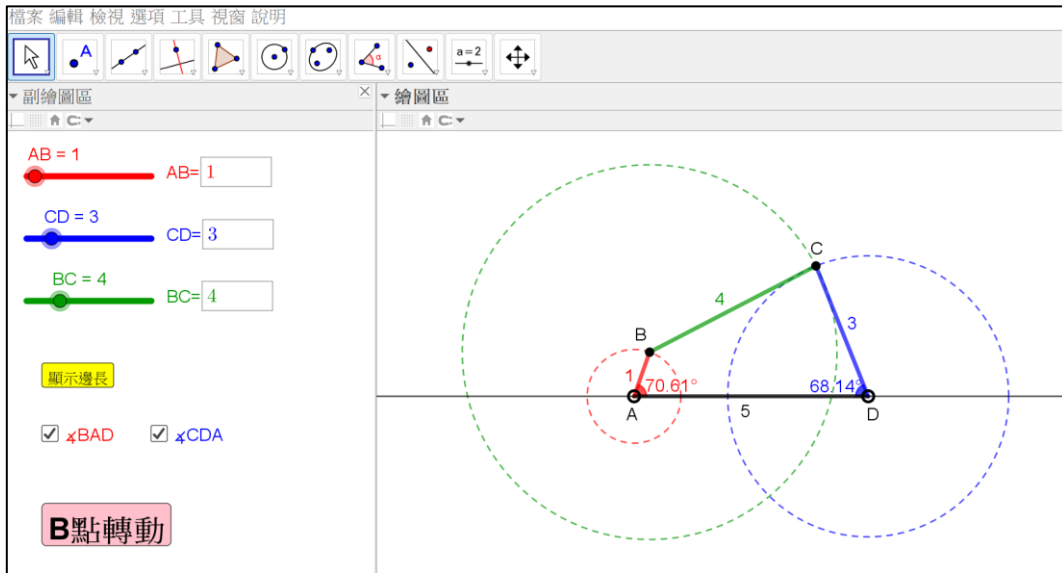
1. 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會，自行車重心轉換裝置[8]。主要裝置係為兩組四連桿機構之組合機構 -- 平行等曲柄機構及擺動滑塊曲柄機構，加裝此裝置之自行車操作降低重心後，能大幅縮短最小煞車安全距離。
2. 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會，步行機構綜合設計原理之研究[9]。設計出二種不同的步行機構設計，來做為步行機器人中的雙足的運行軌跡，並分析二種機構在步行運動時的特點。

貳、研究設備與器材

一、GeoGebra 動態幾何軟體

我們使用 GeoGebra 模擬實際物體，測試在不同條件下產生的結果，底下簡稱 GGB。

(一) 介面呈現

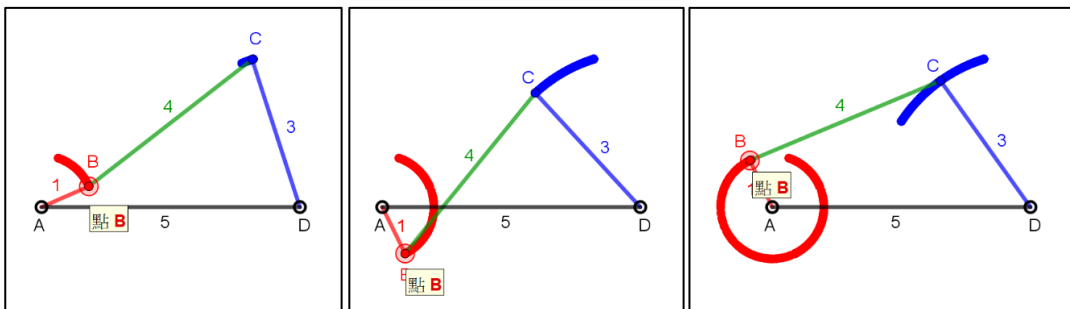


(二) 繪製方式

1. 固定桿 \overline{AD} 的長度設定為 5，所以 A 點和 D 點是固定不動的。
2. 設定 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{BC} 三個數值滑桿，可以用拉動的方式或者直接輸入想觀察的數值。
3. 以 A 點為圓心， \overline{AB} 為半徑畫圓，B 點是圓上的動點，也是此機構的主要控制點。
4. 「以 D 點為圓心，半徑為 \overline{CD} 」的圓和「以 B 點為圓心，半徑為 \overline{BC} 」的圓的交點，我們稱之為 C 點。

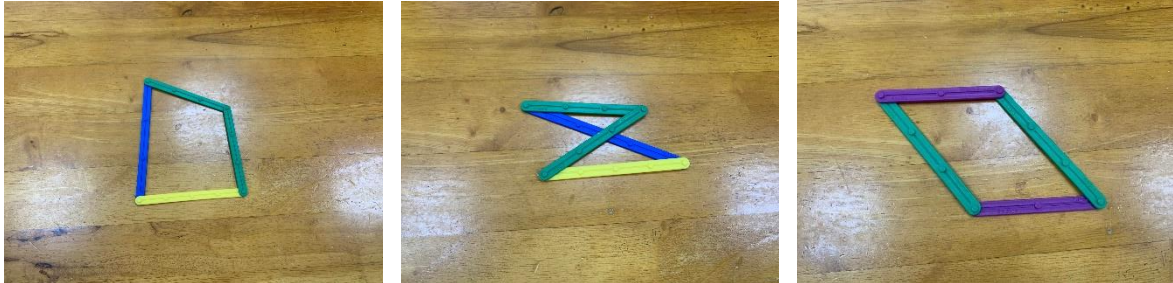
(三) 顯示軌跡

1. 顯示軌跡的目的：根據 B 點和 C 點的移動軌跡，判斷此機構是哪一種型態。
2. 控制 B 點，就可以觀察 B 點和 C 點的移動軌跡，舉例：下方為曲柄搖桿。



二、扣條

扣條是在一塑膠長條正面設置數個凸起，並在背面相同位置設置相同數量之孔洞，使不同扣條能像樂高積木一樣組合。操作時，只需將凸起處對準另一扣條之孔洞處壓下去，幾可使扣條組合。



GGB 與扣條的優缺點：

	GGB	扣條
優點	<ul style="list-style-type: none"> • 不需要準備材料 • 可直接顯示數據 	<ul style="list-style-type: none"> • 有厚度，較接近現實狀況
缺點	<ul style="list-style-type: none"> • 沒有厚度 • 程式可能無法還原現實狀況 	<ul style="list-style-type: none"> • 需準備材料 • 數據需測量

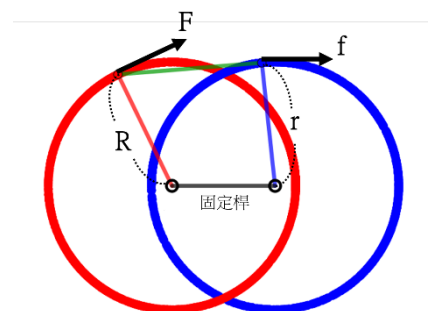
參、研究過程與方法

一、省力與費力裝置

本研究之四連桿機構中，主動桿與從動桿之間可以根據功能原理與能量守恆定律，探討如何設計省力或費力的裝置，首先，我們知道「功」是指從一種物理系統到另一種物理系統的能量轉變，公式為 $W = F \times S$ ，其中 W 為功，單位為焦耳 (J) 或牛頓-公尺 (N-m)； F 為施力大小，單位為牛頓 (N)； S 為物體沿作用力方向的位移，單位為公尺 (m)。底下分別針對四連桿的三種機構型態計算功的大小，並找出影響省/費力裝置的因素：

(一) 雙曲柄

如右圖，以平均施力 F 於桿長為 R 的主動桿上繞一圈時，施力作功為 $F \times 2\pi R$ ，在能量轉換的過程中，若在桿長為 r 的從動桿上作用力為 f ，不計阻力影響，根據能量守恆定律，可得到 $F \times 2\pi R = f \times 2\pi r$ ，即

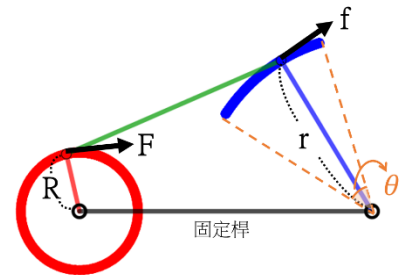


$$f = \frac{R}{r} \times F$$

因此，如果桿長的大小關係為 $R > r$ ，則施力大小關係為 $F < f$ ，視為省力裝置；
 如果桿長的大小關係為 $R < r$ ，則施力大小關係為 $F > f$ ，視為費力裝置；
 如果桿長的大小關係為 $R = r$ ，則施力大小關係為 $F = f$ ，此裝置不省力也不費力。

(二) 曲柄搖桿

如右圖，以平均施力 F 於桿長為 R 的曲柄上繞一圈時，施力作功為 $F \times 2\pi R$ ，若在桿長為 r 的搖桿上作用力為 f ，且軌跡弧長所對到的圓心角為 θ ($0 < \theta < 2\pi$)，注意此路徑會沿著弧作來回一趟，不計阻力影響，根據能量守恆定律，可得到 $F \times 2\pi R = f \times r\theta \times 2$ ，即



$$f = \frac{R}{r} \times \frac{\pi}{\theta} \times F$$

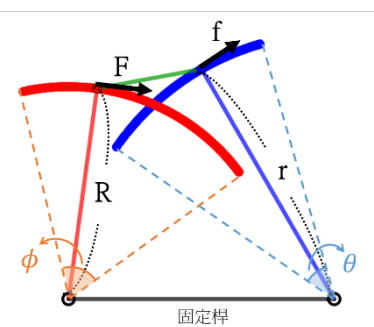
因此，如果桿長的比例關係為 $\frac{R}{r} > \frac{\theta}{\pi}$ ，則施力大小關係為 $F < f$ ，視為省力裝置，

又因為曲柄的長度必小於搖桿的長度，即 $\frac{R}{r} < 1$ ，所以只要 $\theta < \pi$ ，就是省力裝置；

另外，如果桿長的比例關係為 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\pi}$ ，則施力大小關係為 $F > f$ ，視為費力裝置。

(三) 雙搖桿

如右圖，以平均施力 F 於桿長為 R 的搖桿(主動桿)上繞弧來回一趟時，若其軌跡弧長所對到的圓心角為 ϕ ，則施力作功為 $F \times R\phi \times 2$ ，若在桿長為 r 的搖桿(從動桿)上作用力為 f ，且軌跡弧長所對到的圓心角為 θ ，不計阻力影響，根據能量守恆定律，可得到 $F \times R\phi \times 2 = f \times r\theta \times 2$ ，即



$$f = \frac{R}{r} \times \frac{\phi}{\theta} \times F$$

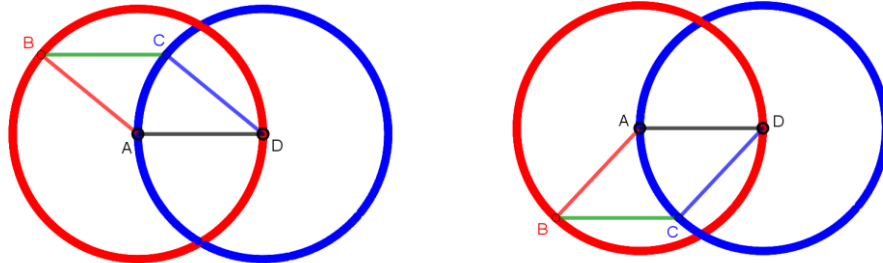
因此，如果桿長的比例關係為 $\frac{R}{r} > \frac{\theta}{\phi}$ ，則施力大小關係為 $F < f$ ，視為省力裝置；

如果桿長的比例關係為 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\phi}$ ，則施力大小關係為 $F > f$ ，視為費力裝置。

由此可知，設計省力或費力的裝置需考量到「主動桿與從動桿的長度」和「搖桿軌跡弧長所對到的圓心角度數」，因此，接下來我們將針對四連桿中四根桿件的長度做進一步的研究。

二、四桿皆等長(四同)

如果 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ ，則四邊形 ABCD 為菱形，菱形是平行四邊形的一種，所以此機構為雙曲柄中的平行四連桿。



三、四桿中的三桿等長(三同)

若四桿中有三個長度相等，會有以下三種情況：

$$(一) \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \quad (二) \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} \quad (三) \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD}$$

注意：鏡像或旋轉情況視為同一種，也就是 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ 等價於 $\overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD}$ 。

情況(一)： $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ (底下說明如用到 \overline{BC} 和 \overline{CD} ，皆以 \overline{AB} 取代)

【形成機構型態】

$$\text{根據基本原理 } \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AD} \Rightarrow 3\overline{AB} > \overline{AD} \Rightarrow \overline{AB} > \frac{\overline{AD}}{3},$$

$$\text{因此如果要形成機構型態，需滿足 } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} > \frac{\overline{AD}}{3}。$$

【葛氏判別法則】

比較三同桿長與另一桿長度，可分成 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} > \overline{AD}$ 或 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AD}$ ，

$$(1) \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} > \overline{AD}$$

如果要形成葛氏機構，需滿足 $\overline{AB} + \overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AD} \leq \overline{AB}$ ，

又最短桿為固定桿，因此，當 $\overline{AD} \leq \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ 時，機構型態為雙曲柄。

$$(2) \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AD}$$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{AB} + \overline{AD} > \overline{BC} + \overline{CD}$ ，其機構型態為三搖桿，

加上形成機構型態的條件得到，當 $\frac{\overline{AD}}{3} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AD}$ 時，其為三搖桿。

【舉例】

四桿長度	機構型態	圖示
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 4$ $\overline{AD} = 5$	三搖桿	
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 6$ $\overline{AD} = 5$	雙曲柄	

情況(二)： $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$

【形成機構型態】

同情況(一)，如果要形成機構型態，需滿足 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} > \frac{\overline{CD}}{3}$ 。

【葛氏判別法則】

比較三同桿長與另一桿長度，可分成 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} > \overline{CD}$ 或 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD}$ ，

(1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} > \overline{CD}$

如果要形成葛氏機構，需滿足 $\overline{AB} + \overline{CD} \leq \overline{AB} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} \leq \overline{AB}$ ，

當 $\overline{CD} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ 時，最短桿為搖桿，機構型態為曲柄搖桿；

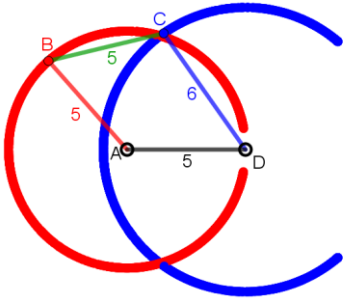
當 $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ 時，機構型態為雙曲柄中的平行四連桿。

(2) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD}$

同情況(一)，當 $\frac{\overline{CD}}{3} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD}$ 時，機構型態為三搖桿。

【舉例】

四桿長度	機構型態	圖示
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = 5$ $\overline{CD} = 4$	曲柄搖桿	

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = 5$ $\overline{CD} = 6$	<p style="text-align: center;">三搖桿</p>	
---	--	--

情況(三)： $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD}$

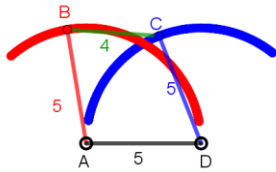
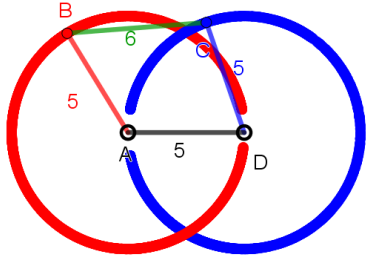
同情況(二)，

當 $\overline{BC} < \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD}$ 時，最短桿為浮桿，機構型態為雙搖桿；

當 $\overline{BC} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD}$ 時，機構型態為雙曲柄中的平行四連桿；

當 $\frac{\overline{BC}}{3} < \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} < \overline{BC}$ 時，機構型態為三搖桿。

【舉例】

四桿長度	機構型態	圖示
$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 5$ $\overline{BC} = 4$	<p style="text-align: center;">雙搖桿</p>	
$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 5$ $\overline{BC} = 6$	<p style="text-align: center;">三搖桿</p>	

四、四桿中的兩桿等長(二同)

若四桿中有兩個長度相等，會有以下四種情況：

- (一) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (二) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (三) $\overline{AB} = \overline{AD}$ (四) $\overline{BC} = \overline{AD}$

注意：鏡像情況視為同一種，也就是 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 等價於 $\overline{CD} = \overline{BC}$ 。

情況(一)： $\overline{AB} = \overline{BC}$

比較另外兩桿長度，可以分成 $\overline{CD} < \overline{AD}$ 或 $\overline{CD} = \overline{AD}$ 或 $\overline{CD} > \overline{AD}$ ，

(1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 且 $\overline{CD} < \overline{AD}$

【形成機構型態】

根據基本原理 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AD} \Rightarrow 2\overline{AB} > \overline{AD} - \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} > \frac{\overline{AD} - \overline{CD}}{2}$,

因此如果要形成機構型態，需滿足 $\overline{AB} = \overline{BC} > \frac{\overline{AD} - \overline{CD}}{2}$ 。

【葛氏判別法則】

比較二同桿長與另兩桿長度，可以再細分成

① $\overline{AB} = \overline{BC} < \overline{CD} < \overline{AD}$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{AD} + \overline{AB} > \overline{CD} + \overline{BC}$ ，其機構型態為三搖桿。

② $\overline{CD} < \overline{AB} = \overline{BC} < \overline{AD}$

如果要形成葛氏機構，需滿足 $\overline{AD} + \overline{CD} \leq \overline{AB} + \overline{AB} \Rightarrow \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB}$ ，

又最短桿為連桿，因此，當 $\frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$ 時，機構型態為曲柄搖桿。

③ $\overline{CD} < \overline{AD} < \overline{AB} = \overline{BC}$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{AB} + \overline{CD} < \overline{BC} + \overline{AD}$ ，屬於葛氏機構，又最短桿為連桿，

其機構型態為曲柄搖桿，又 $\overline{CD} < \overline{AD} < \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$ ，

故此結論併為②。

綜合①~③，加上形成機構型態的條件可得到，

當 $\frac{\overline{AD} - \overline{CD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC} < \frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

(2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 且 $\overline{CD} = \overline{AD}$

① $\overline{AB} = \overline{BC} < \overline{CD} = \overline{AD}$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{CD} + \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$ ，屬於葛氏機構，

且最短桿可能為搖桿或浮桿，故機構型態可能為曲柄搖桿或雙搖桿。

② $\overline{CD} = \overline{AD} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ，屬於葛氏機構，

且最短桿可能為搖桿或固定桿，故機構型態可能為曲柄搖桿或雙曲柄。

(3) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 且 $\overline{CD} > \overline{AD}$

【形成機構型態】

根據基本原理 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD} > \overline{CD} \Rightarrow 2\overline{AB} > \overline{CD} - \overline{AD} \Rightarrow \overline{AB} > \frac{\overline{CD} - \overline{AD}}{2}$,

因此如果要形成機構型態，需滿足 $\overline{AB} = \overline{BC} > \frac{\overline{CD} - \overline{AD}}{2}$ 。

【葛氏判別法則】

比較二同桿長與另兩桿長度，可以再細分成

① $\overline{AB} = \overline{BC} < \overline{AD} < \overline{CD}$

因 $L_{\max} + L_{\min} = \overline{CD} + \overline{AB} > \overline{AD} + \overline{BC}$ ，其機構型態為三搖桿。

② $\overline{AD} < \overline{AB} = \overline{BC} < \overline{CD}$

如果要形成葛氏機構，需滿足 $\overline{CD} + \overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{AB} \Rightarrow \frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB}$ ，

又最短桿為固定桿，因此，當 $\frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$ 時，機構型態為雙曲柄。

③ $\overline{AD} < \overline{CD} < \overline{AB} = \overline{BC}$

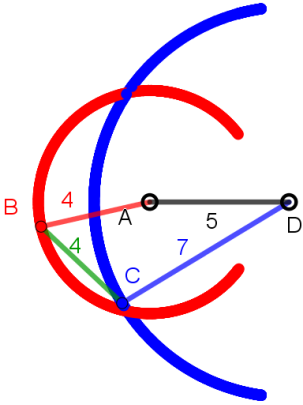
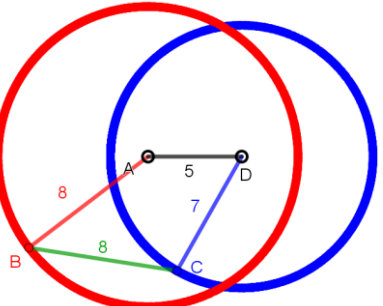
同(1)，此結論併為②。

綜合①~③，加上形成機構型態的條件可得到，

當 $\frac{\overline{CD} - \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC} < \frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

【舉例】

四桿長度	機構型態	圖示
$\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ $\overline{CD} = 2, \overline{AD} = 5$	三搖桿	
$\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ $\overline{CD} = 2, \overline{AD} = 5$	曲柄搖桿	

$\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ $\overline{CD} = 7, \overline{AD} = 5$	<p>三搖桿</p>	
$\overline{AB} = \overline{BC} = 8$ $\overline{CD} = 7, \overline{AD} = 5$	<p>雙曲柄</p>	

情況(二)： $\overline{AB} = \overline{CD}$

同情況(一)的討論，比較另外兩桿長度，可以分成 $\overline{BC} < \overline{AD}$ 或 $\overline{BC} = \overline{AD}$ 或 $\overline{BC} > \overline{AD}$ ，

(1) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} < \overline{AD}$

當 $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{CD}$ 時，機構型態為雙搖桿；

當 $\frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2} < \overline{AB} = \overline{CD} < \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

(2) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{AD}$

其機構型態為雙曲柄中的平行四連桿。

(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} > \overline{AD}$

當 $\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{CD}$ 時，機構型態為雙曲柄；

當 $\frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{CD} < \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

情況(三)： $\overline{AB} = \overline{AD}$

同情況(一)的討論，比較另外兩桿長度，可以分成 $\overline{BC} < \overline{CD}$ 或 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 或 $\overline{BC} > \overline{CD}$ ，

(1) $\overline{AB} = \overline{AD}$ 且 $\overline{BC} < \overline{CD}$

當 $\frac{\overline{CD} + \overline{BC}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{AD}$ 時，機構型態為雙搖桿；

當 $\frac{\overline{CD} - \overline{BC}}{2} < \overline{AB} = \overline{AD} < \frac{\overline{CD} + \overline{BC}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

(2) $\overline{AB} = \overline{AD}$ 且 $\overline{BC} = \overline{CD}$

當 $\overline{AB} = \overline{AD} \leq \overline{BC} = \overline{CD}$ 時，機構型態為曲柄搖桿或雙曲柄；

當 $\overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AB} = \overline{AD}$ 時，機構型態為雙搖桿或曲柄搖桿。

(3) $\overline{AB} = \overline{AD}$ 且 $\overline{BC} > \overline{CD}$

當 $\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{AD}$ 時，機構型態為曲柄搖桿；

當 $\frac{\overline{BC} - \overline{CD}}{2} < \overline{AB} = \overline{AD} < \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

情況(四)： $\overline{BC} = \overline{AD}$

同情況(一)的討論，比較另外兩桿長度，可以分成 $\overline{AB} < \overline{CD}$ 或 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 或 $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，

(1) $\overline{BC} = \overline{AD}$ 且 $\overline{AB} < \overline{CD}$

當 $\frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$ 時，機構型態為曲柄搖桿；

當 $\frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{2} < \overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

(2) $\overline{BC} = \overline{AD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$

其機構型態為雙曲柄中的平行四連桿。

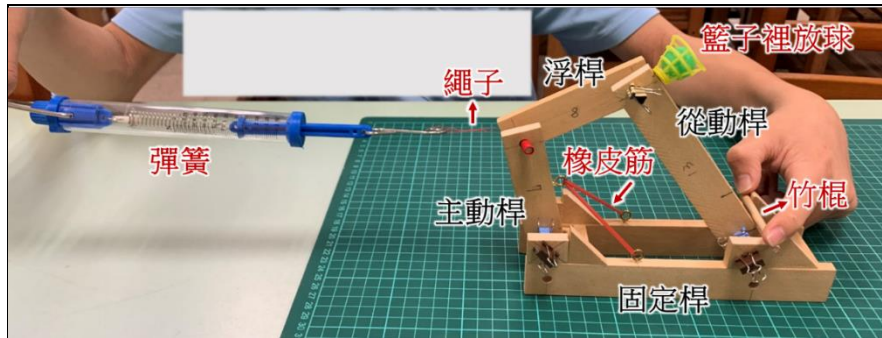
(3) $\overline{BC} = \overline{AD}$ 且 $\overline{AB} > \overline{CD}$

當 $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$ 時，機構型態為曲柄搖桿；

當 $\frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} < \overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ 時，機構型態為三搖桿。

五、模擬投石器

(一) 實驗裝置



如上圖，在主動桿與固定桿之間裝上橡皮筋，並在主動桿上方綁上繩子，在繩子的另一端用彈簧拉住，利用彈簧的刻度計算施力大小，當拉到指定的刻度後，將繩子剪下，橡皮筋彈回，使球被拋出去，過程如下方截圖。



(從動桿碰到竹棍拋出)



(拋至最高點)



(繼續往前)

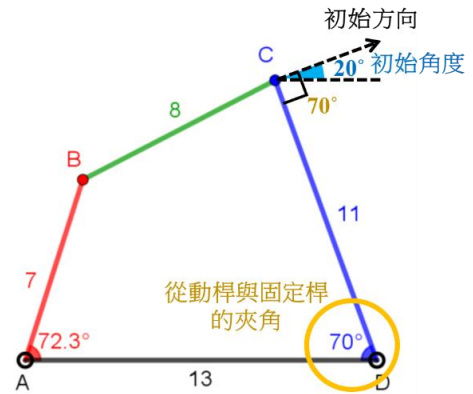
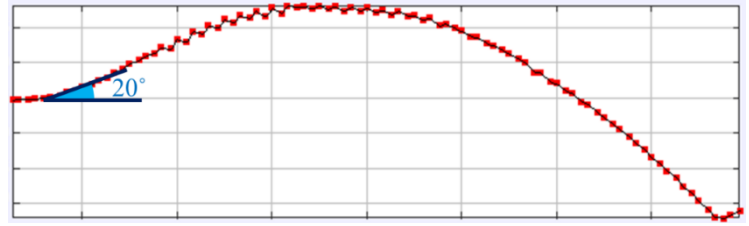


(紀錄落地點)

(二) 計算角度

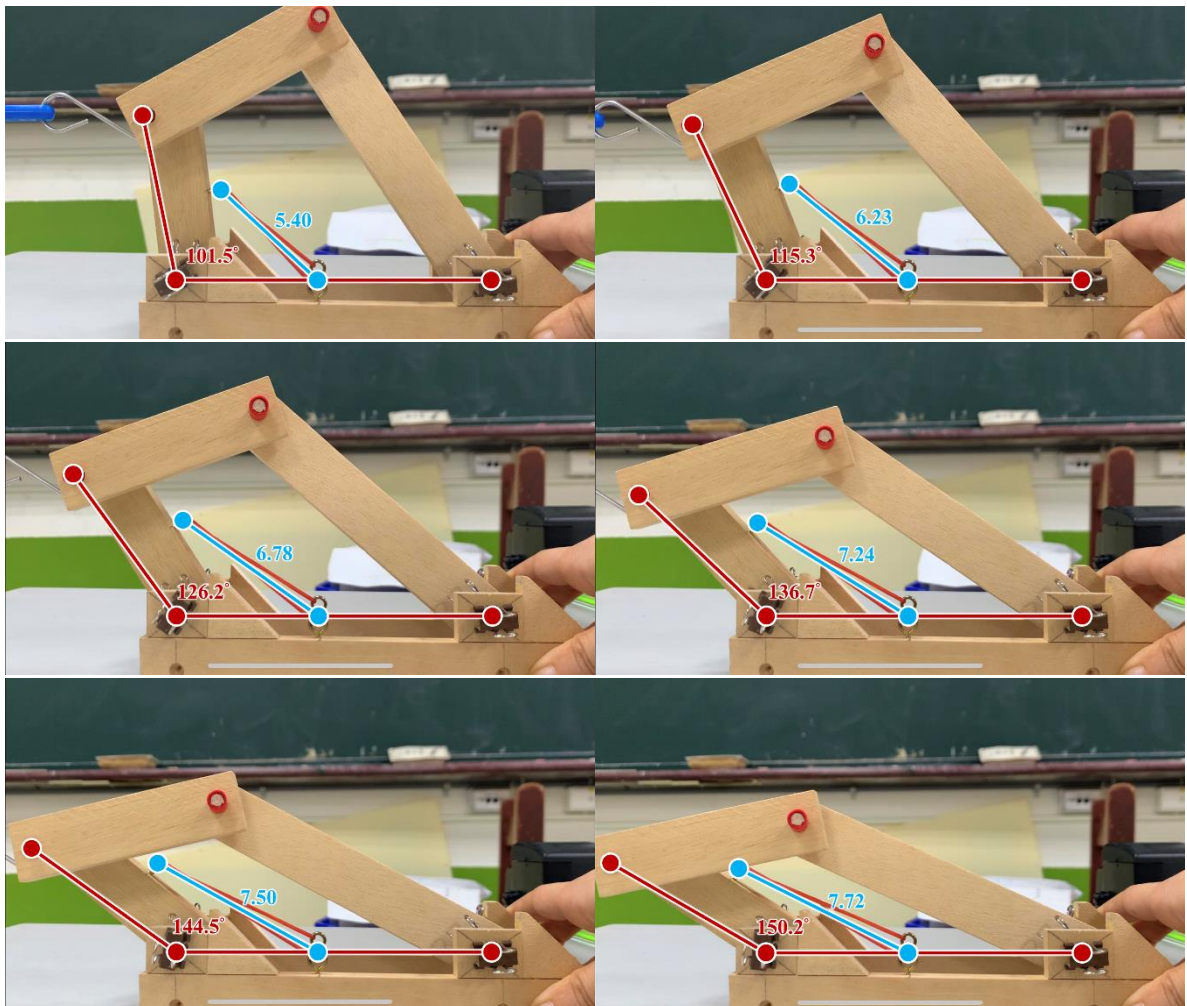
1. 初始角度

在從動桿的前方放上一根竹棍，藉此固定球拋出去的初始角度，使用軌跡追蹤軟體 Tracker 進行測量，在我們的實驗裝置下測得初始角度為 20° (如右上圖)，又因籃子與從動桿是以 90° 的方向拴住，因此推得從動桿與固定桿的夾角為 70° (如右下圖)，也就是當從動桿搖到這個角度時球會拋出去。



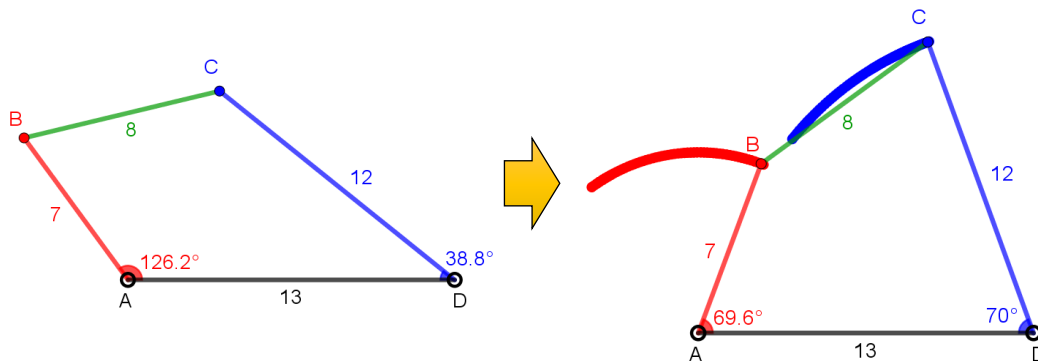
2. 搖桿的軌跡弧長所對到的圓心角

首先，測量彈簧拉力從 125g 到 250g 之間，每次增加 25g 時，主動桿和固定桿的夾角以及橡皮筋的長度，如下圖，數據詳見表格。



彈簧拉力大小	主動桿和固定桿的夾角	橡皮筋的長度
125	101.5	5.40
150	115.3	6.23
175	126.2	6.78
200	136.7	7.24
225	144.5	7.50
250	150.2	7.72

利用 GGB 紀錄「主動桿和固定桿的夾角 $\angle BAD$ 」與「從動桿和固定桿的夾角 $\angle CDA$ 」，便可分別計算兩支搖桿的軌跡弧長所對到的圓心角，舉例：下方左圖為彈簧拉到 175g 所呈現的夾角，下方右圖為球在初始角度為 20° 拋出去時所呈現的夾角，因此主動桿的軌跡對到的圓心角為 $126.2^\circ - 69.6^\circ = 56.6^\circ$ ；從動桿則為 $70^\circ - 38.8^\circ = 31.2^\circ$ 。



(三) 實驗設計

裝置不同的從動桿長度，觀察給予不同的彈簧拉力時，球拋出的水平距離分別是多少。

- 控制變因：固定桿長度=13、主動桿長度=7、浮桿長度=8、球拋出的初始角度= 20°
- 操作變因：從動桿長度、彈簧的拉力
- 應變變因：球拋出的水平距離

1. 機構型態

計算從動桿為多少時，會形成何種機構型態，已知固定桿=13、主動桿=7、浮桿=8，假設從動桿= x ，如果裝置為葛氏機構且最短桿為主動桿，其機構型態為曲柄搖桿：

①最長桿為固定桿，則

$$7 + 13 \leq 8 + x \Rightarrow 12 \leq x$$

②最長桿為從動桿，則

$$7 + x \leq 8 + 13 \Rightarrow x \leq 14$$

因此，如果 $12 \leq x \leq 14$ ，機構型態為曲柄搖桿，否則為三搖桿。

2. 拋力大小

主動桿長度 $R=7$ ，從動桿長度 r ，主動桿的軌跡弧長所對到的圓心角為 ϕ ，從動桿的軌跡弧長所對到的圓心角為 θ ，彈簧拉力大小 F ，根據能量守恆定律，可計算出球的拋力大小 f 為

$$f = \frac{R}{r} \times \frac{\phi}{\theta} \times F$$

(四) 實驗數據

從動桿 長度 r	彈簧拉力 大小 F	主動桿搖 動角度 ϕ	從動桿搖 動角度 θ	球的拋力 大小 f	與前一項 f 的差距	球拋出水 平距離 d	與前一項 d 的差距
11 (三搖桿)	125	29.2	17.1	136.2	略	44.7	略
	150	43.0	27.2	150.8	14.6	48.7	4
	175	53.9	36.3	165.5	14.7	53.7	5
	200	64.4	46.8	175.3	9.7	54.7	1
12 (曲柄搖 桿)	125	31.8	15.4	150.8	略	47.1	略
	150	45.6	24.0	166.5	15.8	52.1	5
	175	56.5	31.2	184.8	18.3	55.1	3
	200	67.0	38.5	203.1	18.3	57.1	2
	225	74.8	44.0	223.0	19.9	60.1	3
	250	80.5	48.1	244.0	20.9	60.1	0
13 (曲柄搖 桿)	125	39.9	14.6	184.1	略	37.4	略
	150	53.7	22.1	196.4	12.4	45.4	8
	175	64.6	28.4	214.7	18.3	54.4	9
	200	75.1	34.5	234.5	19.8	62.4	8
	225	82.9	39.0	257.5	23.0	69.4	7
	250	88.6	42.2	282.5	25.0	66.4	-3

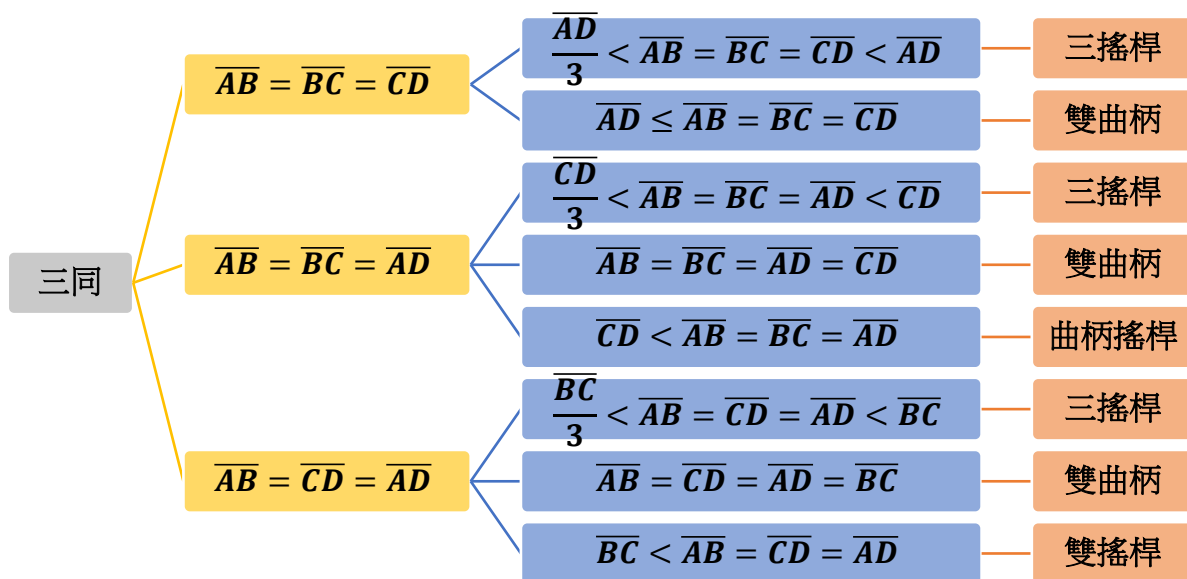
肆、研究結果

一、根據功能原理與能量守恆定律探討四連桿機構中省力與費力裝置：

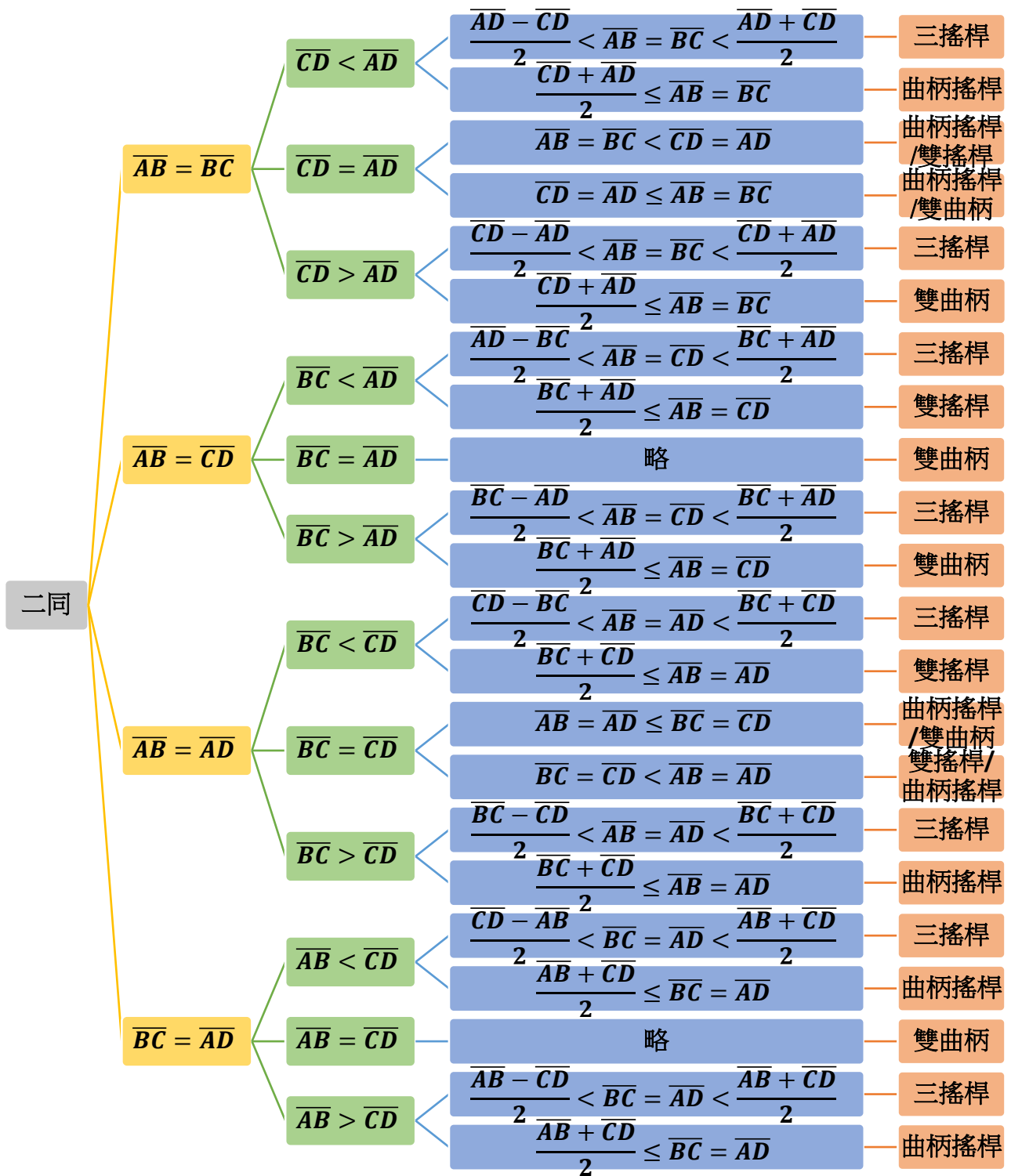
1. 雙曲柄：設主動桿的桿長為 R 、施力大小為 F ；從動桿的桿長為 r 、施力大小為 f ，則
 - (1) 若 $R > r$ ，則 $F < f$ ，此為省力裝置；
 - (2) 若 $R < r$ ，則 $F > f$ ，此為費力裝置。
2. 曲柄搖桿：設曲柄的桿長為 R 、施力大小為 F ；搖桿的桿長為 r 、軌跡弧長的圓周角為 θ 、施力大小為 f ，則
 - (1) 若 $\theta < \pi$ ，則 $F < f$ ，此為省力裝置；
 - (2) 若 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\pi}$ ，則 $F > f$ ，此為費力裝置。
3. 雙搖桿：設主動桿的桿長為 R 、軌跡弧長的圓周角為 ϕ 、施力大小為 F ；從動桿的桿長為 r 、軌跡弧長的圓周角為 θ 、施力大小為 f ，則
 - (1) 若 $\frac{R}{r} > \frac{\theta}{\phi}$ ，則 $F < f$ ，此為省力裝置；
 - (2) 若 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\phi}$ ，則 $F > f$ ，此為費力裝置。

由此可知，設計省力或費力的裝置需考量到「主動桿與從動桿的長度」和「搖桿軌跡弧長所對到的圓心角度數」。

二、整理以上桿長為三同與二同的範圍，畫成樹狀圖：



圖三：三同之樹狀圖



圖四：二同之樹狀圖

將「圖三」與「圖四」改成以機構型態進行分類，如下表，我們發現在所有機構型態中，三搖桿及曲柄搖桿的出現頻率較多。三搖桿的出現頻率較多，是因為所有不符合葛氏定理的四連桿機構皆為三搖桿。曲柄搖桿的出現頻率較多，是因葛氏定理中，若最短桿為連桿，則為曲柄搖桿，而一個四連桿機構有兩支連桿，故曲柄搖桿的出現頻率較多。

另外，因為曲柄搖桿與雙搖桿的省/費力裝置，需考量「搖桿軌跡弧長所對到的圓心角度數」，因此表中僅列出雙曲柄在不同條件下是省力或費力裝置。

表：將四桿長度之條件歸類到四種機構型態

機構型態	桿長	條件
雙曲柄	四同	$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ 不省力也不費力
	三同	$\overline{AD} \leq \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ 不省力也不費力
	二同	$\overline{BC} = \overline{AD}$ 且 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 不省力也不費力
		$\overline{BC} > \overline{AD}$ 且 $\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{CD}$ 不省力也不費力
		$\overline{AB} = \overline{AD} \leq \overline{BC} = \overline{CD}$ \overline{CD} 為主動桿 → 省力
		$\overline{CD} = \overline{AD} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$ \overline{AB} 為主動桿 → 省力
$\overline{CD} > \overline{AD}$ 且 $\frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC}$ 無法判斷省/費力		
曲柄搖桿	三同	$\overline{CD} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$
		$\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$
		$\overline{AB} = \overline{AD} \leq \overline{BC} = \overline{CD}$
	二同	$\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$
		$\overline{CD} < \overline{AB}$ 且 $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$
		$\overline{CD} > \overline{AB}$ 且 $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{BC} = \overline{AD}$
		$\overline{AB} = \overline{AD} \leq \overline{BC} = \overline{CD}$
		$\overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AB} = \overline{AD}$
		$\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{AD}$
		$\frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC}$
$\overline{AB} = \overline{BC} < \overline{CD} = \overline{AD}$		
$\overline{CD} = \overline{AD} \leq \overline{AB} = \overline{BC}$		

雙搖桿	三同	$\overline{BC} < \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD}$
	二同	$\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{CD}$ $\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2} \leq \overline{AB} = \overline{AD}$ $\overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AB} = \overline{AD}$ $\overline{AB} = \overline{BC} < \overline{CD} = \overline{AD}$
三搖桿	三同	$\frac{\overline{AD}}{3} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} < \overline{AD}$ $\frac{\overline{CD}}{3} < \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD}$ $\frac{\overline{BC}}{3} < \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} < \overline{BC}$
	二同	$\frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} < \overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ $\frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{2} < \overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ $\frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2} < \overline{AB} = \overline{CD} < \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$ $\frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{CD} < \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$ $\frac{\overline{CD} - \overline{BC}}{2} < \overline{AB} = \overline{AD} < \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2}$ $\frac{\overline{BC} - \overline{CD}}{2} < \overline{AB} = \overline{AD} < \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{2}$ $\frac{\overline{AD} - \overline{CD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC} < \frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2}$ $\frac{\overline{CD} - \overline{AD}}{2} < \overline{AB} = \overline{BC} < \frac{\overline{CD} + \overline{AD}}{2}$

三、形成機構的條件與形成葛氏機構或三搖桿的分界點：

1. 形成機構的條件

我們發現在「三同」與「二同」的任何一種情況下，可以構成機構型態時，不等式的分界點都長的差不多，其原理都是根據平面四連桿的「基本原理」，即任三桿的長度和必需大於第四桿的長度，再加上各自的條件，就可以得到需滿足的不等式。

$$\text{「三同」: } \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 > L_4 \\ L_1 = L_2 = L_3 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 = L_3 > \frac{L_4}{3}$$

$$\text{「二同」: } \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 > L_4 \\ L_1 = L_2 \\ L_3 > L_4 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 > \frac{L_3 - L_4}{2}$$

2. 形成葛氏機構或三搖桿的分界點

底下舉一個例子說明：若 $\overline{BC} = \overline{AD}$ ，且 $\overline{CD} < \overline{AB}$ ，可分為三種大情況。

(1) $\overline{CD} < \overline{AB} < \overline{BC} = \overline{AD}$

因 $\overline{AD} + \overline{CD} < \overline{AB} + \overline{BC}$ ，屬於葛氏機構，又最短桿為 \overline{CD} (搖桿)，得型態為曲柄搖桿。

(2) $\overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD} < \overline{AB}$

因 $\overline{AD} + \overline{CD} < \overline{AB} + \overline{BC}$ ，不屬於葛氏機構，得出型態為三搖桿。

(3) $\overline{CD} < \overline{BC} = \overline{AD} < \overline{AB}$

若 $\overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，則 $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{AD} + \overline{BC}$ ，不屬於葛氏機構，型態為三搖桿

；反之，若 $\overline{BC} = \overline{AD} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，則 $\overline{AB} + \overline{CD} \leq \overline{AD} + \overline{BC}$ ，屬於葛氏機構，又最短桿為 \overline{CD} (搖桿)，得出型態為曲柄搖桿。

綜合以上，因為 $\overline{BC} = \overline{AD} < \overline{CD} < \overline{AB}$ 必定符合 $\overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，所以當 $\overline{BC} = \overline{AD} < \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，則型態為三搖桿；另外， $\overline{CD} < \overline{AB} < \overline{BC} = \overline{AD}$ 必定符合 $\overline{BC} = \overline{AD} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，所以當 $\overline{BC} = \overline{AD} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ ，則型態為曲柄搖桿。

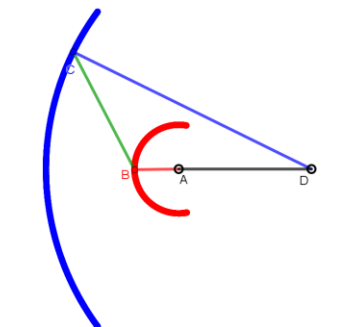
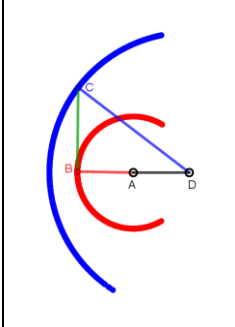
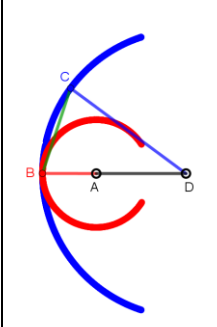
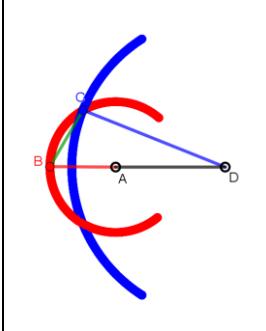
由此可知，我們研究出來的不等式可以利用葛式定理進行推論。

四、區分「三搖桿」與「雙搖桿」的特殊方法：

1. 軌跡交點數：三搖桿的交點數可能為 0、1 或 2 個，雙搖桿的交點數必為 1 個。

	三搖桿			雙搖桿
交點數	0	1	2	1
舉例				

2. 在三搖桿中，如果 B 點可以拉動到讓 B、A、D 三點共線，我們發現 ΔCBD 的種類與軌跡交點數有關，如果 ΔCBD 為鈍角或直角三角形，則軌跡交點數為 0 個；如果 ΔCBD 為銳角三角形，則軌跡交點數為 1 或 2 個。

ΔCBD	鈍角三角形	直角三角形	銳角三角形	
交點數	0		1	2
舉例				

五、模擬投石器之實驗數據分析

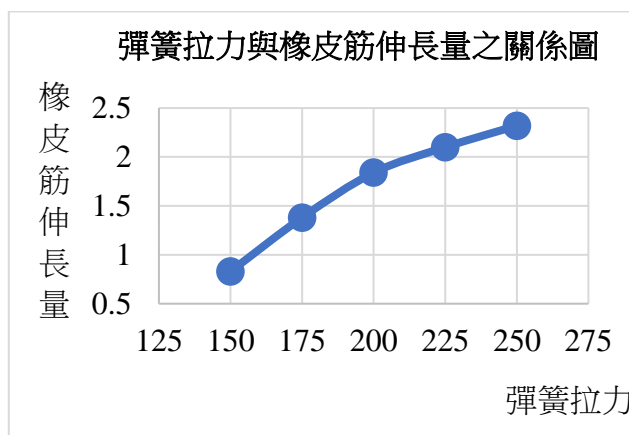
1. 比較「彈簧拉力大小 F」與「球的拋力大小 f」，判斷裝置為省力或費力。

從動桿長度 r	彈簧拉力大小 F	球的拋力大小 f	力的差距 f-F	省力或費力裝置
11 (三搖桿)	125	136.2	11.2	省力
	150	150.8	0.8	省力
	175	165.5	-9.5	費力
	200	175.3	-24.7	費力
12 (曲柄搖桿)	125	150.8	25.8	省力
	150	166.5	16.5	省力
	175	184.8	9.8	省力
	200	203.1	3.1	省力
	225	223.0	-2.0	費力
	250	244.0	-6.0	費力
13 (曲柄搖桿)	125	184.1	59.1	省力
	150	196.4	46.4	省力
	175	214.7	39.7	省力
	200	234.5	34.5	省力
	225	257.5	32.5	省力
	250	282.5	32.5	省力

從上表中，我們觀察到當彈簧拉力大小 F 越大，球的拋力大小與其的差距 f-F 會越小，

當差距小於 0 時，裝置就會相較費力。由數據得到，從動桿長度為 11 時，當彈簧拉力 =175 和 200，裝置為費力；從動桿長度為 12 時，當彈簧拉力=200 和 250，裝置為費力。我們認為導致費力的原因可能是橡皮筋的彈性限度，於是我們計算了橡皮筋的伸長量，並繪製彈簧拉力與橡皮筋伸長量的關係圖，

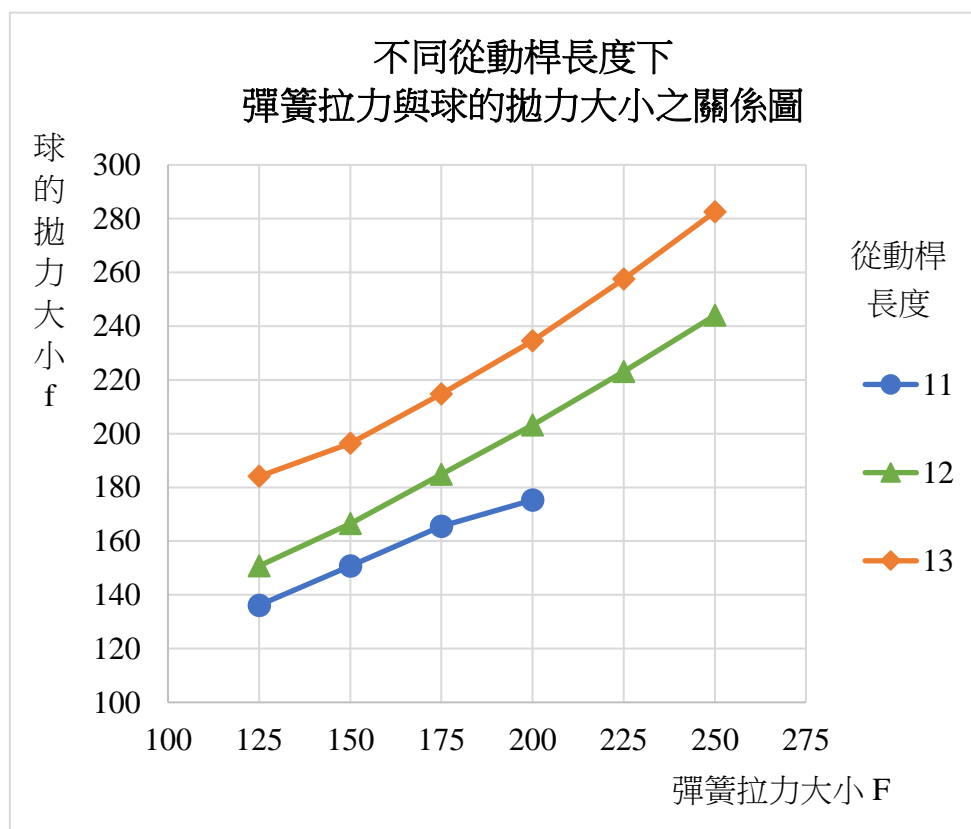
彈簧拉力大小	橡皮筋長度	橡皮筋伸縮量
125	5.40	X
150	6.23	0.83
175	6.78	1.38
200	7.24	1.84
225	7.50	2.10
250	7.72	2.32



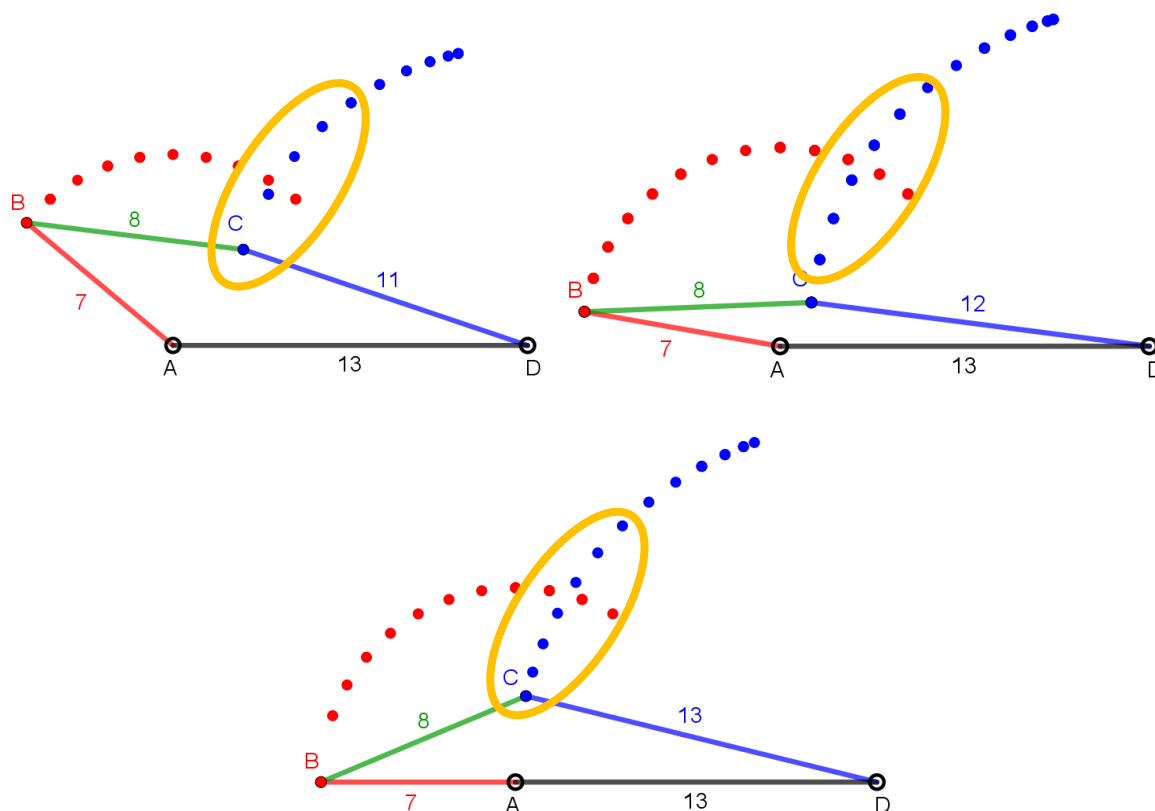
從圖中可以看出兩者之間並非線性關係，也就是當橡皮筋超過彈性限度，將會進入塑形階段，因此無法提供完整的力量，才會導致裝置較為費力。

2. 最佳拋射角度

我們將數據中「彈簧拉力的大小」與「球的拋力大小」繪製成下方的關係圖，



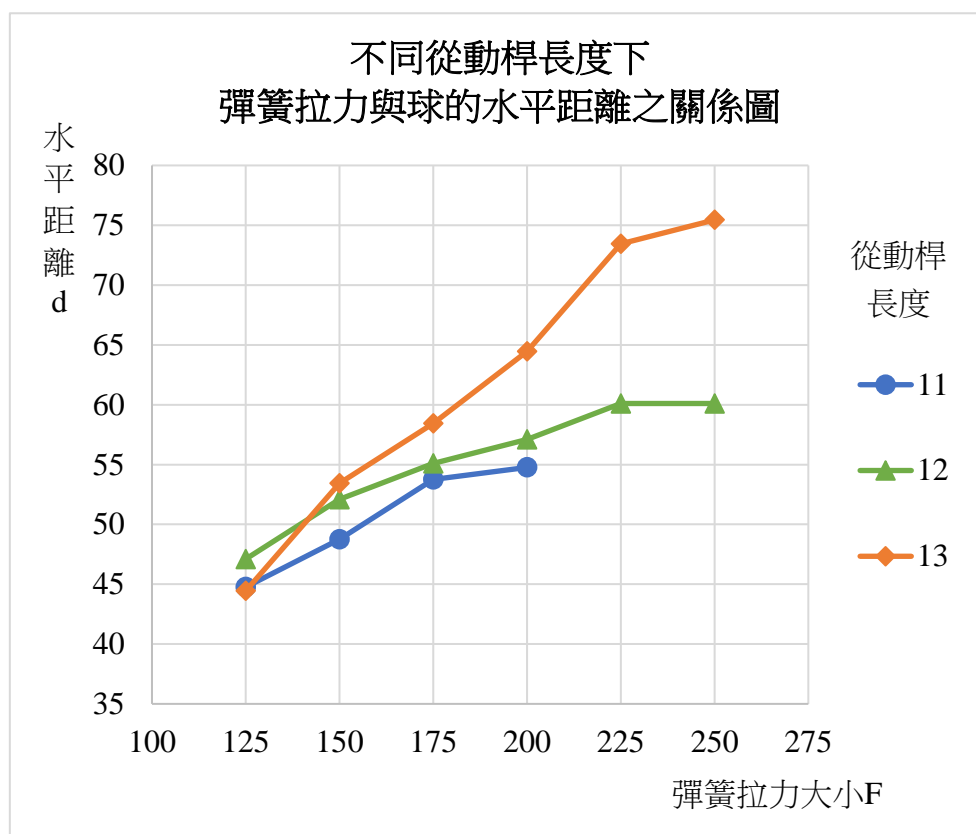
當從動桿長度為 11 時，圖形近似凹向下的曲線，代表球的拋力大小之差距有「遞減」的情形；當從動桿長度為 12 時，圖形近似斜直線，也就是球的拋力大小之差距有「持平」的情形；然而，當從動桿長度為 13 時，圖形近似凹向上的曲線，代表球的拋力大小之差距有「遞增」的情形。



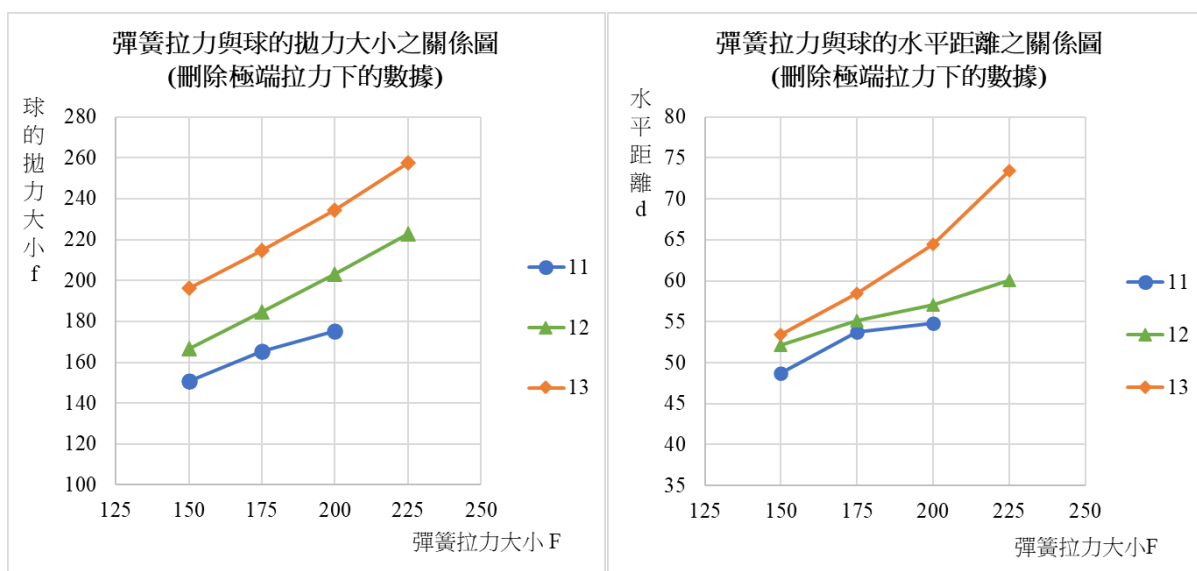
我們利用 GGB 截取上方圖形，讓主動桿的 B 點做等速度圓周運動，發現從動桿的 C 點會做變加速度運動，在特定的範圍裡(圖中圈起來的部分)，當從動桿長度為 11 時，C 點軌跡間的差距會隨著時間逐漸遞減；當從動桿長度為 12 時，C 點軌跡間的差距近似相同；當從動桿長度為 13 時，C 點軌跡間的差距會隨著時間逐漸遞增，這個現象正好可以解釋彈簧拉力與拋力大小之關係圖。推測如果讓球在 C 點軌跡間的差距最大時拋出，也就是找到最佳的拋射角度，除了可以讓球拋的較遠，同時也達到相對較為省力的裝置。

3. 「球的拋力大小」與「球拋出的水平距離」之間的關聯

我們透過實驗測量出球拋出的水平距離，將「彈簧拉力的大小」與「球的水平距離」繪製成下方的關係圖，發現彈簧拉力太大或太小時，因受到彈性限度的影響，數據不穩定。

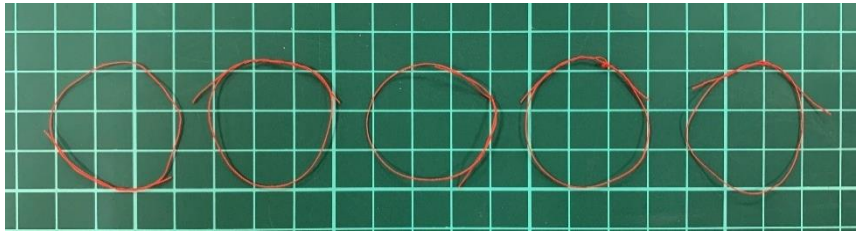


於是，我們將彈簧拉力在極端情況下的數值移除，得到下方兩張關係圖，從圖中可以看出球的拋力大小與水平距離有關聯，觀察趨勢，可以得到當從動桿長度分別為 11、12、13 時，無論是球的拋力大小或水平距離，當彈簧拉力越大，皆分別是遞減、持平、遞增的現象，且在水平距離的關係圖中更加明顯。

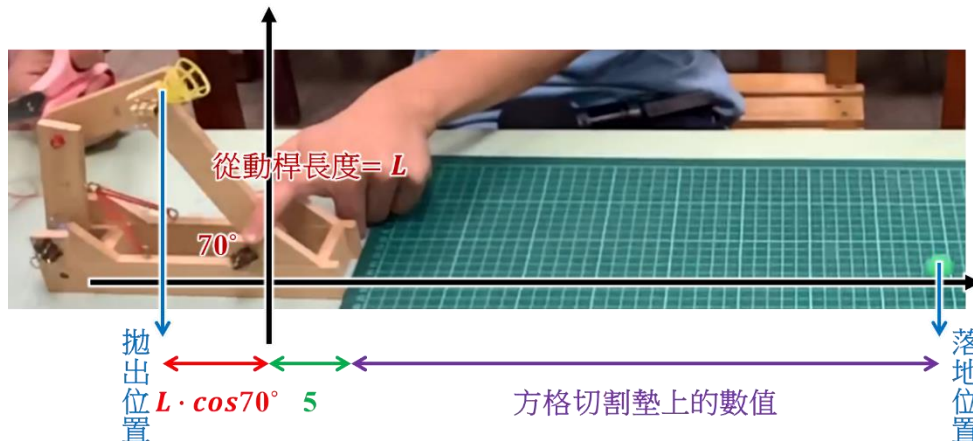


4. 實驗中的注意事項

(1) 因此實驗數據容易受到各種變因影響，因此我們盡可能地將影響的變因降到最低，像是下圖中，繩子的大小我們綁得幾乎一樣大。



(2) 在記錄球拋出的水平距離時，一開始我們忽略了當從動桿長度不同時，球拋出的起始位置也會不同，因此要再加上下圖中 $L \cdot \cos 70^\circ$ 這一段長度。



伍、結論與未來展望

一、結論

1. 省力或費力的四連桿裝置的影響因素有「主動桿與從動桿的長度」和「搖桿軌跡弧長所對到的圓心角度數」，在雙曲柄中，可以根據主動桿與從動桿的桿長大小去判斷省/費力；但是在曲柄搖桿與雙搖桿中，就必需根據桿長比例與角度比例的大小去判斷。
2. 利用 GGB 與扣條進行實驗，我們找到四連桿中，若四桿皆等長(四同)、三桿等長(三同)、兩桿等長(二同)時，在不同條件下所對應的機構型態是「三搖桿」、「曲柄搖桿」、「雙搖桿」還是「雙曲柄」，將三同與二同的結果整理成「圖三」與「圖四」的樹狀圖。
3. 所有機構型態中，三搖桿及曲柄搖桿的出現頻率較多。原因是所有不符合葛氏定理的四連桿機構皆為三搖桿，故三搖桿的出現頻率較多；又因葛氏定理中，若最短桿為連桿，則為曲柄搖桿，而一個四連桿機構有兩支連桿，故曲柄搖桿的出現頻率也較多。
4. 三搖桿的軌跡交點數可能為 0、1 或 2 個，但雙搖桿的軌跡交點數必定為 1 個，且如果將三搖桿中其中一個連桿拉到與固定桿平行時，當軌跡交點數為 0，四根桿子會形成鈍角三角形或者直角三角形；當軌跡交點數為 1 或 2，四根桿子都會形成銳角三角形。

5. 在模擬投石器的實驗中，發現當彈簧拉力越大時，球的拋力大小與其的差距會越小，表示裝置越不省力，原因是受到橡皮筋彈性限度的影響。另外，也觀察到在特定從動桿長度下，彈簧拉力越大時，球的拋力大小與前一項的差距會有「遞減」、「持平」或者「遞增」的現象，原因是主動桿做等角度圓周運動時，從動桿是做加速度運動，且這個現象可以在實驗中紀錄的水平距離中看出來。

二、未來展望

1. 四桿長度還有皆不等長(四異)的情況尚未討論，因可能的條件太多，也許可以著重於在特定的比例下，找出對應的機構型態。
2. 機構型態除了與長度有關，也與旋轉的角度有關，又旋轉的角度也會影響製作出來的是省力或費力的四連桿裝置，因此可以進一步找出以角度為條件的結論。
3. 應用於日常生活中，如：運用連桿機構的軌跡作畫或書寫文字。

陸、參考文獻資料

1. 維基百科 (2022 年 5 月 25 日)。直線運動機構。檢自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B4%E7%B7%9A%E9%81%8B%E5%8B%95%E6%A9%9F%E6%A7%8B>
2. 維基百科 (2022 年 2 月 26 日)。切比雪夫連桿機構。檢自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%88%87%E6%AF%94%E9%9B%AA%E5%A4%AB%E9%80%A3%E6%A1%BF%E6%A9%9F%E6%A7%8B>
3. 維基百科 (2022 年 1 月 7 日)。波塞利耶-利普金機械。檢自：<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B3%A2%E5%A1%9E%E5%88%A9%E8%80%B6-%E5%88%A9%E6%99%AE%E9%87%91%E6%9C%BA%E6%A2%B0>
4. 維基百科 (2020 年 11 月 30 日)。哈特氏直線運動機構。檢自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%88%E7%89%B9%E5%80%92%E7%BD%AE%E5%99%A8>
5. 維基百科 (2020 年 10 月 9 日)。平面四連桿機構。檢自：<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%9B%9B%E6%9D%86%E6%9C%BA%E6%9E%84>
6. 機動學_陳正光_連桿組介紹_四連桿組判別：Grashof 判別準則。檢自：
<https://www.youtube.com/watch?v=XfiVCaY2YYQ>
7. 機動學_陳正光_連桿組介紹_四連桿組介紹(上)。檢自：<https://www.youtube.com/watch?v=uviDbeJ7YjI>
8. 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會。自行車重心轉換裝置。檢自：<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/090908.pdf>
9. 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會。步行機構綜合設計原理之研究。檢自：
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/53/pdf/090906.pdf>

【評語】 030102

研究的細項分析與歸類相當清楚，如果再加以考慮桿子各質心運動所吸收的能量，會使得分析更加完整。

作品海報

摘要

本研究先根據功能原理與能量守恆定律，推算出四連桿機構中省力或費力的裝置，影響因素有桿長及搖桿角度，以GGB軟體為主，扣條為輔作為研究設備，依桿長分成四同、三同及二同，運用基本原理找出形成機構的條件，再利用葛氏判別法推論構成葛氏機構與三搖桿時的分界點，並將結論以樹狀圖呈現。

運用上述模擬結果設計出四連桿投球器，觀察到在特定從動桿長度下，隨著外加彈簧拉力增加時，球的拋力大小與前一拉力下產生之球拋力的差值會有「遞減」、「持平」或「遞增」的現象，原因是主動桿做等角速度圓周運動時，從動桿是做變角速度運動，且不同從動桿長度將形成不同連桿機構，導致有省費力差異，這個現象可以在實驗中紀錄的球拋出之水平距離中看出來。

研究架構

研究動機

理論探討

實務應用

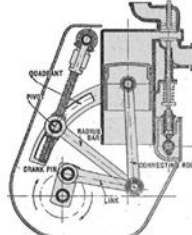
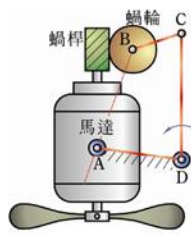
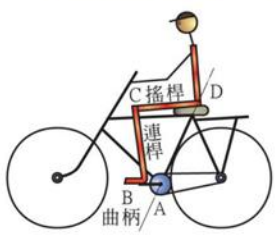
生科競賽：運輸車(平行四連桿)



腳踏車

風扇擺頭

引擎



省力或費力之機構型態
(功能原理與能量守恆定律)

桿子長度

四同

三同

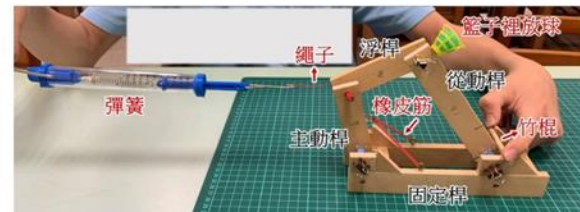
二同

搖桿擺動角度

形成機構條件
(基本原理)

不等式分界點
(葛氏判別法)

四連桿投球器



省力或費力
(橡皮筋伸長量)

最佳拋射點
(觀察軌跡趨勢)

研究目的

- 根據功能原理與能量守恆定律，探討四連桿機構中省力與費力裝置的影響因素與關係。
- 利用GGB與扣條模擬四連桿機構，依據桿件的長度，分成四同、三同、二同，探討在不同條件下所對應的機構型態。
- 根據基本原理，算出上方討論中可以構成機構的條件，並利用葛氏判別法，推論構成葛氏機構與三搖桿時，不等式的分界點，以及葛氏機構對應的基本型態。
- 觀察機構中主動桿與從動桿的移動軌跡，討論不同軌跡交點數對應的機構型態，發展特殊的判別方法，並解釋如何應用於生活例子中。
- 設計製作出四連桿投球器，控制主動桿長度與彈簧拉力大小，推算球的拋力大小，分析如何設計省力的裝置，推論最佳的拋射點，並解釋球的拋力大小與水平距離之間的關聯。

葛氏判別法與機構型態

四連桿中四根桿子的長度：

- 最長桿： L_{max}
- 最短桿： L_{min}
- 其餘兩桿： L_1 、 L_2

葛氏判別法

葛氏機構

$$L_{max} + L_{min} \leq L_1 + L_2$$

$$L_{max} + L_{min} > L_1 + L_2$$

雙曲柄

最短桿為固定桿

曲柄搖桿

最短桿為連桿

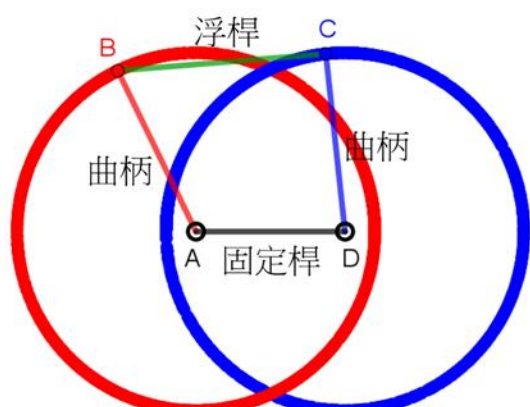
雙搖桿

最短桿為浮桿

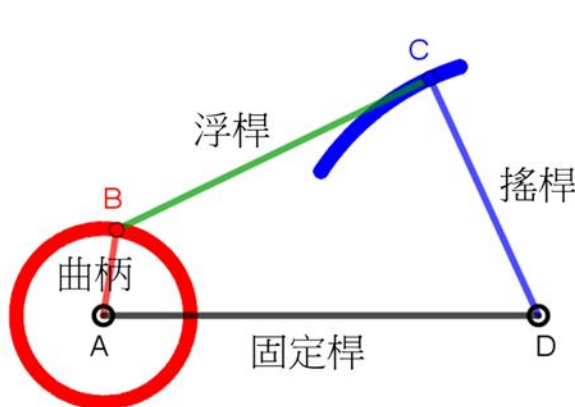
三搖桿

三支桿件均僅能在有限角度內來回擺動

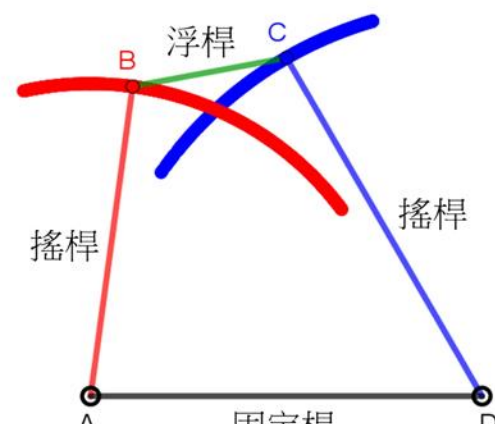
葛氏機構型態：



雙曲柄



曲柄搖桿



雙搖桿

研究過程：省力或費力裝置

雙曲柄

R：主動桿長度、F：施力、r：從動桿長度、f：作用力

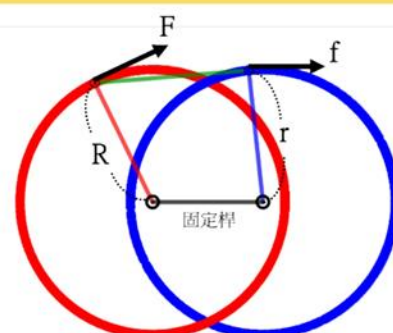
$$F \times 2\pi R = f \times 2\pi r$$

$$\Rightarrow f = \frac{R}{r} \times F$$

(1) 若 $R > r$ ，則 $F < f$ ，為省力裝置。

(2) 若 $R < r$ ，則 $F > f$ ，為費力裝置。

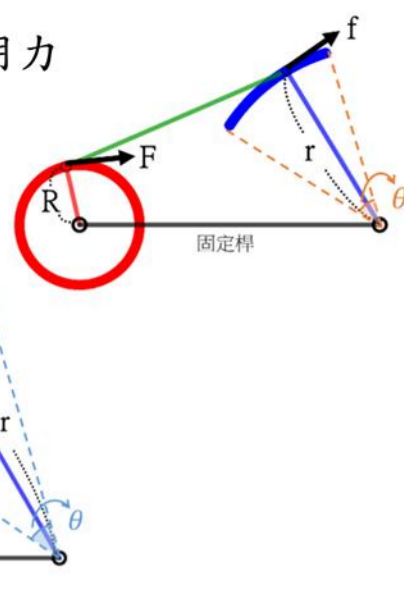
(3) 若 $R = r$ ，則 $F = f$ ，為不省力也不費力。



曲柄搖桿 R：主動桿長度、F：施力、r：從動桿長度、 θ ：軌跡弧長圓心角、f：作用力

$F \times 2\pi R = f \times r\theta \times 2$ (1) 若 $\frac{R}{r} > \frac{\theta}{\pi}$ ($\because \frac{R}{r} < 1 \therefore \theta < \pi$)，則 $F < f$ ，為省力裝置。

$\Rightarrow f = \frac{R}{r} \times \frac{\pi}{\theta} \times F$ (2) 若 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\pi}$ ，則 $F > f$ ，為費力裝置。



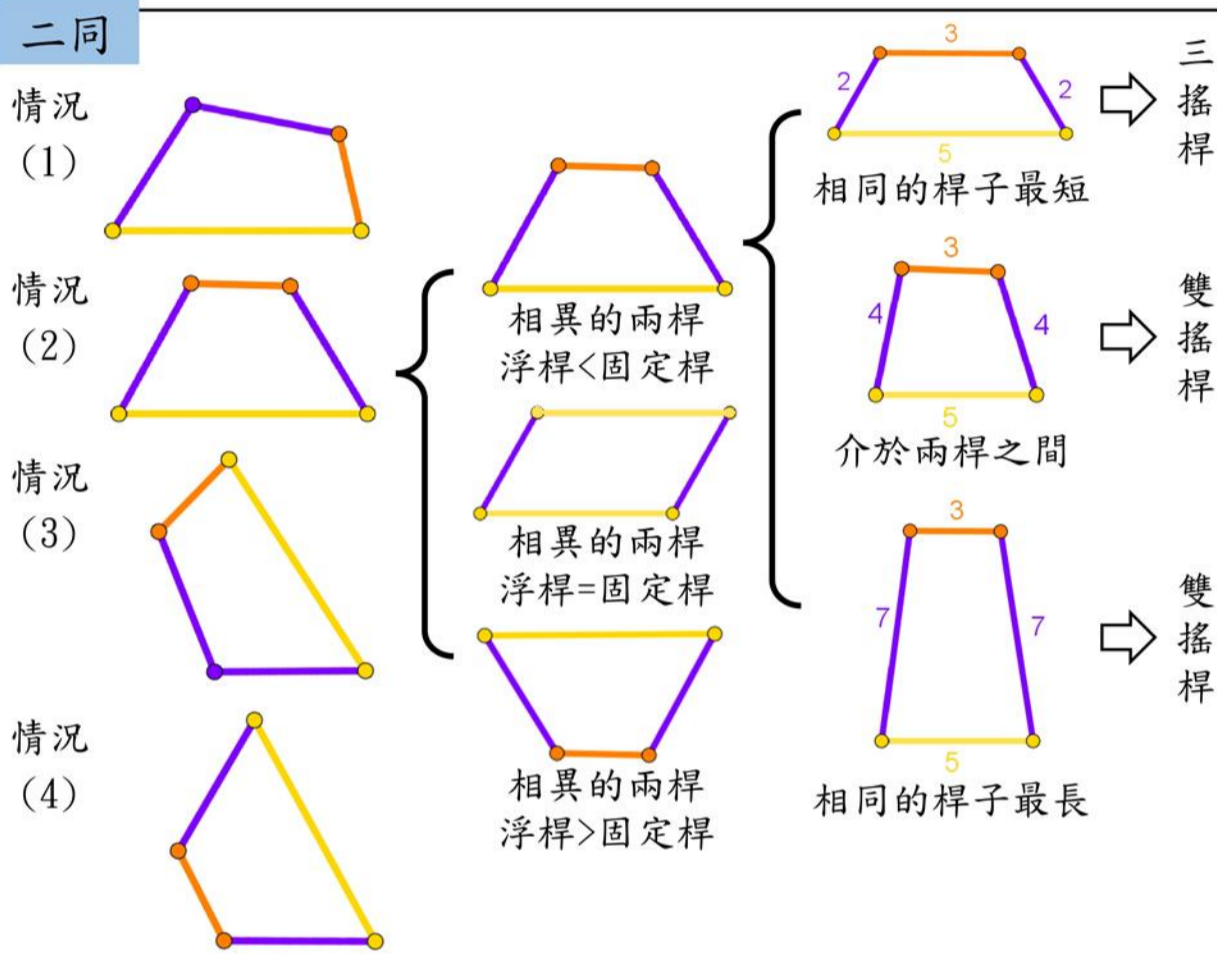
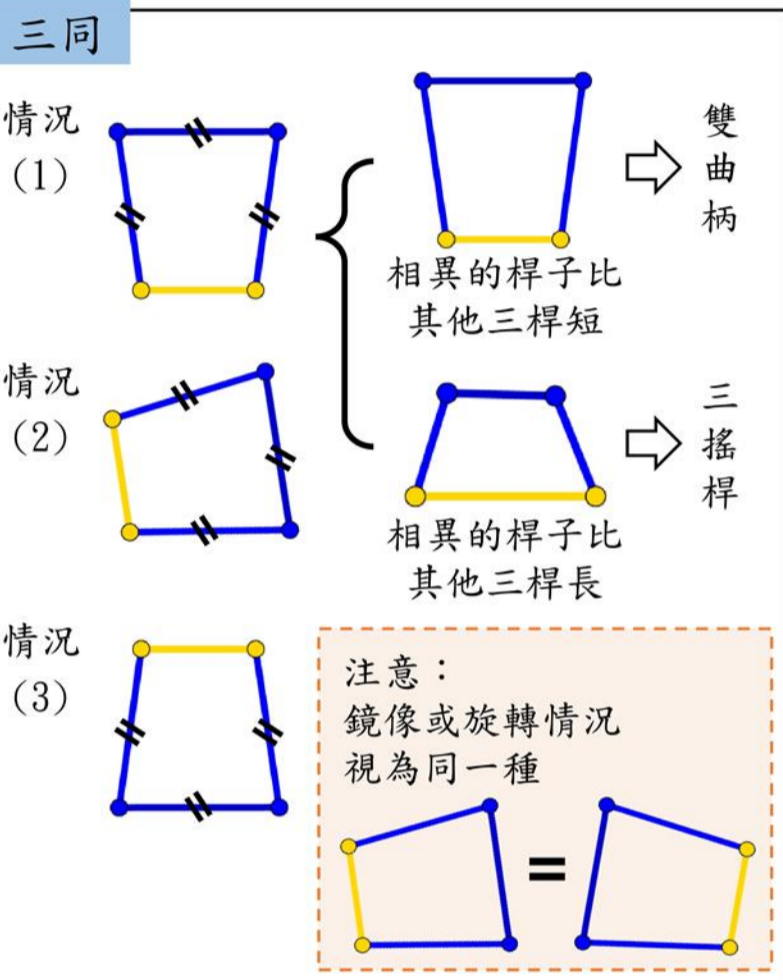
雙搖桿 R：主動桿長度、 ϕ ：軌跡弧長圓心角、F：施力
r：從動桿長度、 θ ：軌跡弧長圓心角、f：作用力

$F \times R\phi \times 2 = f \times r\theta \times 2$ (1) 若 $\frac{R}{r} > \frac{\theta}{\phi}$ ，則 $F < f$ ，此為省力裝置。

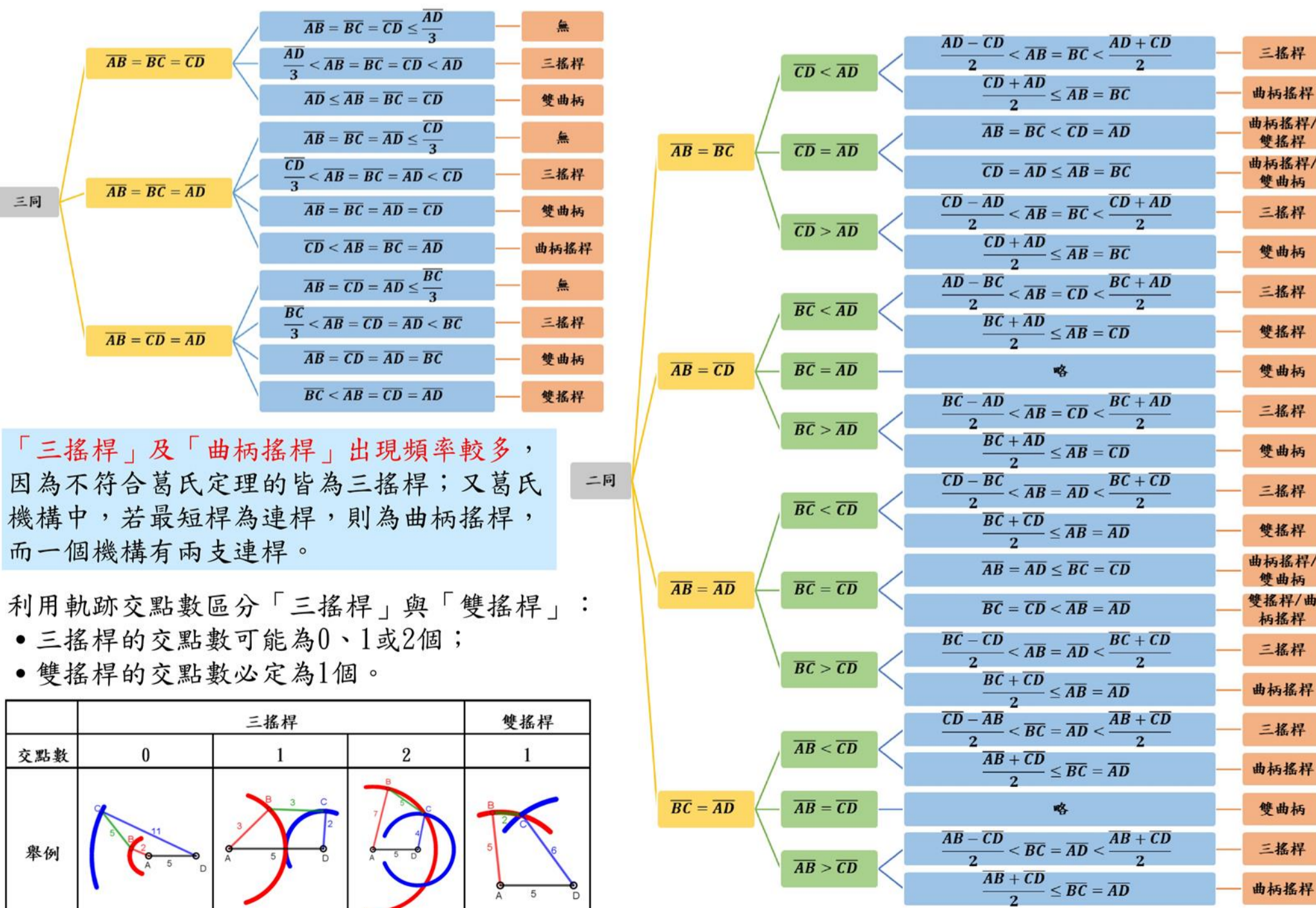
$\Rightarrow f = \frac{R}{r} \times \frac{\phi}{\theta} \times F$ (2) 若 $\frac{R}{r} < \frac{\theta}{\phi}$ ，則 $F > f$ ，此為費力裝置。

研究過程：四桿長度為四同、三同、二同

四同 如果 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ ，則四邊形ABCD為平行四邊形，此機構為雙曲柄中的平行四連桿。



研究結果：統整樹狀圖並發展特殊的機構判別方式



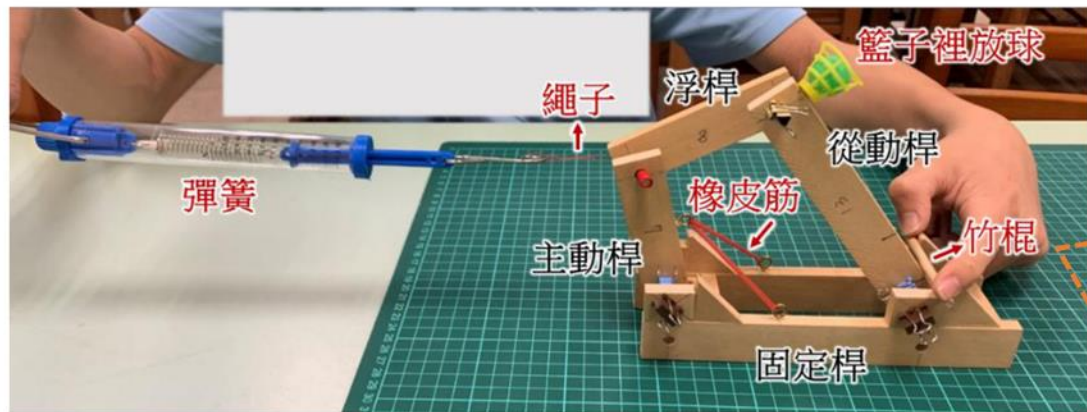
「三搖桿」及「曲柄搖桿」出現頻率較多，因為不符合葛氏定理的皆為三搖桿；又葛氏機構中，若最短桿為連桿，則為曲柄搖桿，而一個機構有兩支連桿。

利用軌跡交點數區分「三搖桿」與「雙搖桿」：
• 三搖桿的交點數可能為0、1或2個；
• 雙搖桿的交點數必定為1個。

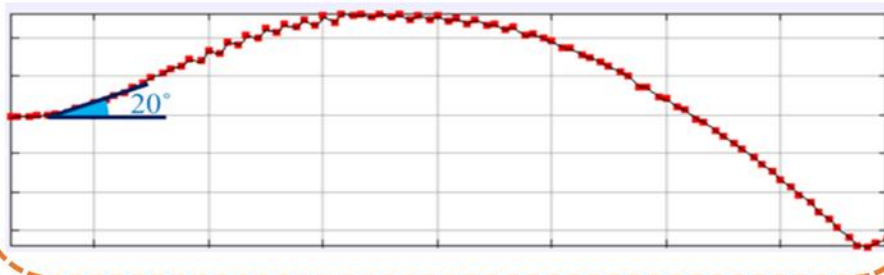
交點數	三搖桿			雙搖桿
	0	1	2	1
舉例				

研究過程：四連桿投球器

(一) 實驗裝置



圖中的竹棍為棘輪機構，藉此固定球拋出的角度，並利用軌跡追蹤軟體Tracker去測量。



- 控制變因：固定桿長度=13cm、主動桿=7cm、浮桿=8cm、球拋出的初始角度=20°
- 操縱變因：從動桿長度、彈簧的拉力
- 應變變因：球拋出的水平距離

(二) 機構型態

假設從動桿長度= x (cm)，如果裝置為葛氏機構且最短桿為主動桿，其機構型態為曲柄搖桿，若最長桿為固定桿，則 $7 + 13 \leq 8 + x \Rightarrow 12 \leq x$ ，若最長桿為從動桿，則 $7 + x \leq 8 + 13 \Rightarrow x \leq 14$ 。因此 $12 \leq x \leq 14$ 為曲柄搖桿；否則為三搖桿。

研究結果：四連桿投球器的省費力與最佳拋射點

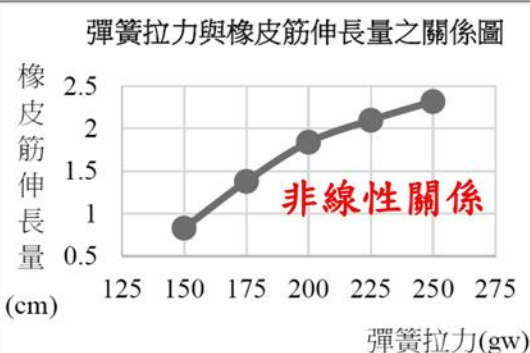
(三) 實驗數據與分析

從動桿長度r (cm)	彈簧拉力 F (gw)	球的拋力 f (gw)	與前一項f力的差值 差值(gw)	省/費力裝置	球拋出水平距離d(cm)	與前一項d差值(cm)
11 三搖桿	125	136.2	-	省力	44.7	-
	150	150.8	14.6	省力	48.7	4
	175	165.5	14.7	費力	53.7	5
	200	175.3	9.7	費力	54.7	1
12 曲柄搖桿	125	150.8	-	省力	47.1	-
	150	166.5	15.8	省力	52.1	5
	175	184.8	18.3	省力	55.1	3
	200	203.1	18.3	省力	57.1	2
	225	223.0	19.9	費力	60.1	3
13 曲柄搖桿	125	184.1	-	省力	37.4	-
	150	196.4	12.4	省力	45.4	8
	175	214.7	18.3	省力	54.4	9
	200	234.5	19.8	省力	62.4	8
	225	257.5	23.0	省力	69.4	7
	250	282.5	25.0	省力	66.4	-3

(四) 省力或費力裝置

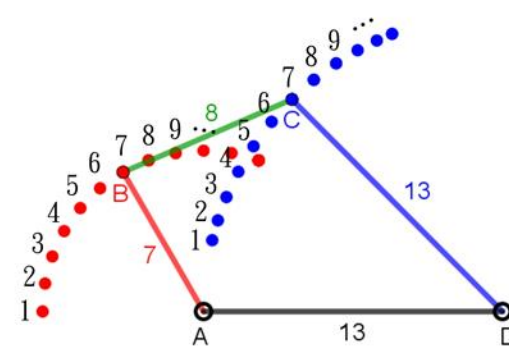
推測導致費力的原因：彈簧秤的部分拉力被支點抵銷。

彈簧拉力 (gw)	橡皮筋長度 (cm)	橡皮筋伸長量 (cm)
125	5.40	-
150	6.23	0.83
175	6.78	1.38
200	7.24	1.84
225	7.50	2.10
250	7.72	2.32

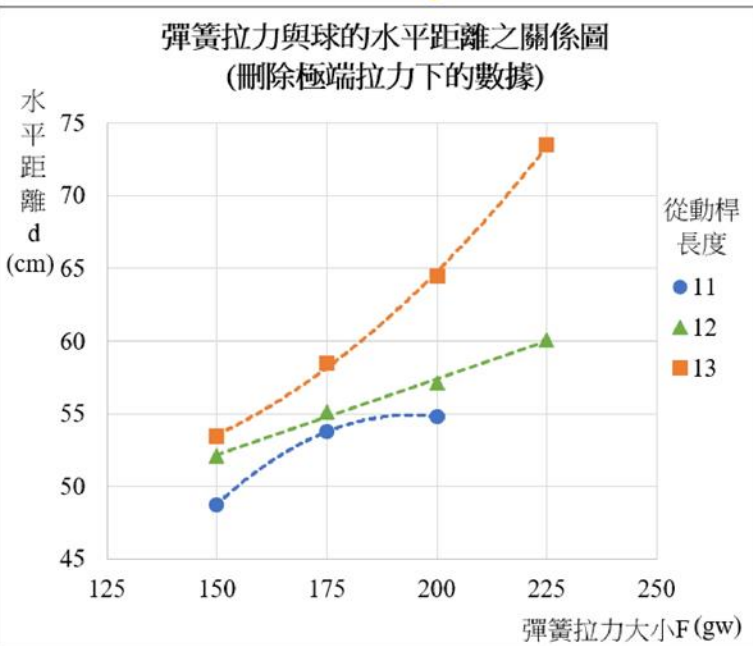
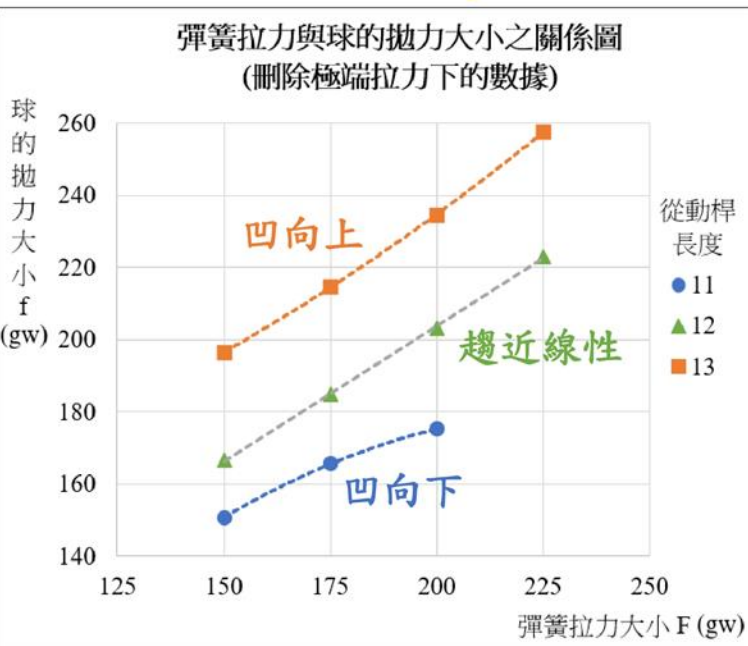


(五) 最佳拋射點

舉例：從動桿長度=13cm



假設主動桿的B點做等角速度圓周運動(紅點)，從動桿的C點會做變角速度運動(藍點)，推測最佳的拋射點就是讓球在C點軌跡間的差距最大時拋出。



無論是球的拋力大小或水平距離，當彈簧拉力越大，從動桿長度在11、12、13cm下分別是遞減、持平、遞增的現象，且在水平距離的關係圖中更加明顯。

研究結論

參考文獻資料

- 四連桿裝置中影響省力或費力的因素有「桿子的長度」和「搖桿擺動的角度」，根據桿子長度可分為四同、三同與二同等情況，從統整之樹狀圖中得出，在所有機構型態中，「三搖桿」及「曲柄搖桿」出現的頻率較多，推測其原因與葛式定理有關。
- 根據軌跡交點數也可以判斷機構型態，其中「三搖桿」的軌跡交點數可能為0、1或2個，但「雙搖桿」的軌跡交點數必定為1個。
- 本研究設計之四連桿投球器中，彈簧拉力與橡皮筋伸長量為「非線性關係」，因此當彈簧拉力越大時，可能會形成費力的裝置。
- 觀察實驗數據中拋力的增減現象，對照趨勢圖，並結合軟體模擬動點軌跡，由此可推測利用投球器將球拋出的最佳的拋射點。

- 維基百科(2022年5月25日)。直線運動機構。
- 維基百科(2022年2月26日)。切比雪夫連桿機構。
- 維基百科(2022年1月7日)。波塞利耶-利普金機械。
- 維基百科(2020年11月30日)。哈特氏直線運動機構。
- 維基百科(2020年10月9日)。平面四連桿機構。
- 機動學_陳正光_連桿組介紹_四連桿組判別：Grashof判別準則。
- 機動學_陳正光_連桿組介紹_四連桿組介紹。
- 中華民國第52屆中小學科學展覽會。自行車重心轉換裝置。
- 中華民國第53屆中小學科學展覽會。步行機構綜合設計原理之研究。