

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

團隊合作獎

030101

尼與震的交會—球型阻尼器性質應用之研究

學校名稱：新北市立土城國民中學

作者： 國二 利天佑 國二 戴辰祐 國二 劉羿廷	指導老師： 蕭聖益 李家銘
---	-----------------------------

關鍵詞：阻尼、簡諧運動、力矩

摘要

科學家們研究出阻尼器用來減震，但未固定圓底的裝置容易晃動卻較少研究，本研究用力矩和能量原理探究在阻尼器能防圓底震動的效果。我們雷切壓克力板製作出半圓，再用3D列印印出阻尼球，改變施放角度，擺長，擺重，並透過 Tracker 分析移動軌跡，進而計算週期 T 、對數衰減率 \log decrement、角頻率 ω 、阻尼比 damping ratio 、指數衰減率 α 、 Q 、阻力係數 r 。研究結果發現模型晃動後，仍符合指數衰減，阻尼球可以降低合力矩，亦符合類簡諧運動（合力矩和位移相關），而擺長對減震效果有限，擺重則因有慣性，效果也有限，我們提出理論模型來解釋上述現象。未來可持續嘗試類簡諧運動模式，擺錘重量的影響，水中複雜運動的模式。

壹、前言

一、研究動機

2023 年的現在，貨物的運輸極為重要，其中又以船運最大宗。船舶運行當中，難免會發生一些搖晃進而造成震動，不僅會造成駕駛和乘客的不適，更可能會損壞到貨物，因此我們想到在台北 101 大樓中，有一種能減震的大型避震器——質量塊阻尼器，若是能將其裝到大型貨輪上，就可以有效防止船舶運行時出現的震動導致問題發生，或是搖搖椅等圓底下的運動模式，過去研究針對固定底部的結構居多，例如豪宅或大樓，但未固定圓底的分析較少，未固定圓底加裝阻尼球的分析更少，因此我們試圖自行設計實驗來分析未固定圓底和加裝阻尼球的運動模式。

二、研究目的

我們列出六個主要研究目的，並設計相關實驗設計如下：

（一）探討在各角度下，阻尼球對模型晃動之影響

1. 無阻尼球時，各角度下的 X 位移和 V_x 變化
2. 擺長 7.5 cm 阻尼球在各角度下的 X 位移和 V_x 變化
3. 擺長 10.5 cm 阻尼球在各角度下的 X 位移和 V_x 變化
4. 擺長 13.5 cm 阻尼球在各角度下的 X 位移和 V_x 變化

（二）各角度的能量衰減趨勢

1. 無阻尼球狀況下，模型的能量衰減趨勢
2. 有阻尼球及單擺狀況下擺長 7.5 cm，模型和模型上阻尼球的能量衰減趨勢
3. 有阻尼球及單擺狀況下擺長 10.5 cm，模型和模型上阻尼球的能量衰減趨勢

4. 有阻尼球及單擺狀況下擺長 13.5 cm，模型和模型上阻尼球的能量衰減趨勢

(三) 探討有裝阻尼球和無裝阻尼球，模型的阻尼相關資訊

1. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之週期 (T)
2. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之對數衰減率 (log decrement, δ)
3. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之阻尼比 (damping ratio, ζ)
4. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之角頻率 (ω)
5. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之指數衰減率 (α)
6. 有阻尼球和無阻尼球狀況下，不同起始角度之阻力係數 (r)

(四) 單擺和模型上阻尼球之關係比對

1. 相同施放角度之週期 (T)
2. 相同施放角度之對數衰減率 (log decrement, δ)
3. 相同施放角度之阻尼比 (damping ratio, ζ)
4. 相同施放角度之角頻率 (ω)
5. 相同施放角度之指數衰減率 (α)
6. 相同施放角度之阻力係數 (r)

(五) 改變阻尼球之質量比較

1. 相同施放角度之週期 (T)
2. 相同施放角度之對數衰減率 (log decrement, δ)
3. 相同施放角度之阻尼比 (damping ratio, ζ)
4. 相同施放角度之角頻率 (ω)
5. 相同施放角度之指數衰減率 (α)
6. 相同施放角度之阻力係數 (r)

(六) 模型之原理建構

1. 模型晃動之合力矩
2. 不同擺長之影響
3. 不同擺重之影響

三、文獻探討

(一) 阻尼器

利用阻尼特性來吸收或抑制衝量，藉以減緩力學震動及消耗動能的機械或液壓裝置，常見為質量塊阻尼器，利用能量轉換的原理，將建築物受到震動衝擊的

能量，轉換成質量塊的震動能量，再轉為熱能消散。

(二) 角動量守恆定律

系統所受合外力矩為零時系統的角動量保持不變，角動量的守恆實質上對應著空間旋轉不變性。像是考慮到太陽系中的行星受到太陽的萬有引力這一有心力時，由於萬有引力對太陽這個參考點力矩為零，所以他們以太陽為參考點的角動量守恆，這也說明了行星繞太陽公轉單位時間內與太陽連線掃過的面積大小總是恆定值的原因。

(三) 簡諧運動

最基本也是最簡單的一種機械震動。當某物體進行簡諧運動時，物體所受的力（或物體的加速度）的大小與位移的大小成正比，並且力（或物體的加速度）總是指向平衡位置。

如果用 F 表示物體受到的回復力，用 x 表示物體對於平衡位置的位移，根據虎克定律， F 和 x 成正比，它們之間的關係可用下式來表示：

$$F = -kx \quad (1)$$

式中的 k 是回復力與位移成正比的係數。

負號的意思是：回復力的方向總跟物體位移的方向相反。根據牛頓第二定律「 $F = ma$ 」當物體質量一定時，運動物體的加速度總跟物體所受淨力的大小成正比，跟淨力的方向相同，且系統的機械能守恆。在簡諧運動中，角頻率

$\omega = 2\pi f$ ，頻率 f 為週期 T 的倒數，其中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 推導過程：

$$\text{對時間 } t \text{ 微分得 } v = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

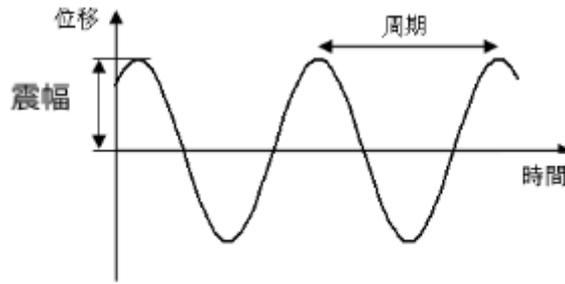
$$\text{再關於時間 } t \text{ 微分 } a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

$$\text{由牛頓第二定律 } F=ma \text{ 得 } a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = \frac{-Ak\cos(\omega t + \phi)}{m} \quad (4)$$

$$\text{兩式聯立得 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

$$\text{可知週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6)$$

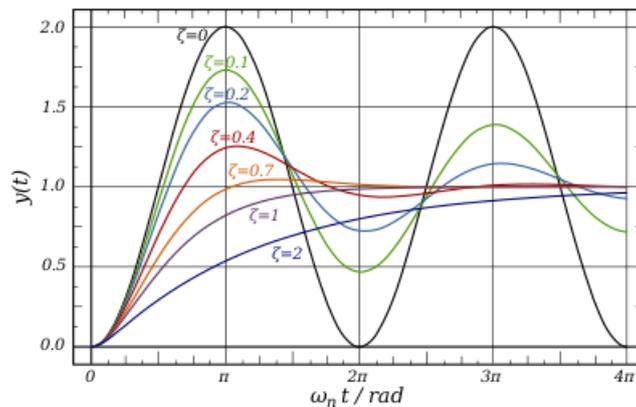
下圖為簡諧運動的圖像，表示的是震動物體的位移隨時間變化的規律。是一條正弦或餘弦曲線。



圖一 簡諧運動示意圖 (維基百科)

(四) 阻尼與阻尼比

阻尼是震盪系統內部或之上的一種影響，具有減少或防止本身震盪的作用。在物理系統中，阻尼是由耗散震盪中存儲的能量過程產生的。阻尼比是系統參數，用 ζ (zeta) 表示，可以從無阻尼 ($\zeta=0$)、欠阻尼 ($\zeta<1$)、臨界阻尼 ($\zeta=1$)、過阻尼 ($\zeta>1$) 變化，可描述系統中的震盪在擾動後如何衰減的無量綱量度。當許多系統從其靜態平衡位置受到干擾時，它們會表現出震盪行為。



圖二 阻尼比示意圖 (維基百科)

$$\text{阻尼比公式: } \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} \quad (7)$$

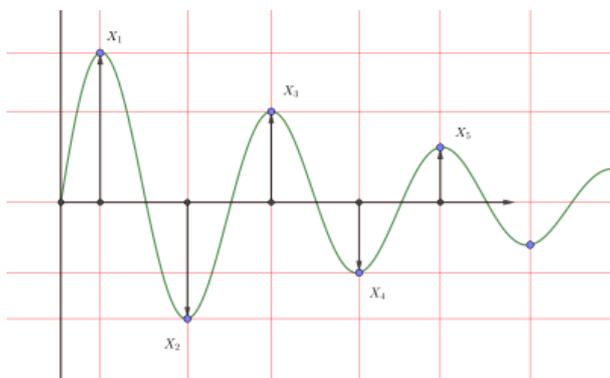
阻尼分成三種：

1. 過阻尼：因為阻尼比較大、緩衝足夠，整個系統有足夠大的能力去將能量耗散，所以在回到平衡的過程中不會衝過頭，系統不會來回震動，而是單調地、緩緩地趨於平衡位置。系統只能緩緩地趨於平衡位置，原因是大部分的回復力都被拿去克服阻尼。
2. 欠阻尼：阻尼比較小、耗散慢，所以回復力把系統拉回平衡位置後還會衝過頭，來回多做幾次週期震盪，但隨時間增加，震盪的震幅會越來越小。
3. 臨界阻尼：阻撓運動的能力是介於上述兩種情況中間，具有防止震盪所需

的最低能力。

(五) 週期和對數衰減率

週期為兩個波峰之間所過的時間，如附圖。T為 $x_1 \sim x_3$ 經過的時間。



圖三 週期和對數衰減率示意圖 (維基百科)

對數衰減 (δ) 公式

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_3} = \ln \frac{x_2}{x_4} = \ln \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} \quad (8)$$

x_1 、 x_3 為兩個連續正鋒的震幅 x_2 、 x_4 為兩個連續負鋒的震幅

(六) 角頻率 ω

角頻率有時也叫做角速率、角速度純量，是對旋轉快慢的度量。

因為旋轉一周的弧度為 2π 。所以

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (9)$$

(七) Q值

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (10)$$

其物理意義為阻尼比越大，Q值會越小

(八) 指數衰減率 (α)

在指數座標中，衰減的速度，稱為指數衰減率

$$\alpha = \omega \cdot \zeta \quad (11)$$

(九) 阻力係數 r

在平面上，將彈簧伸長之後並釋放如圖四，及位置對時間關係如圖五，但若當桌面有摩擦阻力，其每次的最大震幅會逐漸衰減，週期為不變如圖五，其原理分析如下：若恢復力為彈力 F ， $F = -kx$ ，彈力和位置成正比，其比例係數為 k ，負號代表彈力方向和位移相反， k 和彈簧的性質有關，接下來考慮桌面的阻尼力，我們假設阻尼力的關係為 $F = -bv = -2rv$ ， b 為參數， r 為我們的阻力係數， v 為速度，我們可以列出以下方程式：

$$\text{合力 } F = ma = -kx - bv \quad (12)$$

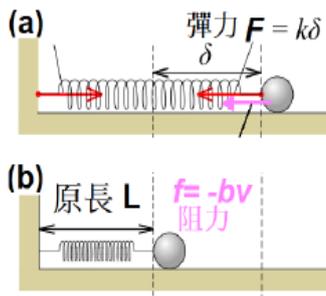
我們知道 a 為位置對時間的二次微分， v 為位置對時間的一次微分，因此我們列出以下微分方程：

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - bv \\
m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - b \frac{dx}{dt} \\
m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

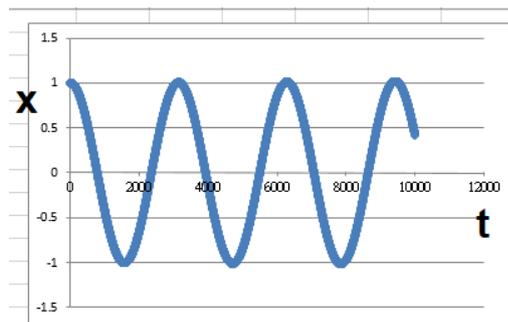
我們會使用 Euler method 來解微分方程，分析可得到圖六：

$$dx/dt = v; \quad // \quad x \text{ 是位移，} v \text{ 是速度}$$

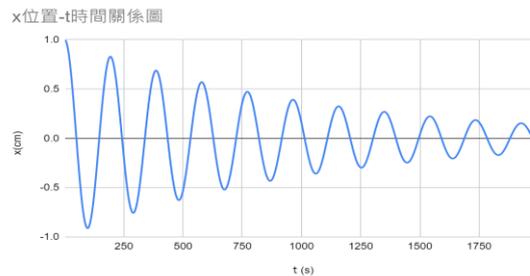
$$dv/dt = -2rv - w^2x; \quad // \quad b = 2r = \text{阻尼，} \omega = \text{角頻率}$$



圖四 示意圖 (李柏翰, 2021)



圖五 示意圖 (李柏翰, 2021)



圖六 x 位置-t 時間關係圖

(十) 圓底的受力分析

考慮一均勻半圓盤底座，其初始狀態如圖七黑色半圓，將其底部密合維持靜摩擦力，旋轉角度 θ ，如圖(七)紅色半圓，可以藉由幾何的性質分析受力狀態，如下所述：考慮半圓盤 OAMB，其圓心為 O，半徑 $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = \overline{OP}$ ，其中 $\angle POM = \theta$ 。當其轉動 θ 角之後，P 點會落至地面，新的半圓盤 A'P'M'B' 位置如圖所示，圓心移動的距離 $\overline{OO'}$ 等於 $\overline{P'M}$ ，亦等於弧長 \widehat{PM} ，也等於弧長 $\widehat{P'M'}$ ，我們假設 $\overline{OO'} = \overline{P'M} = X$ ，則其長度為 $X = R \cdot \theta$ ，因此可得以下重要關係式

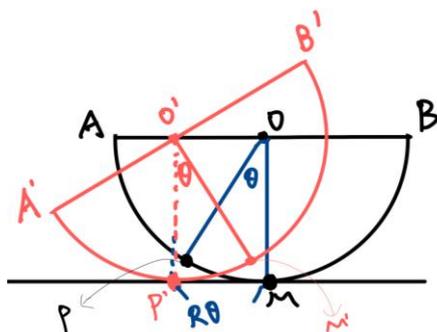
$$\theta = \frac{x}{R} \tag{14}$$

考慮旋轉後的半圓盤的受力情形，如圖八，設其重心位置為 G，G 距離圓心為 $\frac{4R}{3\pi}$ 為求方便我們設 $y = \overline{O'G} = \frac{4R}{3\pi}$ ，則此時半圓盤受到三種作用力影響，分別是摩擦力，桌面正向力和重力，以接觸點為支點，摩擦力和正向力均作用在支點上，其力臂為零，因此只有重力對於支點 P 有形成力矩，計算式為：

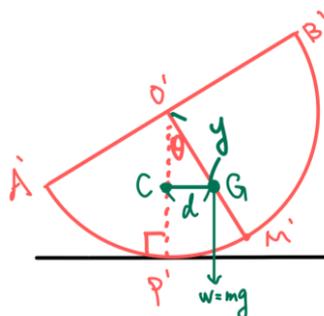
$$\text{力矩 } \tau = m \cdot g \cdot d = m \cdot g \cdot y \cdot \sin \theta \quad (15)$$

當 θ 趨近於 0 時， $\sin \theta = \theta$ ，將式(14)帶入式(15)，可得：

$$\text{力矩 } \tau = m \cdot g \cdot d = m \cdot g \cdot y \cdot \sin \theta = m \cdot g \cdot y \cdot \frac{x}{R} = \frac{m \cdot g \cdot y}{R} X \quad (16)$$



圖七 示意圖



圖八 示意圖

由於 m 、 g 、 y 、 R 皆為定值， $\sin \theta$ 和 θ 在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 為一對一的關係，可知力矩 τ 只和 X 有正相關，且在小角度時，甚至為正比的關係。力矩會導致物體旋轉，以圖八為例，會導致其順時針轉動，當 X 越大，力矩越大，轉動效應越明顯。

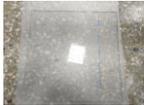
(十一) 力學能與力學能守恆

力學能國際單位是焦耳 (J)，包含動能與位能，動能是物質運動時所擁有的能量，其公式為 $K = \frac{m \cdot v^2}{2}$ 。位能是物體在特定位置所具有的潛在能量，在地表附近物體的重力位能為 $U = m \cdot g \cdot h$ 。在只有保守力做功的情形下，動能和位能會互相轉換，若有摩擦力等非保守力，則力學能會逐漸降低。

貳、研究設備與器材

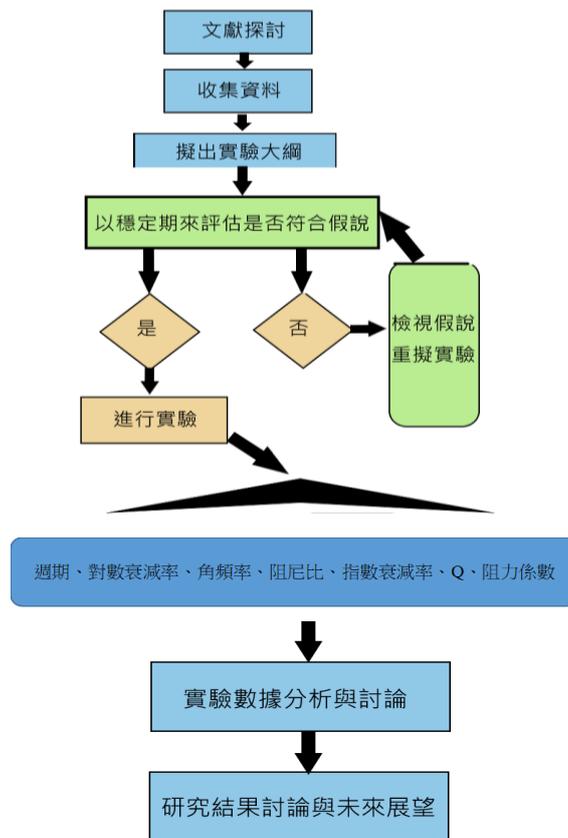
一、研究器材

表一 研究器材

				
3D 列印模型	玻璃板	光軸十字夾	壓克力板	鋼條
				
培林	Tracker 程式	Excel	SPSS	Dev c++

參、研究過程與方法

一、研究流程圖



圖九 研究流程圖

二、數據

目前以 Tracker 對實驗中的擺幅進行分析，透過追蹤模型上的定點（重心）或球的移動，來得出下列的數據：（一）從開始震動到停止的時間長度（二）定點的位置-時間的關係（三）以底部為支點，定點以及球角速度的關係。

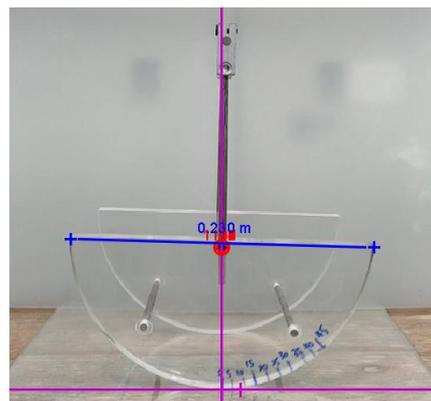
三、實驗方法

（一）單擺

用 3D 列印印出模形，透過改變中間正方形的位置，來達到改變擺長，亦可透過在正方形模型裡放置紙黏土來達到增重的效果如圖十。



圖十 實驗裝置示意圖



圖十一 實驗裝置示意圖

(二) 模型

我們先用壓克力做出弧形模具，再用鋼條平行組裝上去，在上面標上追蹤點，並在弧形上標出角度，設為起始施放角度其中包含 15 度、20 度、25 度、30 度、35 度、40 度、45 度，測量其 x 及 y 軸的數據如圖十一。

四、數據分析

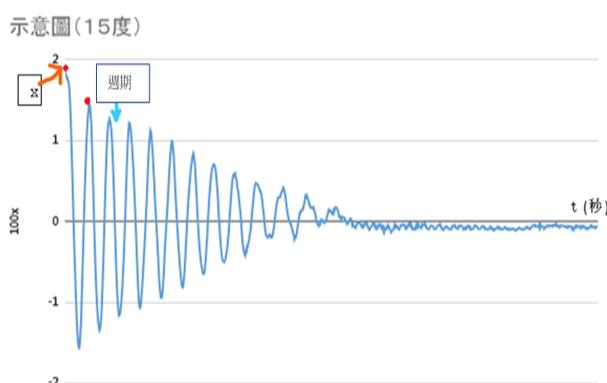
我們會每一組拍攝三次並將其分析，避免實驗過程中的誤差，共分析以下數據：

(一) 週期 (T)

以波峰到波峰間的時間當作一次週期，做多組數字後取平均。如上圖，兩紅點之間的時間差為一組週期。

(二) X 位置

我們會以 tracker 分析出來的數據，利用 excel 的 Max 函數找出每次震動的最大值 (波峰)，找出 x 值。如附圖我們會找出最高峰紅點，並記錄其相對應的數值 (位置與時間) 如附表黃底處。



圖十二 X 位置示意圖

表二 X 位置數據表

T (s)	X (cm)	V _x (cm/s)
1.599	1.331769	1.517764706
1.633	1.383373	2.100242424
1.666	1.452681	-0.4108484848
1.699	1.439123	-0.08421212121
1.732	1.436344	-2.5205

(三) 對數衰減 (log decrement, δ)

我們會將位置取對數，計算其 ln 值，接著將取出的值帶入

$$\text{公式 } \delta = \ln \frac{x_1}{x_3} = \ln(x_1) - \ln(x_3) \quad (17)$$

可得每次震動的對數衰減率，接下來我們會取平均，做為每次實驗的代表數。

(四) 阻尼比 (damping ratio)

從上面的對數衰減率 δ 帶入公式 $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}}$ 。求出阻尼比後觀察我們的數

據為何種阻尼，分析我們的裝置是否符合我們預期的效果

(五) 角頻率 ω 和 Q 值

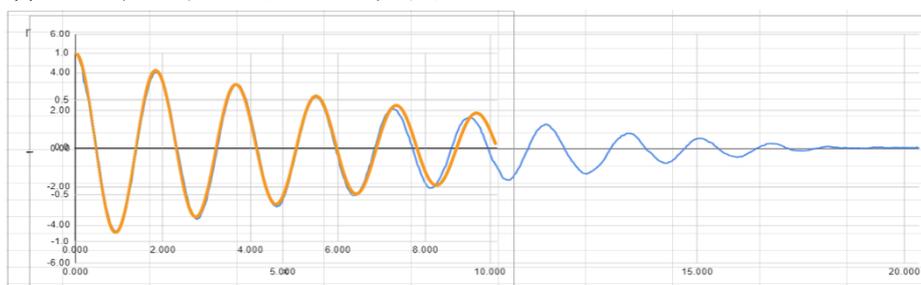
我們以 T 週期帶入公式來計算 ω ， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，以 ζ 帶入公式計算 Q， $Q = \frac{1}{2\zeta}$

(六) 指數衰減 (α)

將 ω, ζ 帶入公式，求出 α ， $\alpha = \omega \cdot \zeta$ 。

(七) 阻力係數 (r)

我們運用 Dev c++ 寫出用於模擬 x 方向位移的程式碼，輸入我們實驗中取出的 w 值，再一一嘗試 r 數值，如圖十三，取出模擬之 x 方向位移後，畫出我們實驗分析出的 x 位移圖比對系統模擬出的 x 位移圖，如圖十四，橙色為本實驗的 X 位移圖，藍色則為程式模擬出的 X 位移圖，試到前三個波完全吻合本實驗，即記錄下 r 值，此為所求。



圖十三 對比示意圖

```

Project Classes Debug [Euler_ode_x_y_new.cpp
1 //Eulers Method to solve a differential equation
2 #include<iostream>
3 #include<iomanip>
4 #include<cmath>
5 #define hmt 5000
6 using namespace std;
7 void spring( double x, double y, double *dxdt,double *dydt)
8 {
9     const double r=0.34,w=3.447;
10    *dxdt = y;
11    *dydt = -2*r*y-w*h*x;
12 }
13
14 void Euler(double h,
15 void (*)( double x, double y, double *dxdt,double *dydt),double *x,double *y)
16 {
17     double kx, ky;
18     double dxdt, dydt;
19     f(*x,*y,&dxdt,&dydt);
20     kx = *x + h*dxdt;
21     ky = *y + h*dydt;
22     *x = kx;
23     *y = ky;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     double h = 0.01;
29     FILE *pFile;
30     pFile = fopen("r_0.34_w_3.447.txt","w");
31     int i;
32     double x = 1, y = 0;
33     for(i=0; i < hmt; i++)
34     {
35         fprintf(pFile, "%10d %12.6f %12.6f\n",i,x,y);
36         Euler(h, spring, &x, &y);
37     }
38     fclose(pFile);
39     return i;

```

圖十四 Dev c++ 程式示意圖

(八) 總和分析

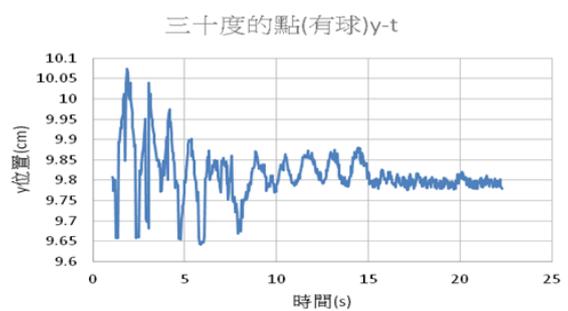
我們將各種數據紀錄(有無阻尼球或擺長、角度、質量，週期，對數衰

減，阻尼比，角頻率， Q ， α ， r 紀錄，並至 SPSS 軟體，運用單因子變數分析 (ANOVA) 求其各組別之間是否有差異 (標準為 $p < 0.05$)。若有差異，會額外用事後比較來報告差異來源。

肆、研究結果

一、改變施放角度對比

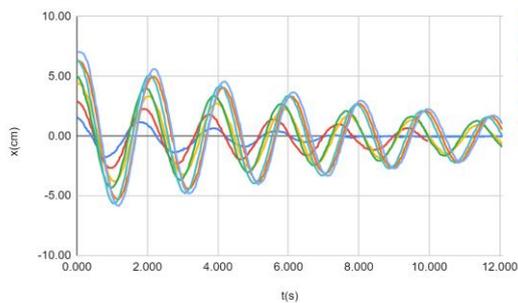
我們針對 y 方向的位置對時間分析解釋以下為結果，因為震幅非常小 (0.3 cm 內)，所以我們不對 y 方向進行分析，主要分析的是 x (左右) 方向的位移。



圖十五 $y-t$ 示意圖

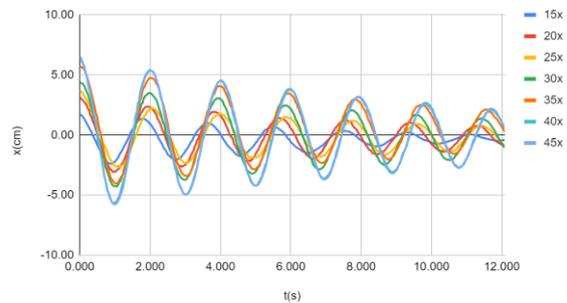
(一) 比較 15、20、25、30、40、45 度施放角的軌跡之差異

7.5cm各角度x位置-t圖



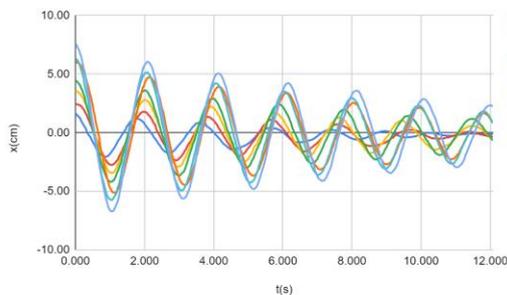
圖十六 7.5 cm 各角度 $x-t$ 圖

10.5cm各角度x位置-t圖



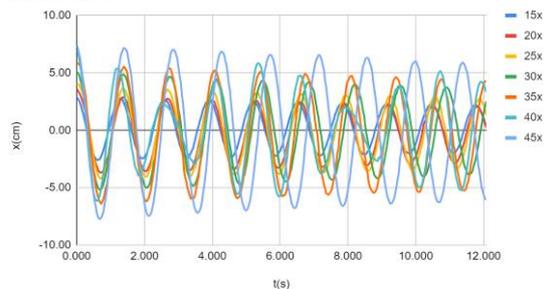
圖十七 10.5 cm 各角度 $x-t$ 圖

13.5cm各角度x位置-t圖



圖十八 13.5 cm 各角度 $x-t$ 圖

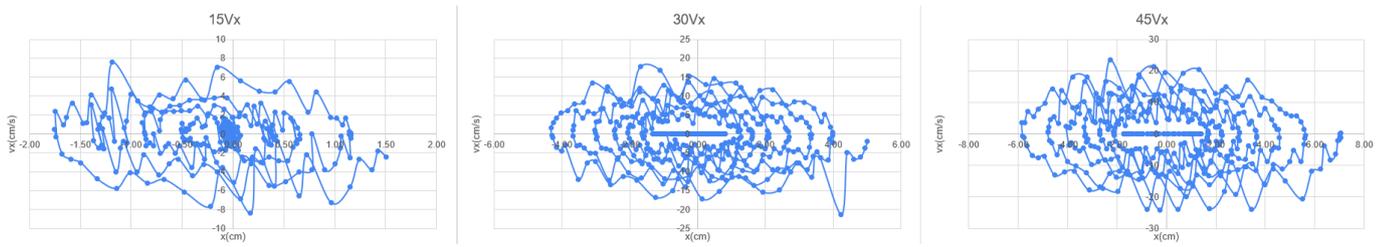
無球x位置-t圖



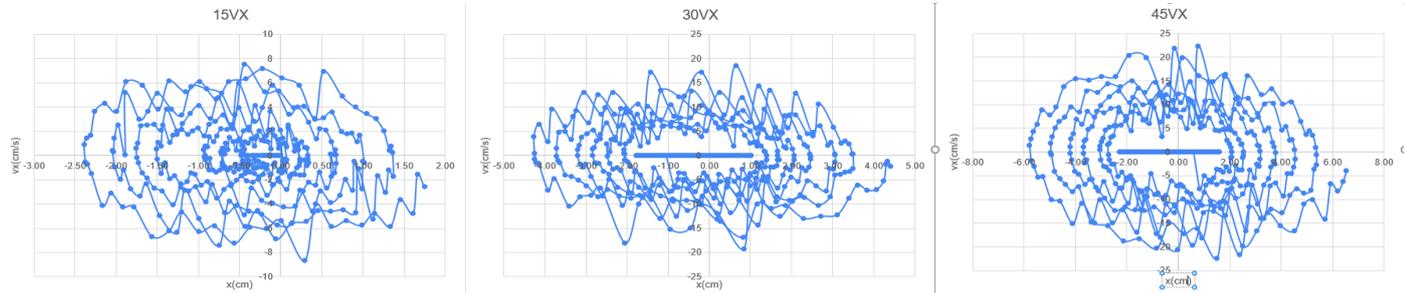
圖十九 無阻尼球各角度 $x-t$ 圖

由圖可以發現，施放角度越大，震幅越大且較無停止趨勢，在有加裝阻尼球時週期也大致相似，但在無阻尼球情況下則較為不規則。

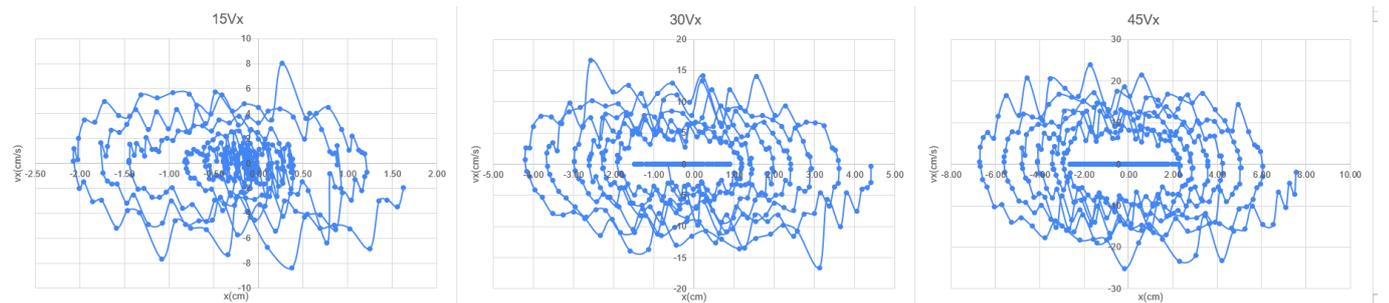
(二) 比較 15、30、45 度施放角的速率之差異



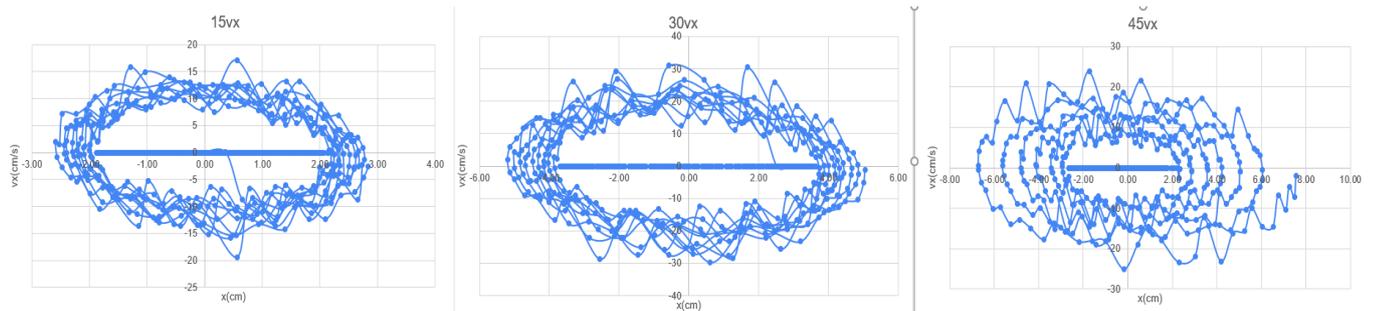
圖二十 7.5 cm 各角度 Vx-x 圖



圖二十一 10.5 cm 各角度 Vx-x 圖



圖二十二 13.5 cm 各角度 Vx-x 圖



圖二十三 無阻尼球 各角度 Vx-x 圖

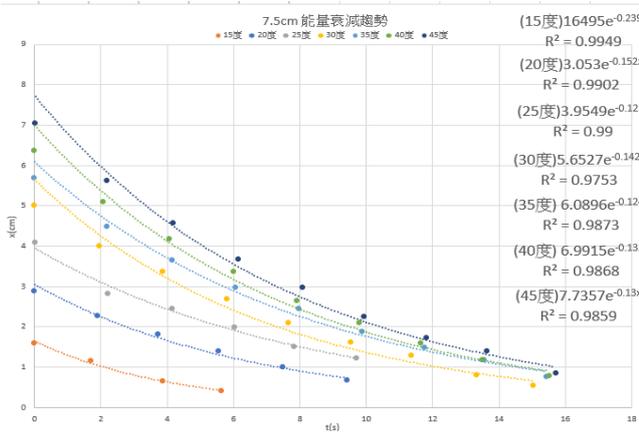
由圖可以發現以下幾點

1. 隨著時間的遞增，圖形上的點有順時針的趨勢，且逐漸往內縮
2. 一開始的點在圖形最右端，其速度大小為 0 cm/s。
3. 相較於有球，無阻尼球的在錨定時間內(一千個標記點)幾乎沒有衰減。
4. 從 7.5 cm、10.5 cm、13.5 cm，圖形有往外擴的趨勢，有球體帶動模型的趨勢。
5. 速度有跳動現象，推測是因我們的偵測極限時間解析度 0.033 秒，空間解析度也有上限，計算速度時因此不確定度較大。

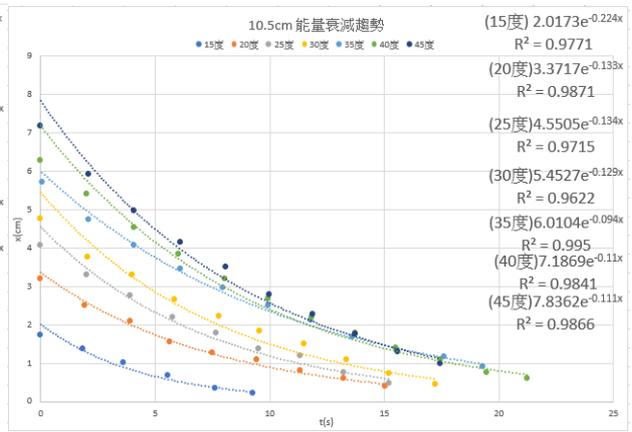
二、各角度能量衰減趨勢分析

由上可知，不論任何角度，它的震幅都會隨著時間衰減，並維持一定的規律和週期。我們為探究原因和數學邏輯，因此最大位移和時間繪出不同角度的衰減趨勢圖。

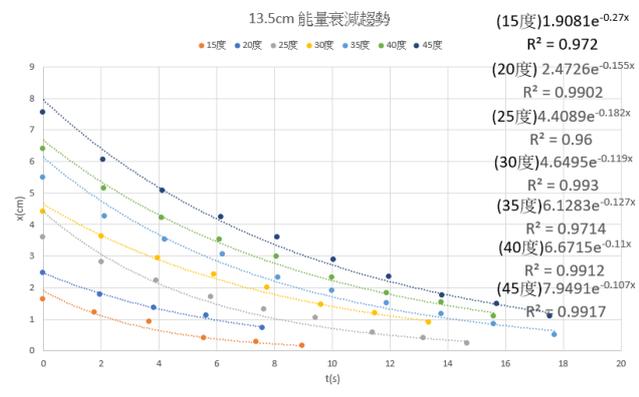
我們使用 Ecel 分析，將每組數據的最大值和其對應時間繪製成關係圖，並嘗試用線性，對數和指數的方式擬合，最後發現指數的方式其擬合的相關係數平方 (R^2) 最接近 1，因此我們推估其衰變模式符合指數衰變，相關數據如下。



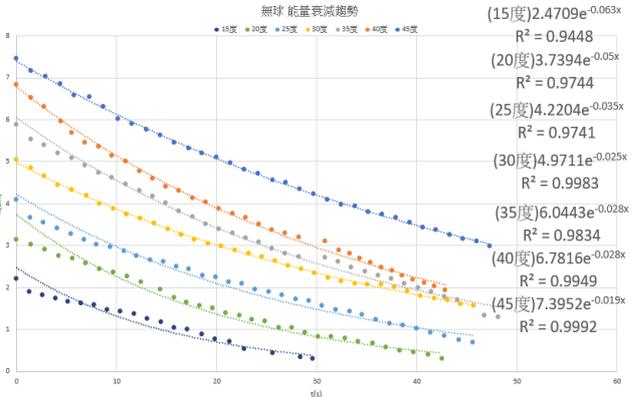
圖二十四 7.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (點)



圖二十五 10.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (點)

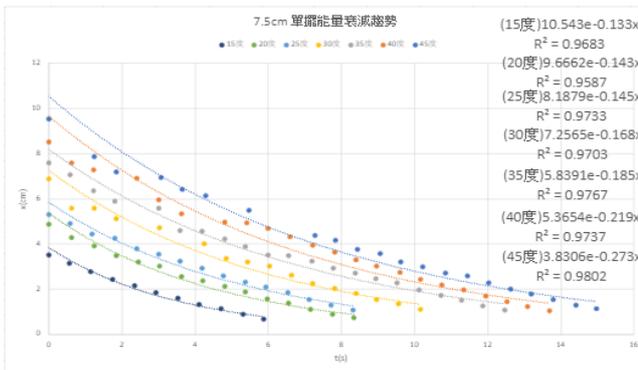


圖二十六 13.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (點)

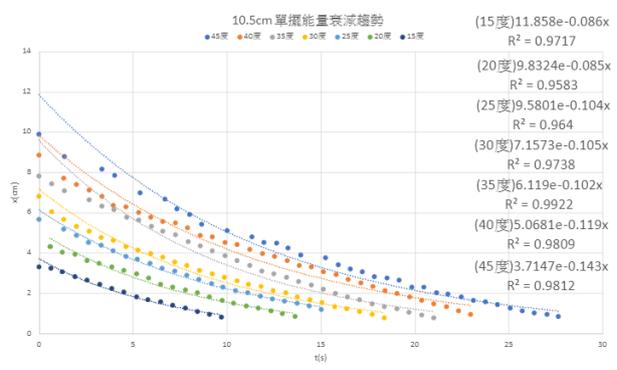


圖二十七 無阻尼球各角度能量衰減趨勢 (點)

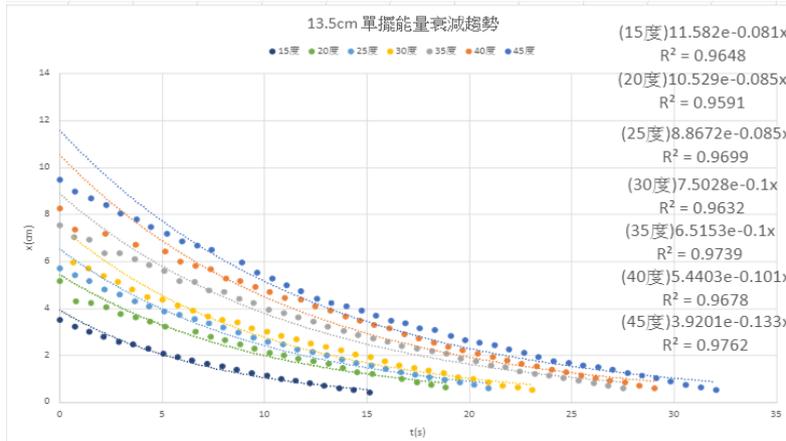
- (一) 前三張圖顯示其在裝有阻尼球的狀況，能量之衰變分析，我們發現其 R^2 均大於 0.95，擬合程度不低，且其衰變接近指數衰變，底介於 $e^{-0.27} \sim e^{-0.094}$ 之間。
- (二) 我們也發現當角度小時，其底數較小，我們推測是由於能量較小，阻尼球可以迅速將其吸收，小角度時與環境 (底座、空氣) 所造成的能量衰減較佳。
- (三) 模擬船隻可以推知，當外界提供的震動或能量較大時，其初期的能量衰變較大，有效把能量消耗掉，達成減震的效果。在小角度時，我們的模型可以發現達接近停止時間較小，有效停止震動。
- (四) 在能量衰減趨勢圖中，無阻尼球的底數遠大於另外三者 (7.5 cm、10.5 cm、13.5 cm)，得知無球衰減效果不佳，反之，有阻尼球幫助吸收效果甚為顯著。
- (五) 中角度在後期有稍微重疊，推測是球體在初期有較大的能量，一開始儲存於球體，後面釋放至模型，而此時震盪已經較小，故相對比例較大。



圖二十八 7.5 cm 各角度單擺能量衰減趨勢

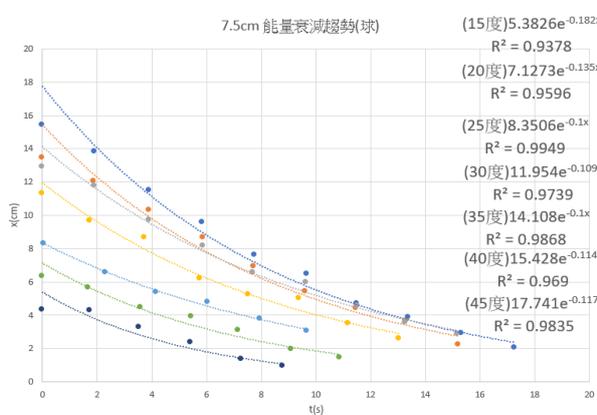


圖二十九 10.5 cm 各角度單擺能量衰減趨勢

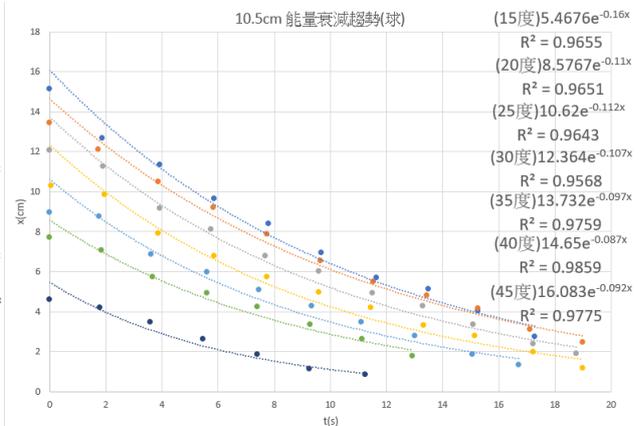


圖三十 13.5 cm 各角度單擺能量衰減趨勢

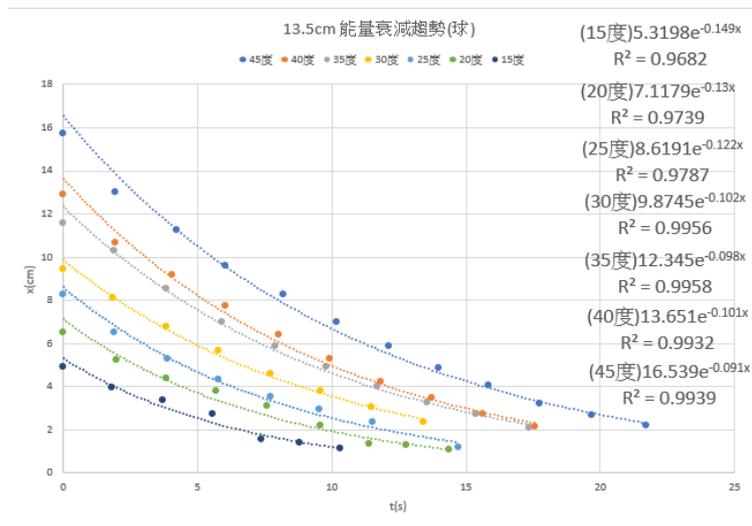
(六) 圖二十八到圖三十中可看見在各個角度的情況下，都以指數進行衰變，其底數介於 $e^{-0.08}$ 到 $e^{-0.28}$ 之間，而相關係數 R^2 均大於 0.95。擺長為 7.5 cm 的底數相對較小，效果較佳，10.5 cm 與 13.5 cm 之間的差異並不大，推測是小擺長時，其初始能量較小，因此阻力來源（空氣和培林）造成效果較明顯。而在 10.5 公分之後擺長的改變並沒有顯著的效果。未來可更進一步的探討擺長更短的情況下對其阻尼效果的影響。



圖三十一 7.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (球)



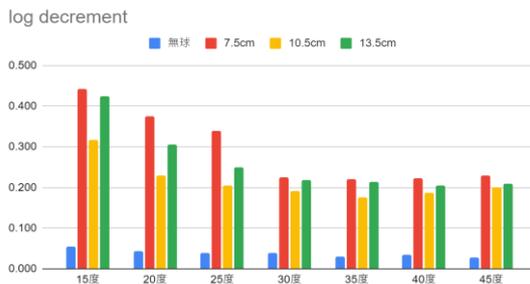
圖三十二 10.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (球)



圖三十三 13.5 cm 各角度能量衰減趨勢 (球)

- (七) 圖三十三顯示其在裝有阻尼球的狀況，阻尼球能量之衰變分析，其 R^2 均大於 0.93，擬合程度不低，顯示其衰變接近指數衰變，其底介於 $e^{-0.182} \sim e^{-0.087}$ 之間。
- (八) 阻尼球擺動的軌跡較不穩定，中後期時，大角度的球體有靠攏之現象，是因為我們的影片為求精準，由三組數據求平均，大角度會逐漸衰減成小角度，後期能量衰減後，三組數據有若出現 0.5 cm 的差異，便會影響後期平均位置。有鑑於此，在數據總和分析各角度的部分，我們會取衰減的前段，更能代表該角度範圍時的數據。

三、各項數據總和分析(71.5 g)



圖三十四 對數衰減率



圖三十五 阻尼比

(一) 對數衰減率

由圖三十四可以得知在小角度的情況下，擺長為 7.5 cm 的對數衰減最大，其次則為 13.5 cm。隨著角度的增大，每次所衰減的數據也有所降低，但其實三者的差異並不大。不論在何種角度，有球的對數衰減率皆遠高於無阻尼球的，可見阻尼球在每次的衰減中影響很大。

(二) 阻尼比

由圖三十五可以得知，以各角度做對比，在每個角度中，加裝阻尼球對於沒裝阻尼球，其數值皆較大，可見加裝阻尼球能有效減緩震動。在擺長 7.5 cm 和擺長 13.5 cm 時，減震效果在 15 度時為最佳，其餘角度減震效果皆差不多。

擺長 13.5 cm 時，則是在 15 及 20 度時效果皆不錯。由以上結果，有加裝阻尼球之模型在小角度的情況下，阻尼效果較好。在無阻尼球情況下，隨施放角度越大，阻尼比無明顯改變，顯示無阻尼球情況下，阻尼皆差不多。在 15~25 度小角度之間，隨角度增加，阻尼效果逐漸下降，而大角度時，阻尼效果差不多。

加裝阻尼球的情況下與無阻尼球之阻尼比進行比對，其增加情形如下表。

(三) 阻尼比增長率

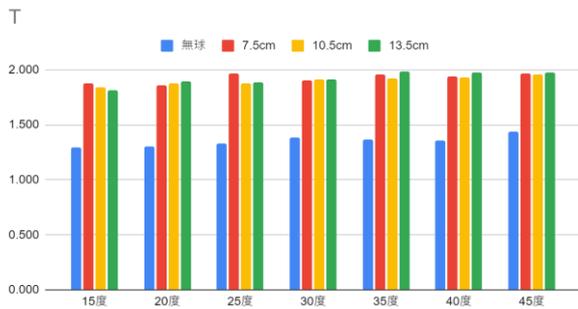
表三中可見，有加裝阻尼球相較於沒加裝阻尼球，阻尼比有極為顯著的提升，效果最佳的是 15 度時擺長為 7.5 cm 的模型，其阻尼比相較於無阻尼球提升了高達 850.5%，其次則是 13.5 cm 的提升了 824.6%。另外我們亦發現在中角度時，阻尼球減緩的震動相對較少，對比無阻尼球阻尼比的提升介於 297.1%~489.5% 之間，但仍相當卓越。

表三 阻尼比增長率

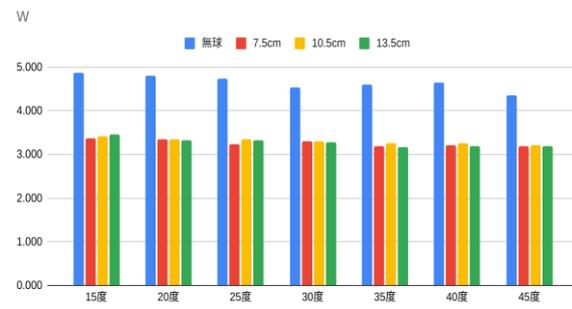
	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm
15 度	850.5%	585.3%	824.6%
20 度	376.3%	303.1%	432.7%
25 度	360.6%	297.1%	388.9%
30 度	489.5%	397.5%	468.2%
35 度	606.5%	460.9%	573.0%
40 度	569.6%	462.4%	514.2%
45 度	797.7%	686.7%	714.7%

表四 週期數據 T (s)

	無阻尼球	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm
15 度	1.733	1.881	1.889	1.795
20 度	1.749	1.873	1.873	1.898
25 度	1.766	1.922	1.906	1.888
30 度	1.815	1.907	1.909	1.914
35 度	1.793	1.958	1.947	1.987
40 度	1.729	1.942	1.972	1.987
45 度	1.898	1.964	1.953	1.997



圖三十六 週期 T(s)



圖三十七 角頻率

(四) 週期

由圖三十六可看出不論在任何角度，模型的擺動週期皆是有球 > 無阻尼球。我們推論是由於質量的增加，連帶造成週期的增加，因此有球的三組接近，無阻尼球的則相差甚遠。

(五) 角頻率

由圖三十七可以得知，各角度的情況下，無阻尼球的角頻率皆較有球的高。觀察 7.5 cm 的部分可得知 ω 的範圍在 3.181~3.372 (Rad/s) 間，而 10.5 cm 的 ω 範圍在 3.359~3.187 (Rad/s) 間，13.5 cm 的範圍則是在 3.124~3.515 (Rad/s) 間，無阻尼球的在 4.861~4.361 (Rad/s) 間。

(六) Q 值

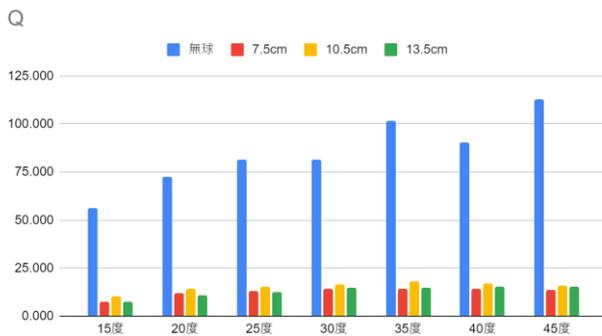
Q 和 ζ 成反相關，可知當 Q 值越小，阻尼效果越好。在無阻尼球時， Q 值均為各角度最大，阻尼效果最差。在擺長 7.5 cm 時，隨角度增大， Q 值也有一點增幅，由此可知在施放角 15 度時，阻尼效果最佳。擺長 10.5 cm 時，施放角 35 和 40 度的 Q 值最大，可知在 35 和 40 度時阻尼效果不佳，擺長 13.5 cm 時，隨角度變大， Q 值有增大的趨勢，可知在小角度時，阻尼效果較佳。

表五 Q 值數據

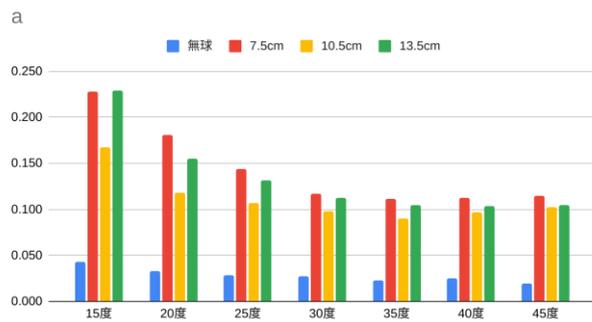
	無阻尼球	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm
15 度	44.926	7.348	8.374	7.359
20 度	42.883	11.933	13.997	10.670
25 度	64.393	13.396	15.461	12.628
30 度	66.280	14.120	16.734	14.407
35 度	74.434	14.365	19.201	15.382
40 度	71.360	14.192	18.677	15.678
45 度	79.448	13.838	16.715	16.437

表六 α 值數據

	無阻尼球	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm
15 度	0.043	0.228	0.199	0.238
20 度	0.045	0.141	0.120	0.155
25 度	0.030	0.122	0.107	0.132
30 度	0.028	0.117	0.099	0.113
35 度	0.025	0.111	0.084	0.103
40 度	0.031	0.113	0.085	0.101
45 度	0.022	0.115	0.096	0.095



圖三十八 Q 值 公式 $Q = \frac{1}{2\zeta}$



圖三十九 α 值 公式 $\alpha = w \cdot \zeta$

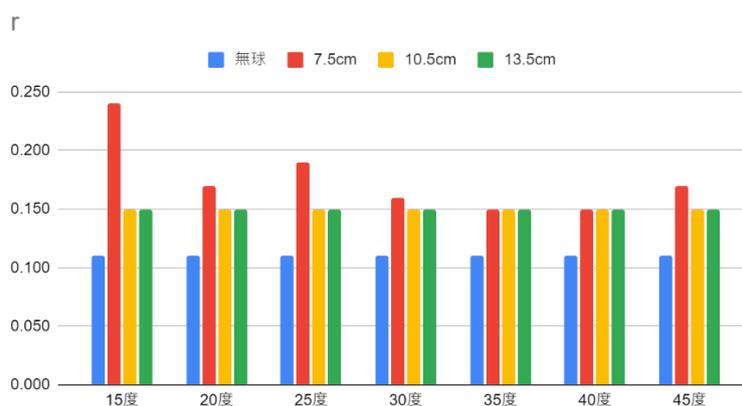
(七) α 值

由圖三十九可見，無阻尼球的數值皆低其他三者，有加裝阻尼球的數據，各擺長的各角度角頻率皆差異不大，故在有加裝阻尼球的實驗中，依照 damping ratio 數值的高低，即可看出其阻尼效果之差異。以擺長為 7.5 cm 時與無阻尼球進行比對，可發現在 20、25、30、35、40、45 度的情況下，數值平均為無阻尼球之 4.5 倍，而在小角度 15 度時，則是無阻尼球的 6.7 倍。以擺長為 10.5 cm 時與無阻尼球進行比對在，可發現在 20、25、30、35、40、45 度的情況下，平均數值為無阻尼球之 3.35 倍，而在小角度 15 度時，則是無阻尼球的 4.6 倍。以擺長為 13.5 cm 時與無阻尼球進行比對在，可發現在 25、30、35、40、45 度的情況下，平均數值為無阻尼球之 3.93 倍，而在小角度 15、20 度時，則各是無阻尼球的 5.51 倍、3.47 倍。可見在 15、20 等小角度的情況下，擺長 13.5 cm 阻尼效果最為顯著，而在 25、30 度中角度情況下，擺長 10.5 cm 和擺長 13.5 cm 相差不大，在大角度 35、40、45 度時，則是擺長 7.5 cm 阻尼效略佳於擺長 13.5 cm，擺長 10.5 cm 次之，無阻尼球在各項數據皆居末。綜合比較可以發現，阻尼球的有無對於減震效果很好，但有加裝阻尼球的情況

下，擺長的影響較小。

表七 r 值數據

	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm	無阻尼球
15 度	0.240	0.150	0.150	0.110
20 度	0.170	0.150	0.150	0.110
25 度	0.190	0.150	0.150	0.110
30 度	0.160	0.150	0.150	0.110
35 度	0.150	0.150	0.150	0.110
40 度	0.150	0.150	0.150	0.110
45 度	0.170	0.150	0.150	0.110



圖四十 r

(八) r 值

由圖四十和表七可以發現，相較於無阻尼球，不論擺長為何，有加裝阻尼球的 r 值均大於無阻尼球，代表阻尼球可以增加阻力係數，有效減震。擺長在 10.5 cm 和 13.5 cm 時的 r 值均為 0.15，阻力係數相同，比較特別的是擺長 7.5 cm 在小角度時偏大，推測是初始位能較大，在小角度擺動時帶動模型停止的現象現象較明顯。

(九) 不同角度之 ANOVA 分析

我們為求各項阻尼數據是否會被角度影響，用 ANOVA 進行分析，製成表八。可以發現在 p 值標準為 0.05 的狀況下，各角度之間無顯著差異

(十) 無阻尼球與不同擺長 ANOVA 分析

我們為求各項阻尼數據是否會被阻尼球或擺長影響，用 ANOVA 進行分析，製成表九。可以發現在 p 值標準為 0.05 的狀況下，各擺長之間有顯著差

異，進一步進行事後檢定發現，有球的狀態下其 T、log decrement、damping ratio、 ω 、Q、 α 、r 均受到影響，而 7.5 cm 的 r 值高於 10.5 cm 和 13.5 cm。

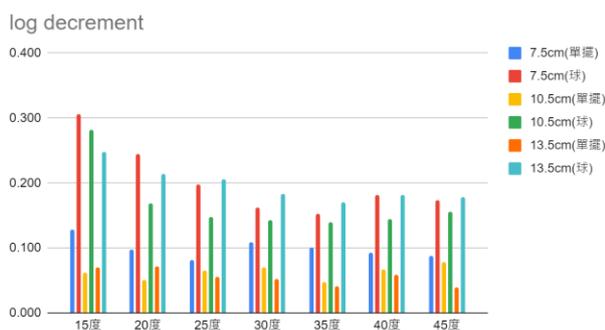
表八 不同角度之 ANOVA 分析

	F	p
T	1.37	.272
log decrement	0.95	.482
damping ratio	0.863	.537
ω	0.093	.996
Q	0.354	.9
α	1.207	.341
r	0.262	.949

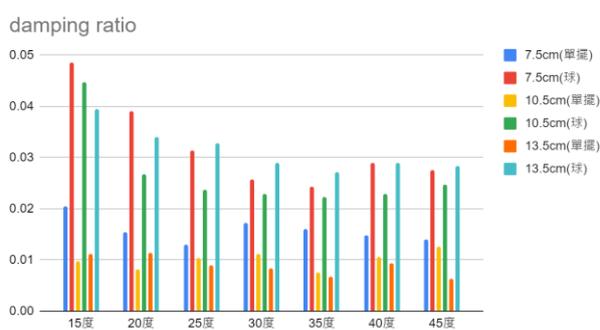
表九 無阻尼球與不同擺長之點之 ANOVA 分析

	F	p	備註
T	11.887	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
log decrement	19.228	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
damping ratio	21.517	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
ω	82.206	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
Q	16.435	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
α	15.539	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
r	20.727	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm, 7.5 cm < 10.5 cm, 7.5 cm < 13.5 cm

四、單擺和模型上阻尼球之關係比對



圖四十一 對數衰減率



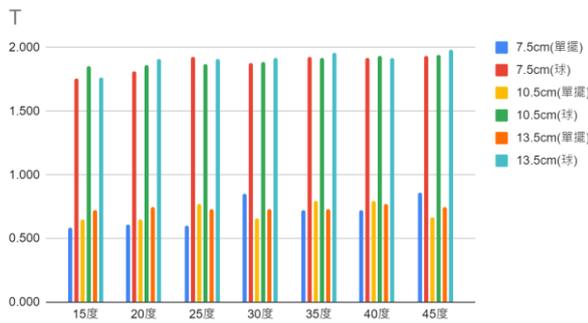
圖四十二 阻尼比

(一) 對數衰減率

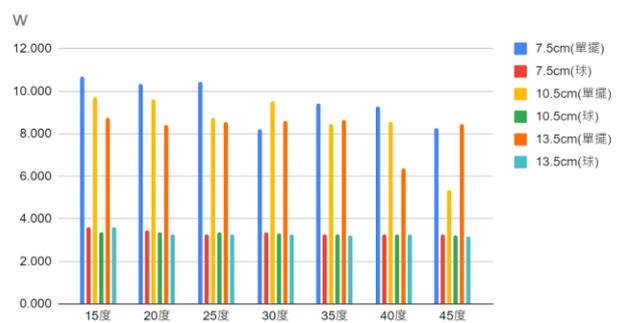
從圖四十一可知，模型上的阻尼球的對數衰減會比單擺的對數衰減率還大。我們發現小角度時，球體每次的衰減能量較大。我們認為是由於小角度時，阻尼球易於吸收其初始能量較小，因此阻力來源（空氣、培林、底座）造成效果較明顯，使模型的搖晃程度迅速減緩，連帶造成球的運動的衰減。

(二) 阻尼比

從圖四十二可得知模型上的阻尼球的阻尼係數會比單擺的阻尼係數還來得大，以各角度做對比，模型上的球相較於單擺，其數值皆較為接近 1（數值越靠近 1，效果越好），和前面所述的相同，阻尼球能有效減緩模型震動，連帶使自身衰減更快。擺長為 7.5 cm 的單擺阻尼比效果好於另外兩者。除了 15 度略高外，在各角度時的阻尼效果沒有顯著的改變。我們發現球體在中角度時阻尼比較低，推論是由於其阻尼效果比較差，阻尼球消耗能量較慢。



圖四十三 週期 T(s)



圖四十四 角頻率

(三) 週期

從圖四十三可知，模型上的阻尼球之週期會比單擺的週期還來得大，我們推測是由於模型的質量遠大單擺，並且模型上的阻尼球和模型會有互相帶動的關係，導致模型上的阻尼球會比單擺的週期還大。

(四) 角頻率

依照公式 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 可得知，增加質量會改變其 ω 的數值， m 越大， ω 就越

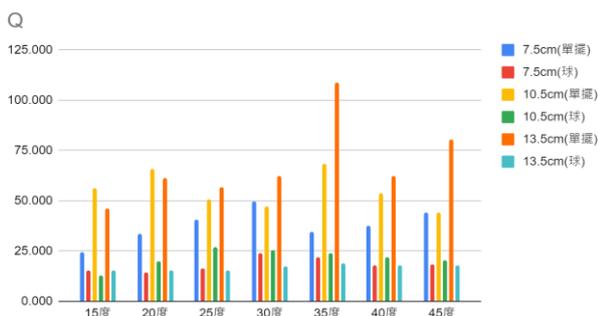
小，由圖四十四也可得知，質量越大，角頻率會越小。

(五) Q 值

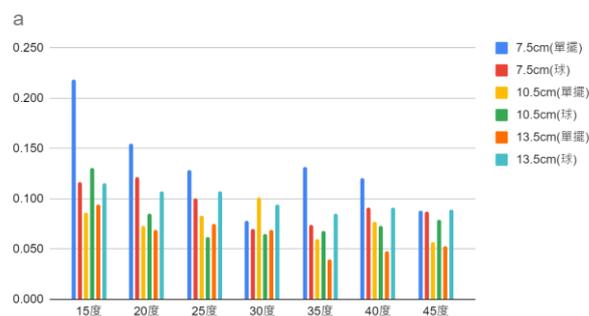
Q 值和 α 反相關，由圖四十五可知單擺 Q 值比模型上阻尼球 Q 值大。

(六) α 值

由圖四十六和 α 的公式（阻尼比和角頻率相乘）可以得知，在各角度的角頻率相差不大的情況下，主要影響 α 的因素可推知是阻尼比，阻尼比越大 α 就會越大，代表阻尼效果越好。



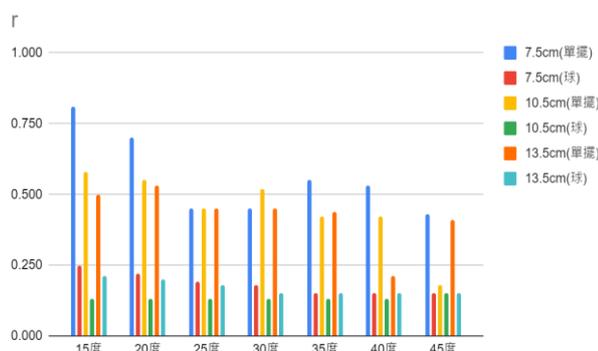
圖四十五 Q 值



圖四十六 α 值

(七) r 值

從圖四十七可得知在單擺的情況下 r 的數值會越接近 1。r 的數值越接近 1 代表阻尼效果會越好而模型上的阻尼球 r 的數值皆是低於 0.25，以及在各角度之間模型上的阻尼球 r 的數值差距並不大



圖四十七 r 值

五、改變阻尼球之質量比較

(一) 對數衰減率&阻尼比

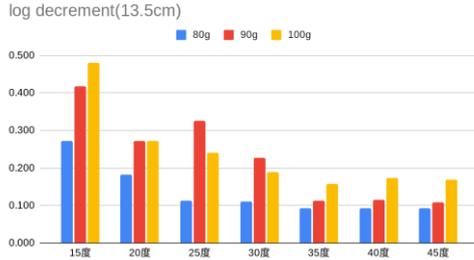
由圖四十八和圖四十九可以得知，以各角度做對比，在小角度 15、20 度中，阻尼球 100 g 相較於其他重量，阻尼效果較好，而在小角度 25 度和中角度 30 度中，則是 90 g 阻尼球效果最好，接著大角度 35、40、45 度時，為增重 100 g 效果最佳。（damping ratio 是以幾何平均計算）

(二) 週期

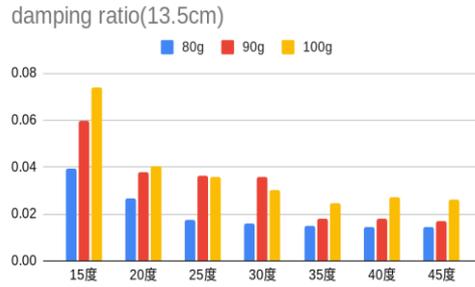
由圖五十重量之 T 對比圖可得知，阻尼球增加重量和其週期是成正向關係，經由 ANOVA 檢定，其阻尼球質量越大，週期就越大 ($p < .001$)。

(三) 角頻率

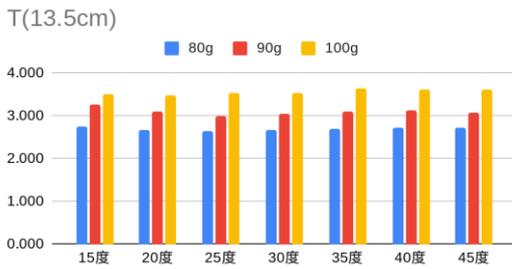
依照公式 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 可得知，增加質量會改變其 ω 的數值， m 越大， ω 就越小，由圖五十一也可得知，質量越大， ω 越小。



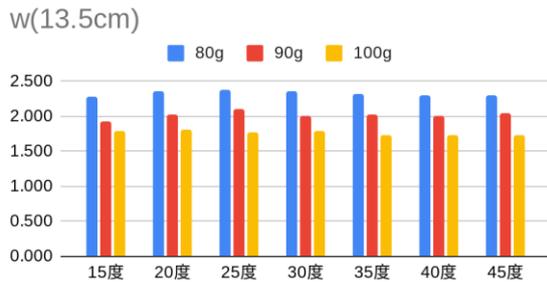
圖四十八 對數衰減率



圖四十九 阻尼比



圖五十 週期 T(s)



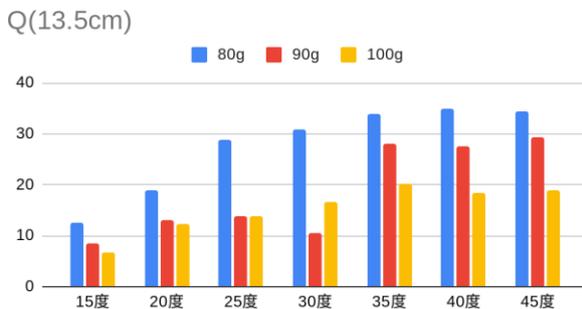
圖五十一 角頻率

(四) Q 值

Q 與 ζ 成反比，因 80 g 時， ζ 值皆四者最小，故 Q 值在各角度皆為最大。

(五) α 值

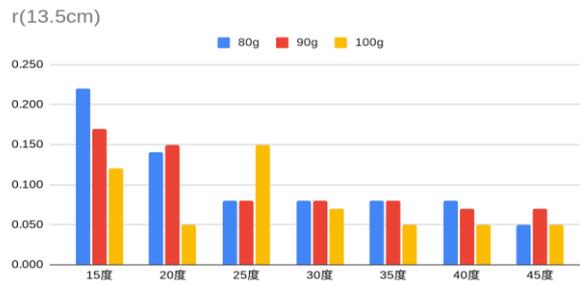
根據 α 公式，可得知 80 g 相較於其他三者，其 ω 值在所有角度效果皆最佳，而其 ζ 值在大角度如 30、35、40、45 度時，亦為三者之最，則從圖五十三可得知無額外增加質量，其 α 值三者最大。在中角度時則是 90 g 為最佳。



圖五十二 Q 值



圖五十三 α 值



圖五十四 r 值

(六) r 值

r 值越大，表示其阻尼效果越好。由上圖可知，在小角度 15 度時，80 g 阻尼效果最好，小角度 20 度，則是無額外增加重量和 90 g 效果一致，從中角度開始，80 g 和 90 g 一直維持在一定的值，100 g 在大角度時則是全部裡最小。

(七) 擺重 ANOVA 分析

表十呈現了不同擺重之 ANOVA 分析，r 值沒有顯著差異但其他數值則有，事後分析發現 T 和 ω 的部分有隨著質量顯著改變，符合 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。擺重的部分則有增有減，我們認為有能量、力矩、慣性等因素影響，在討論末點進行說明。

表十 擺重之 ANOVA 分析

	F	p	
T	50.74	<.001	mass 大 週期大
log decrement	5.05	<.001	80 100 有差
damping ratio	6.892	0.002	80 100 有差
ω	6.868	0.002	mass 大 ω 小
Q	14.828	<.001	80 100 有差
α	4.568	0.014	80 100 有差
r	2.207	0.119	沒顯著差異

伍、討論

一、x-t 圖和 V_{x-x} 推論

因為阻尼球協助吸收震動，讓能量在阻尼球上釋放，根據力學能守恆（力學能等於整體的動能+位能），有增設阻尼球，比沒加上的可以讓進入小幅度搖動（穩定期）時間較快。x-t 各角度疊合為蝴蝶圖，不論是否有加裝阻尼球，施放角度越大，

震幅越大且停止時間較晚，而造成此現象的原因我們推估跟力學能守恆有關，剛開始施放的角度越大，擁有較大的位能，需要更長時間地消耗。Vx-x 圖為螺旋內縮，初始點速度為 0 而後先增加後減少，並反覆進行增加減少的過程，符合 Euler method 分析 $F = -2rv$ 的微分分析。不過其跳動幅度較大，我們推測是錄影器材的時間解析度和空間解析度的極限無法偵測瞬時的變化。

二、模型上點—能量衰減趨勢圖之分析

小角度下能量衰減的底數較小，可能是由於能量較小，阻尼球能快速吸收。模擬船隻時，外界震動或能量較大時，初期能量衰減較大，有效地消耗能量，達到減震效果。無阻尼球情況下的能量衰減趨勢圖顯示底數遠大於其他情況，說明衰減效果不佳，可看見阻尼球的吸收效果非常顯著。中等角度下，後期稍有重疊，推測是因為球體在初期儲存了較大能量，後釋放至模型，此時震盪較小，因此相似度會較高。另外不論在何種角度下或是否加裝阻尼球，其能量衰減都是呈現指數衰減，和 Alexei Gilchrist. (2022) 的 Damped Harmonic Oscillator 系統一致。

三、模型上球—能量衰減趨勢圖之分析

在各個角度下，7.5 cm 的懸掛長度展現出最佳的衰減效果，推測是由於初始位能較小，能量衰減速度較快。10.5 cm 和 13.5 cm 之間的差異不大，顯示超過 10.5 cm 的變化對衰減效果無明顯影響。未來將進一步探討較短懸掛長度對阻尼效果的影響。

四、單擺—能量衰減趨勢圖之分析

我們可以發現阻尼球擺動的軌跡比較不穩定，可推知其能量衰減與角度之間，較無明顯趨勢，但細部分析可以發現其細部範圍並無太大差距。

五、阻尼球重量 71.5 g 的各項數據之分析

(一) 各種角度的互相比較

我們藉由 ANOVA 分析，發現在 0.05 的顯著標準下，相同擺長時不同角度的 T 、 ω 、 \log 、 decrement 、 damping ratio 、 α 、 r 都沒顯著差異，這是因和底部接觸面相同，有相同的地板阻力條件，也代表角度在此沒有主要顯著效果。不過也發現，在小角度時擺長的影響較大，代表角度和擺長之間有交互作用。

(二) 無阻尼球和不同擺長比較

由於質量的增加，根據公式簡諧運動 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 造成週期的增長，不論在

任何角度，模型的擺動週期皆是有球 > 無阻尼球，隨著阻尼球重量的增加，週期也會越來越大。ANOVA 分析發現有顯著效果，進一步藉由 ANOVA 的事後檢定分析發現主要是由阻尼球造成，相較無阻尼球，加裝阻尼器的效果卓越，其 log decrement、damping ratio、 Q 、 α 、 r 都明顯較優，事後分析也發現擺長在此效果不明顯，我們推論擺錘在擺動過程中有接近中點的現象，而 7.5 cm 略大於其他兩者，和慣性有相關，我們在討論末點會詳述。

六、單擺和模型上阻尼球比對分析

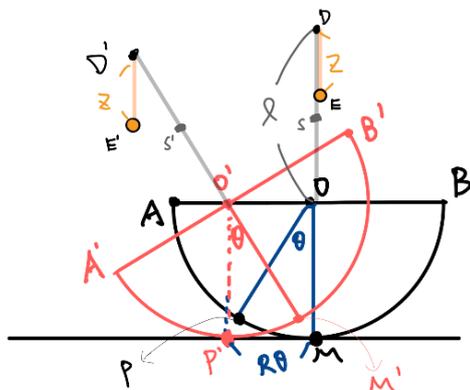
不論何種角度，單純單擺的週期較小，角頻率較大，這是因為在晃動過程中模型移動也會帶動阻尼球，而模型的質量大、晃動慢，因而使阻尼球的週期較大。而阻尼相關係數(log decrement、damping ratio、 Q 、 α 、 r)單擺皆優於阻尼球，可見光滑的底部阻尼減震效果極差，需要藉由擺來減震。

七、改變阻尼球質量分析

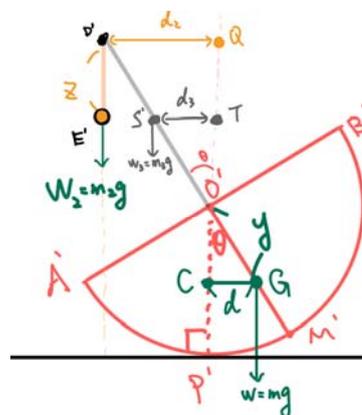
由上述可得知，在小角度時，阻尼球 100 g 和無增重時效果較佳，中角度時阻尼球 90 g 效果最佳，大角度時阻尼球無增重效果最佳，不管合角度，80 g 皆無三者最差。擺長和角度之間的交互作用，在這邊更顯著。我們推論在小角度，錘的慣性帶動效果明顯，和其減震效果互相抵銷，會在討論末點詳述。

八、綜合分析

我們完成實驗後，將力矩，力學能，慣性等理論帶入我們的實驗情境，發現有多處吻合，以下為我們的理論推導過程和實驗符應之處，待檢驗的部分也說明如下。將直杆立於半圓盤上，如圖五十五中的 \overline{DO} ，並在 D 點懸掛一個擺長為 Z 的擺 E ，如圖 \overline{DE} ，當其底部密合維持靜摩擦力，旋轉角度，如圖中紅色半圓，其半圓盤底部移動的距離分析如上所述，而直杆會移動至 $\overline{D'O'}$ ，擺則會移動至 E' ， $\overline{D'E'}$ 和地面垂直。直杆的移動前後的重心分別在中點 S 和 S' 。



圖五十五移動示意圖



圖五十六受力分析示意圖

考慮旋轉後的半圓盤的和直杆以及擺的受力情形，如圖五十六，半圓盤重心位置為 G，則此時整個系統受到的作用力分別是摩擦力，桌面正向力，半圓盤重力，直杆重力，擺的重力。以接觸點為支點，摩擦力和正向力均作用在支點上，其力臂為零，因此只有半圓盤重力 mg 、擺的重力 m_2g 、直杆重力 m_3g 對於支點 P' 有形成力矩，其中擺重 $w_2 = m_2g$ ，力臂為 $d_2(D'Q')$ ，直杆的重量 $w_3 = m_3g$ ，力臂 $d_3 = S'T$ ，合力矩計算式為：

$$\begin{aligned} \text{合力矩 } \tau &= \text{半圓盤重力力矩 } \tau_1 + \text{擺重力力矩 } \tau_2 + \text{直杆重力力矩 } \tau_3 \\ &= m \cdot g \cdot d + (-m_2 \cdot g \cdot d_2) + (-m_3 \cdot g \cdot d_3) \\ &= m \cdot g \cdot y \cdot \sin\theta - m_2 \cdot a \cdot l \cdot \sin\theta - \frac{m_3 \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta}{2} \\ &= (m \cdot y - m_2 \cdot l - \frac{m_3 \cdot l}{2}) g \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (18)$$

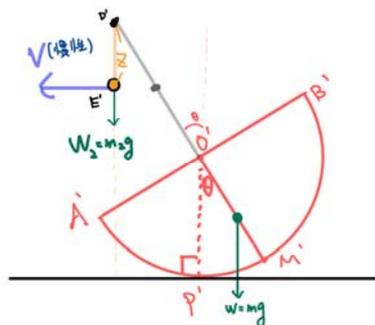
當 θ 趨近於 0 時， $\sin\theta = \theta$ ，將式(14)帶入式(18)，可得：

$$\text{合力矩 } \tau = \frac{(m \cdot y - m_2 \cdot l - \frac{m_3 \cdot l}{2}) g}{R} \cdot X \quad (19)$$

由於 m 、 g 、 y 、 l 、 R 為定值，和只有半圓盤狀況類似，可知力矩 τ 只和 X 有正相關，且在小角度時，甚至為正比的關係。力矩會導致物體旋轉，以附圖為例，會導致其順時針轉動，當 X 越大，力矩越大，轉動效應越明顯。且由於計算所得的力矩(18)比(16)還小，可知當懸掛擺之後，轉動效應會降低，幫助減震。

另外，我們可以發現，擺的長度 Z 並無出現在(18)中，可知在擺在垂直狀態時，垂直擺長對於轉動的影響並不大，這個可以解釋在多數狀況下，擺長不影響阻尼相關數據之現象。在我們研究中唯一的例外是在擺長 7.5 cm 時，阻尼效果較 10.5 cm 和 13.5 cm 好，推測其原因是大擺長時，當擺到低點時，阻尼球具有初速度慣性如圖五十七，使擺動過程中可以偏移較大，因而造成可以擺動偏離中心較長，帶動模型移動，反而些微加大震動，但 7.5 cm 的速度慣性較小，因而帶動效果較小，較快衰減。

另，擺錘質量的增加有兩種效應。首先根據式(18)和式(19)阻尼球會協助吸引模型震動跟降低力矩，降低震動。不過因裝置在釋放時有供給模型阻尼球和阻尼球能量，而較重之阻尼在擺動至末端時較易帶動模型。因此兩種效應會互相抵銷作用，需要更進一步實驗研究兩種效應的消長關係。



圖五十七慣性帶動示意圖

陸、結論

一、探討在不同角度下，阻尼球對模型晃動之影響

根據實驗，我們推測我們的實驗裝置為欠阻尼。X-t 各為角度蝴蝶圖，不論是否有加裝阻尼球，施放角度越大，震幅越大且停止時間較晚，剛開始施放的角度越大，擁有較大的位能，需要更長時間地消耗。Vx-x 圖為螺旋內縮，初始點速度為 0 cm/s，而後先增加後減少，並反覆進行增加減少的過程。

二、各角度的能量減震趨勢

(一) 小角度下能量衰減的底數較小，由於能量較小，阻尼球能快速吸收。

模擬船隻時，外界震動或能量較大，初期能量衰減較大，有效地消耗能量，達到減震效果。無阻尼球情況下的能量衰減趨勢圖顯示底數遠大於其他情況，說明衰減效果不佳。中等角度下，球體在初期儲存了較大能量，後釋放至模型，此時震盪較小，因此相似度會較高。

(二) 我們可以發現阻尼球擺動的軌跡比較不穩定，可推知其能量衰減與角度之間，較無明顯趨勢，但細部分析可以發現其細部範圍並無太大差距。

(三) 不論在何種角度下或是否加裝阻尼球，其能量衰減都是呈現指數衰減，和 Alexei Gilchrist. (2022) 的 Damped Harmonic Oscillator 系統一致。

三、探討有無裝阻尼球，模型的阻尼相關資訊 (以阻尼球 71.5 g 為例)

(一) 我們藉由 ANOVA 分析，發現在 0.05 的顯著標準下，相同擺長時不同角度的 T、 ω 、log decrement、damping ratio、 α 、r 都沒有顯著差異，這是因為和底部接觸面相同，有相同的地板阻力條件，也代表角度在此沒有主要顯著效果。也發現在小角度時擺長的影響較大，代表角度和擺長之間有交互作用。

(二) 進一步用 ANOVA 的事後檢定分析發現主要是由阻尼球造成，相較無阻尼球，加裝阻尼器的效果卓越，分析發現擺長在此效果不明顯，我們推論擺錘在擺動過程中有接近中點的現象，而 7.5 cm 略大於其他兩者，和慣性相關。

四、單擺和模型上阻尼球之關係比對

不論何種角度，單純單擺的週期較小，角頻率較大。而阻尼相關係數(log decrement、damping ratio、 Q 、 α 、 r)單擺皆優於阻尼球，可見光滑的底部阻尼減震效果極差，需要藉由擺來減震。

五、改變阻尼球之質量比較

在小角度時，阻尼球 100 g 和無增重時效果較佳，中角度時阻尼球 90 g 效果最佳，大角度時阻尼球無增重 (71.5 g) 效果最佳，不管合角度，80 g 皆無三者最差。擺長和角度之間的交互作用，在這邊更顯著。

六、模型之原理分析

- (一) 力矩 τ 只和 X 有正相關，且在小角度時，甚至為正比的關係，力矩會導致物體旋轉，所以當 X 越大，力矩越大，轉動效應越明顯，懸掛擺之後，轉動效應會降低，幫助減震。
- (二) 在垂直狀態下，垂直擺長對旋轉影響不大，這意味著擺長不會影響阻尼相關的數據。唯一的例外是在擺長為 7.5 cm 時，阻尼效果較擺長為 10.5 cm 和 13.5 cm 更好。推測的原因是，在較大的擺長情況下，當擺到低點時，阻尼球具有較高的初始速度慣性，使擺動過程中可以偏移較大，從而導致擺動偏離中心較長，進而帶動模型移動。然而，7.5 cm 的能量較小，速度慣性較小，因此帶動效果較小且更快地衰減。
- (三) 增加擺錘質量可以幫助吸收震動並降低力矩，但是在釋放時，擺錘供應能量給模型，並且較重的擺錘在擺動至末端時更容易帶動模型。因此，擺錘重量對於整個系統的影響仍需進一步探討。

七、總結

我們成功找出圓底的震動模式為類簡諧運動，無論上方是否加掛阻尼球，以接觸點為支點，在小角度時合力矩和位移呈現正比的關係。當加裝阻尼球並且搖晃之後，阻尼球會協助將合力矩降低，進而幫助減震，並且阻尼球的擺長對於轉動力矩並沒有顯著的效果，但慣性在小位移時會出現較大比例的帶動效果。而擺重有帶動也有減震之影響，可進一步分析。

八、針對結果之應用發想

此實驗效果可應用於貨船（運輸船）上，推論可達到以下效果：

- (一) 減少搖晃的幅度：阻尼器可以消耗一部分運動能量，減少船體的震幅，減少整體搖晃的程度。
- (二) 提高船體的穩定性：阻尼器通過增加船體的阻力，減少船體運動的速度，使其更加穩定，進而減少搖晃帶來的危險和不適。
- (三) 增加防波堤的抵抗力：阻尼器能夠將運動能量轉換為阻力，從而增加防波堤的抵抗力，減少波浪對船體的影響。
- (四) 提高船體的持久性：阻尼器能夠提高船體的運動性能，降低疲勞損傷和耗能，延長船舶使用壽命。

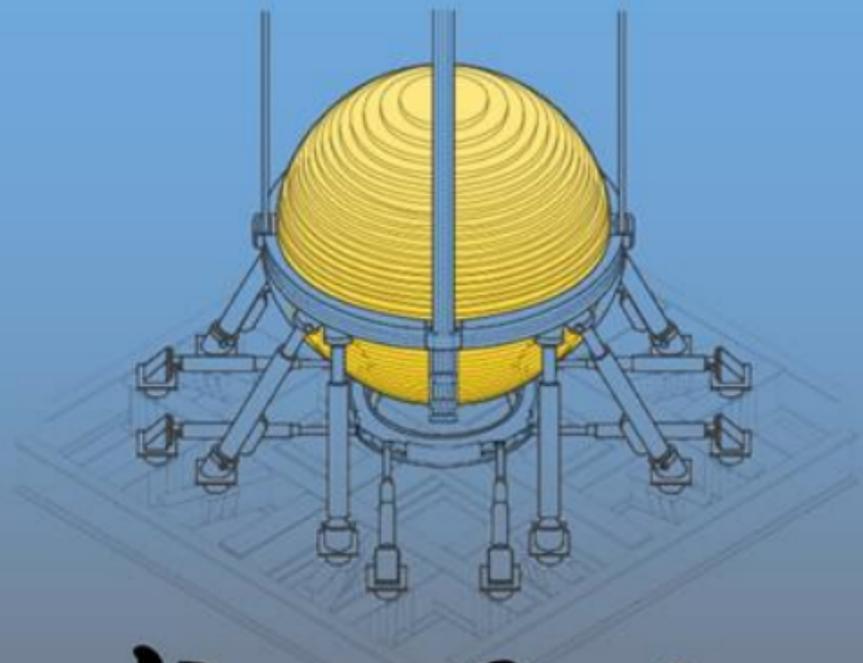
柒、參考文獻資料

- 王文良、張耀典、童宇洋、簡筠融、李蔓喬（2019）。中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 李柏翰（2021）。微分方程。<https://sites.google.com/view/buzznote/p6>
- 張嘉勝（2010）。球型倒單擺控制系統之設計與實作。（未出版之碩士論文）。國立中興大學電機工程學系所。
- 陳柏村（2011）。普通物理實驗之改進與設計。（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學物理學系。
- 維基百科（2023）。阻尼比。查詢日期：2023/04/03。檢自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%98%BB%E5%B0%BC%E6%AF%94>
- Yan, B., Pan, X., Su, R., & Wu, C. (2022). Nonlinear dynamics characteristics of a tumbler on an arc. *Journal of Sound and Vibration*, 525, 116810.
- Alexei Gilchrist. (2022). Energy in a Damped Harmonic Oscillator. Retrieved 2023 March First, from <https://www.entropy.energy/scholar/node/damped-harmonic-oscillator-energy>

【評語】 030101

本研究之分析方法精細嚴謹，過程步驟均相當清楚。研究之題目也相當具有應用價值。然研究主題的創新性可以再加強。

作品海報



尼與震的交會



球形阻尼器性質應用之研究

摘要

我們用雷射切割的壓克力板製作出半圓，再用3D列印出阻尼球，改變施放角度、擺長、擺重，並透過Tracker分析移動軌跡，進而計算週期 T 、對數衰減率 $\log decrement$ 、角頻率 ω 、阻尼比 $damping\ ratio$ 、指數衰減率 α 、 Q 、阻力係數 r 。研究結果發現模型晃動後，仍符合指數衰減，阻尼球可降低合力矩，亦符合類簡諧運動（合力矩和位移相關），而擺長對減震效果的影響有限，擺重則因有慣性，效果也有限，我們提出理論模型來解釋此現象。未來可嘗試類簡諧運動模式，擺錘重量的影響，水中複雜運動的模式。

壹、前言

研究動機

每次搭船出遊時，總會有人因為船體搖晃導致搭乘的不適；航運過程中，也時常有因為船體晃動，而導致價值上萬的貨品損壞，再加上我們身處在臺灣這個四面環海的國家，航運是我們和他國進行貿易的命脈，若能夠減緩船隻的震動，就能創造更大的經濟價值。這時我們想到，在101大樓中，有一種可以防止大樓搖晃並減緩震動的裝置：阻尼器，以前的科學家們主要都是用阻尼器在固定底部的大樓中達到減震，但像船舶這種弧底裝置，運行時會造成更大的搖晃，卻鮮少有人去研究，因此我們想研究阻尼器移到弧形底面模型後，是否能夠有效減少震動的效果，以達到放置在船隻上時，最舒適的航運。

研究目的

- (一) 探討在各角度下，阻尼球對模型晃動之影響及能量衰減趨勢
擺長7.5、10.5、13.5 cm阻尼球在各角度下的 x 位移和 v_x 變化
- (二) 以各種阻尼相關資訊分析比對，並用ANOVA分析差異
 1. 有無加裝阻尼球
 2. 單擺和模型上阻尼球
 3. 改變阻尼球之質量
 4. 改變阻尼球之質量分布
- (三) 模型之原理討論
 1. 模型晃動之合力矩
 2. 不同擺長之影響
 3. 不同擺重之影響

貳、研究方法

研究模型

(一) 單擺

用3D列印出模型，透過改變中間正方形方盒的位置，來達到改變擺長，亦可透過在正方形模型裡放置紙黏土來達到增重的效果如圖1(a)。

(二) 模型

我們先用壓克力做出弧形模具，再用鋼條平行組裝上去，在上面標上追蹤點，並在弧形上標出角度，設為起始施放角度其中包含15度、20度、25度、30度、35度、40度、45度，測量其 x 及 y 軸的數據如圖1(b)。

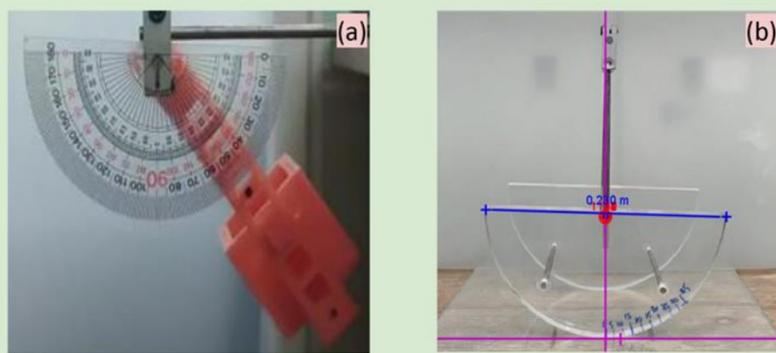


圖1 (a)阻尼球示意圖 (b)模型示意圖

文獻探討與實驗原理

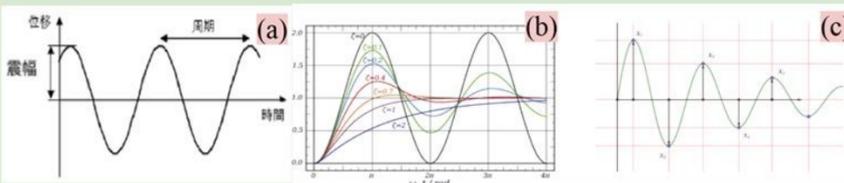


圖2 (a)簡諧運動示意圖 (b)阻尼比示意圖 (c)對數衰減率示意圖[5]

研究器材

表1 研究器材

3D列印模型	玻璃板	光軸十字夾	壓克力板	鋼條	棉線
培林	Tracker程式	Excel	SPSS	Dev c++	六角板手
電鑽	老虎鉗	3D maker kit	紙黏土	鐵球	攝影腳架

參、數據分析

我們會每一組拍攝三次並將其分析，避免實驗中的誤差，共分析以下數據：

(一) 週期 (T) 和角頻率 ω

以波峰到波峰間的時間當作一次週期，做多組數字後取平均。如圖3(b)，兩紅點之間的時間差為一組週期，接著將週期帶入公式來計算 ω

(1)

(二) x 位置、對數衰減率及阻尼比

我們會以tracker分析出來的數據，利用excel的Max函數找出每次震動的最大值（波峰）。如附圖我們會找出最高峰紅點，並記錄其相對應的數值（位置與時間）如附表黃底處，接著將取出的數值帶入公式

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} \quad (2)$$

算出其對數衰減率後再帶入公式

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln(x_1) - \ln(x_2) \quad (3)$$

即可求出阻尼比，觀察我們的數據為何種阻尼，分析我們的裝置是否符合預期的效果

T (s)	X (cm)	Vx (cm/s)
1.599	1.331769	1.517764706
1.633	1.383373	2.100242424
1.666	1.452681	-0.4108484848
1.699	1.439123	-0.08421212121
1.732	1.436344	-2.5205

圖3 (a) tracker 分析之數據 (b) $x-t$ 示意圖

(三) Q 值

以阻尼比帶入公式計算 Q $Q = \frac{1}{2\zeta}$ (4)

(四) 指數衰減 (α)

將 ω, ζ 帶入公式，求出 α $\alpha = \omega \cdot \zeta$ (5)

(五) 阻力係數 (r)

我們運用Dev c++寫出用於模擬 x 方向位移的程式碼，輸入我們實驗中取出的 ω 值，再一一嘗試 r 數值，如圖6 (a)，取出模擬之 x 方向位移後，畫出我們實驗分析出的 x 位移圖比對系統模擬出的 x 位移圖，如圖6 (b)，藍色為本實驗的 x 位移圖，橙色則為程式模擬出的 x 位移圖，試到前三個波完全吻合本實驗，即記錄下 r 值，此為所求。

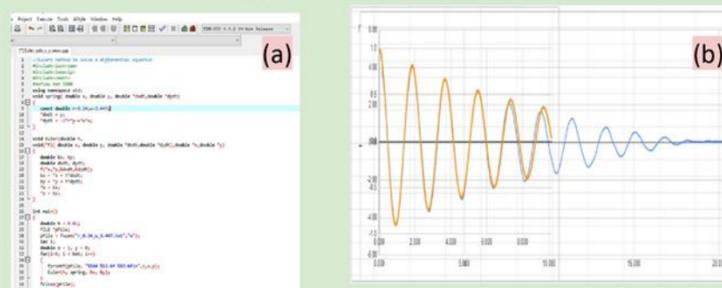


圖4 (a)Dev c++ 程式示意圖 (b)對比示意圖

(六) 總和分析

我們將各種數據紀錄(有無阻尼球或擺長、角度、質量，週期，對數衰減，阻尼比， ω 角頻率， Q ， α ， r)紀錄，並至SPSS軟體，運用單因子變數分析(ANOVA)求各組別之間是否有差異，標準為 ($p < 0.05$)。若有差異，會額外用事後比較來報告差異來源。

肆、研究結果與討論

一、改變施放角度對比

(一) 比較15、20、25、30、40、45度施放角的軌跡之差異

■ 15度 ■ 20度 ■ 25度 ■ 30度 ■ 35度 ■ 40度 ■ 45度

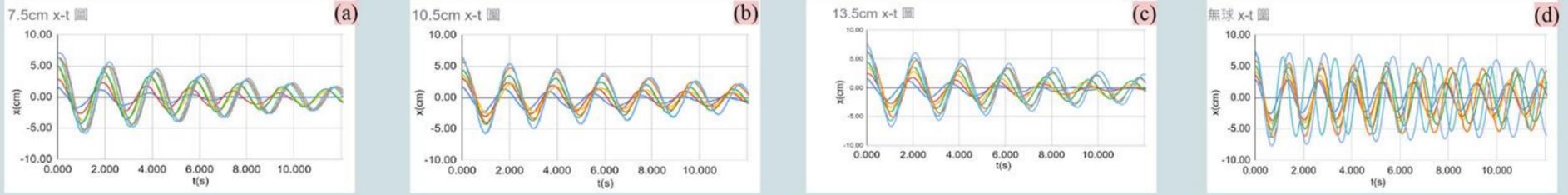


圖5 (a) 7.5 cm各角度x-t 圖 (b) 10.5 cm各角度x-t 圖 (c) 13.5 cm各角度x-t 圖 (d) 無球各角度x-t 圖

施放角度越大

震幅越大且較無停止趨勢

有加裝阻尼球時週期大致相似，但在無阻尼球情況下則較為不規則。

(二) 比較15、30、45度施放角的速率之差異

圖形上的點順時針逐漸內縮

起始點速度為0 cm/s

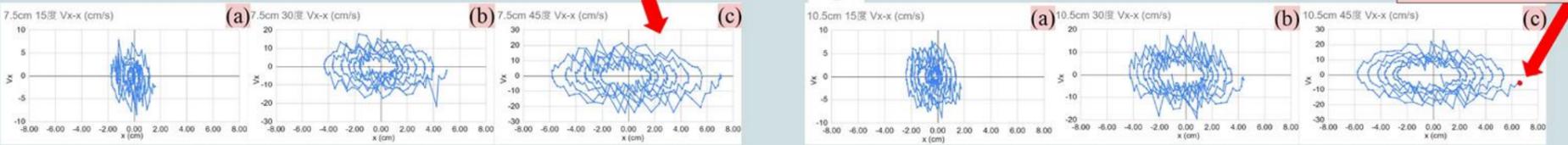


圖6 (a) 7.5 cm 15度 v_x-x (b) 7.5 cm 30度 v_x-x (c) 7.5 cm 45度 v_x-x 圖

圖7 (a) 10.5 cm 15度 v_x-x (b) 10.5 cm 30度 v_x-x (c) 10.5 cm 45度 v_x-x 圖

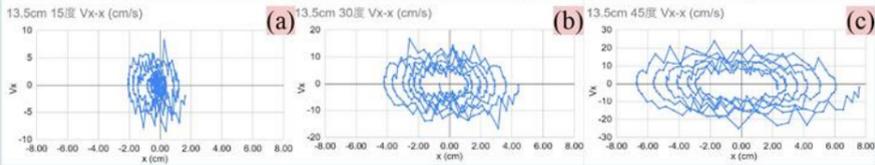


圖8 (a) 13.5 cm 15度 v_x-x (b) 13.5 cm 30度 v_x-x (c) 13.5 cm 45度 v_x-x 圖

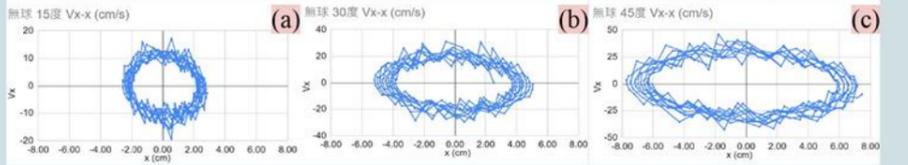


圖9 (a) 無球 15度 v_x-x (b) 無球 30度 v_x-x (c) 無球 45度 v_x-x 圖

1.相較有球，無阻尼球的在錨定時間(一千標記點)內幾乎無衰減。 2.圖形隨著角度增加有往外擴的趨勢。 3.速度有跳動現象，推測是因我們的偵測時間解析度的極限為0.033秒，空間解析度也有上限，計算速度時因此不確定度較大。

二、各角度能量衰減趨勢分析

(一) 比較15、20、25、30、40、45度施放角的軌跡之差異

● 15度 ● 20度 ● 25度 ● 30度 ● 35度 ● 40度 ● 45度

各角度都以指數進行衰變

無球需要較長時間進行衰減

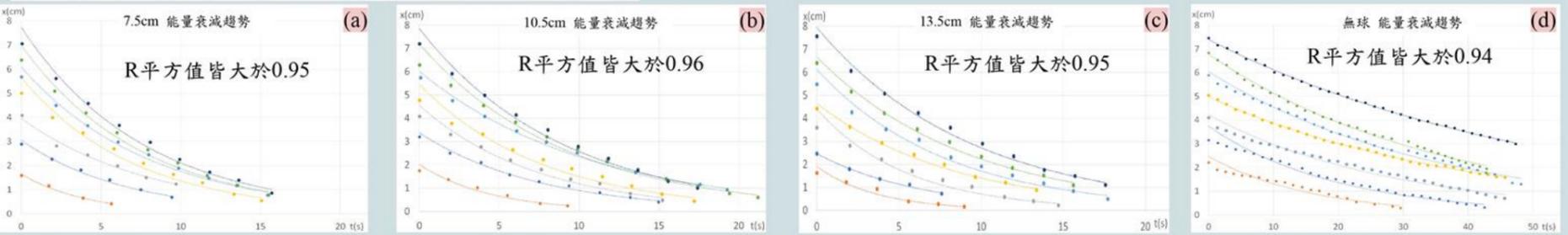


圖10 (a) 7.5 cm各角度能量衰減趨勢圖(點) (b) 10.5 cm各角度能量衰減趨勢圖(點) (c) 13.5 cm各角度能量衰減趨勢圖(點) (d) 無球各角度能量衰減趨勢圖(點)

三、各項數據總和分析 (71.5 g)

■ 無球 ■ 7.5cm ■ 10.5cm ■ 13.5cm

加裝阻尼球效果卓越

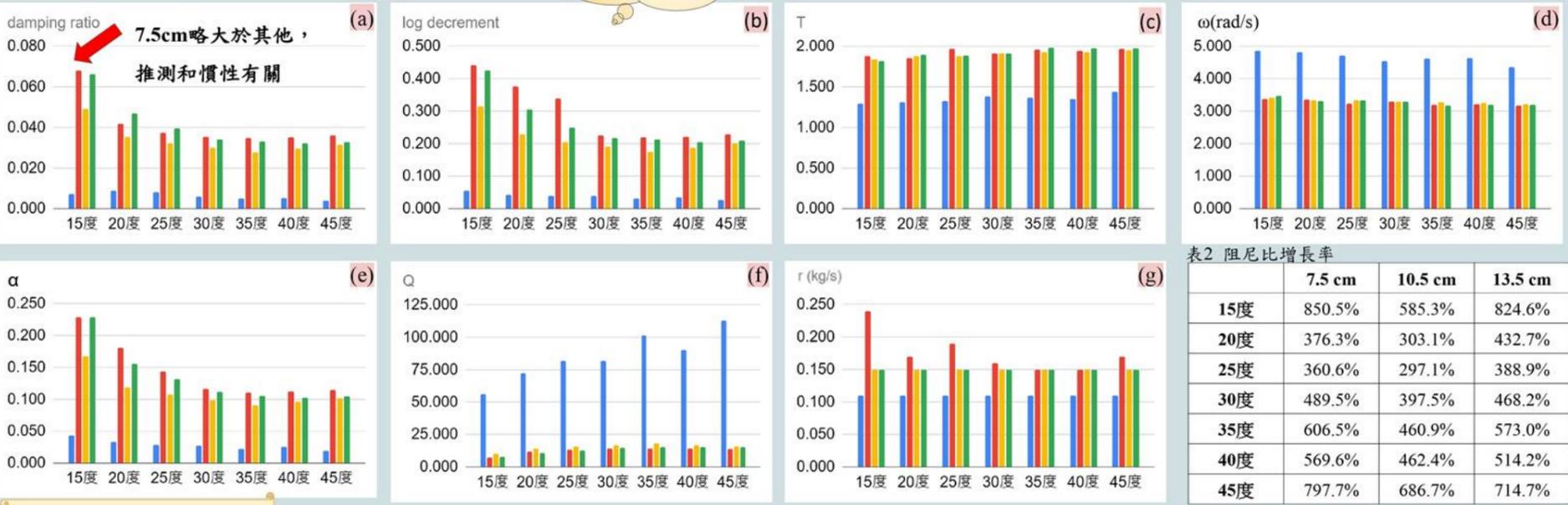


表2 阻尼比增長率

	7.5 cm	10.5 cm	13.5 cm
15度	850.5%	585.3%	824.6%
20度	376.3%	303.1%	432.7%
25度	360.6%	297.1%	388.9%
30度	489.5%	397.5%	468.2%
35度	606.5%	460.9%	573.0%
40度	569.6%	462.4%	514.2%
45度	797.7%	686.7%	714.7%

小角度時擺長的影響較大

圖11 (a) 阻尼比 (b) 對數衰減率 (c) 週期T(s) (d) 角頻率ω (Rad/s) (e) α值 (f) Q值 (g) r值

四、單擺和模型上阻尼球之關係比對

■ 7.5cm(單擺) ■ 7.5cm(球) ■ 10.5cm(單擺) ■ 10.5cm(球) ■ 13.5cm(單擺) ■ 13.5cm(球)

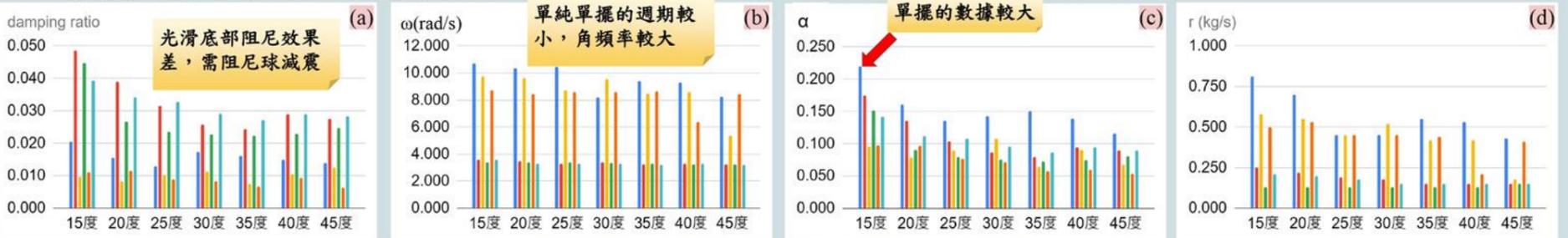


圖12 (a) 阻尼比 (b) 角頻率ω (rad/s) (c) α值 (d) r值

五、改變阻尼球之質量比較 (13.5cm)

■ 80g ■ 90g ■ 100g

質量增加，角頻率減少

不同角度下，阻尼球重量對減震效果有不同影響

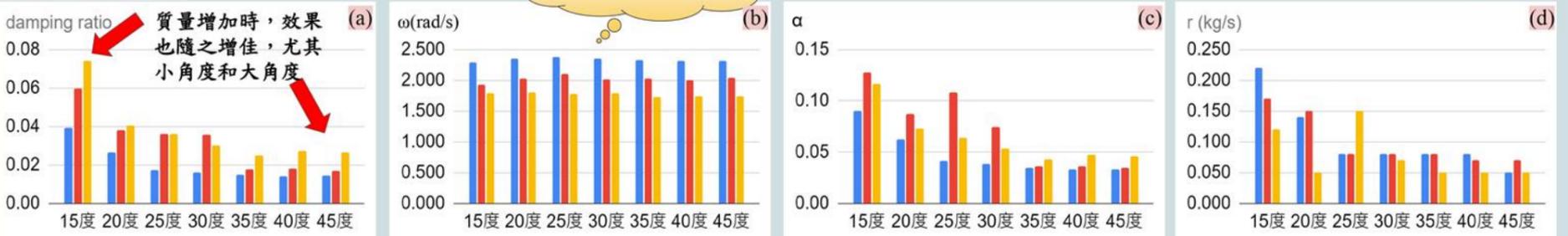


圖13 (a) 阻尼比 (b) 角頻率ω (rad/s) (c) α值 (d) r值

六、用ANOVA分析各項阻尼數據間的差異

表3 無阻尼球與不同擺長之點之ANOVA分析

	F	p	備註
T	11.887	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
log decrement	19.228	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
damping ratio	21.517	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
ω	82.206	<.001	none > 7.5 cm, none > 10.5 cm, none > 13.5 cm
Q	16.435	<.001	none > 7.5 cm, none > 10.5 cm, none > 13.5 cm
α	15.539	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm
r	20.727	<.001	none < 7.5 cm, none < 10.5 cm, none < 13.5 cm, 7.5 cm > 10.5 cm, 7.5 cm > 13.5 cm

擺長7.5 cm 的r值高於其他兩者

表4 擺重之ANOVA分析

	F	p	
T	50.74	<.001	mass大週期大
log decrement	5.05	<.001	80 100有差
damping ratio	6.892	0.002	80 100有差
ω	6.868	0.002	mass大 ω 小
Q	14.828	<.001	80 100有差
α	4.568	0.014	80 100有差
r	2.207	0.119	沒顯著差異

1.除了r值之外皆有差異
2.T和 ω 有隨著質量顯著改變

表5 不同角度之ANOVA分析

	F	p
T	1.37	.272
log decrement	0.95	.482
damping ratio	0.863	.537
ω	0.093	.996
Q	0.354	.9
α	1.207	.341
r	0.262	.949

各施放角度的各項數值
無顯著差異

七、阻尼球質量集中和分散之比較 (13.5cm)

新

■ 集中 ■ 分散

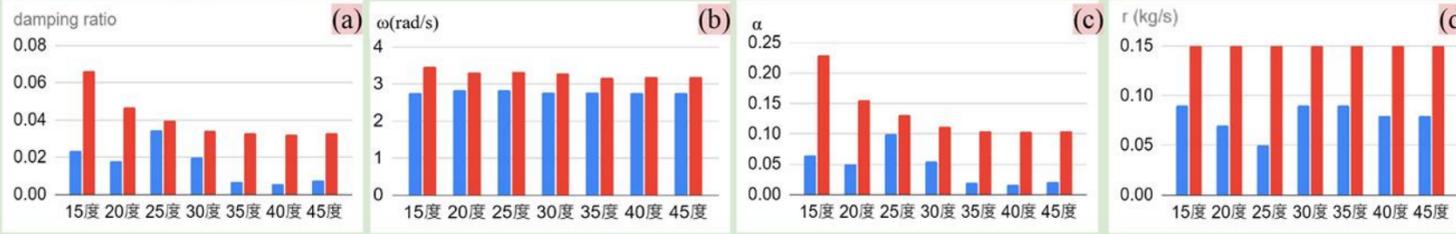


圖14 (a) 阻尼比 (b) 角頻率 ω (rad/s) (c) α 值 (d) r值

質量集中效果並無較佳
推測跟慣性有關係

表6 質量集中與分散檢定

	集中	分散	p
damping ratio	0.0166	0.0407	.002
w	2.79	3.2794	<.001
α	0.0466	0.1343	.001
r	0.0786	0.15	<.001

將力矩, 力學能, 慣性等理論帶入實驗情境, 發現有多處吻合,
以下為理論推導過程和實驗符應之處

八、模型原理討論

m =半圓模型質量 m_2 =阻尼球質量 m_3 =桿子的質量
 g =重力加速度 d =力臂 y =圓心到半圓質心的距離
 l =桿子長度 $l \cdot \sin\theta = d_2$ (6), $\frac{l}{2} \cdot \sin\theta = d_3$ (7)

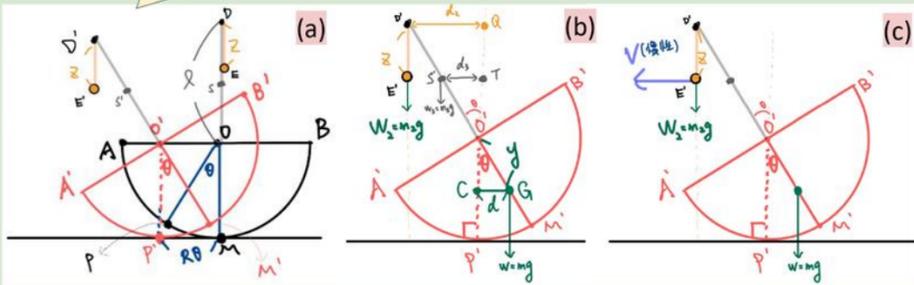


圖15 (a) 移動示意圖、(b) 受力分析示意圖、(c) 慣性帶動示意圖

$$\sin\theta = \frac{x}{R} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \text{半圓盤重力力矩} \quad \tau_1 + \text{擺重重力力矩} \quad \tau_2 + \text{直桿重力力矩} \quad \tau_3 \\ &= m \cdot g \cdot d + (-m_2 \cdot g \cdot d_2) + (-m_3 \cdot g \cdot d_3) \\ &= m \cdot g \cdot d \cdot \sin\theta - m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta - \frac{m_3 \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta}{2} \\ &= (m \cdot y - m_2 \cdot l - \frac{m_3 \cdot l}{2}) g \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (9)$$

當 θ 趨近於0時, $\sin\theta = \theta$, 將式(8)帶入式(9), 可得:

$$\text{合力矩 } \tau = \frac{(m \cdot y - m_2 \cdot l - \frac{m_3 \cdot l}{2}) g}{R} \cdot X \quad (10)$$

根據公式, 質量可降低力矩。但較重之阻尼在
擺動至末端時會因慣性較易帶動模型。
質量集中的慣性效果更明顯, 帶動效應較大。

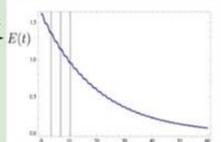
擺長z並未出現在式(10)中

伍、研究結論

一、探討在各角度下, 阻尼球對模型晃動之影響及能量衰減趨勢

我們的實驗裝置為欠阻尼。x-t的折線圖為蝴蝶圖, V_x -x圖為螺旋內縮,
施放角度越大, 震幅越大且停止時間較晚, 符合Euler method分析

$F = -2rv$ 的微分分析。是否加裝阻尼球各種施放角度
下或擺重或擺長, 能量衰減都是呈現指數衰減,
和Alexei Gilchrist. (2022)的



Damped Harmonic Oscillator系統一致[7]。圖16 能量衰減趨勢圖[7]
二、以各種阻尼相關資訊分析比對, 並用ANOVA分析差異

(一)、探討有無裝阻尼球, 模型的阻尼相關資訊 (以阻尼球71.5 g為例)

用ANOVA分析發現相較無阻尼球, 加裝阻尼球的減震效果卓越,
分析發現擺長在此效果不明顯。

(二)、單擺和模型上阻尼球之關係比對

不管何種施放角度, 單純單擺的週期皆最小, 角頻率皆大。

(三)、改變阻尼球之質量比較

擺長和角度之間有顯著的交互作用, 在小角度下, 阻尼球的慣性效應和
減震效果相互抵銷。

(四)、改變阻尼球之質量分布比較

質量集中並無更有效減震, 我們推測和慣性有關

三、模型之原理分析

(同一裝置k為定值)

(一)、圓底的震動模式為類簡諧運動, 合力矩為

$$k = (m \cdot y - m_2 \cdot l - m_3 \cdot \frac{l}{2}) g \quad (11)$$

$$\tau = k \cdot \sin\theta \quad (12)$$

(二)、改變擺長z的效果不明顯

(三)、增加擺重, 阻尼效果會稍佳。

(四)、慣性在小位移時會出現較大比例的帶動效果。擺錘有幫助減震 的效果, 但也有帶動模型之影響, 可進一步分析。

陸、未來展望

一、延續最後所探討的研究, 改變桿長並觀察其阻尼效果之差異。

二、嘗試將阻尼器裝置於船隻上。

三、在Nitai和Roy學者的研究中, 發現水上的船隻有微震現象, 我們推測由於力學能守恆,
適量的微震可以降低主震, 減少衝擊, 未來可以嘗在水上, 研究此現象。

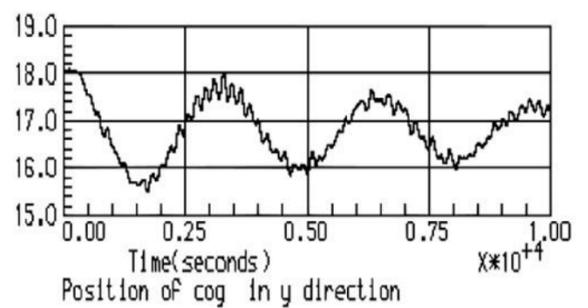


圖17 水上微震現象 [8]

柒、參考文獻資料

- [1]王文良、張耀典、童宇洋、簡筠融、李蔓喬 (2019)。中華民國第59屆中小學科學展覽會作品說明書。
- [2]李柏翰 (2021)。微分方程。https://sites.google.com/view/buzznote/p6
- [3]張嘉勝 (2010)。球型倒單擺控制系統之設計與實作。(未出版之碩士論文)。國立中興大學電機工程學系所。
- [4]陳柏村 (2011)。普通物理實驗之改進與設計。(未出版之碩士論文)。國立彰化師範大學物理學系。
- [5]維基百科 (2023)。阻尼比。查詢日期: 2023/04/03。檢自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%98%BB%E5%B0%BC%E6%AF%94
- [6]Yan, B., Pan, X., Su, R., & Wu, C. (2022). Nonlinear dynamics characteristics of a tumbler on an arc. Journal of Sound and Vibration, 525, 116810.
- [7]Alexei Gilchrist. (2022). Energy in a Damped Harmonic Oscillator. Retrieved 2023 March First, from https://www.entropy.energy/scholar/node/damped-harmonic-oscillator-energy
- [8]Gafter, R., & Drimer, N. (2022). Nonlinear Hydrodynamic Analysis of Ships Moored in a VLFS Service Basin in the East Mediterranean Sea. Journal of Marine Science and Engineering, 10(3), 382.