中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080412

是幸運還是機率-探討彭尼遊戲必勝秘訣

學校名稱：金門縣金湖鎮金湖國民小學

作者：	指導老師：
小五 周信守	張雅萍
小五 陳品諾	方玲琳
小五 陳浩翔	
小五 歐陽妤珊	
小五 呂岳玲	

關鍵詞：機率、擲硬幣、賭徒謬誤

摘要

我們準備了銅板和紀錄表，想要了解彭尼遊戲中，乙玩家是否可以技巧性地提高勝率，以及彭尼遊戲的變化形態延伸後對勝率有什麼影響。在實驗一我們發現不同的對戰組合，其勝率確實存在落差；在實驗二中，我們發現乙玩家確實可以透過彭尼的技巧取得更高的獲勝機率，在實驗三，我們發現當加入更多玩家時，後手不一定能掌握更高的勝率，在實驗四，我們發現相較於以第一或第三字節相反來作為乙玩家的第一字元，以第二字元相反後做為乙玩家的第一字元勝率更高，而本次實驗我們只以擲七次銅板中猜測三次的排列作探討，未來也許可以嘗試其他不同的擲銅板次數、猜測次數，以了解彭尼遊戲及其相關變形遊戲的勝率變化。

壹、研究動機

一、前言

我們從網路上找資料時，發現有一個很有趣的賭徒謬誤，它的意思是說：如果拋一枚公平的硬幣，連續出現越多次正面朝上，賭徒可能錯誤地認為，下一次拋出正面的機會會較小，拋出反面的機率就越大。

而其中關於賭徒謬誤的遊戲中，有一個遊戲讓我們十分好奇一叫做「彭尼遊戲」，它是一個由兩個玩家玩的遊戲，甲玩家要先報出至少包含3個硬幣正反面的序列，接著乙玩家則要給出和甲玩家一樣等長的正面反面順序，例如：甲玩家喊出「正反正」，乙玩家則可喊「正正反」或其他三個包含正反面的序列。喊完後便開始投擲一面硬幣，觀察硬幣擲出正反面的序列，直至投擲出一段序列剛好和某個玩家的吻合，則該名玩家則為獲勝者。

圖1-1 彭尼遊戲乙玩家必勝祕訣示意圖

網路上說這個遊戲乙玩家相對甲玩家有優勢，而且乙玩家有必勝的秘訣(如圖1-1所示)，也就是甲玩家不管喊什麼樣的序列，乙玩家都可以喊出相對優勢且必勝的序列，所以我們實際用丟硬幣的方式來驗證看看這個事情是不是跟網路上的說法是一樣的，並從中分析必勝機率是否有可探討的地方？還有乙玩家的必勝祕訣有沒有其他方法也可行。

二、文獻探討

(一)賭徒謬誤（The Gambler’s Fallacy）

賭徒謬誤亦稱為蒙地卡羅謬誤（The Monte Carlo Fallacy），是一種機率謬誤，其說明是由於某件事發生了很多次，因此你會感覺接下來不太可能再次發生相同事件；或者由於某件事很久沒發生，因此接下來則很可能發生的機率比較高。

根據《是湊巧還是機率？》(2018)一文中說明，如果在拋硬幣時，其中一面很久沒有出現了，那麼它在每一輪拋擲中的出現機會就會增加。理論上來說，每一次拋擲一枚硬幣，出現正反面的兩種結果，出現正面的機會應該要跟出現反面的機會相同。人們時常會搞混結果與頻率之間的差別。

(二)彭尼的遊戲（Penney's game）

由沃爾特·彭尼（Walter Penney）在《休閒數學雜誌》(1969 ，頁 241) 提出是一個兩個玩家之間生成用「正面」和「反面」為代稱所產生二進位數列的遊戲。玩家A要喊出至少包含3個字節，每個字節只能是正面或反面的組合序列，然後必須要讓玩家B知道；接著玩家B則要喊出等長的正面反面序列。隨後，投擲一面均勻的硬幣，觀察它出現的正反面序列，直至投擲出一段序列剛好和某個玩家的序列吻合，則該名玩家獲勝，其中玩家B相對玩家A有獲勝的優勢。

(三)相關研究

以「彭尼遊戲」及「科展」關鍵字於專屬科展作品資源網站「科展群傑廳」搜尋，並無出現相關科展研究文章，再到GOOGLE系統搜尋，也無出現相關研究文獻，若以「賭徒謬誤」關鍵字搜索，發現篇數僅有一篇，在第61屆金門縣中小學科展中，周至娟，林子淳（2021）曾經運用行為與社會科學科的方法，來探討賭徒謬誤和熱手謬誤對受試者的影響，發現受試者們無法做到依照各50%的機率去進行預測，會從前面的結果去進行接下來的預測。

若以Penney's game 搜尋相關國外文獻，有相當多的相關文獻研究，其中有一篇為Martin Gardner(1988)所探討非傳遞序列，其中有曼尼托巴大學的巴里沃爾克所探討之2字元、3字元及4字元對戰表格，所有對戰組合中乙玩家獲勝機率，在這些表格中發現一件事，原本應該是n字元的等待時間要是平均投擲次數， 直到指定的n字元出現。但是硬幣是沒有記憶性，因此一個n字元的等待時間與之前的所有翻轉都無關。而計算分析勝率可以透過對無限級數求和，或者透過繪製樹狀圖來分析，劍橋大學的約翰· 霍頓· 康威（ John Horton Conway）設計了一種康威程序，是計算康威稱為前數的四個二進制數，可透過二進制轉換為十進制得到。

根據上述文獻，將使用樹狀圖作為勝率分析的方法，並試著透過二進位來計算投擲七次硬幣的序列中，各種對戰組合中獲勝次數和計算分析其中勝率。

三、名詞解釋

在做了一連串的實驗之後，我們為了方便討論，將玩家、字節以及對決組合以不同的文字描述，相關解釋如下：

(一)字節

字節即為玩家所喊出的「三個字的組合」例如：反反反、正反正，為了便於紀錄，我們將正紀錄為H(head)，反紀錄為T(tail)，例如：正正反就紀錄為HHT。

(二)玩家

為了區辨玩家順序，第一位喊出字節的玩家我們紀錄為甲玩家，第二位喊出字節的玩家則為乙玩家，在彭尼遊戲中，彭尼即為乙玩家，後續延伸討論中，第三、第四順位玩家即為丙、丁玩家，以此類推。

(三)組合

彭尼遊戲中所有的對決組合都是對稱的，例如「HHH：THH」和「TTT：HTT」對稱，為了方便描述，我們將八種組合命名統整如下：

表1-1
彭尼遊戲所有對戰組合命名表

對決組合		類型名稱
HHH：THH	TTT：HTT	AAA型
HHT：THH	TTH：HTT	AAB型
HTH：HHT	THT：TTH	ABA型
HTT：HHT	THH：HTT	ABB型

命名邏輯是根據甲玩家的組合異同來取名，如三者皆相同則為AAA型，兩者相同後者不同則為AAB型，其中包含了甲玩家為HHT或甲玩家為TTH兩種可能。

貳、研究目的

我們想了解實際用丟硬幣的方式來驗證看看，彭尼遊戲的結果是不是跟網路上的說法是一樣的，並從中分析必勝機率是否有可探討的地方？還有乙玩家的必勝祕訣有沒有其他方法也可行，因此我們的研究目的分成下列幾項：

一、研究目的

我們先以簡化版本的遊戲進行分析，再藉由實驗了解彭尼遊戲以及其相關變化形式遊戲的勝率，研究目的分別如以下：

(一)簡化彭尼遊戲，以了解甲乙兩玩家在銅板遊戲中的勝率。
(二)了解在彭尼遊戲中，乙玩家的勝率是否會更高。
(三)了解當兩個以上的玩家加入遊戲後勝率的差異。
(四)探討修正彭尼的規則，乙玩家勝率之變化。

二、研究問題

(一)簡化後的彭尼遊戲，甲乙兩玩家在銅板遊戲中的勝率為何？

(二)在彭尼遊戲中，甲、乙玩家的勝率為何？
2-1分析彭尼遊戲中HHH:THH/TTT:HTT，甲、乙玩家的勝率為何？
2-2分析彭尼遊戲中HHT:THH/TTH:HTT，甲、乙玩家的勝率為何？
2-3分析彭尼遊戲中HTH:HHT/THT:TTH，甲、乙玩家的勝率為何？
2-4分析彭尼遊戲中HTT:HHT/THH:TTH，甲、乙玩家的勝率為何？

(三)當兩個以上的玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的差異？
3-1三個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的差異？
3-2四個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的差異？
3-3五個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的差異？

(四)探討修正彭尼的規則，乙玩家勝率會有什麼樣的變化？
4-1 改變彭尼規則，將甲玩家的序列中第一個字節相反作為乙玩家序列中的第一個字節，甲、乙兩玩家勝率為何？
4-2改變彭尼規則，將甲玩家的序列中第三個字節相反作為乙玩家序列中的第一個字節，甲、乙兩玩家勝率為何？

三、研究限制

本次實驗我們僅以擲七次硬幣的結果做為探討，並以3字元的組合序列為主要分析項目。

參、研究設備及器材

一、使用設備及器材

（一）銅板

以最容易取得的十元銅板做為實驗器材。

（二）電腦

以EXCEL將所有可能列出來進行分析，並計算甲、乙兩玩家勝率。

（三）各式紀錄表格

透過電腦排版，將各種實驗結果以圖示、數字整理於表格中。

肆、研究方法

一、研究流程圖

圖3-1 研究流程示意圖

二、研究方法

因為以七個排列分析甲乙兩玩家的勝率較複雜，我們先以簡化後的遊戲分析H、T兩字元的排列，在猜測遊戲中，兩兩一組對決是否有勝負之別，接著再驗證彭尼遊戲是否為真，最後我們嘗試改變規則，以「不同玩家人數」及「改變彭尼喊字的規則」兩個方向，探討彭尼遊戲變形後的勝率，分別以簡化遊戲、驗證規則、增加玩家、改變規則四個方向敘寫如下。

（一）【簡化遊戲】

實驗1-1－簡化彭尼遊戲，分析甲乙兩玩家的勝率

為了瞭解彭尼遊戲的原理，我們將遊戲規則簡化，運用2字元(H、T)進行彭尼遊戲，並乙玩家會較有優勢的原則下，將甲、乙兩玩家可能會有的彭尼遊戲之組合(TT：HT、HH：TH、HH：TT、HT：TH)進行勝率之分析，以下列實驗樹狀圖進行甲、乙兩玩家勝率之分析。

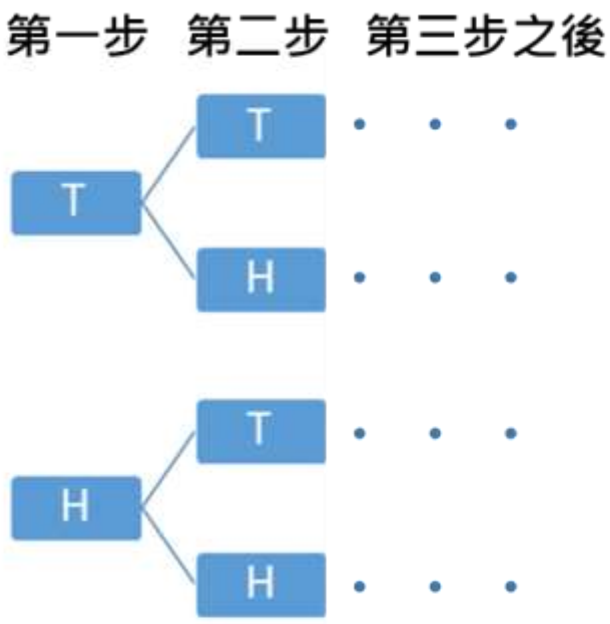


圖4-1 簡化彭尼遊戲圖之樹狀圖

（二）【驗證規則】

實驗2-1－分析彭尼遊戲中組合「AAA：ABB」，甲、乙兩玩家的勝率
實驗2-2 －分析彭尼遊戲中組合「AAB：ABB」，甲、乙兩玩家的勝率
實驗2-3 －分析彭尼遊戲中組合「ABA：AAB」，甲、乙兩玩家的勝率
實驗2-4 －分析彭尼遊戲中組合「ABB：AAB」，甲、乙兩玩家的勝率

做完實驗1-1後，我們發現確實有發生賭徒謬誤的現象，在實驗1-1簡化彭尼遊戲中，原本以為不管何種組合，應該都會是公平的結果，但結果不然，於是我們想實際驗證看看，根據彭尼遊戲原始規則中，它是以投擲七次硬幣結果的排列，而得知甲、乙玩家的勝率，在此實驗中我們採用了以下三種方式進行勝率之分析。

1.第一次為了貼近實際遊戲情境，故採用每一場次投擲七次，共投擲一百場次，分別投擲兩場，並將結果紀錄下來如圖4-2，擲硬幣正反面的出現次數結果如下表4-1所示，我們發現硬幣的正反面出現的機率並不公正，正面出現的次數是727次，而反面出現673次，正面出現的機率顯得比反面機率多，在上網找尋相關文獻，有一篇「擲硬幣做決定，其實不公平」(科學小芽子電子報，2010)說明在史丹佛大學數學教授戴克尼斯（Persi Diaconis）的研究中，曾說明猜對正面或反面向上並不是一種機率問題，而是物理問題。在硬幣拋出時，朝上的那一面，靜止後回到同樣位置的機率是51%，而在自由時報(2009)當中也有一篇「擲銅板決生死？ 研究發現：正反面能操縱」也說到，在哥倫比亞大學的研究中擲硬幣的結果其實一點都不隨機，反而能輕易地被操縱，因此發現硬幣本身就不是公正的實驗器材，為了更使得遊戲公正性提高，於是我們採用EXCEL中RAND的函數拉出一千次組合的可能。

表4-1
擲硬幣正反面的出現次數

次數 / 場次	正面	反面
第一場次	352	348
第二場次	375	325
合計	727	673


圖4-2 擲銅板並記錄正反示意圖

2.第二次我們以七個字一組，用EXCEL跑出一千次的組合，進行了以下四種實驗的結果分析，我們使用不同的螢光筆顏色來代表不同的字元組合如圖4-3所示（完整資料詳見附件），並計算甲、乙兩玩家的勝率如表4-2所示，我們發現AAA型(HHH:THH/TTT:HTT)2號玩家的勝算是最高的，但實驗的過程當中發現此種方法容易在分析上出現錯誤，使得分析結果並不準確，於是我們使用了第三種方法進行分析。

表4-2

各對戰組合EXCEL一千次之勝率分析

1號玩家	2號玩家	1號 玩家勝	2號 玩家勝	2號玩家 實際勝算
AAA	BAA	129	533	4.13
AAB	BAA	267	443	1.66
ABA	AAB	280	479	1.71
ABB	BBA	299	537	1.80

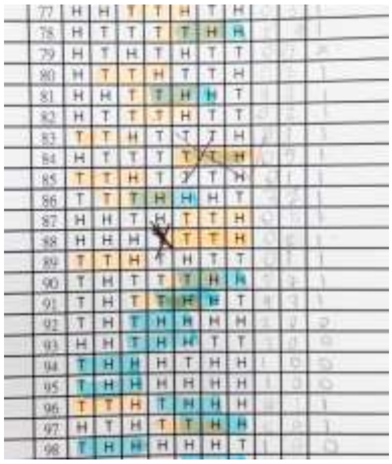


圖4-3 以1000種組合、
螢光筆畫記方式分析示意圖

3.第三次我們發現擲七次硬幣，會出現的組合結果共有128種，因此我們直接用EXCEL將128種可能的結果列出來並以顏色標記(藍色代表甲玩家的組合序列；橘色代表乙玩家的組合序列)各種獲勝出現的字節(如下圖4-4)，進行了實驗2-1、實驗2-2、實驗2-3及實驗2-4，以幫助我們了解這些組合中甲、乙兩玩家的獲勝機率 。

9	H	H	H	T	H	H	H
10	H	H	H	T	H	H	T
11	H	H	H	T	H	T	H
12	H	H	H	T	H	T	T
13	H	H	H	T	T	H	H
14	H	H	H	T	T	H	T
15	H	H	H	T	T	T	H
16	H	H	H	T	T	T	T
17	H	H	T	H	H	H	H
18	H	H	T	H	H	H	T
19	H	H	T	H	H	T	H
20	H	H	T	H	H	T	T
21	H	H	T	H	T	H	H
22	H	H	T	H	T	H	T
23	H	H	T	H	T	T	H

圖4-4 標記字節顏色計算甲、乙獲勝次數示意圖

（三）【增加玩家】

做完了實驗一及實驗二之後，我們發現乙玩家確實在遊戲中佔有較大的優勢，但我們很好奇，如果此時又有一個玩家要加入，並且以彭尼的規則修正乙玩家的組合，來做為丙玩家的序列，是否也能在遊戲中獲得更高的勝率，如果又有第四人以及第五

人加入呢？勝率會如彭尼遊戲規則中一樣，後喊的玩家勝率較高嗎？為了解答這個疑惑，我們有了以下三個實驗：

實驗3-1－分析三個玩家同時遊戲，甲乙丙三玩家的勝率

在實驗一中，我們做了AAA對上BAA的組合，如果此時在加入丙玩家，以修正BAA的組合，喊出BBA序列的話，勝率會有什麼變化，因此我們把三種組合都標上顏色，分析甲、乙、丙三個玩家的獲勝次數分別會有多少次。

同樣的方式，我們還做了AAB：BAA：BBA、ABA：AAB：BAA、ABB：AAB：BAA等另外三種對決組合。

實驗3-2－分析四個玩家同時遊戲，甲乙丙丁四玩家的勝率

根據上一個實驗，AAA：BAA：BBA的組合，我們再加入一個玩家，也就是丁玩家，丁玩家以彭尼規則，修正丙玩家BBA的序列，喊出ABB序列的話，勝率會有什麼變化，因此我們把四種組合都標上顏色(藍色代表甲玩家的組合序列：橘色代表乙玩家的組合序列：紅色代表丙玩家的組合序列：綠色代表丁玩家的組合序列)，分析甲、乙、丙、丁四個玩家的獲勝次數分別會有多少次。

同樣的方式，我們還做了AAB：BAA：BBA：ABB、ABA：AAB：BAA：BBA、ABB：AAB：BAA：BBA等另外四種對決組合。

實驗3-3－分析五個玩家同時遊戲，甲乙丙丁戊五玩家的勝率

呈上，如果此時在加入戊玩家，AAA：BAA：BBA：ABB，以ABB修正的組合，喊出AAB序列的話，勝率會有什麼變化，因此我們把五種組合都標上顏色(藍色代表甲玩家的組合序列：橘色代表乙玩家的組合序列：紅色代表丙玩家的組合序列：綠色代表丁玩家的組合序列：紫色代表戊玩家的組合序列)，分析甲、乙、丙、丁、戊五個玩家的獲勝次數分別會有多少次。

同樣的方式，我們還做了ABA：AAB：BAA：BBA：ABB等另一種對決組合，而另外兩種對決組合AAB：BAA：BBA：ABB及ABB：AAB：BAA：BBA不列入討論，因加入第五個玩家後所喊出的序列分別為AAB及ABB以和前面甲玩家所喊出的序列重複，故只做有出現五種AAA：BAA：BBA：ABB：AAB和ABA：AAB：BAA：BBA：ABB不同序列的對決組合。

（四）【改變規則】

除了人數上的變化外，我們也很想要了解，為什麼彭尼在遊戲中，會想要以甲玩家的第二字節相反來作為自己的第一字節，如果是以甲玩家的第一字節相反會有什麼樣的結果？如果是以第三字節修正，又會有什麼樣的結果呢？為了解答這個疑惑，我們有了以下兩個實驗：

實驗4-1－改變彭尼規則，將乙玩家序列中的第一個字節與甲玩家的序列中第一個字節相反，分析甲、乙兩玩家勝率

此次實驗中，我們改變彭尼遊戲的規則，規則(一)將乙玩家序列中的第一個字節，以甲玩家序列中的第一個字節相反(如圖4-5所示)，我們發現，在AAA：BAA和AAB：BAA的組合中，乙玩家一樣會是同樣的序列，而ABA：AAB和ABB：AAB的組合中，乙玩家的序列會改變，ABA：AAB的對決組合會修正為ABA：BAB的組合，而ABB：AAB的對決組合會修正為ABB：BAB的組合，我們再分別計算甲、乙玩家勝率會有什麼變化，分析兩個玩家的獲勝次數各會有多少次。

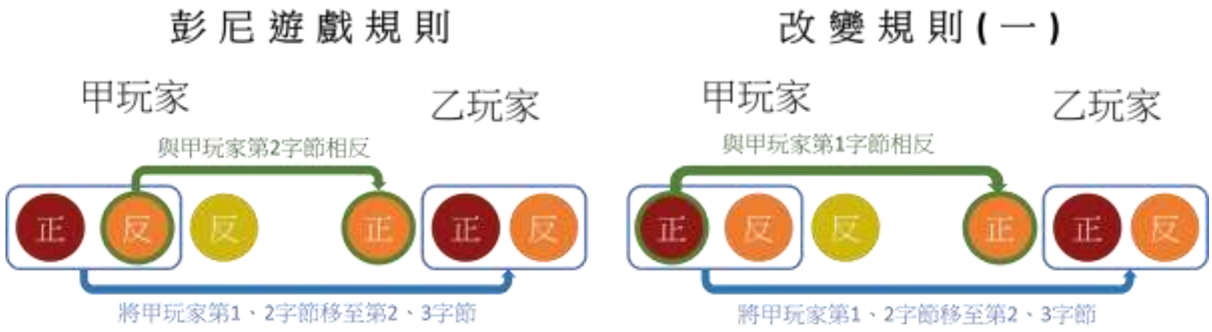


圖4-5 改變彭尼遊戲規則(一)示意圖

實驗4-2－改變彭尼規則，將乙玩家序列中的第一個字節與甲玩家的序列中第三個字節相反，分析甲、乙兩玩家勝率

此次實驗中，我們改變彭尼遊戲的規則，規則(二)我們將乙玩家序列中的第一個字節，以甲玩家序列中的第三個字節相反(如圖4-6所示)，我們發現，在AAA：BAA和ABB：AAB的組合中，乙玩家一樣會是同樣的序列，而AAB：BAA和ABA：AAB的組合中，乙玩家的序列會改變，AAB：BAA的對決組合會修正為AAB：AAA的組合，而ABA：AAB的對決組合會修正為ABA：BAB的組合，我們再分別計算甲、乙玩家勝率會有什麼變化，分析兩個玩家的獲勝次數各會有多少次。

圖4-6 改變彭尼遊戲規則(二)示意圖

伍、研究結果

(一)簡化後的彭尼遊戲，甲、乙兩玩家在銅板遊戲中的勝率為

在2字元的對決組合中，TT：HT／HH：TH對決組合中的分析勝率如下圖5-1及圖5-2所示，橘色標示為TT及HH獲勝路線，紅色標示為HT及TH獲勝路線，可知當第一步為T/H時，TT及HH才會有獲勝的機會，若第一步為另外一個結果出現時，則TT及HH毫無獲勝的可能，以運算式子計算發生TT/HH的機率如下：

發生TT/HH的機率則為$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；則發生HT／TH的機率為$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$；

故TT：HT／HH：TH的機率為1:3 (如下圖5-1及圖5-2所示)。

圖5-1 TT：HT對決組合分析

圖5-2 HH：TH對決組合分析

在2字元的對決組合中，可發現HT：TH／HH：TT對決組合中的分析勝率如下圖5-3及圖5-4所示，橘色標示為HT及HH獲勝路線，紅色標示為TH及TT獲勝路線，可知這兩種對決組合的第一個字節為相反，因此當第一步出現的時候，便可得出勝率，以運算式子計算發生TT/HH的機率如下：

發生HT/HH的機率則為$\frac{1}{2}$；則發生TH／TT的機率為$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

故HT：TH／HH：TT的機率為1:1 (如下圖5-3及圖5-4所示)。

圖5-3 HT：TH對決組合分析

圖5-4 HH：TT對決組合分析

我們將所有對決組合的結果羅列如下表，可以知道在2字元的對決組合中，也能符合彭尼遊戲的規則，出現了賭徒謬誤的結果，其中有部分組合乙玩家的勝率會是甲玩家的3倍之高。

表5-1

簡化後的彭尼遊戲對決組合之勝率

對決組合	勝率
TT:HT	1:3
HH:TH	1:3
HT:TH	1:1
HH:TT	1:1

(二)在彭尼遊戲中，甲、乙玩家的勝率為何？

2-1分析彭尼遊戲中HHH:THH/TTT:HTT，甲、乙玩家的勝率為何？

以AAA：BAA的組合為例，在128次的排列中，AAA勝：BAA勝：和局的出現次數為16：70：42，乙玩家確實能以彭尼規則獲得較高的勝率，其獲勝機率約為甲玩家的4.38倍。

2-2分析彭尼遊戲中HHT:THH/TTH:HTT，甲、乙玩家的勝率為何？

以AAB：BAA的組合為例，在128次的排列中，AAB勝：BAA勝：和局的出現次數為31：62：35，乙玩家確實能以彭尼規則獲得較高的勝率，其獲勝機率為甲玩家的2倍。

2-3分析彭尼遊戲中HTH:HHT/THT:TTH，甲、乙玩家的勝率為何？

以ABA：AAB的組合為例，在128次的排列中，ABA勝：AAB勝：和局的出現次數為35：62：31，乙玩家確實能以彭尼規則獲得較高的勝率，其獲勝機率約為甲玩家的1.77倍。

2-4分析彭尼遊戲中HTT:HHT/THH:TTH，甲、乙玩家的勝率為何？

以ABB：AAB的組合為例，在128次的排列中，ABB勝：AAB勝：和局的出現次數為39：69：20，乙玩家確實能以彭尼規則獲得較高的勝率，其獲勝機率約為甲玩家的1.77倍。

表5-2

各種組合對戰結果次數統計表

對戰結果 / 對戰組合	甲玩家勝	乙玩家勝	和局
AAA：BAA	16	70	42
AAB：BAA	31	62	35
ABA：AAB	35	62	31
ABB：AAB	39	69	20

圖5-5 各種組合對戰結果次數統計圖

綜合以上，不管在哪一種對戰組合中，乙玩家均有較高的機率可以在彭尼遊戲中獲得勝利，在ABA：AAB和ABB：AAB的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的1.77倍；而在AAB：BAA的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的2倍；在AAA：BAA的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的4.38倍，因此我們可以說乙玩家確實可以透過彭尼的技巧取得更高的獲勝機率，然而其獲勝機率是否如網路傳言的比率，詳見「討論」章節。

(三)當兩個以上的玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的轉變？

我們經過一連串的實驗之後，發現部分對戰超過五位玩家即會出現重複組合，茲就各種排列說明如下：

AAA型：AAA→BAA→BBA→ABB→AAB→BAA(重複)

AAB型：AAB→BAA→BBA→ABB→AAB(重複)

ABA型：ABA→AAB→BAA→BBA→ABB→AAB(重複)

ABB型：ABB→AAB→BAA→BBA→ABB(重複)

為了能夠更方便的比較各種對戰組合的勝率，我們將各種組合在128個排列中獲勝的次數整理如以下圖表：

表5-3
AAA型不同玩家人數對決結果次數統計表

	AAA型					
兩玩家	AAA	BAA	和局			
	16	70	42			
三玩家	AAA	BAA	BBA	和局		
	16	36	65	11		
四玩家	AAA	BAA	BBA	ABB	和局	
	16	36	31	41	4	
五玩家	AAA	BAA	BBA	ABB	AAB	和局
	16	31	31	31	16	3

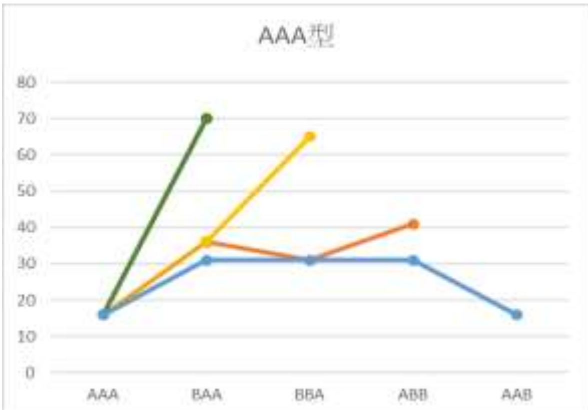


圖5-6 AAA型不同玩家人數對決結果次數統計圖

表5-4
AAB型不同玩家人數對決結果次數統計表

	AAB型				
兩玩家	AAB	BAA	和局		
	31	62	35		
三玩家	AAB	BAA	BBA	和局	
	31	31	57	9	
四玩家	AAB	BAA	BBA	ABB	和局
	31	31	31	31	4

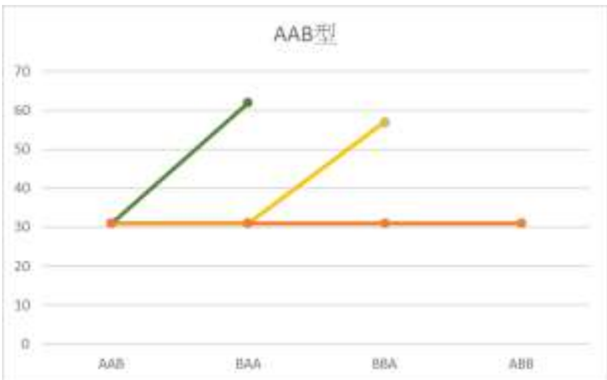


圖5-7 AAB型不同玩家人數對決結果次數統計圖

表5-5
ABA型不同玩家人數對決結果次數統計表

ABA型						
兩玩家	ABA	AAB	和局			
	35	62	31			
三玩家	ABA	AAB	BAA	和局		
	35	31	42	20		
四玩家	ABA	AAB	BAA	BBA	和局	
	24	31	16	53	4	
五玩家	ABA	AAB	BAA	BBA	ABB	和局
	24	31	16	31	24	2

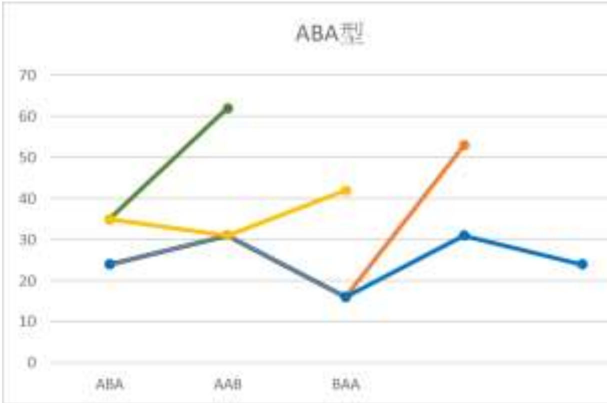


圖5-8 ABA型不同玩家人數對決結果次數統計圖

表5-6
ABB型不同玩家人數對決結果次數統計表

ABB型					
兩玩家	ABB	AAB	和局		
	39	69	20		
三玩家	ABB	AAB	BAA	和局	
	39	31	49	9	
四玩家	ABB	AAB	BAA	BBA	和局
	31	31	31	31	4

圖5-9 ABB型不同玩家人數對決結果次數統計圖

綜合以上，我們在AAA型及ABA型中探討了三位、四位、五位玩家的對戰結果，在AAB型及ABB型中討論了三位、四位玩家的對戰結果，茲就實驗結果分述如以下：

3-1三個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的轉變？

1.AAA型

結果如表5-3所示，以AAA：BAA：BBA的組合為例，在128次的排列中，AAA勝：BAA勝：BBA：和局的出現次數為16：36：65：11，丙玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家的獲勝機率也較甲玩家高。

2.AAB型：

結果如表5-4所示，以AAB：BAA：BBA的組合為例，在128次的排列中，AAB勝：BAA勝：BBA勝：和局的出現次數為31：31：57：9，丙玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家則和甲玩家相同。

3.ABA型：

結果如表5-5所示，以ABA：AAB：BAA的組合為例，在128次的排列中，ABA勝：AAB勝：BAA勝：和局的出現次數為35：31：42：20，丙玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家的勝率並沒有比甲玩家來得高。

4.ABB型：

結果如表5-6所示，以ABB：AAB：BAA的組合為例，在128次的排列中，ABB勝：AAB勝：BAA勝：和局的出現次數為39：31：49：9，丙玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家的勝率並沒有比甲玩家來得高。

3-2四個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的轉變？

1.AAA型

結果如表5-3所示，以AAA：BAA：BBA：ABB的組合為例，在128次的排列中，AAA勝：BAA勝：BBA勝：ABB勝：和局的出現次數為16：36：31：41：4，丁玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家的獲勝機率也較甲玩家高，但丙玩家的獲勝機率並沒有比乙玩家來得高。

2.AAB型：

結果如表5-4所示，以AAB：BAA：BBA：ABB的組合為例，在128次的排列中，AAB勝：BAA勝：BBA勝：ABB勝：和局的出現次數為31：31：31：31：4，甲、乙、丙、丁四位玩家的勝率相同。

3.ABA型：

結果如表5-5所示，以ABA：AAB：BAA：BBA的組合為例，在128次的排列中，ABA勝：AAB勝：BAA勝：BBA勝：和局的出現次數為24：31：16：53：4，丁玩家能以彭尼規則獲得較高的勝率，而乙玩家的勝率也比甲玩家的勝率有較高的勝率，但丙玩家的勝率並沒有比乙玩家來得高，是四個玩家中勝率最低的。

4.ABB型：

結果如表5-6所示，以ABB：AAB：BAA：BBA的組合為例，在128次的排列中，ABB勝：AAB勝：BAA勝：BBA勝：和局的出現次數為31：31：31：31：4，甲、乙、丙、丁四位玩家的勝率相同。

3-3五個玩家加入遊戲後，勝率會有什麼樣的轉變？

1.AAA型

結果如表5-3所示，以AAA：BAA：BBA：ABB：AAB的組合為例，在128次的排列中，AAA勝：BAA勝：BBA勝：ABB勝：AAB勝：和局的出現次數為16：31：31：31：16：3，戊玩家在五個玩家中並沒有以彭尼規則得到較高的勝率，反而與甲玩家在對決組合中有相同且較低的勝率，而乙、丙、丁、戊四位玩家的勝率相同，都皆較甲玩家高。

2.ABA型：

結果如表5-5所示，以ABA：AAB：BAA：BBA：ABB的組合為例，在128次的排列中，ABA勝：AAB勝：BAA勝：BBA勝：ABB勝：和局的出現次數為24：31：16：31：24：2，戊玩家並沒有比丁玩家的勝率高，反而丁玩家在五個玩家中獲得較高的勝率，而乙玩家的獲勝機率也較甲玩家高，但丙玩家為五個玩家中勝率最低的。

綜合以上，如有第三位玩家加入，丙玩家確實能夠獲得更高的勝率，但乙玩家的獲勝機率則未必會勝過甲玩家；如果有四位玩家加入，在AAB型及ABB型中，四位玩家的勝率均為31/128，AAA型及ABA型則丁玩家擁有最高的勝率；如果有五位玩家加入在AAA型及ABA型，戊玩家則無法透過彭尼規則獲得最高的勝率。

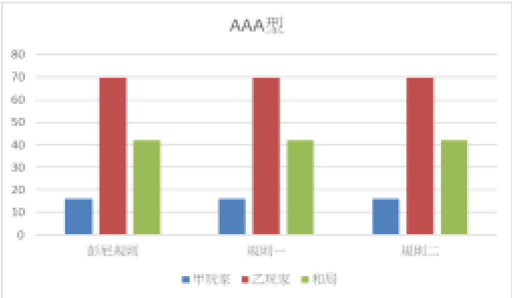
(四)探討修正彭尼的規則，乙玩家勝率會有什麼樣的變化？

規則(一)將乙玩家序列中的第一個字節，以甲玩家序列中的第一個字節相反ABA：BAB和ABB：BAA，規則(二)我們將乙玩家序列中的第一個字節，以甲玩家序列中的第三個字節相反ABA：BAB和AAB：AAA，為了能夠更方便的比較各種對戰組合的勝率，我們將不同規則中各種組合獲勝的次數整理如表5-7及圖5-10 所示：

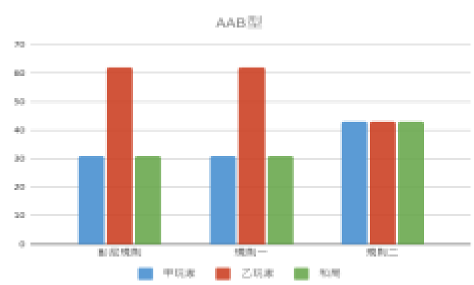
表5-7

不同規則中各種組合對決結果次數統計表

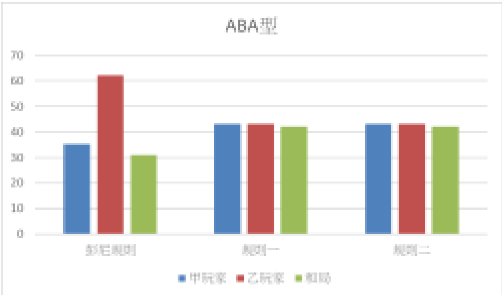
彭尼規則		規則一		規則二	
對戰組合	甲勝:乙勝:和局	對戰組合	甲勝:乙勝:和局	對戰組合	甲勝:乙勝:和局
AAA:BAA	16:70:42	AAA:BAA	16:70:42	AAA:BAA	16:70:42
AAB:BAA	31:62:35	AAB:BAA	31:62:35	AAB:AAA	43:43:42
ABA:AAB	35:62:31	ABA:BAB	43:43:42	ABA:BAB	43:43:42
ABB:AAB	39:69:20	ABB:BAB	45:52:31	ABB:AAB	39:69:20



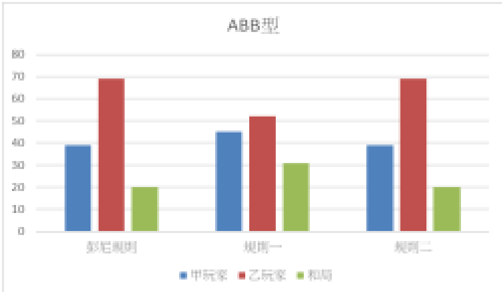
在AAA型中，無論是彭尼規則或者是規則一、規則二，三種對戰組合都相同，因此乙玩家都能獲得較高的勝率。



在AAB型中，彭尼規則和規則一的對戰組合相同，乙玩家均能獲得較高的勝率，如果乙玩家改以規則二喊序列，勝率和甲玩家相同，未能在遊戲中取得優勢。



在ABA型中，只有彭尼規則能夠獲得較高的勝率，如果改以規則一或規則二喊出序列，乙玩家的勝率和甲玩家相同，未能在遊戲中取得優勢。



在ABB型中，彭尼規則和規則二的對戰組合相同，乙玩家均能獲得較高的勝率，如果乙玩家改以規則一喊序列，勝率略高於甲玩家，但相對於彭尼規則未能取得更高的勝率。

圖5-10 各式組合改變規則一及規則二柱狀圖表

4-1 改變彭尼規則，將乙玩家序列中的第一個字節與甲玩家的序列中第一個字節相反，甲、乙兩玩家勝率為何？

1.AAA型

以AAA：BAA的組合為例，在128次的排列中，不管何種規則下甲、乙玩家的組合序列皆為AAA：BAA，因此AAA勝：BAA勝：和局的出現次數皆為16：70：42。

2.AAB型：

以AAB：BAA的組合為例，在128次的排列中，不管何種規則下甲、乙玩家的組合序列皆為AAB：BAA，因此AAB勝：BAA勝：和局的出現次數皆為31：62：35。

3.ABA型：

以ABA：AAB的組合為例，在128次的排列中，甲、乙玩家的組合序列修正為ABA：BAB，因此ABA勝：BAB勝：和局的出現次數為43：43：42，甲、乙兩玩家勝率相同，因此，依照結果可以知道改變彭尼規則，規則一會讓乙玩家在遊戲當中沒有相對優勢，與甲玩家的勝率相同。

4.ABB型：

以ABB：AAB的組合為例，在128次的排列中，甲、乙玩家的組合序列修正為ABB：BAB，因此ABB勝：BAB勝：和局的出現次數為45：52：31，乙玩家勝率還是較甲玩家勝率高，因此用規則一改變乙玩家的組合序列還是符合彭尼規則的結果，乙玩家具有相對的優勢。

4-2　改變彭尼規則，將乙玩家序列中的第一個字節與甲玩家的序列中第三個字節相反，甲、乙兩玩家勝率為何？

1.AAA型

以AAA：BAA的組合為例，在128次的排列中，不管何種規則下甲、乙玩家的組合序列皆為AAA：BAA，因此AAA勝：BAA勝：和局的出現次數皆為16：70：42。

2.AAB型：

以AAB：BAA的組合為例，在128次的排列中，在規則二中，AAB勝：AAA勝：和局的出現次數為43：43：42，甲、乙兩玩家勝率相同，因此，依照結果可以知道改變彭尼規則，規則二則會讓乙玩家在遊戲當中沒有相對優勢，與甲玩家的勝率相同。

3.ABA型：

以ABA：AAB的組合為例，在128次的排列中，在規則二中，ABA勝：BAB勝：和局的出現次數為43：43：42，甲、乙兩玩家勝率相同，因此，依照結果可以知道改變彭尼規則，規則二則會讓乙玩家在遊戲當中沒有相對優勢，與甲玩家的勝率相同。

4.ABB型：

以ABB：AAB的組合為例，在128次的排列中，不管何種規則下甲、乙玩家的組合序列皆為ABB：AAB，因此ABB勝：AAB勝：和局的出現次數皆為39：69：20。

綜合以上，使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列並不會提高乙玩家的勝率，但在ABB：AAB的組合中，使用規則一改變乙玩家的序列仍然符合彭尼遊戲之規則，乙玩家勝率較甲玩家高，但並沒有比原來彭尼遊戲規則的勝率高。

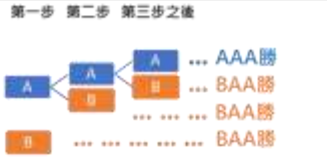
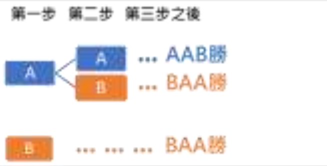
陸、討論

一、網路上說彭尼遊戲的勝率高達7倍，這句話是真的嗎？

在原本的彭尼遊戲中，在AAA：BAA的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的7倍；在AAB：BAA的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的3倍；ABA：AAB和ABB：AAB的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的2倍，其對戰組合分析如下表6-1所示。

表 6-1

各種對戰組合勝率分析表格

項目	對戰組合數線分析圖	運用機率理論計算勝算分析	乙玩家勝算
AAA:BAA (AAA型)		發生AAA的機率為$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$； 則發生BAA的機率為 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8})$ 故AAA:BAA的機率為1:7	1:7
AAB:BAA (AAB型)		發生AAB的機率為$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$； 則發生BAA的機率為$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4})$； 故AAA:BAA的機率為1:3	1:3
ABA:AAB (ABA型)		發生AAB的機率為$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\cdots=$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$；則發生ABA的 機率為$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$；故ABA:AAB的機率為1:2	1:2
ABB:AAB (ABB型)		發生AAB的機率為$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\cdots=$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$；則發生ABB的 機率為$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$；故ABB:AAB的機率為1:2	1:2

資料來源：自行整理分析表格，資料取自http://www.alaricstephen.com/main-featured/2016/8/30/penneys-game

若以擲七次硬幣為例，所有對戰組合結果勝率統計分析如下表6-2及圖6-1所示：

表 6-2

各種組合對戰結果統計表格

項目	甲玩家勝	乙玩家勝	和局	乙：甲 比值	乙+和：甲 比值
AAA：BAA	16	70	42	4.38	7.00
AAB：BAA	31	62	35	2.00	3.13
ABA：AAB	35	62	31	1.77	2.66
ABB：AAB	39	69	20	1.77	2.28

圖 6-1各種組合對戰結果統計圖

無論在何種對戰結果中，乙玩家的勝率都沒有高過甲玩家7倍，勝率最高的對戰組合為AAA：BAA，與表4-2中一千次組合實驗分析的結果符合，且在AAA：BAA的組合

裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的4.38倍，跟表4-2中各對戰組合EXCEL一千次組合之勝率分析中AAA：BAA的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的4.13倍相差並不大，我們也發現從一千次實驗分析的結果與128種組合勝率的分析結果相近；若按照128種所有組合來看可以將命題做修改，如果命題為「乙玩家不輸的機率」把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則恰好為7倍，因此「彭尼遊戲的勝率高達7倍」應該修正為「彭尼遊戲不敗的機率為7倍」。

在AAB：BAA的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的2.00倍；但如果命題為「乙玩家不輸的機率」把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則為3.13倍；在ABA：AAB的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的1.77倍；但如果命題為「乙玩家不輸的機率」把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則為2.88倍；在ABB：AAB的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的1.77倍；但如果命題為「乙玩家不輸的機率」把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則為2.28倍。

綜合上述，我們認為擲七次硬幣原則下，彭尼遊戲對戰表中，應該修正如下表6-3所示，將原本2號玩家勝算修正成「2號玩家實際勝算」或「2號玩家不敗機率」。

表6-3

彭尼遊戲對戰表之修正版本(以投擲七次為例)

1號玩家	2號玩家	2號玩家勝算(維基百科)	2號玩家實際勝算	2號玩家不敗機率
HHH	THH	1:7	1:4.38	1:7
HHT	THH	1:3	1:2	1:3.13
HTH	HHT	1:2	1:1.77	1:2.66
HTT	HHT	1:2	1:1.77	1:2.28
THH	TTH	1:2	1:1.77	1:2.28
THT	TTH	1:2	1:1.77	1:2.66
TTH	HTT	1:3	1:2	1:3.13
TTT	HTT	1:7	1:4.38	1:7

二、在三位玩家或四位玩家或五位玩家的遊戲中，後手也更具優勢嗎？

1.AAA型

(1)在AAA型中，兩人、三人、四人對戰的情況裡，後手（意即乙玩家、丙玩家、丁玩家）確實更具優勢，但當遊戲人數提高至五人時，後手（戊玩家）就未必有更高的獲勝機率。
(2)無論是在幾人的遊戲中，甲玩家的獲勝機率均最低。
(3)在遊戲人數提高到四人時，乙玩家的獲勝機率會高於丙玩家，但略低於丁玩家。
(4)在遊戲人數提高到五人時，乙、丙、丁玩家的勝率相同，而戊玩家則會和丙玩家的勝率相同。

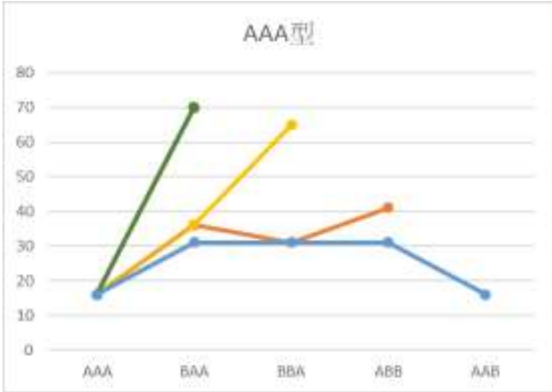


圖 6-2 AAA型統獲勝次數折線圖

2.AAB型

(1)在AAB型中，兩人和三人對戰的情況中，後手（意即乙玩家、丙玩家）確實更具有優勢，且甲玩家在對決當中的獲勝機率也是最低的。
(2)在三人遊戲中，乙玩家的勝率和甲玩家相同，都比丙玩家還低。
(3)在四人遊戲中，後手（丁玩家）就不具有更高的獲勝機率的優勢，反而和其他玩家的勝率相同。

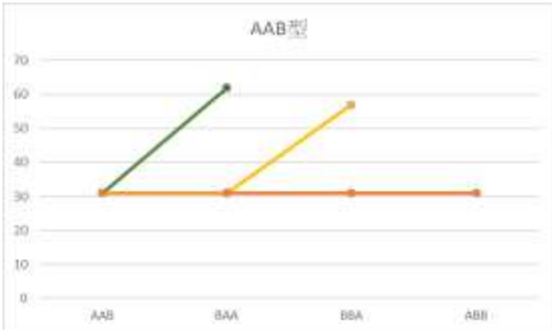


圖 6-3 AAB型統獲勝次數折線圖

3.ABA型

(1)在ABA型中，兩人、三人、四人對戰的情況裡，後手（意即乙玩家、丙玩家、丁玩家）確實更具優勢，但當遊戲人數提高至五人時，戊玩家就未必有更高的獲勝機率。
(2)兩人、三人對戰的情況裡，甲玩家的獲勝機率相同，但在遊戲人數提高到四人和五人時，甲玩家的勝率開始降低。
(3)在三人遊戲中，甲玩家的勝率略高於乙玩家的勝率。
(4)在四人遊戲中，乙玩家的勝率略高於甲玩家，但丙玩家的勝率沒有比乙玩家來得高，甚至是四人玩家中最低的。
(5)在五人遊戲中，乙玩家的勝率略高於甲玩家的勝率，丁玩家的勝率略高於甲玩家的勝率，其中丙玩家的勝率是最低，而戊玩家和甲玩家的勝率相同。

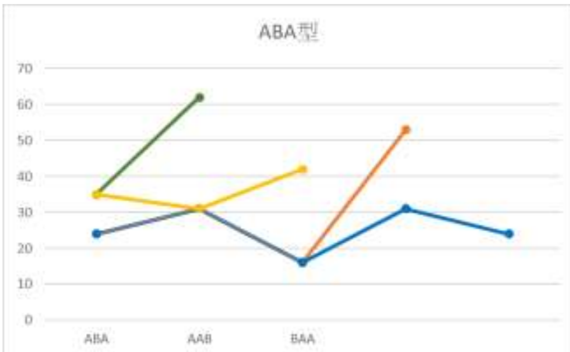


圖 6-4 ABA型統獲勝次數折線圖

4.ABB型

(1)在ABB型中，兩人、三人對戰的情況裡，後手（意即乙玩家、丙玩家）確實更具優勢，但當遊戲人數提高至四人時，丁玩家就未必有更高的獲勝機率。
(2)兩人、三人對戰的情況裡，甲玩家的獲勝機率相同，但在遊戲人數提高到四人時，甲玩家的勝率開始降低。
(3)在三人遊戲中，甲玩家的勝率略高於乙玩家的勝率。
(4)在四人遊戲中，丁玩家就不具有更高的獲勝機率的勢，反而和其他玩家的勝率相同。

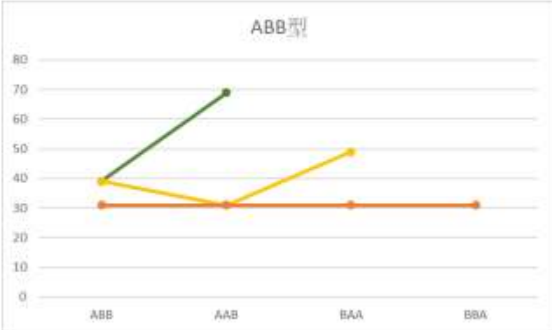


圖 6-5 ABB型統獲勝次數折線圖

綜合上述，在三位玩家無論何種對戰組合，在三人的對決遊戲中，後手（丙玩家）確實更具有優勢，四位玩家或五位玩家的遊戲中，後手就未必更具優勢。

在AAA型及ABA型中，四人玩家的遊戲中，後手（丁玩家）也更具有優勢，但在AAB型和ABB型中，因最多只有四人玩家對戰情形，四人的勝率會呈現相同情況；在AAA型及ABA型中，五人玩家的遊戲中，甲玩家和戊玩家的獲勝機率會相同，是五人玩家中最低的，而AAA型中，乙丙丁玩家的勝率會相同，在ABA型中，丙玩家的勝率會最低，乙丁玩家的勝率會相同。

因此，彭尼遊戲中的後手更具有優勢，可適用三人玩家的對戰遊戲中，不適用於四人玩家以及五位玩家的對戰遊戲。

三、使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，可以提高乙玩家的勝率嗎？

根據結果分析，可以發現使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，並不會提高乙玩家的勝率。

在AAA：BAA的組合中，不論使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，皆與原來的彭尼遊戲的組合序列相同，因此勝率與原有的並無差別；在AAB：BAA和ABA：AAB的組合中，使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，甲玩家和乙玩家的勝率會變為相同，但在ABB：AAB的組合中，使用規則一改變乙玩家的序列仍然符合彭尼遊戲之規則，乙玩家勝率較甲玩家高，但並沒有比原來彭尼遊戲規則的勝率高，各組合的改變規則對戰表分析如下表6-3。

表6-3

彭尼遊戲改變規則之各組合對戰表

甲玩家	AAA	AAB	ABA	ABB
彭尼規則	BAA	BAA	AAB	AAB
改變規則一	BAA	BAA	BAB	BAB
改變規則二	BAA	AAA	BAB	AAB
	三者皆同 無須討論	僅需討論改 變規則二	改變規則 一二皆同	僅需討論改 變規則一

因此，使用彭尼遊戲的規則，乙玩家的第一字節要由甲玩家的第二字節相反勝率是最高的。

我們用畫圖的方式進行了分析，下圖6-6中以ABA型為例，可以看到乙玩家使用彭尼規則改變序列，乙玩家的第二字節與第三字節，是由甲玩家第一字節與第二字節往後移，也就是當出現這兩的玩家相同的字節時，乙玩家總是會比甲玩家更早一輪取得獲勝。

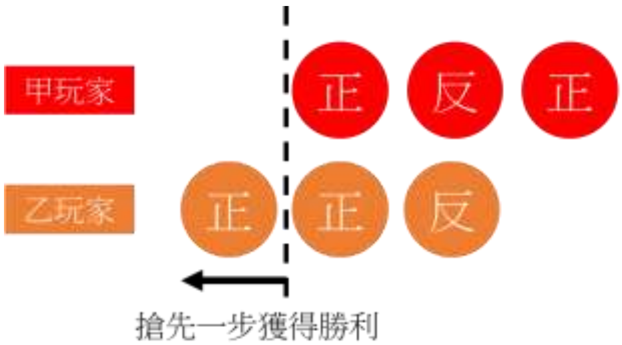


圖 6-6 乙玩家使用彭尼規則勝利原因分析圖

以AAB型為例，一樣用畫圖的方式進行分析，以下圖6-7所示，我們發現如果以彭尼規則遊戲來分析，甲玩家僅有單獨出現的序列，或者甲玩家至少要比乙玩贏三手，才有獲勝的可能；若是以規則一改變乙玩家的組合序列，甲玩家則除了自己單獨出現的序列外，甲玩家贏乙玩家兩手就有獲勝的機會，所以使用規則一改變乙玩家的序列，雖然勝率仍然可以比甲玩家高，但獲勝的勝率並不會比原來彭尼規則高。

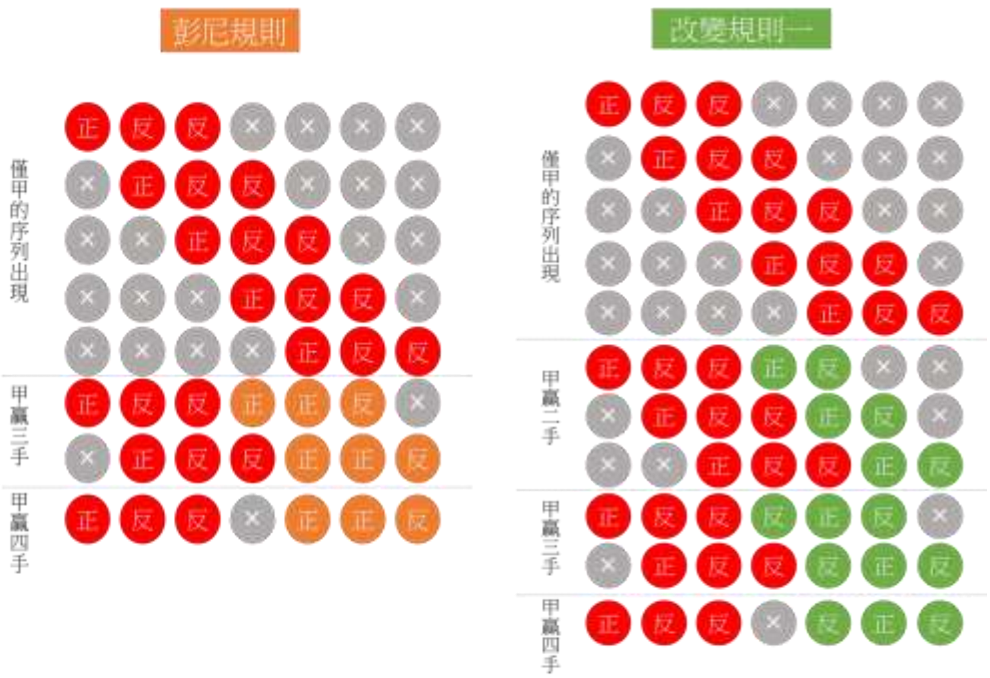


圖 6-7 乙玩家使用規則一勝利原因分析圖

若是以規則二改變乙玩家的組合序列，一樣用畫圖的方式進行分析，下圖6-8中以AAB型為例，可以看到乙玩家，並沒有像使用彭尼規則的組合序列一樣，永遠比甲玩家更早一輪取得獲勝，反而是和甲玩家建立在一樣的基礎上。

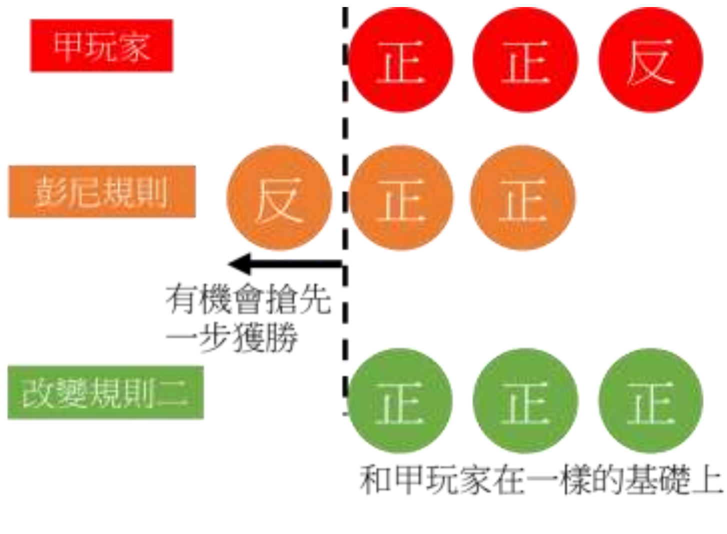


圖 6-8 乙玩家使用規則二勝利原因分析圖

四、是否能從對戰結果找到勝率的規律呢？

我們以AAB：BAA對戰組合為例來說明各組合勝率次數分析的情形，根據圖6-2所示，可以知道AAB在第一輪獲勝的次數應該為$2^4\times1$，第二輪獲勝的次數為$2^3\times1$，第三輪獲勝的次數為$2^2\times1$，第四輪獲勝的次數為$2^1\times1$，第五輪獲勝的次數為$2^0\times1$，所以AAB獲勝的次數為$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1=31$，BAA在第一輪獲勝的次數應該為$2^4\times1$，第二輪

獲勝的次數為$2^3 \times 2$，第三輪獲勝的次數為$2^2 \times 3$，第四輪獲勝的次數為$2^1 \times 5$，第五輪獲勝的次數為$2^0 \times 8$，所以AAB獲勝的次數為$2^4 \times 1+2^3 \times 2+2^2 \times 3+2^1 \times 5+2^0 \times 8=62$。

圖 6-2 AAB：BAA對戰組合各輪分析圖

各種對戰組合分別勝率次數計算方式如下表6-4至表6-7：

表6-4

AAA型各組合勝率次數計算方式

AAA型					
兩玩家	AAA	BAA			
	16	70			
	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times5+2^0\times10$			
三玩家	AAA	BAA	BBA		
	16	36	65		
	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times2+2^1\times1+2^0\times2$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times4+2^1\times8+2^0\times1$		
四玩家	AAA	BAA	BBA	ABB	
	16	36	31	41	
	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times2+2^1\times1+2^0\times2$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times3+2^0\times3$	
五玩家	AAA	BAA	BBA	ABB	AAB
	16	31	31	31	16
	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$

表6-5

AAB型各組合勝率次數計算方式

	AAB型			
兩玩家	AAB	BAA		
	31	62		
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times5+2^0\times8$		
三玩家	AAB	BAA	BBA	
	31	31	57	
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times4+2^0\times5$	
四玩家	AAB	BAA	BBA	ABB
	31	31	31	31
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$

表6-6

ABA型各組合勝率次數計算方式

	ABA型				
兩玩家	ABA	AAB			
	35	62			
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times2+2^0\times3$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times5+2^0\times8$			
三玩家	ABA	AAB	BAA		
	35	31	42		
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times2+2^0\times3$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times2+2^1\times3+2^0\times4$		
四玩家	ABA	AAB	BAA	BBA	
	24	31	16	53	
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times3+2^1\times3+2^0\times3$	
五玩家	ABA	AAB	BAA	BBA	ABB
	24	31	16	31	24
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times0+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times0+2^1\times0+2^0\times0$

表6-7

ABB型各組合勝率次數計算方式

	ABB型			
兩玩家	ABB	AAB		
	39	69		
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times2+2^1\times2+2^0\times3$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times4+2^1\times6+2^0\times9$		
三玩家	ABB	AAB	BAA	
	39	31	49	
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times2+2^1\times2+2^0\times3$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times2+2^2\times2+2^1\times3+2^0\times3$	
四玩家	ABB	AAB	BAA	BBA
	31	31	31	31
	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$	$2^4\times1+2^3\times1+2^2\times1+2^1\times1+2^0\times1$

綜合上述，我們發現不管何種對戰組合當中，基本的獲勝次數都一定會有2^4=16次，也就是所有組合第一輪即獲得勝利的次數，也就是基本的勝率都一定會有$\frac{16}{128}$，而每一種序列組合的獲勝次數從第一輪到第五輪的分析可用2^4×1+2^3×出現次數(第二輪開始序列-前三字元已出現組合序列)+2^2×出現次數(第三輪開始序列-前三字元已出現組合序列)+2^1×出現次數(第四輪開始序列-前三字元已出現組合序列)+2^0×出現次數(第五輪開始序列-前三字元已出現組合序列)。

柒、結論

1.簡化遊戲中，以2字元的組合中，出現了賭徒謬誤的結果，其中TT：HT／HH：TH的乙玩家的勝率是皆為1:3。

2.在彭尼規則中，不管在哪一種對戰組合中，乙玩家均有較高的機率獲得勝利，在ABA：AAB和ABB：AAB的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的1.77倍；而在AAB：BAA的組合裡，乙玩家的勝率是甲玩家的2倍；在AAA：BAA的組合裡，乙玩家的勝率大約是甲玩家的4.38倍。

3.無論在何種對戰結果中，乙玩家的勝率都未高過甲玩家7倍，勝率最高的對戰組合為AAA：BAA，但如果命題為「乙玩家不輸的機率」把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則恰好為7倍，我們認為彭尼遊戲的對戰表中，應該將原本的2號玩家勝算修正成「2號玩家實際勝算」或「2號玩家不敗機率」。

4.在三位玩家無論何種對戰組合，在三人的對決遊戲中，後手（丙玩家）確實更具有優勢，四位玩家或五位玩家的遊戲中，後手就未必更具優勢。四位玩家，在AAB型及ABB型中，四位玩家的勝率均為31／128，AAA型及ABA型則丁玩家擁有最高的勝率；五位玩家，在AAA型及ABA型，戊玩家則無法透過彭尼規則獲得最高的勝率。

5.使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，並不會提高乙玩家的勝率，在ABB：AAB的組合中，使用規則一改變乙玩家的序列仍然符合彭尼遊戲之規則，乙玩家勝率較甲玩家高，但並沒有比原來彭尼遊戲規則的勝率高。

6.不管何種對戰組合當中，基本的勝率都一定會有$\frac{16}{128}$。

捌、參考資料及其他

一、未來展望

本研究為僅有探討以擲7次硬幣為主，並無探討更多投擲次數，並且遊戲規則當中，僅使用 3字元的組合為主，並無探討3字以上字元的組合，例如4字元、5字元等，後手玩家的必勝秘訣。

另在此次研究中，僅有歸納出各種對戰組合，分別在每一次對戰回合中，勝率次數的計算方式，並沒有從中再更進一步探討適用於所有字元的彭尼遊戲勝率的套用公式。

其二是，彭尼遊戲僅是賭徒謬誤的現象的其中之一，另有撲克牌翻牌以及其他賭徒謬誤的現象可再加入討論。

二、參考資料

(一)中文部分

Gladys Blog（2019）十大思維謬誤(一)：賭徒謬誤。取自https://reurl.cc/ Go6aKp

周至娟，林子淳（2021）。機率謬誤？探討賭徒謬誤和熱手謬誤對受試者的影響。第 61金門縣中小學科展行為與社會科學科。

維基百科（無日期）。彭尼的遊戲【部落格文字資料】。取自https://reurl.cc/mGOpX9

臉譜出版 (2018年02月20日)。 拋硬幣時一直出現正面，那麼下一次是反面的機率就會比較高？別傻了！——《是湊巧還是機率？》【部落格文字資料】。取自https://pansci.asia/archives/134951

橘子皮（2010年12月15日）。科學新知~擲硬幣做決定並不公平。科學小芽子電子報，148。取自http://www.bud.org.tw/epaper/2010-12-15.html#4

擲銅板決生死？ 研究發現：正反面能操縱(2009)。自由時報。取自https://news.ltn.com.tw/news/life/breakingnews/304789

(二)英文部分

Clark, M. P., & Westerberg, B. D. (2009). *Holiday review. How random is the toss of a coin?.* CMAJ : Canadian Medical Association journal = journal de l'Association medicale canadienne, 181(12), E306–E308.

Game Theory, Mathematics (2016).Sep 3 Penney's Game. Retrieved from http://www.alaricstephen.com/main-featured/2016/8/30/penneys-game

Martin Gardner(1988). *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman.

【評語】080412

1. 該作品從一個遊戲出發，探討彭尼規則的優勢，主題有趣。
2. 作者先以實驗驗證規則，繼而使用數狀圖與二進位以及機率的相關概念分析彭尼規則的勝率，具啟發性。
3. 本研究只探討以擲 7 次硬幣為主，完整性較為不足。建議嘗試進行數學推導及證明。

作品簡報

簡報大綱

是幸運還是機率

探討彭尼遊戲必勝祕訣

第62屆中小學科學展覽

彭尼遊戲是沃爾特·彭尼（Walter Penney）在《休閒數學雜誌》提出的遊戲。

摘　　要

乙玩家可以透過彭尼的技巧取得更高的勝率，
加入更多玩家時，後手不一定能掌握更高的勝率。

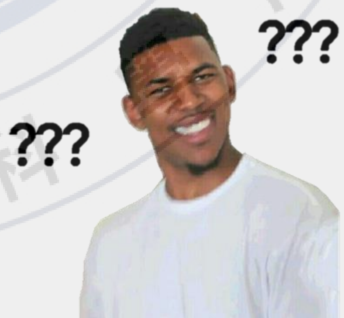
相關研究

科展作品資源網站，沒有出現相關科展研究文章
取用外國文獻中樹狀圖和二進位做勝率分析的方法

研究動機

獲勝機率

這樣真的能提高勝率嗎?



- 摘要
- 相關研究
- 研究動機
- 研究目的
- 研究設備
- 研究方法
- 研究結果
- 討論
- 結論
- 參考文獻

研究目的

1

簡化遊戲，了解甲乙兩玩家在銅板遊戲中的勝率。

2

乙 甲 ?

了解在彭尼遊戲中，乙玩家的勝率是否會更高。

3

甲 乙 + 丙 丁 戊

了解當兩個以上的玩家加入遊戲後勝率的差異。

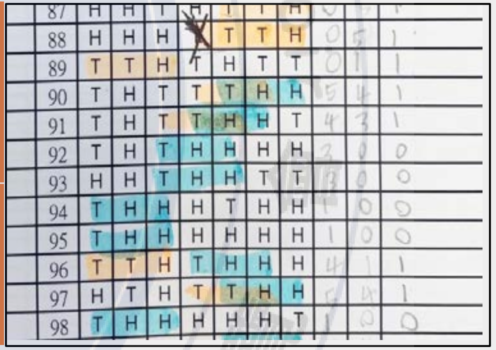
4

正反正 vs. 正正反? 反正反?

探討修正彭尼的規則，二號玩家勝率之變化。

研究設備

10元銅板

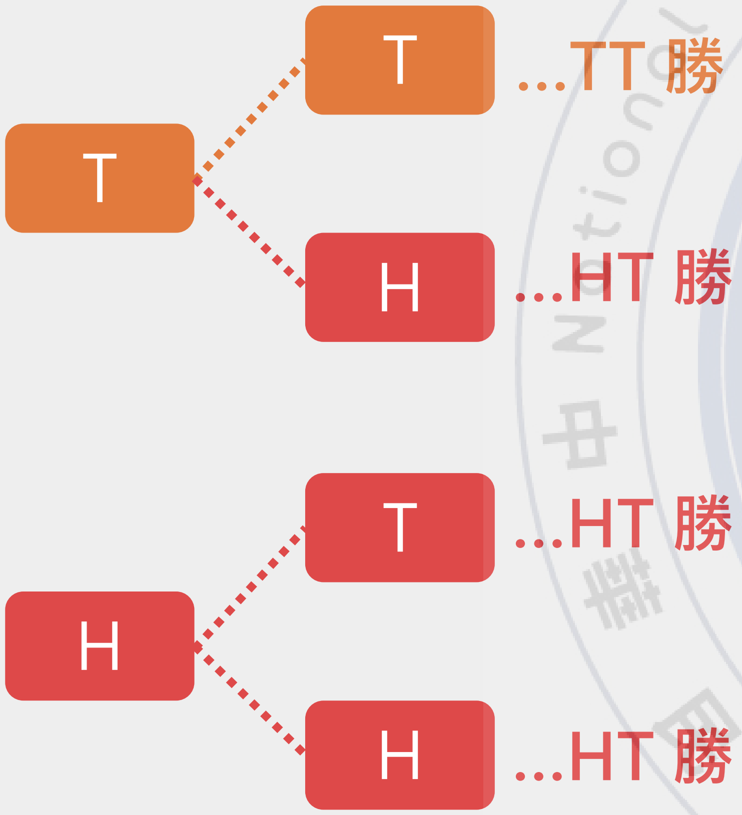


紀錄表格

電腦

摘要
相關研究
研究動機
研究目的
研究設備
研究方法
研究結果
討論
結論
參考文獻

實驗一　簡化彭尼遊戲，用樹狀圖分析甲乙兩玩家勝率



圖一

TT：HT對決組合中的分析勝率

透過這樣的方式，
我們計算出各種對戰組合的勝率如下：

對決組合	勝　率
TT：HT	1：3
HH：TH	1：3
HT：TH	1：1
HH：TT	1：1

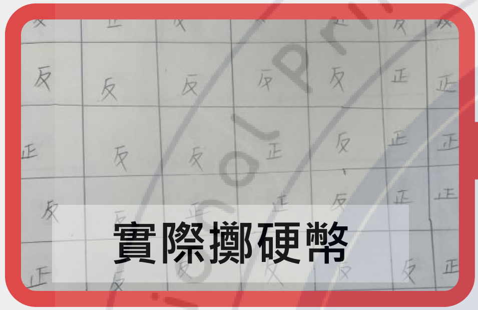
※註：為方便記錄，我們將正記錄為H，反記錄為T。

圖二

可以知道TT：HT、HH：TH勝率皆為1:3。

實驗二　分析彭尼遊戲中各種組合甲、乙兩玩家的勝率

圖三
實驗方法
調整與修正


實際擲硬幣

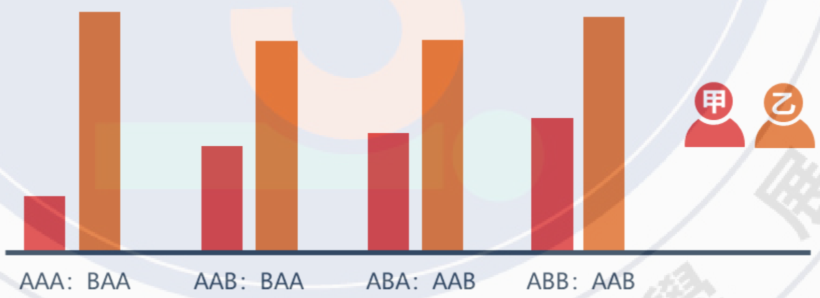

Excel亂數


樹狀圖分析

透過這樣的方式，
我們計算出各種對戰組合的勝率如下：

※註：HHH:THH和TTT:HTT的對決結果相同，以AAA：BAA統稱，以下類推。

對決組合	甲勝	乙勝	和局
AAA：BAA	16	70	42
AAB：BAA	31	62	35
ABA：AAB	35	62	31
ABB：AAB	39	69	20



圖四
乙玩家的勝率
都會比甲玩家高

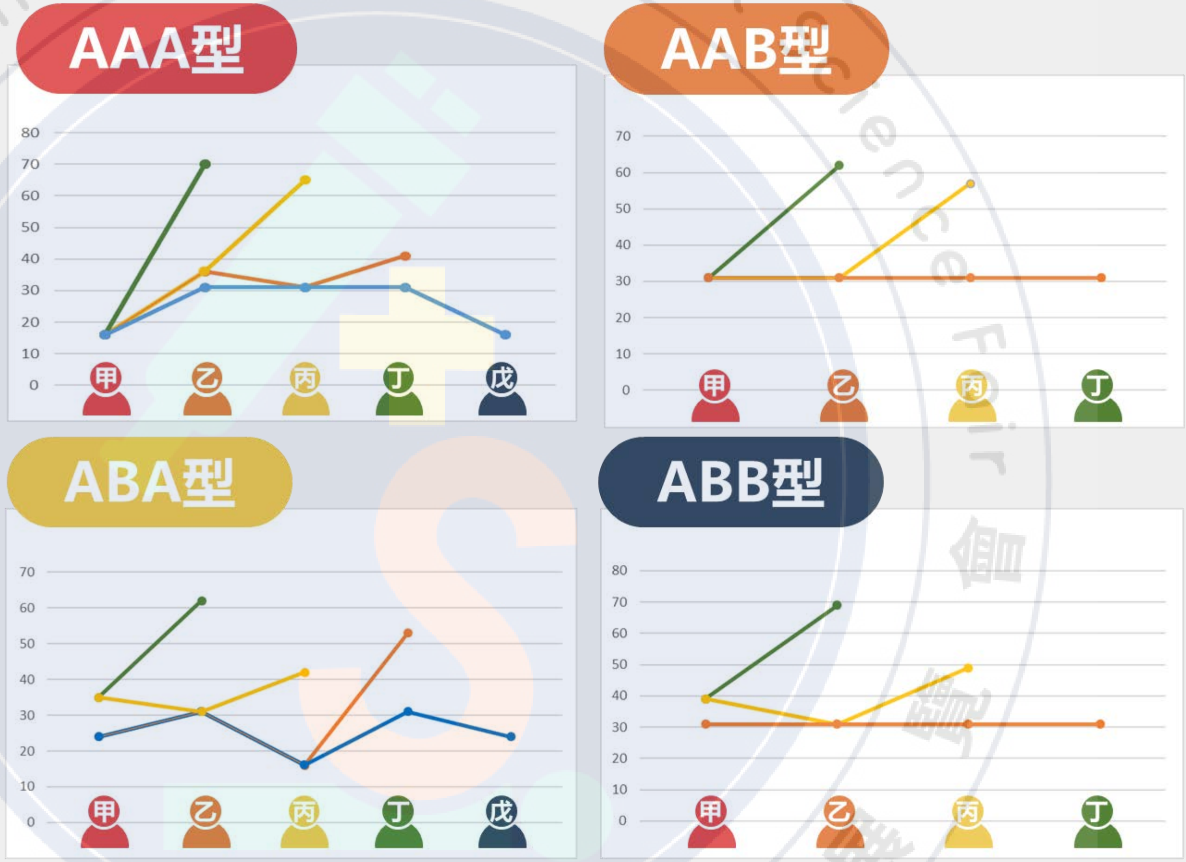
摘要
相關研究
研究動機
研究目的
研究設備
研究方法
研究結果
討論
結論
參考文獻

實驗三　分析三個(或以上)玩家同時遊戲玩家們各別勝率

8	H	H	H	H	T	T	T
9	H	H	H	T	H	H	H
10	H	H	H	T	H	H	T
11	H	H	H	T	H	T	H
12	H	H	H	T	H	T	T
13	H	H	H	T	T	H	H
14	H	H	H	T	T	H	T
15	H	H	H	T	T	T	H
16	H	H	H	T	T	T	T
17	H	H	T	H	H	H	H
18	H	H	T	H	H	H	T
19	H	H	T	H	H	T	H
20	H	H	T	H	H	T	T
21	H	H	T	H	T	H	H
22	H	H	T	H	T	H	T
23	H	H	T	H	T	T	H
24	H	H	T	H	T	T	T
25	H	H	T	T	H	H	H
26	H	H	T	T	H	H	T

圖五

分析甲、乙、丙三個玩家的獲勝次數分別會有多少次

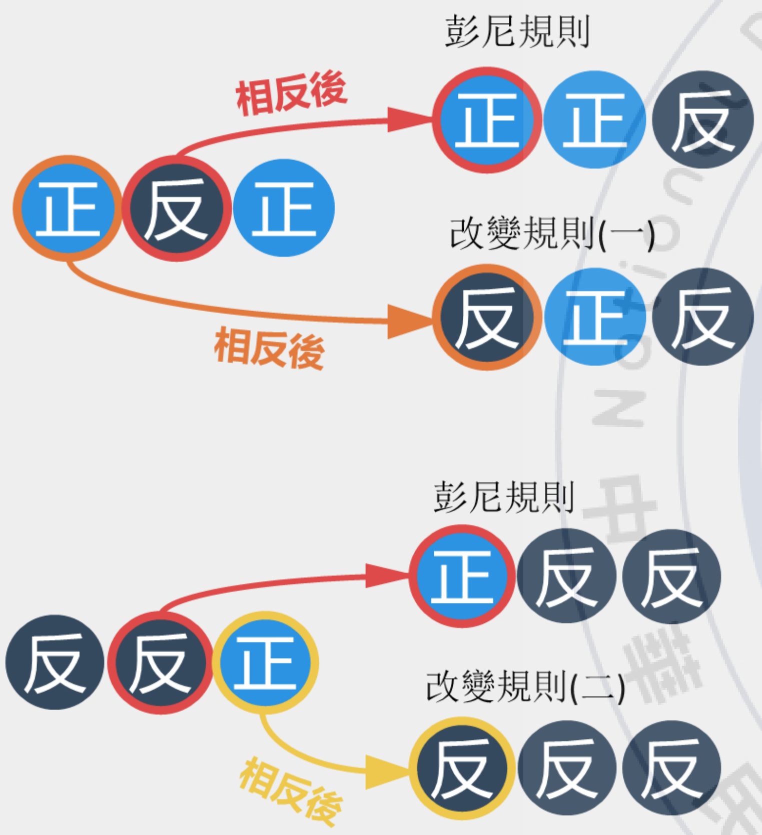


※註：為方便記錄， AAA:BAA記錄為AAA型，以下類推。

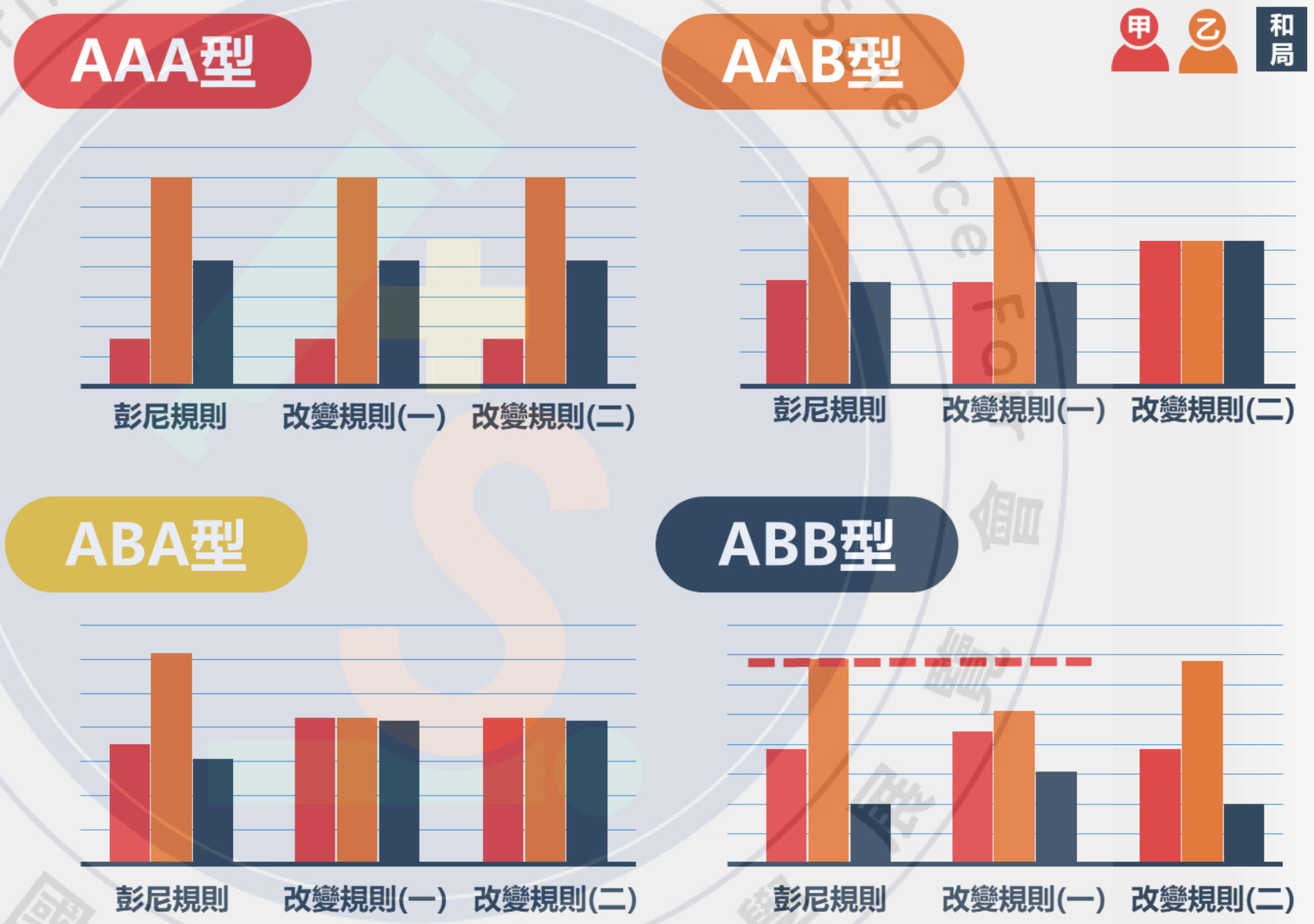
圖六

三個(或以上)玩家同時遊戲玩家們各別勝率

實驗四　改變彭尼規則分析甲、乙兩玩家勝率



圖七
改變彭尼規則
第一個字節及第三個字節



圖八
改變乙玩家的組合序列，並不會提高乙玩家的勝率

討論　網路上說彭尼遊戲的勝率高達 7 倍，這句話是真的嗎？

長度為3位元組的遊戲分析 [編輯]

長度為3位元組的遊戲中,第二名玩家可以通過以下

（H表示正面朝上，T表示反面朝上）

1號玩家	2號玩家	2號玩家勝算
HHH	THH	7：1
HHT	THH	3：1
HTH	HHT	2：1
HTT	HHT	2：1
THH	TTH	2：1
THT	TTH	2：1
TTH	HTT	3：1
TTT	HTT	7：1

簡單的來說，對於2號玩家可以記下如下的序列作

第二個字節相同。

編輯連結

圖九

維基百科對彭尼遊戲勝率的描述

應修正為

1號玩家	2號玩家	2號玩家勝算	2號玩家實際勝率	2號玩家不敗機率
HHH	THH	~~7：1~~	4.38：1	7：1
HHT	THH	~~3：1~~	2：1	3.13：1
HTH	HHT	~~2：1~~	1.77：1	2.66：1
HTT	HHT	~~2：1~~	1.77：1	2.28：1
THH	TTH	~~2：1~~	1.77：1	2.28：1
THT	TTH	~~2：1~~	1.77：1	2.66：1
TTH	HTT	~~3：1~~	2：1	3.13：1
TTT	HTT	~~7：1~~	4.38：1	7：1

圖十

乙玩家的勝率都沒有高過甲玩家7倍，

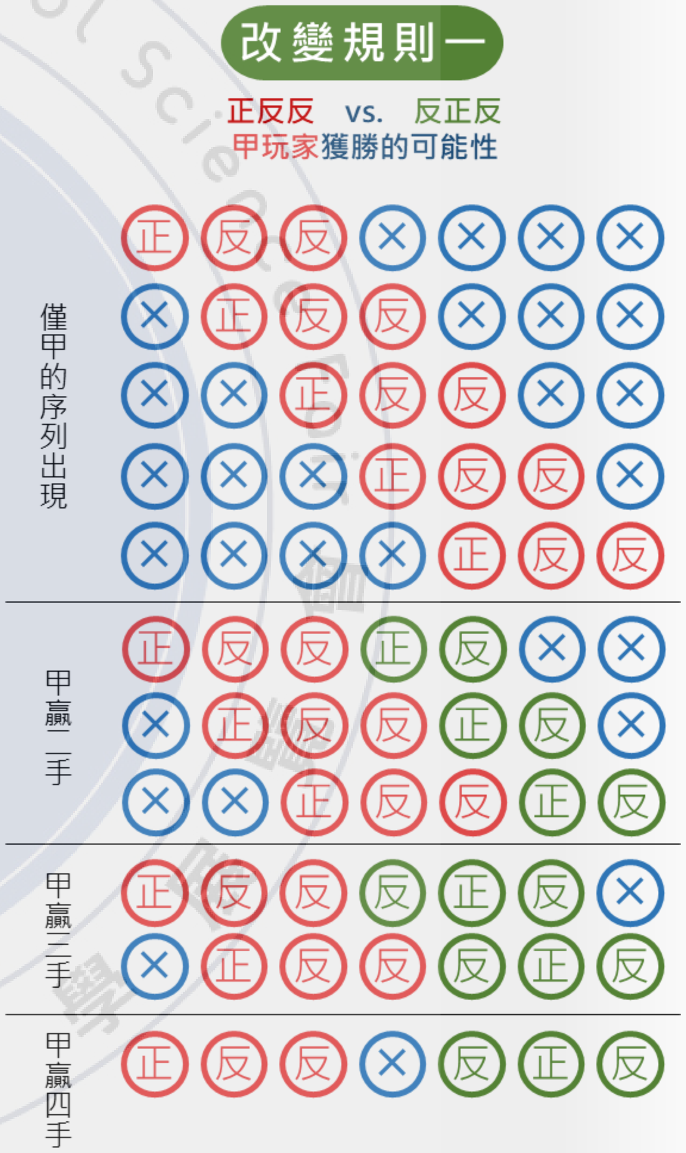
命題為「乙玩家不敗的機率」部分組合則恰好為7倍。

- 摘要
- 相關研究
- 研究動機
- 研究目的
- 研究設備
- 研究方法
- 研究結果
- 討論
- 結論
- 參考文獻

討論　改變乙玩家的組合序列，可以提高乙玩家的勝率嗎？

圖十一

彭尼規則，乙玩家會比甲玩家搶先一步獲得勝利。
改變規則二，
並不會提高乙玩家的勝率。



圖十二 改變規則一

甲的獲勝可能性比彭尼規則多，
並不會提高乙玩家的獲勝機率。

討論　是否能從對戰結果找到勝率的規律呢?

分析	AAB型							BAA型						
	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪	第五輪	第六輪	第七輪	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪	第五輪	第六輪	第七輪
第一輪分析	A	A	B	共有2^4的組合				B	A	A	共有2^4的組合			
第二輪分析	A	A	A	B	共有2^3的組合			A	B	A	A	共有2^3的組合		
	B	A	A	B	已刪除			B	B	A	A	共有2^3的組合		
第三輪分析	A	A	A	A	B	共有2^2的組合		A	A	B	A	A	已刪除	
	B	A	A	A	B	已刪除		B	A	B	A	A	共有2^2的組合	
								A	B	B	A	A	共有2^2的組合	
								B	B	B	A	A	共有2^2的組合	
第四輪分析	A	A	A	A	A	B	共有2^1的組合	A	B	A	B	A	A	共有2^1的組合
	B	A	A	A	A	B	已刪除	B	B	A	B	A	A	共有2^1的組合
								A	A	B	B	A	A	共有2^1的組合
								B	A	B	B	A	A	共有2^1的組合
								A	B	B	B	A	A	共有2^1的組合
								B	B	B	B	A	A	共有2^1的組合
第五輪分析	A	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	A	A
	B	A	A	A	A	A	B	B	A	B	A	B	A	A
								A	B	B	A	B	A	A
								B	B	B	A	B	A	A
								A	B	A	B	B	A	A
								B	B	A	B	B	A	A
								A	A	B	B	B	A	A
								B	A	B	B	B	A	A
								A	B	B	B	B	A	A
								B	B	B	B	B	A	A
黃底為已出現組合，故刪除不列入計算														
第一輪共有2^4的組合，第二輪會有2^3的組合，第三輪會有2^2的組合，第四輪會有2^1的組合，第五輪會有2^0的組合														

我們發現不管何種對戰組合中，基本的勝率都一定會有16/128，就是所有組合第一輪獲勝的次數。

而每一種序列組合的獲勝次數從第一輪到第五輪分析後，可用公式計算出來。

獲勝次數＝$(2^4\times1)+(2^3\times$出現次數$)+(2^2\times$出現次數$)+(2^1\times$出現次數$)+(2^0\times$出現次數$)$

結論

1 簡化遊戲

簡化遊戲中，以2字元的組合中，喊出不同序列確實存在勝率差異，其中TT：HT／HH：TH的乙玩家的勝率是皆為1:3。

2 彭尼勝率

在彭尼規則中，不管在哪一種對戰組合中，乙玩家均有較高的機率獲得勝利，根據不同組合，乙的勝率最少是甲的1.77倍；最多是甲玩家的4.38倍。

3 修正謠言

無論在何種對戰結果中，乙玩家的勝率都未高過甲玩家7倍，但如果以AAA型為例，把「乙玩家勝」和「和局」的次數合併計算，對上「甲玩家勝」的次數，則恰好為7倍，因此網路盛傳彭尼遊戲的對戰表中，應該將原本的乙玩家勝算修正成「乙玩家不敗機率」。

4 後手優勢

在三位玩家無論何種對戰組合，在三人的對決遊戲中，丙玩家確實更具有優勢，加入第四位玩家或第五位玩家的遊戲中，後手就未必更具優勢。

5 改變規則

使用規則一或規則二改變乙玩家的組合序列，並不會提高乙玩家的勝率，在ABB型中，使用規則一改變序列，乙玩家勝率較甲玩家高，但並沒有比原來彭尼遊戲規則的勝率高。

6 基本勝率

不管何種對戰組合當中，基本的勝率都一定會有$2^4/128=16/128$。

參考文獻

(一)中文部分

維基百科（無日期）。**彭尼的遊戲【部落格文字資料】**。取自https://reurl.cc/mGOpX9

臉譜出版 (2018年02月20日)。 **拋硬幣時一直出現正面，那麼下一次是反面的機率就會比較高？別傻了！—《是湊巧還是機率？》【部落格文字資料】**。取自https://pansci.asia/archives/134951

(二)英文部分

Game Theory, Mathematics (2016).**Sep 3 Penney 's Game**. Retrieved from http://www.alaricstephen.com/main-featured/2016/8/30/penneys-game

Martin Gardner(1988). **Time Travel and Other Mathematical Bewilderments**, W. H. Freeman.

是幸運還是機率

探討彭尼遊戲必勝秘訣

感謝您的聆聽