中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080411

圖形密碼—密鋪多邊形完全漫遊之研究

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學(附設國小)

作者：	指導老師：
小四 吳佳瑾	歐志昌
小四 鄧岩滂	林曉君

關鍵詞：完全漫遊、幾何拼板、形變轉換

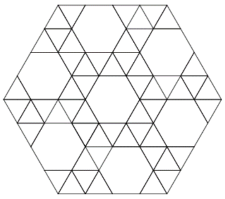
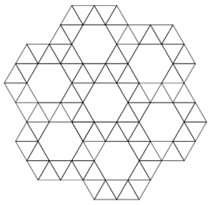
摘要

從建築燈光秀發想路徑問題，探討「密鋪多邊形進行完全漫遊路徑是否存在?是否可運用模組化的方法找到完全漫遊路徑?」發現不同密鋪多邊形可透過基本幾何拼板分割，當中心或初始圖形是可漫遊且可對外連通，搭配同條件的基本幾何拼板組合，則該密鋪多邊形路徑可完全漫遊；且可歸類同類路徑中不同幾何拼板之等價組合；另外，密鋪多邊形中每個單位圖形若維持原來的「圖形特徵—路徑可行進方向數」，則「密鋪多邊形完全漫遊路徑可以進行任意形變轉換」。在漫遊過程中得到不同密鋪多邊形的基本幾何拼板種類、路徑分類及路徑方法數公式。

最後應用研究結果，有效控制高空智慧清潔蜘蛛人，並設計一款全新完全漫遊路徑邏輯拼圖遊戲。

壹、前言


美麗的流行音樂中心是很夯景點，有次校外教學到高雄，參觀流行音樂中心，老師說這棟建築是利用數學幾何的美，由正三角形、正六邊形密鋪而成。每每至夜晚，美麗的燈光秀一閃一閃跳動時，就好像在顯示燈光走過的路徑。

「如果是像這樣由正三角形和正六邊形組成的**密鋪多邊形**(如右圖)**可以每個單位圖形都只經過一次，而路徑不重複嗎?」**嘗試了幾次，發現這樣路徑**存在性**的問題很難，**到底怎樣做才能有系統地找到路徑?**更引發我們的好奇心。查閱文獻後，發現雖然歷年科展探討路徑的作品很多，如第 53 屆全國科展「一步一腳印-探討方格棋盤中各種路徑問題」、第 53 屆「一筆畫圖形之最長路徑探討」……等；也有探討空間路徑的作品，如第 52 屆「絲絲入扣－從縫扣子策略論空間中的一筆畫路徑」，但**走過密鋪多邊形每個單位圖形的探討卻沒有**，而且，我們的研究也**完全不同於一般所提的一筆畫路徑**，因此，嘗試使用 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形實驗與觀察，確定研究方向，展開了完全漫遊路徑的探索之旅。

根據以上，**本研究目的**為：

一、觀察密鋪多邊形的連接特徵，進行圖形組合分類。

二、找出不同密鋪多邊形進行完全漫游路徑之存在性及共通關聯性。

三、找出不同密鋪多邊形分割成的基本幾何拼板組合。

四、分析不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性。

五、找出可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑分類及路徑方法數公式。

六、找出密鋪多邊形可完全漫遊路徑與幾何拼板之關係。

七、能將密鋪多邊形可完全漫遊路徑進行圖形之形變轉換。

八、設計密鋪多邊形完全漫遊路徑多款遊戲。

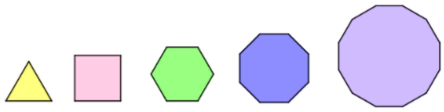
貳、研究設備、解釋名詞與研究架構

一、研究設備

電腦、文書處理軟體（Word）、幾何繪圖軟體（GeoGebra）

二、解釋名詞

1.單位圖形：在本研究中可進行密鋪且邊長單位等長的正多邊形，有正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形。



2.密鋪多邊形：密鋪是指利用一些較小的表面填滿一個較大的表面而不留任何空隙。在本研究中，密鋪多邊形是利用 **2** 種不同正多邊形**規則**地進行組合，可以不斷擴張延伸，最後形成多邊形。

3.完全漫遊路徑：指在密鋪多邊形中 **1** 個單位圖形為起點，將密鋪多邊形中每 **1** 個單位圖形都經過 1 次(只能經過邊，不可經過頂點)，均不重複的路徑稱為「完全漫遊路徑」。

如圖 2-1 中紅色路徑為完全漫遊路徑；圖 2-2 中灰色區塊無法由紅色路徑經過，為無法完全漫遊路徑。

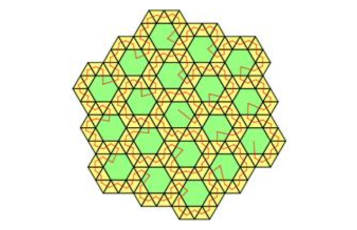


圖 2-1 完全漫遊示例圖

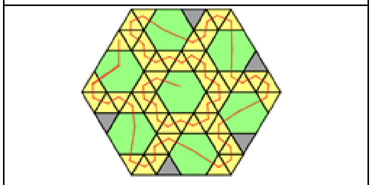


圖 2-2 無法完全漫遊示例圖

★本作品與一筆畫路徑之差異：「一筆畫」是給一個圖，圖形上的每一條線連續的走過一次不重複。可以把本研究完全漫遊路徑的單位圖形視為一筆畫圖形上的一個點，一筆畫是圖形上的線連續地走過一次不重複；完全漫遊路徑是點連續地一次走過不重複；此時一筆畫經過的點是可以重複的，但完全漫遊路徑不管是走過的點或線都是不會重複。

4.基本幾何拼板：將密鋪多邊形進行切割，須由 **2** 種不同單位圖形組成的連續圖形(即單位圖形間必須邊對邊的連接)，稱為基本幾何拼板；每種密鋪多邊形除中心圖形或初始圖形的組合圖形之外，最多由 **2** 種不同的基本幾何拼板組合而成。(在討論二中有說明最多 **2** 種之原因)如圖 2-3 中橘色及綠色部分是由正▲及正⬢組成的三&六基本幾何拼板的其中兩種組合，但橘色拼板是連續圖形(滿足基本幾何拼板的條件)、綠色拼板則是被切割分開的，須被排除。

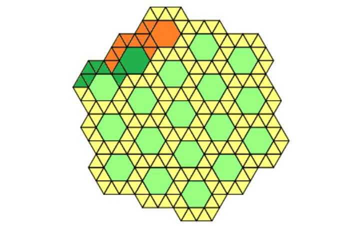
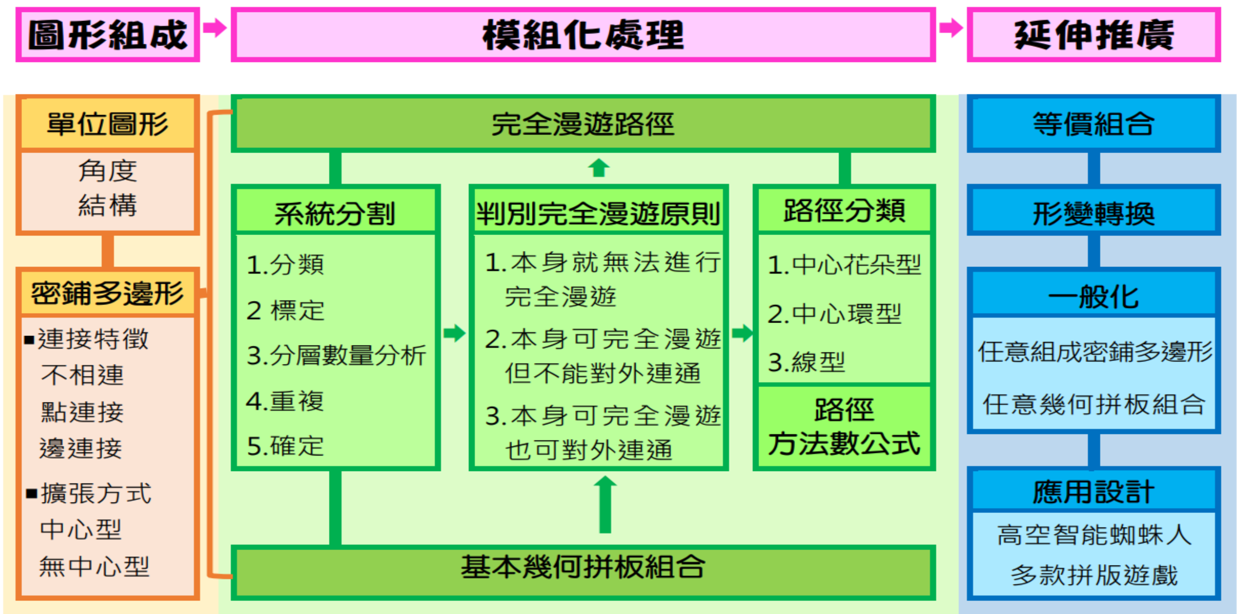


圖 2-3 基本幾何拼板示意圖

三、研究架構



參、研究過程與結果

研究一、依密鋪多邊形的連接特徵，進行圖形組合分類

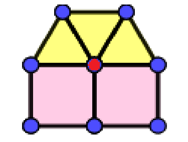
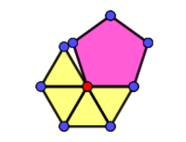
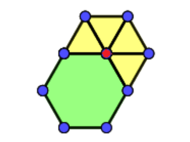
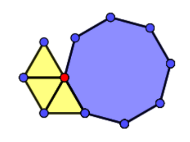
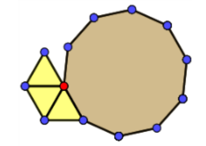
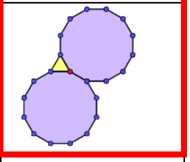
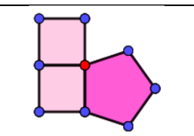
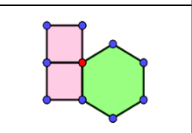
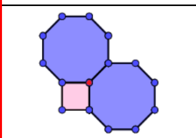
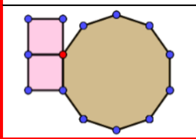
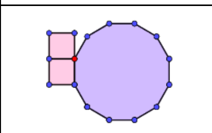
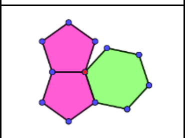
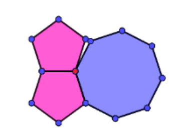
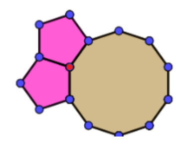
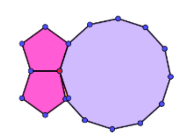
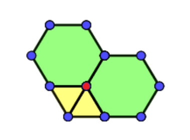
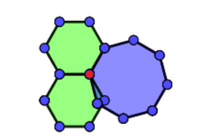
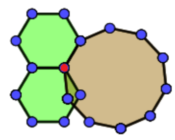
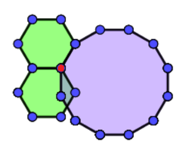
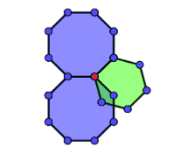
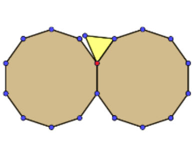
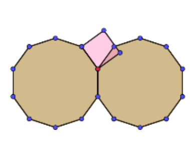
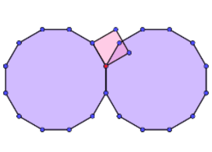
(一)研究過程

1.確定單位圖形之種類：須滿足圖形頂點內角和 360^{O}，將 2 種不同正多邊形相互搭配的情況—可形成密鋪多邊形需要的正多邊形種類、對應所需的個數整理。

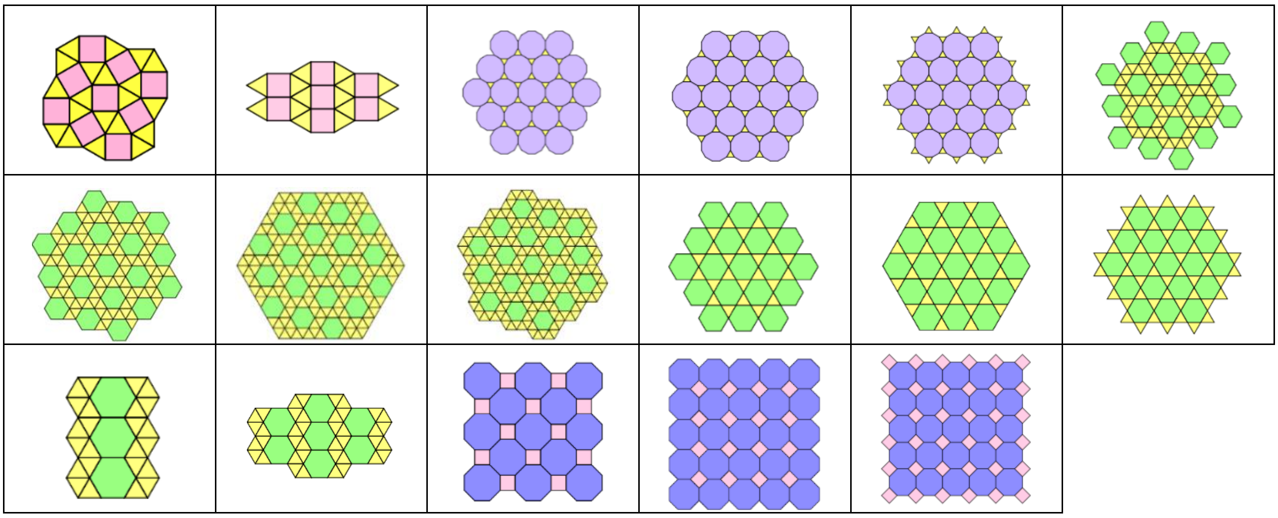
2.各種密鋪圖形分類：找到可形成密鋪多邊形及其單位圖形組合幾何特性，依密鋪多邊形單位圖形的連接特徵，進行圖形分類。

(二)研究結果

1.可密鋪的有 6 種： 將密鋪 360^{O} 兩種不同正多邊形相互搭配的情況整理如下表，紅色點是中心，考慮圖形內角是整數值，組合代碼(a, m；b, n)代表由 a 個 m 邊形 b 個 n 邊形圍著紅色中心點組成，其中 m<n，例如(3,3；2,4)代表此圖由 3 個 3 邊形 2 個 4 邊形組成。

組合	(3,3；2,4)	(4,3；1,5)	(4,3；1,6)	(3,3；1,8)	(3,3；1,10)	(3,3；1,12)
圖形						
組合	(2,4；1,5)	(2,4；1,6)	(1,4；2,8)	(2,4；1,10)	(2,4；1,12)	(2,5；1,6)
圖形						
組合	(2,5；1,8)	(2,5；1,10)	(2,5；1,12)	(2,3；2,6)	(2,6；1,8)	(2,6；1,10)
圖形						
組合	(2,6；1,12)	(1,6；2,8)	(1,3；2,10)	(1,4；2,10)	(1,4；2,12)	…
圖形						…

2.得到可密鋪多邊形： 根據定義搭配研究結果 1，透過計算加以驗證得到下列密鋪多邊形。



(三)研究分析與發現

1.只有正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形、正十邊形、正十二邊形等 7 種正多邊形，可用 2 種不同正多邊形相互搭配形成滿足頂點密鋪成 360^{O} 的條件。

2.頂點密鋪需要的正多邊形種類、對應所需的個數組合如下:

❶3 個正三角形(內角 60^{O})+ 2 個正方形(內角 90^{O})🡐$3\times60^{O}+2\times90^{O}=360^{O}$

❷4 個正三角形(內角 60^{O}) + 1 個正六邊形(內角 120^{O}) 🡐$4\times60^{O}+1\times120^{O}=360^{O}$

❸2 個正三角形(內角 60^{O}) + 2 個正六邊形(內角 120^{O}) 🡐$2\times60^{O}+2\times120^{O}=360^{O}$

❹1 個正方形(內角 90^{O}) + 2 個正八邊形(內角 135^{O}) 🡐$1\times90^{O}+2\times135^{O}=360^{O}$

❺1 個正三角形(內角 60^{O}) + 2 個正十二邊形(內角 150^{O}) 🡐$1\times60^{O}+2\times150^{O}=360^{O}$

❻2 個正五邊形(內角 108^{O}) + 1 個正十邊形(內角 144^{O}) 🡐$2\times108^{O}+1\times144^{O}=360^{O}$

3.密鋪多邊形由單位圖形層層往外延伸擴張時，不管在哪一個頂點位置單位圖形組合的幾何特性都必須滿足密鋪 360^{O} 的條件。

4.只有正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形等 5 種正多邊形可由 2 種不同正多邊形相互搭配形成密鋪多邊形。可組成密鋪多邊形的單位圖形組合如下:

❶正三角形+正方形，命之為三&四密鋪多邊形

❷正三角形+正六邊形，命之為三&六密鋪多邊形

❸正方形+正八邊形，命之為四&八密鋪多邊形

❹正三角形+正十二邊形，命之為三&十二密鋪多邊形

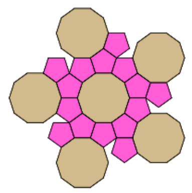


圖 3-1-1 五&十邊形無法組成密鋪多邊形

分析 1：因為邊數較大正多邊形內角度數較大，因此在進行 2 種不同單位圖形搭配組合規則往外擴張時，以較大正多邊形為主，較小正多邊形則是填補大正多邊形之間的空隙。

分析 2：雖然 2 個正五邊形跟 1 個正十邊形頂點可密鋪成 360^{O}，但卻無法滿足繼續規則地往外密鋪形成多邊形，圖形如右上。

5.觀察密鋪多邊形中最大單位圖形的連接特徵，可將密鋪多邊形分類為 3 種：❶不相連(Disconnected)，如圖 3-1-2；❷點連接(Vertex to Vertex)，如圖 3-1-3；❸邊連接(Edge to Edge) ，如圖 3-1-4。

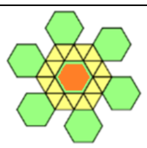
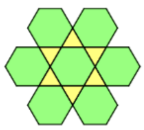
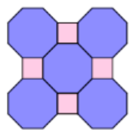
		

圖 3-1-2 不相連示例圖(●和●不相連)	圖 3-1-3 點連接示例圖(●和●點連接)	圖 3-1-4 邊連接示例圖(●和●邊連接)

6.依圖形擴張的特性—密鋪「由中心向外擴張」、「初始平移上下或左右向外擴張」，可將密鋪多邊形分為「中心型」跟「無中心型」。「中心型」密鋪多邊形最開始出現的組合圖形稱之為「中心圖形」;「無中心型」密鋪多邊形最開始出現的組合圖形稱之為「初始圖形」。
如圖 3-1-5、3-1-6 分別為中心型(三&十二密鋪多邊形)及無中心型(三&四密鋪多邊形)

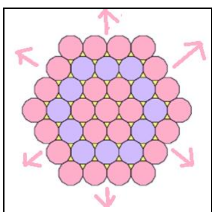
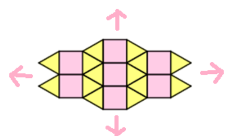
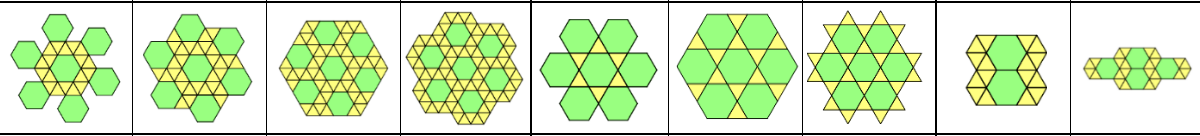
	

圖 3-1-5 中心型 (三&十二密鋪多邊形)	圖 3-1-6 無中心型 (三&四密鋪多邊形)

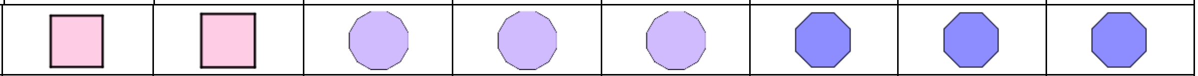
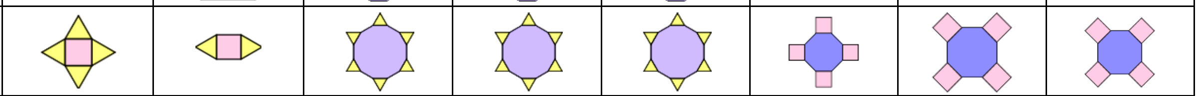
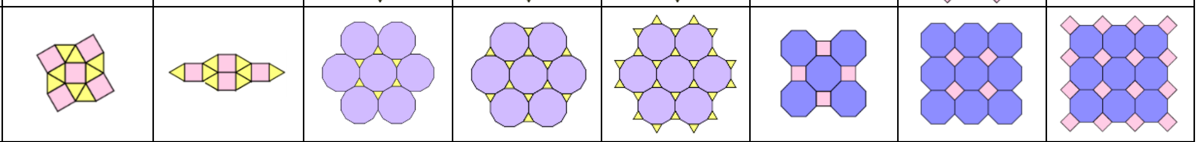
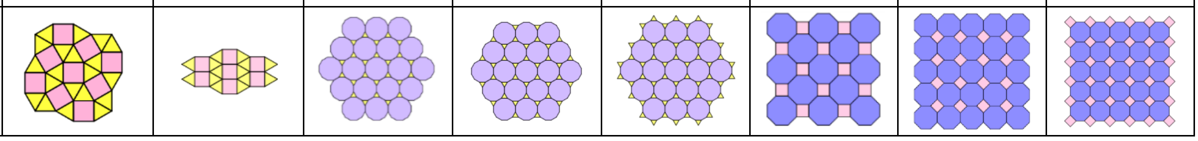
7.依 3 種連接特徵加上最外層最大單位圖形暴露邊數(即與小單位不相連的邊數)進行圖形分類編碼，以三&六密鋪多邊形 1 層圖形為例，如圖 3-1-7、8、9、10 為不相連(Disconnect)暴露邊數最大值分別為 5、3、1、0，編碼為分別 D5、D3、D1、D0；圖 3-1-11、12、13 為點連接型(Vertex to Vertex)，暴露邊數最大值分別為 4、2、0，編碼為分別 V4、V2、V0；圖 3-1-14、15 為邊連接型(Edge to Edge)。

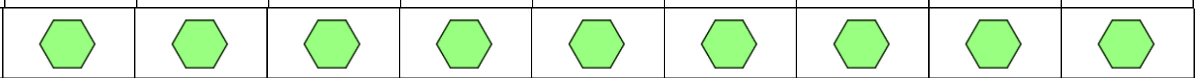
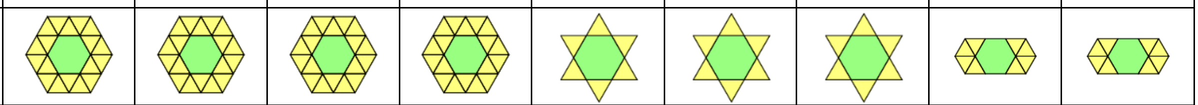
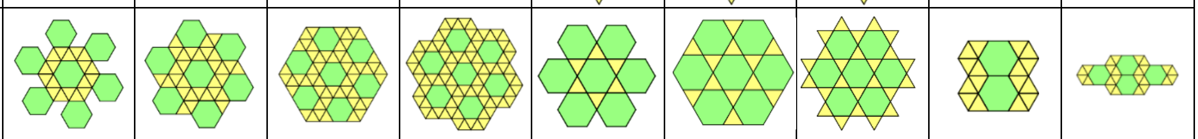
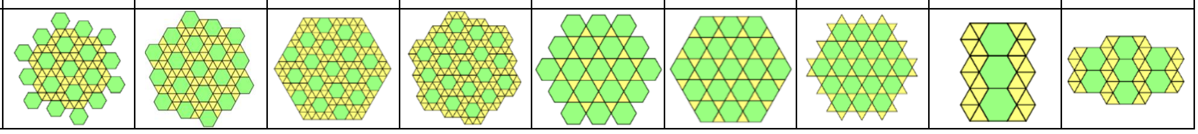
邊連接若為無中心型又可分成單向擴張(uidirectional expansion)及雙向擴張(bidirectional expansion)，如圖 3-1-14 僅上下擴張屬於單向擴張(僅上下單一方向)、圖 3-1-15 屬於雙向擴張(上下+左右兩個方向)；邊連接若為中心型則仍依暴露邊數進行編碼。

類型	不相連(Disconnected)				點連接(Vertex to Vertex)			邊連接(Edge to Edge)	
編碼	D5	D3	D1	D0	V4	V2	V0	E1	E0
1層圖形									
	圖 3-1-7	圖 3-1-8	圖 3-1-9	圖 3-1-10	圖 3-1-11	圖 3-1-12	圖 3-1-13	圖 3-1-14	圖 3-1-15

★結論：

綜合上述密鋪圖形的分類搭配 5.6.及最外層的圖形分布特徵 7，將所有分類結果整理如下(以各類圖形 2 層為例，下面四&八密鋪多邊形邊連接有同樣的邊連接類型加上I、II做區隔)

圖形	三&四密鋪多邊形		三&十二密鋪多邊形			四&八密鋪多邊形		
類型	中心型	無中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型
連接特徵	點連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接
類別	V1	E2	E7	E5	E3	E5I	E5II	E2
擴張延伸方式示意圖 中心								
0層								
1層								
2層								

圖形	三&六密鋪多邊形								
類型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	無中心型	無中心型
連接特徵	不相連	不相連	不相連	不相連	點連接	點連接	點連接	邊連接	邊連接
類別	D5	D3	D1	D0	V4	V2	V0	E1	E2
擴張延伸方式示意圖 中心									
0層									
1層									
2層									

研究二、找出可完全漫遊之密鋪多邊形之特徵

(一)研究過程

1.找出不同密鋪多邊形進行完全漫游路徑之存在性。

2.找出不同密鋪多邊形進行完全漫游路徑之共通關聯性。

(二)研究結果

1.發現密鋪多邊形進行完全漫游路徑有些可行，有些不可行。

作法:先利用繪圖軟體將上述圖形繪製並印出，嘗試「密鋪多邊形進行完全漫遊路徑(如圖 3-2-1、圖 3-2-2)

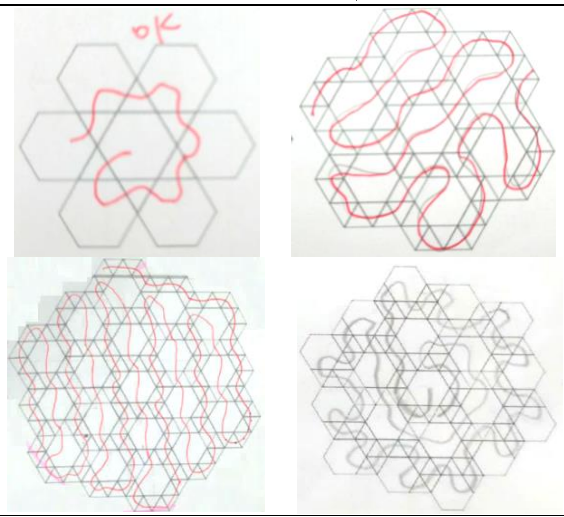


圖 3-2-1 可行路徑手稿

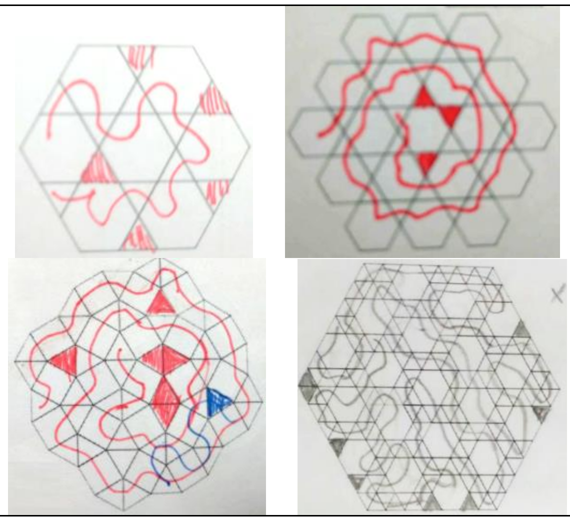


圖 3-2-2 不可行路徑手稿

2.發現共通關聯性是圖形組合

經過嘗試，找到一種特殊的共同狀況，不管是「可以完全漫遊路徑」還是「不能完全漫遊的密鋪多邊形」似乎都和「圖形組合」有關聯，如圖 3-2-3、圖 3-2-4 示例中粉紅色與藍色基本圖形組合。

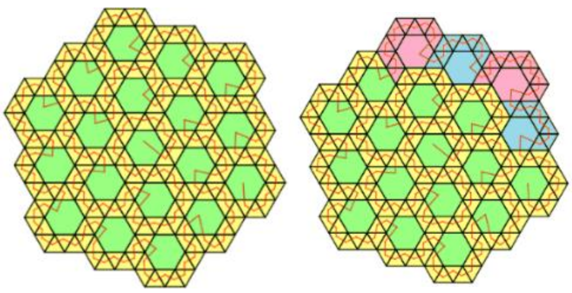


圖 3-2-3 可行路徑之三&六密鋪多邊形示例

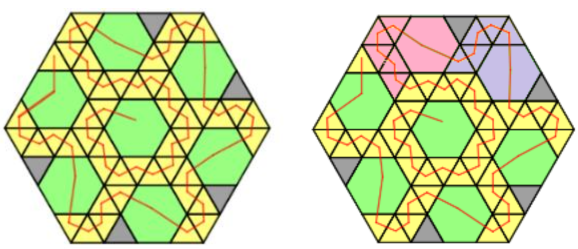


圖 3-2-4 不可行路徑之三&六密鋪多邊形示例

★結論:

1.不同密鋪多邊形有的完全漫游路徑存在，有的不存在。

2.不管是「可以完全漫遊路徑」或「不能完全漫遊路徑」的密鋪多邊形之關鍵為「圖形的組合」，決定將密鋪多邊形進行分割成「基本幾何拼板」，再進行完全漫遊路徑之討論。

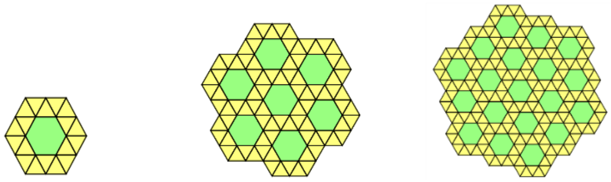
研究三、找出可分割之基本幾何拼板組合

(一)從兩個不同類型實例說明分割步驟

1.以三&六密鋪多邊形 D0 類基本幾何拼板組合(中心型)為例

步驟❶ (分類)：觀察三&六密鋪多邊形 D0 類圖形延伸放大的方式，將其分類。

得到三&六密鋪多邊形 D0 類是中心型密鋪多邊形，層層規則地延伸方式如下



第 0 層(中心圖形)　1 層　2 層…

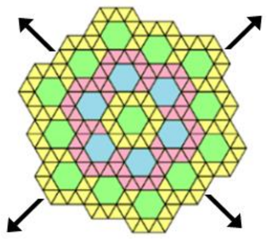


圖 3-3-1 層層規則延伸示意圖

步驟❷ (標定)：尋找中心型密鋪多邊形的中心圖形

得到其中心圖形如左上，為第 0 層(中心圖形)

步驟❸ (分層數量分析)：將除中心圖形外的第 1 層密鋪單位圖形(圖 3-3-1 中粉正▲+藍正⬢部份)進行分割

步驟❸-1 排除中心圖形後，再算出第 1 層密鋪單位圖形的總數量。

得到第 1 層密鋪單位圖形的數量為：正⬢有 6 個，正▲共有 66 個。

步驟❸-2 分析並計算可能形成基本幾何拼板的個數。

得到第 1 層密鋪圖形每塊基本幾何拼板有 1 個正六邊形、11 個正▲。

作法：
- ➢第 1 層密鋪圖形的正⬢有 6 個，正▲共有 66 個，
- ➢根據定義基本幾何拼板由 2 種單位圖形組合而成，每個基本幾何拼板應該都要有正⬢，故滿足本研究之幾何拼板條件，正⬢應有 1、2、3、6 個(6 的因數為 1、2、3、6)，而第 1 層密鋪單位圖形可分割成 6、3、2、1 塊，
- ➢排除 3、2、1 塊的情況(這些在下 1 層基本幾何拼板條件不符合)，加上每塊幾何拼板組成數量應該要一樣，
- ➢第 1 層密鋪圖形每塊基本幾何拼板會有 66÷6=11 個正▲

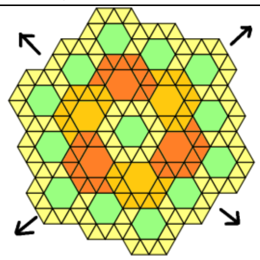


圖 3-3-2 第 1 層拼板分割圖

步驟❸-3 針對第 k 層圖形滿足幾何拼板計算的結果做系統分割。

作法：先找到 1 組滿足「1 個正⬢、11 個正▲」的可能組合連續圖形，如圖 3-3-2 第 1 層密鋪圖形為橘色 6 個幾何拼板組合(深淺色只是為了方便辨識，圖形組合都一樣)。

步驟❸-3-1 基本幾何拼板的正⬢位置不變，只要依序改變正▲位置即可。
- ➢先依序移動原拼板(圖 3-3-3)的右下第 1 塊正△(編號 a)，
- ➢移動編號 a 的單位圖形有 1 和 2 兩個位置選擇(圖 3-3-4)，
- ➢形成兩種新拼板(圖 3-3-5)

再移動右下第 2 塊正△(圖 3-3-5、圖 3-3-6)，以此類推…

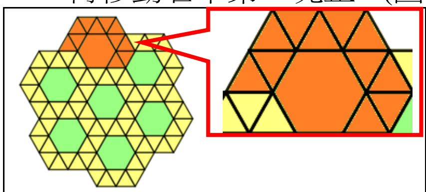


圖 3-3-3 原拼板

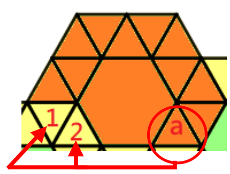


圖 3-3-4 移動 a 單位圖形有 1 和 2 兩個選擇

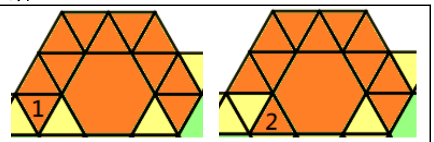


圖 3-3-5 形成兩種新拼板

步驟❸-3-1-1 再看看第 1 層密鋪圖形是否能單純由產生的幾何拼板組合，若可以(如圖 3-3-6)則繼續步驟❹，往下重複步驟尋找第 2 層密鋪圖形；

步驟❸-3-1-2 若不行，則看看第 1 層密鋪圖形是否還有另一個新幾何拼板(如圖 3-3-7，由圖中 2 種橘色、綠色幾何拼板組合)。

步驟❸-3-1-3 若經檢查，新幾何拼板還是無法組合第 1 層密鋪圖形，則此新幾何拼板非本研究需要之幾何拼板，直接剔除(如圖 3-3-8、圖 3-3-9)。

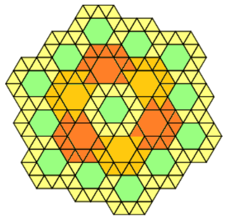
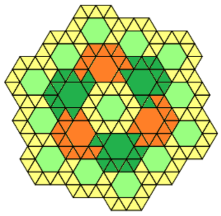
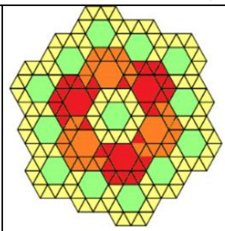
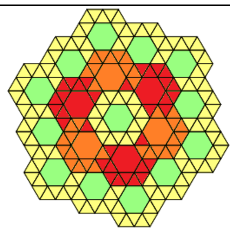
			

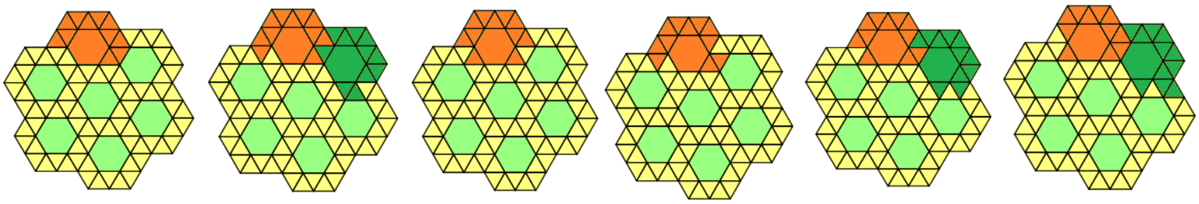
圖 3-3-6➔1 種幾何拼板	圖 3-3-7➔2 種幾何拼板	圖 3-3-8➔剔除	圖 3-3-9➔剔除

以此類推，得到第 1 層密鋪圖形的移動一塊時所有幾何拼板。

步驟❸-3-2 依序移動 2、3、4、……塊正▲，重複上述步驟❸-3-1-1、步驟❸-3-1-2、步驟❸-3-1-3，……以此類推，直到無法再移動為止。

步驟❸-4 驗證可能基本幾何拼板，排除不連續或不滿足基本幾何拼板的情況。

得到三&六密鋪多邊形 D0 類第 1 層幾何拼板所有情況共有 37 種(另見手稿)，僅舉部分例子如下：



…

步驟❹ (重複): 重複步驟❸動作開始第 2 層密鋪圖形(圖 3-3-10 粉正▲+藍正⬣)之切割。

重複步驟❸-1 計算排除中心圖形及第 1 層密鋪圖形、算出第 2 層密鋪單位圖形總數量。

得到第 2 層密鋪單位圖形中「正⬣有 12 個，正▲共有 114=66+48 個」

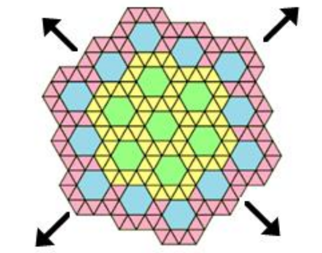


圖 3-3-10 第 1 層拼板分割圖

重複步驟❸-2 分析並計算可能形成基本幾何拼板的個數。

得到第 2 層密鋪圖形除原第 1 層的基本幾何拼板外，其他每塊幾何拼板有 1 個正⬣、8 個正▲。

作法：➢密鋪圖形可分成「頂點類基本幾何拼板(圖 3-3-11 深淺橘色拼板，用藍色框起來)」及「頂點與頂點間基本幾何拼板(圖 3-3-11 綠色系列拼板)」，後者在密鋪圖形第 2 層後會形成新的幾何拼板。

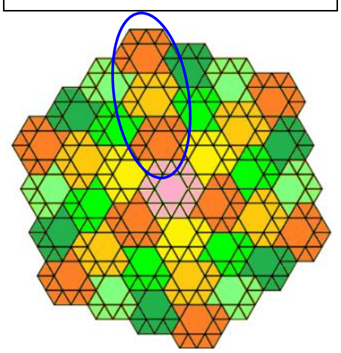


圖 3-3-11

➢第 1 層密鋪圖形幾何拼板都是 1 個正⬣+11 個正▲。第 2 層除了頂點類拼板共有 6 個正⬣外，頂點與頂點間還共有 6 個正⬣，這些正⬣卻是穿插在頂點類拼板之間，故若滿足本研究之基本幾何拼板條件，頂點與頂點間基本幾何拼板應只有 1 個正⬣。

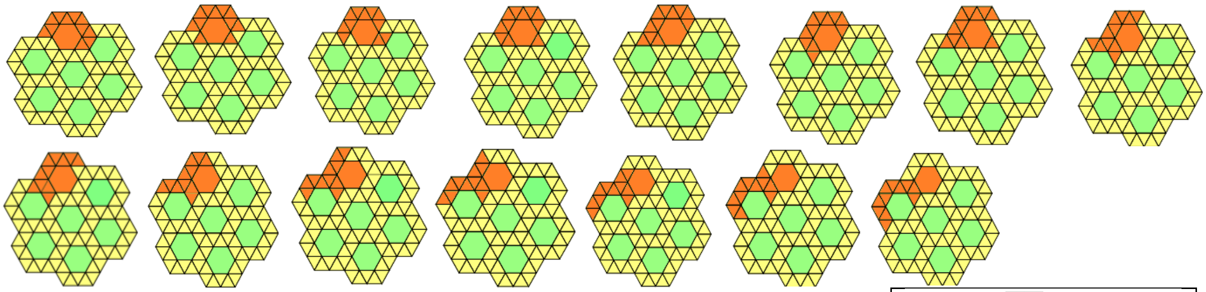
➢第 3 層頂點類拼板間正⬣有 12 個，穿插在頂點類拼板間正⬣應有 1、2 個等兩種情況， 但搭配原第 2 層的情況，正⬣應只有 1 個(圖 3-3-11 綠色系列拼板)，根據基本幾何拼板定義須由 2 種單位圖形組成，故每個基本幾何拼板應該都要有正⬣，而每個基本幾何拼板的單位圖形數量相同。

➢算出第 2 層基本幾何拼板▲有 48÷6=8 個。

重複步驟❸-3 針對第 k 層圖形滿足基本幾何拼板計算的結果去做系統分割。

發現層層分析拼板組合時，只需要討論第 1 層出現 1 種拼板的情況。

排除三&六密鋪多邊形 D0 類所有第 1 層密鋪圖形出現 2 種幾何拼板的圖形，得到可能可行的幾何拼板共 15 種，如下：



理由： 如果第 1 層密鋪圖形就有 2 種拼板，且 2 種拼板都是 1 個正⬣+11 個正▲，但上面步驟卻算出除了原來第 1 層幾何拼板之外的組合(1 個正⬣+8 個正▲)，顯然第 2 層密鋪圖形延伸時會出現和第 1 層不同的延伸規律，此時用第 1 層的那 2 種拼板去拼形成第 3 種拼板(如圖 3-3-12 深淺橘色、綠色為原來第 1 層幾何拼板，紅色是第 2 層出現的新幾何拼板)、或是不連續的單位圖形，故只需要討論第 2 層出現 1 種拼板的情況。

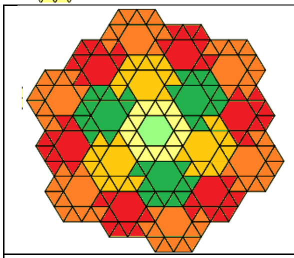
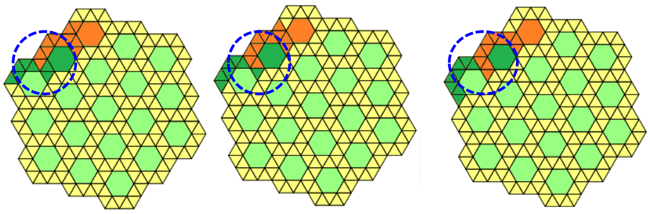


圖 3-3-12
橘綠紅 3 種幾何拼板

重複步驟❸-4 驗證可能基本幾何拼板，排除不連續或不滿足基本幾何拼板的情況。

作法： 在第 2 層密鋪圖形中，依序填入上面結果「第 1 層密鋪圖形獲得的幾何拼板」(15 種)，再去找滿足「1 個正⬣、8 個正▲」的可能組合連續圖形，排除出現不連續的拼接圖形(如下圖)。



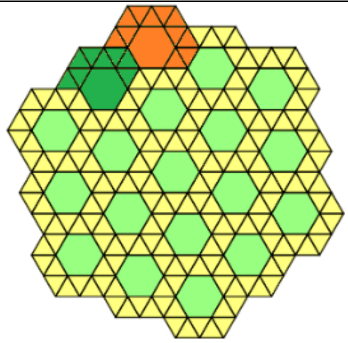
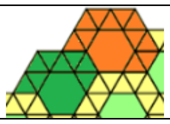
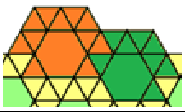
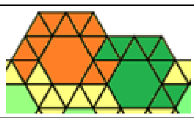
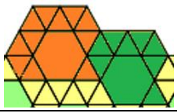
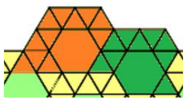
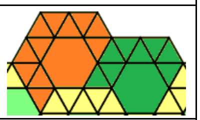
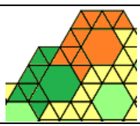
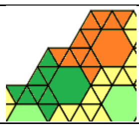
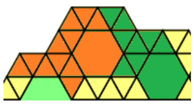
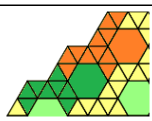
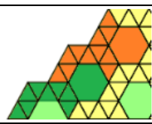


圖 3-3-13
D0 類第 1 種拼板(D0-1)

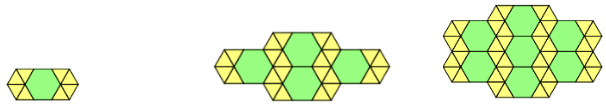
步驟❺(確定)： 得到所有基本幾何拼板，並確定滿足定義及排除不連續的狀況。

得到能完全密鋪「三&六密鋪多邊形 D0 類」基本幾何拼板共 12 種組合。圖 3-3-13 為 D0 類第 1 種拼板(D0-1)在三&六密鋪多邊形 D0 類中示意圖，下面為所有拼板組合局部圖。

組合	D0-1	D0-2	D0-3	D0-4	D0-5	D0-6
圖形						
組合	D0-7	D0-8	D0-9	D0-10	D0-11	D0-12
圖形						

2.以三&六密鋪多邊形 E2 類基本幾何拼板組合為例

步驟❶ (分類)：觀察三&六密鋪多邊形 E2 類圖形延伸放大的方式，將其分類。
得到三&六密鋪多邊形 E2 類是中心型密鋪多邊形，層層規則地延伸方式如下



第 0 層(初始圖形)　　1 層　　　　2 層…

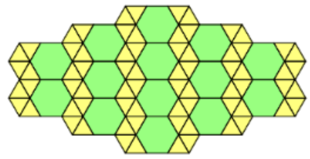
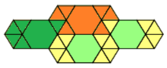
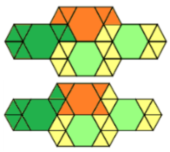
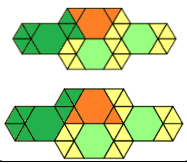
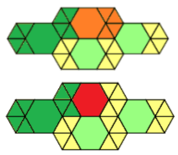


圖 3-3-14 層層規則延伸示意圖

步驟❷ (標定)：尋找並標定無中心型密鋪多邊形的初始圖形
得到其中心圖形如左上，為第 0 層(初始圖形)

步驟❸(分層數量分析)：將除了初始圖形外的第 1 層密鋪圖形進行分割。
可能基本幾何拼板為橘及綠色組合圖形有 7 種(1、2、3-1、3-2、4-1、4-2、5-1)。

連續增加塊數	最先找到	綠色多 1 小塊	綠色多 2 小塊	綠色多 3 小塊	綠色多 4 小塊
第幾種 (對應下圖)	1	2	3-1 3-2	4-1 4-2	5-1 5-2
圖形					 (O) (×)

作法：根據基本幾何拼板的定義，要由 2 種單位圖形組成，
觀察第 1 層密鋪圖形可以發現，基本幾何拼板一定要如圖 3-3-15 這樣的基本組合(綠色)再做擴張，否則會形成圖形不連續的狀況(圖 3-3-16 紅色不連續處舉例)。

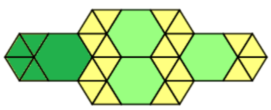


圖 3-3-15 基本幾何拼板的基本組合(綠色)

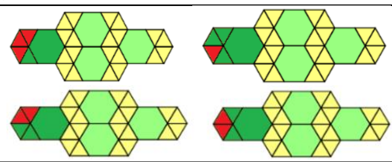


圖 3-3-16 圖形不連續的狀況(紅色不連續處舉例)

從基本組合系統地連續增加 1、2、3……塊做擴張，並逐一找出配合的其他基本幾何拼板的基本組合 1(綠色+橘色)，如上所得。

步驟❹ (重複)：將除初始圖形外的第 2 層密鋪圖形進行分割。

作法：∵第 2 層密鋪圖形延伸的方式(圖 3-3-18 藍色)與第 1 層(粉紅色)一致，如圖 3-3-17，其可能基本幾何拼板為上面第 1 層橘色及綠色的組合圖形共 7 種。

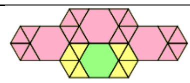


圖 3-3-17

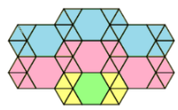


圖 3-3-18

持續檢查確認發現後續延伸的圖形，找出兩種延伸圖形

1.單向擴張：這類為三&六密鋪多邊形 E2 類基本幾何拼板組合共 7 種。

2.雙向擴張：如圖 3-3-14 這類三&六密鋪多邊形 E2 類基本幾何拼板組合只有 2 種滿足條件(圖 3-3-19)。其餘則會出現剩餘圖形(圖 3-3-20 中紅色拼板)，故剔除。

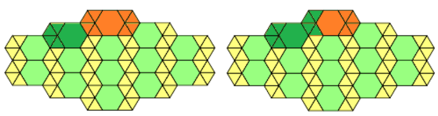


圖 3-3-19 滿足條件

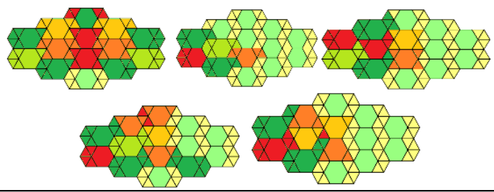
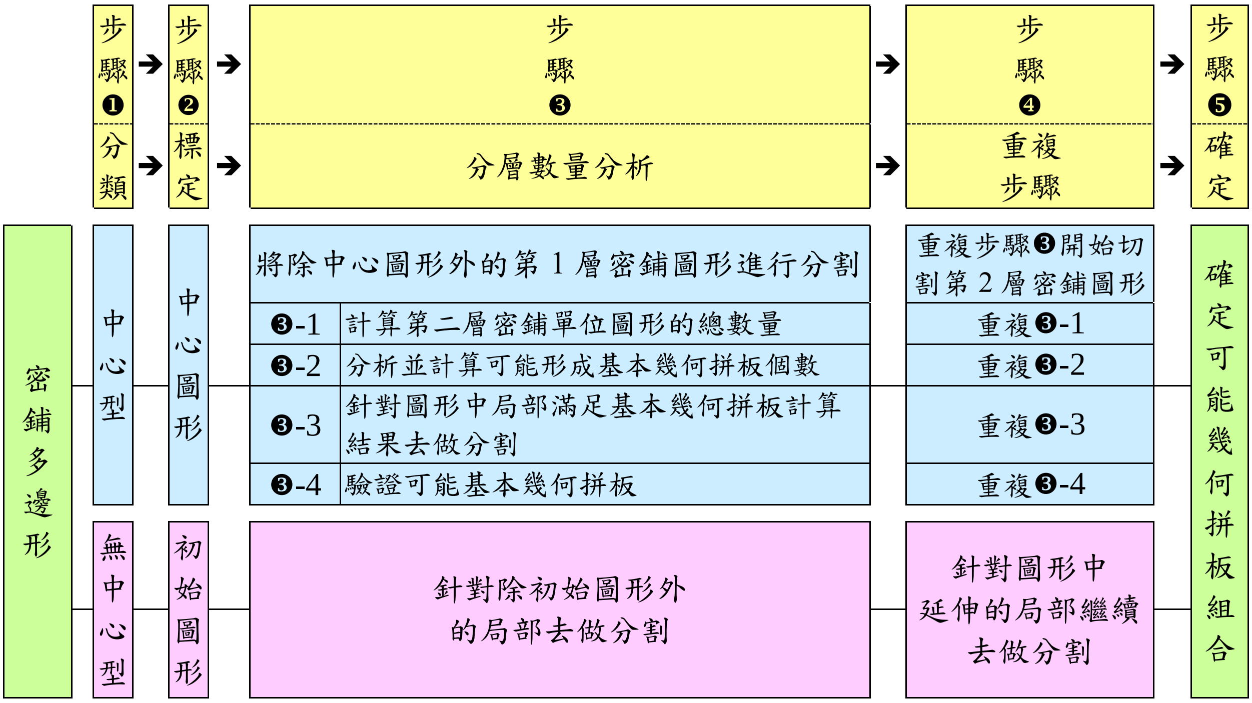


圖 3-3-20 出現紅色不連續圖形情況

步驟❺ (確定)：要同時滿足單向擴張及雙向擴張的三&六密鋪多邊形 E2 類基本幾何拼板組合有 2 種(圖 3-3-19)。

■尋找密鋪多邊形基本幾何拼板系統分割步驟

綜合上面兩個不同類型實例得到基本幾何拼板系統分割步驟



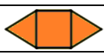
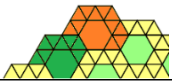
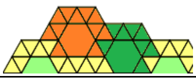
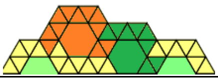
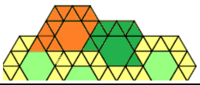
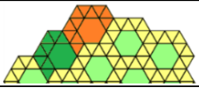
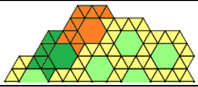
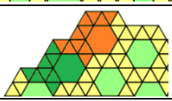
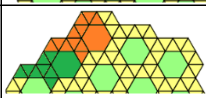
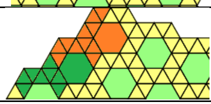
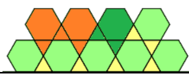
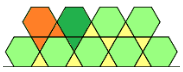
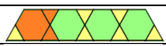
★結論：

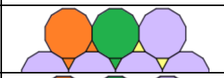
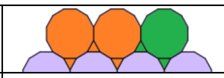
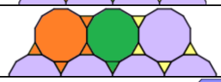
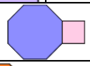
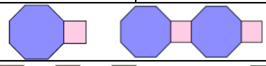
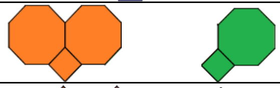
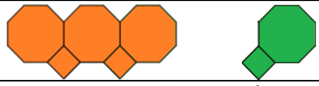
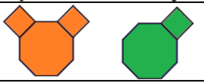
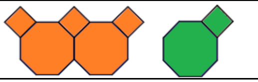
1.中心型密鋪多邊形滿足條件的基本幾何拼板可分成「頂點類基本幾何拼板」與「頂點頂點間的基本幾何拼板」，且這兩類拼板組合不超過 2 種。

2.驗證可能基本幾何拼板，須排除不連續或不滿足基本幾何拼板定義的情況。

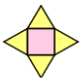
3.層層分析拼板組合時，只需要討論第 1 層出現 1 種拼板的情況。

4.所有密鋪多邊形無滿足條件的基本幾何拼板組合的有：三&四密鋪多邊形 V1 類(分析 1)、三&六密鋪多邊形 D5、D3、D1 類(分別見分析 2、3、4)、三&十二密鋪多邊形 E3 類(理由同分析 2)，其餘基本幾何拼板組合結果整理如下表。

密鋪多邊形	類別	種類	基本幾何拼板組合			
三&四	E2	1				
三&六密鋪多邊形	D0	12				
						
						
	V4	3				
	V2	2				
	V0	2				
	E1	1				
	E2	2				

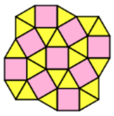
密鋪多邊形	類別	種類	基本幾何拼板組合			
三&十二 密鋪多邊形	E7	2				
	E5	1				
四&八 密鋪多邊形	E5 I	2				
	E5 II	2				
	E2	2				

分析 1：三&四密鋪多邊形 V1 類圖形可分割之基本幾何拼板延伸放大的方式如下：

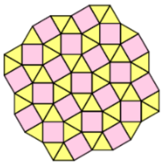


第 0 層(中心圖形)

1 層



2 層



3 層

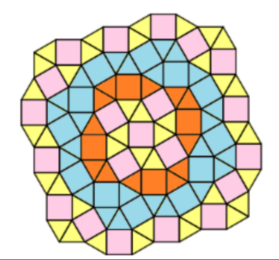
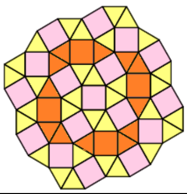
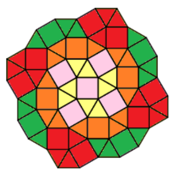
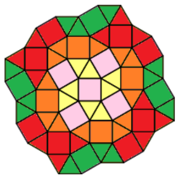
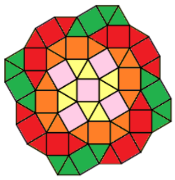
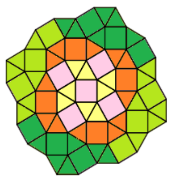


圖 3-3-21
層層規則延伸示意圖

➢由圖 3-3-21 第 2 層密鋪圖形須由橘色幾何拼板(1 種即 3▲1■)進行密鋪，第 3 層密鋪圖形由 24▲+12■(藍色區域)，

➢第 3 層密鋪幾何拼板可能有 3▲1■+3▲2■(4 組)或 6▲3■(4 組)兩種數據排列。

➢先找 3▲1■+3▲2■的情況有下圖 3 種，
發現第 3 層密鋪圖形中 3▲1■幾何拼板(綠色)都跟原來第 2 層密鋪圖形 3▲1■幾何拼板不一樣，此時會形成 3 種不同的幾何拼板(圖 3-3-22 中間 3 種)，故排除。

				
○	×	×	×	可能可以
第 2 層密鋪幾何拼板	圖 3-3-22 第 3 層密鋪幾何拼板 (3▲1■+3▲2■幾何拼板)			圖 3-3-23 第 3 層密鋪幾何拼板示例

➢第 3 層密鋪圖形中若形成 6▲3■幾何拼板(舉例如圖 3-3-23)，

➢∵第 4 層密鋪圖形共有 32▲+16■(圖 3-3-24 粉紅色連續區域)，也無法用任何用第 3 層密鋪圖形中 6▲3■幾何拼板+第 2 層密鋪圖形 3▲1■幾何拼板去密鋪。

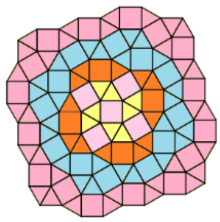


圖 3-3-24

➢經計算即假設 6▲3■幾何拼板有 x 個，3▲1■幾何拼板有 y 個，

$\begin{cases} 6x+3y=32 \\ 3x+y=16 \end{cases}$，解出$x=\frac{16}{3}$，$y=0$(不合)，

故三&四密鋪多邊形 V1 類沒有滿足條件的基本幾何拼板。

分析 2：三&六密鋪多邊形 D5 類可分割之基本幾何拼板

如圖 3-3-25、圖 3-3-26，D5 類 k 層圖=D0 類 k-1 層圖，D5 與 D0 類最大的差別在最外層特徵，即因此 D0 類的基本幾何圖形無法延伸到 D5 類的最外層，此時一定會超過 3 種以上基本幾何拼板種類才能組成 D5 類圖形(圖 3-3-27、3-3-28)，故三&六密鋪多邊形 D5 類沒有滿足條件的基本幾何拼板。

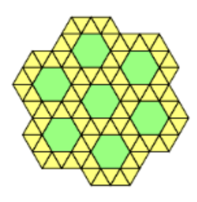
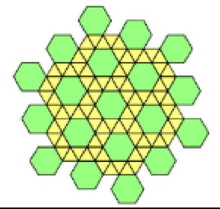
	

圖 3-3-25 三&六 D0 類 1 層圖	圖 3-3-26 三&六 D5 類 2 層圖

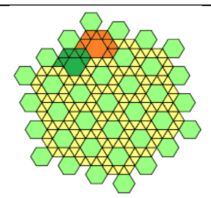
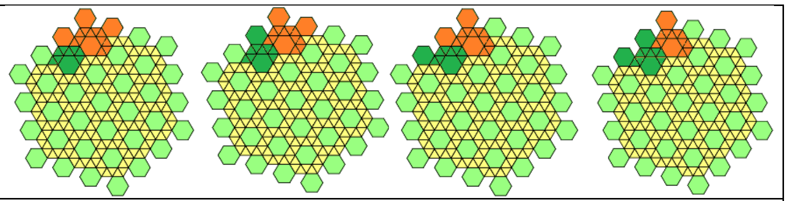
	

圖 3-3-27 D5 類內層拼板組合示意圖(=D0 類)	圖 3-3-28 D5 類最外層基本幾何拼板組合示意圖 (會不同於原內層基本幾何拼板)

而三&十二密鋪多邊形 E3 類也是跟三&六密鋪多邊形 D5 類圖形分布雷同，最外層會出現多的正方形，故三&十二密鋪多邊形 E3 類沒有滿足條件的基本幾何拼板。

分析 3：三&六密鋪多邊形 D3 類基本幾何拼板組合

在第 1、2 層可找到對應的基本幾何拼板有 10+10=20 種組合如下表示；但第 3 層後卻會出現除了第 1、2 層基本幾何拼板外的第 3 種基本幾何拼板(圖 3-3-29 藍色部分)，故三&六密鋪多邊形 D3 類沒有滿足定義的基本幾何拼板組合。

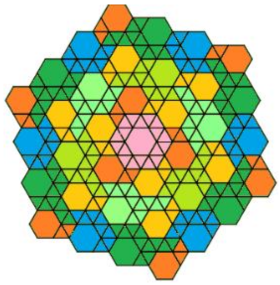
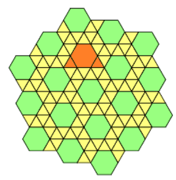
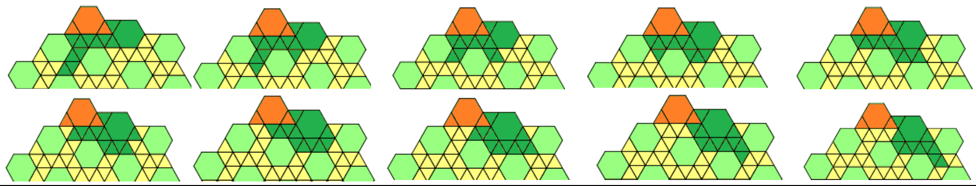
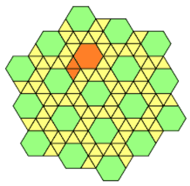
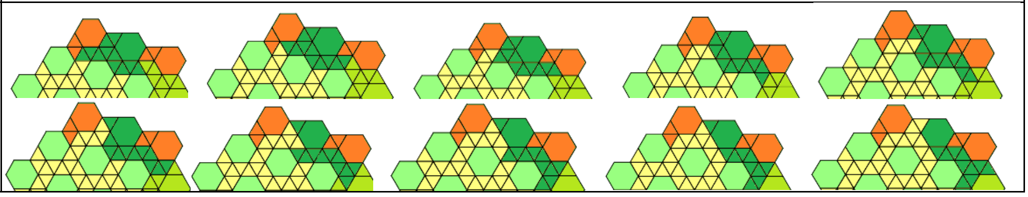


圖 3-3-29

第 1 層密鋪幾何拼板情形	對應第 2 層密鋪圖形幾何拼板局部情形 (橘色部分是第 1 層產生，綠色部分是第 2 層產生)
	
	

分析 4：三&六密鋪多邊形 D1 類基本幾何拼板

得到在第 1、2 層可以找到對應的基本幾何拼板有 5+6+7+6+7+6+7=44 種組合如下表示，但此時能填滿三&六密鋪多邊形 D1 類的基本幾何拼板組合都會涵蓋圖形頂點，但第 3 層以上的圖形(圖 3-3-30)，除頂點部分，還會出現中間的區塊，而上面所有幾何拼板的組合都有包含頂點單位圖形，故上述基本幾何拼板組合無法密鋪三&六密鋪多邊形 D1 類。三&六密鋪多邊形 D1 類沒有滿足條件的基本幾何拼板。

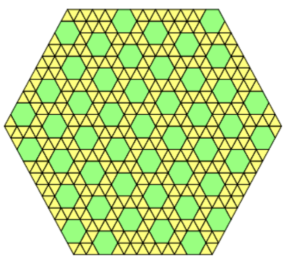
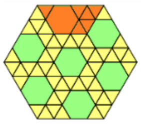
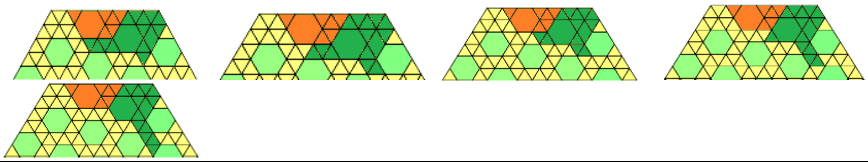
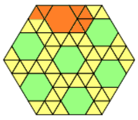
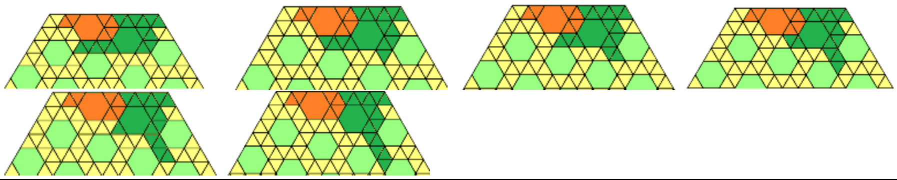
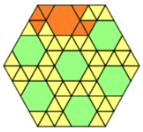
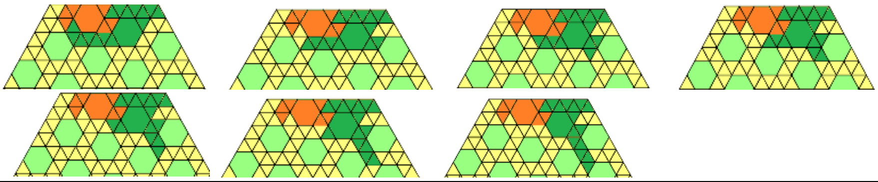
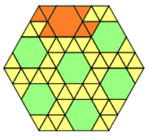
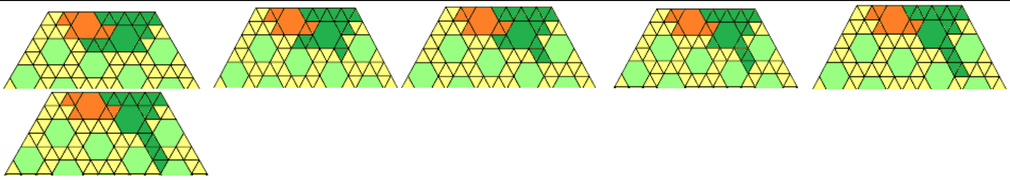
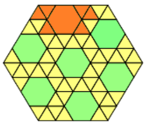
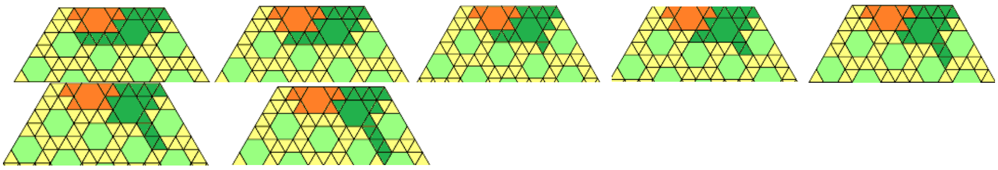
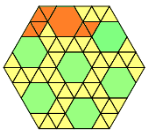
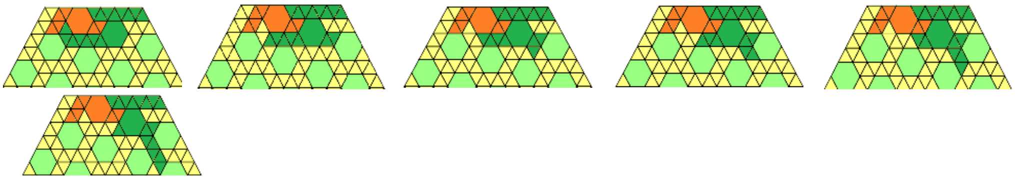
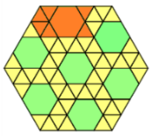
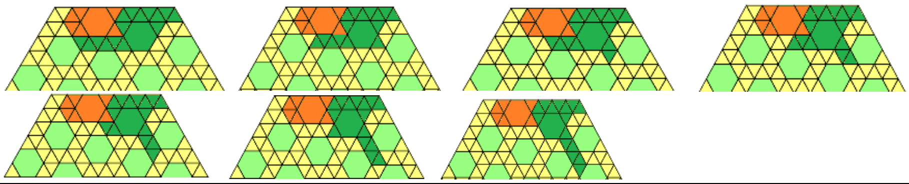


圖 3-3-30

第 1 層密鋪幾何拼板情形	對應第 2 層密鋪圖形幾何拼板局部情形 (橘色部分是第 1 層產生，綠色部分是第 2 層產生)
	
	
	
	
	
	
	

研究四、可完全漫遊之基本幾何拼板特性

(一)研究過程

1.將所有可以找到基本幾何拼板組合的密鋪多邊形，進行完全漫遊路徑。

2.針對不同密鋪多邊形搭配的可行基本幾何拼板，進行完全漫遊路徑分析，找出不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性。

(二)研究結果

1.不一定在每種可行的不同基本幾何拼板組合下可完全漫遊路徑，例如: 圖 3-4-1 三&六密鋪多邊形 D0 類的基本幾何拼板可以；圖 3-4-2 卻不行(藍▲、灰▲分別是橘色與綠色拼板無法漫遊的部分)。

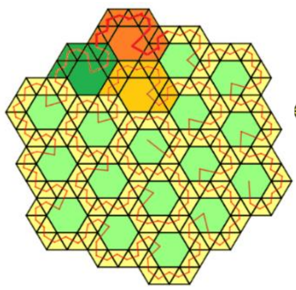


圖 3-4-1 可漫遊拼板

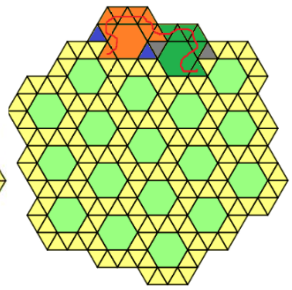
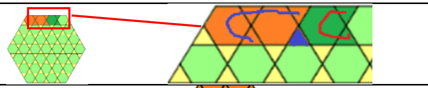
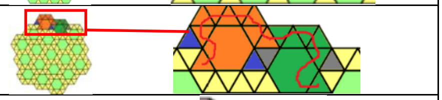
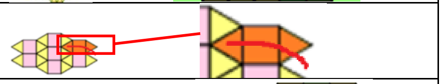
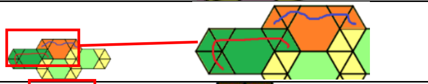
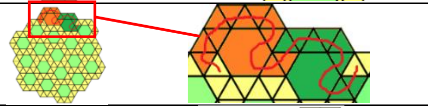
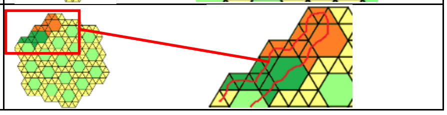
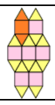
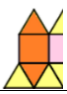
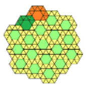
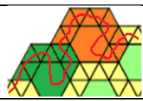
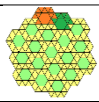
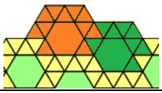
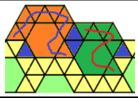
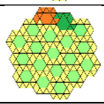
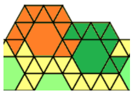
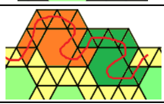
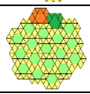
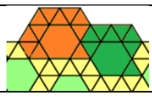
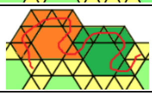
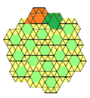
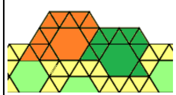
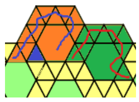
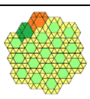
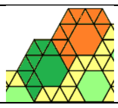
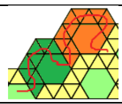
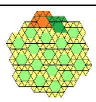
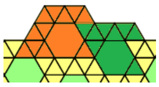
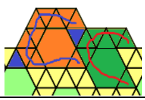
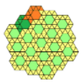
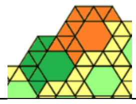
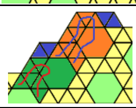
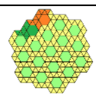
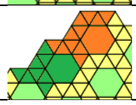
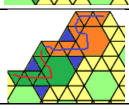
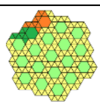
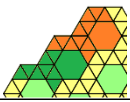
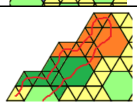


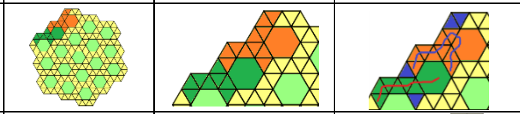
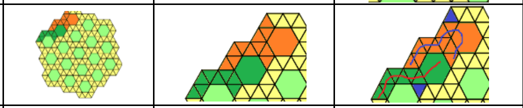
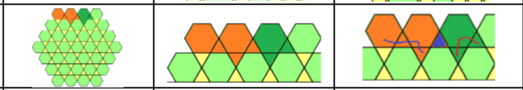
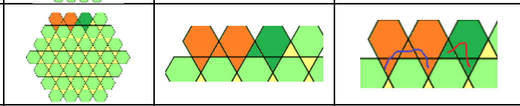
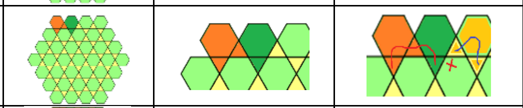
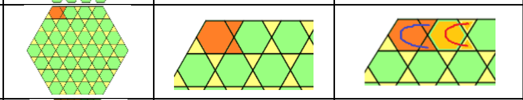
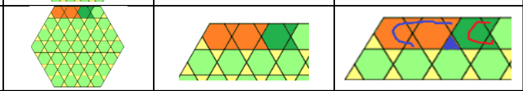
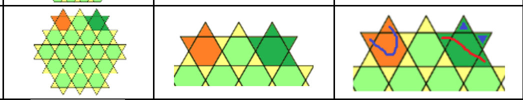
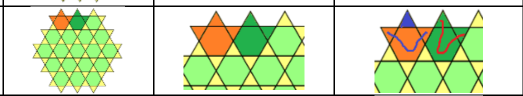
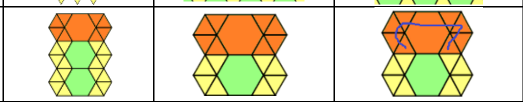
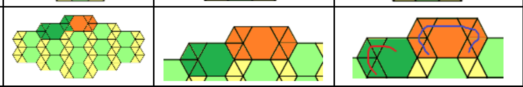
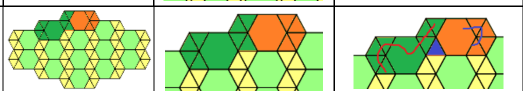
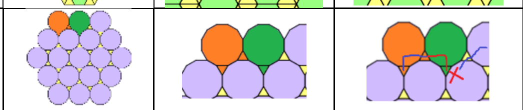
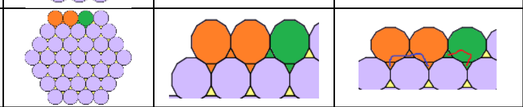
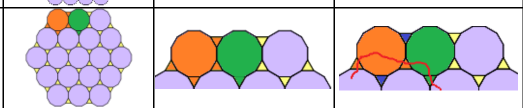
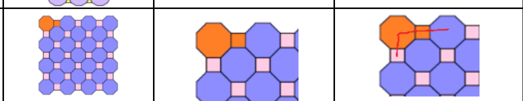
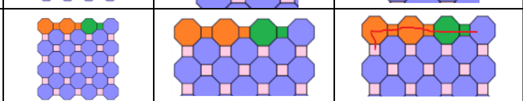
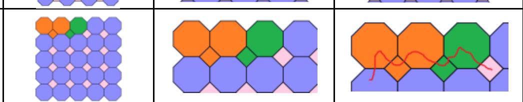
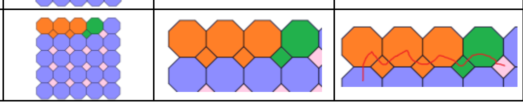
圖 3-4-2 不可漫遊拼板

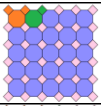
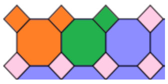
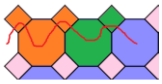
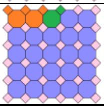
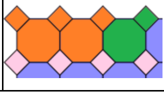
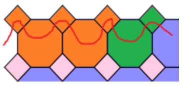
2.不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性，有 3 大種類，每種又可分成 2 小類型

種類		類型		舉例
❶	本身就無法進行完全漫遊路徑的基本幾何拼板	①	一種可以一種不行	
		②	兩種都不行	
❷	本身可進行完全漫遊路徑卻無法與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板	①	對外圖不連續型	
		②	起終點不相連型	
❸	可進行完全漫遊路徑亦可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板	①	單一可漫遊 且對外可連通型	
		②	組合後可漫遊 且可連通型	

3.進一步將所有可行的基本幾何拼板進行分類(備註：D0-1 指 D0-1 類第 1 種拼板)

類別	可行基本幾何拼板類別	局部拼板示意圖	路徑示意圖	本身就無法完全漫遊路徑		本身可完全漫遊卻無法對外連通		可完全漫遊路徑亦可對外連通	
				一種可一種不可	兩種都不可	起終不一型	對外圖不連續	單一可漫遊且可連	組合可漫遊且可連
三&四 E2-1							○		
三&六 D0-1								○	
三&六 D0-2					○				
三&六 D0-3								○	
三&六 D0-4								○	
三&六 D0-5				○					
三&六 D0-6								○	
三&六 D0-7					○				
三&六 D0-8					○				
三&六 D0-9					○				
三&六 D0-10									○

類別	可行基本幾何拼板類別	局部拼板示意圖	路徑示意圖	本身就無法完全漫遊路徑		本身可完全漫遊卻無法對外連通		可完全漫遊路徑亦可對外連通	
				一種可一種不可	兩種都不可	起終不連續型	對外圖不連續	單一可漫遊且可連	組合可漫遊且可連
三&六 D0-11					○				
三&六 D0-12					○				
三&六 V4-1				○					
三&六 V4-2						○			
三&六 V4-3							○		
三&六 V2-1						○			
三&六 V2-2				○					
三&六 V0-1				○					
三&六 V0-2				○					
三&六 E1-1								○	
三&六 E2-1						○			
三&六 E2-2				○					
三&十二 E7-1							○		
三&十二 E7-2						○			
三&十二 E5-1				○					
四&八 E5I-1								○	
四&八 E5I-2								○	
四&八 E5II-1								○	
四&八 E5II-2								○	

四&八 E2-1							○		
四&八 E2-2							○		

★結論:

1.發現不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性，有三大種類，每種又可以分成兩小類型:

❶本身就無法進行完全漫遊路徑的基本幾何拼板—
①一種拼板可以漫遊另一種不行；②兩種都不行；這種類型組合共 7+6=13 種。

❷本身可進行完全漫遊路徑卻無法與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板—
①對外圖不連續型、②起終點不一型；這種類型組合共 4+5=9 種。

❸可進行完全漫遊路徑亦可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板—
①單一可漫遊且對外可連通型；②組合後可漫遊且可連通型，這類型組合共 9+1=10 種。

2.配合幾何拼板可行的路徑，將上述 32 種幾何拼板組合的密鋪多邊形進行完全漫遊，發現只有「可進行完全漫遊路徑且可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板」中 10 種組合的密鋪多邊形可完全漫遊路徑。

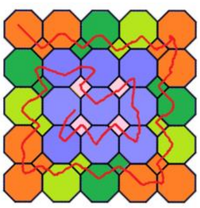
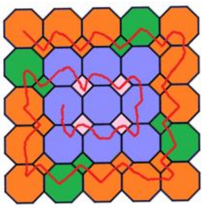
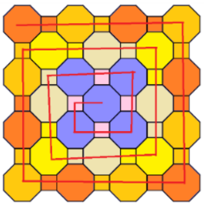
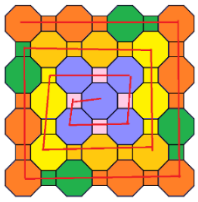
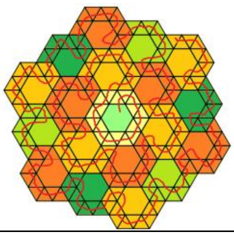
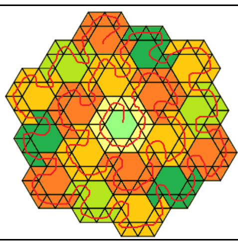
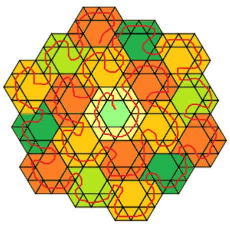
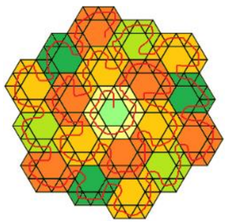
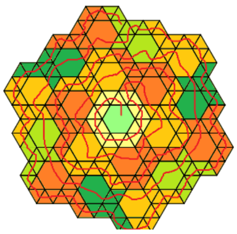
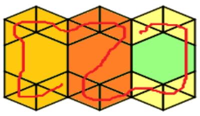
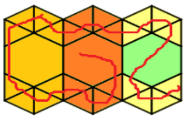
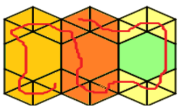
研究五、可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑分類及路徑方法數公式

(一)研究過程

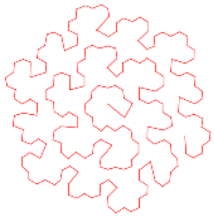
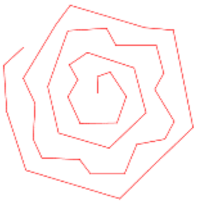
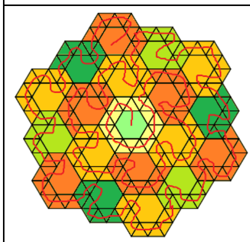
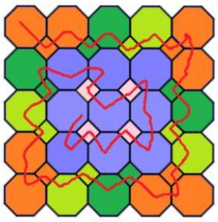
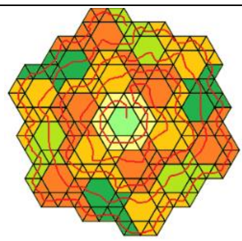
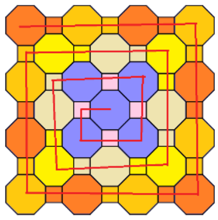
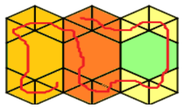
1.畫出所有可完全漫遊之密鋪多邊形的路徑。
2.觀察所有的路徑，進行分類。
3.針對上述可完全漫遊路徑推導，路徑方法數公式。

(二)研究結果

1.逐一將這 10 種完全漫遊路徑列出，以密鋪多邊形前 2 層圖形為例如下：

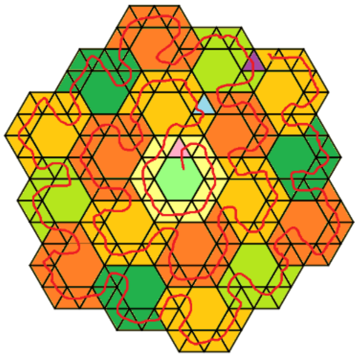
類	四&八 E5I-1	四&八 E5I-2	四&八 E5II-1	四&八 E5II-2
圖形				
類	三&六 D0-1	三&六 D0-3	三&六 D0-4	三&六 D0-6
圖形				
類	三&六 D0-10	三&六 E1	三&六 E1	三&六 E1 …
圖形				 …

2.將不同密鋪多邊形之基本幾何拼板組合可形成 10 種完全漫遊路徑分類為:
❶中心型又分為①花朵型，如三&六 D0-1、四&八 E5I-1；②環型，如三&六 D0-10、四&八 E5II-1；以及❷無中心型為線型，如三&六 E1；如下表示。

<table>
<tr><td colspan="4">中心型</td><td>無中心型</td></tr>
<tr><td colspan="2">花朵型</td><td colspan="2">環型</td><td>線型</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>三&六 D0-1</td><td>四&八 E5I-1</td><td>三&六 D0-10</td><td>四&八 E5II-1</td><td>三&六 E1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3.可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑方法數結果為:
❶可完全漫遊路徑之三&六密鋪多邊形路徑公式分成中心花朵型及中心環型、線型 3 種。
①n 層三&六密鋪多邊形 D0 類中心花朵型完全漫遊路徑方法數公式為 $2\times2^n=2^{n+1}$ 種，第 0 層為中心圖形。

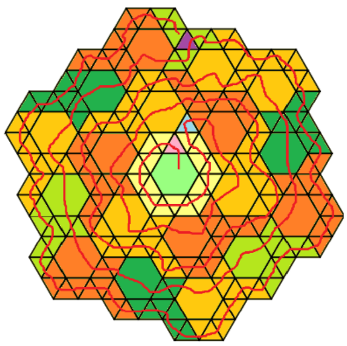
值得注意的是，如果限制只能在該類密鋪圖形的基本幾何拼板上進行路徑，僅會有 1 種完全漫遊路徑。



分析：如右圖，∵中心圖形的漫遊繞法為 1 種，但對外配對時雖然有 6 種不同方向，但旋轉後視為一樣，但對下一層對外每層連接時行進路徑的方向有 2 種選擇(粉紅色▲)。

第 1 層後的 n 層，對外每層連接時切口連通選擇後行進路徑的方向均有 2 種選擇(藍色▲為第 1 層需選擇方向位置，紫色▲為第 2 層需選擇方向位置)，故 n 層路徑方法數有 2^n 種。

②n 層三&六密鋪多邊形 D0 類中心環型路徑方法數公式為 2×2^n 個，第 0 層為中心圖形。

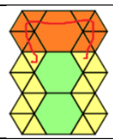
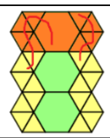
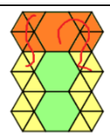
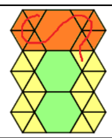
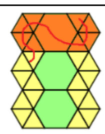
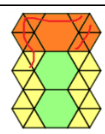
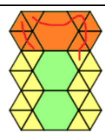


分析：如右圖，∵中心圖形的漫遊繞法為 1 種，但對外配對時雖然有 6 種不同方向，但旋轉後視為一樣，但對下一層對外每層連接時行進路徑的方向有 2 種選擇(粉紅▲)。

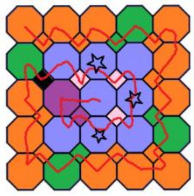
D 類第 1 層開始後的 n 層，每層圖形由 1 層密鋪△及六邊形組合(粉紅色)，每層切口連通選擇後行進路徑的方向各有 2 種選擇(藍色▲為第 1 層需選擇方向位置，紫色▲為第 2 層需選擇方向位置)，故 n 層徑方法數有 2^n 種。

③ n 層三&六密鋪多邊形 E1 類線型完全漫遊路徑方法數公式為 $7\times6^{n-2}\times5$ 種(當 n≧2)。

分析：∵三&六密鋪多邊形 E1 類初始圖形跟幾何拼板只有 1 種組合可以完全漫遊，逐一分析單一幾何拼板的的漫遊繞法為初始拼板有 7 種(I、II、III、IV、V、VI、VII)，但中間 n-2 層連接的拼板只能配對 6 種(II、III、IV、V、VI、VII)，最終結束的幾何拼板漫遊繞法是 5 種(I、II、III、IV、V)。

						
I	II	III	IV	V	VI	VII

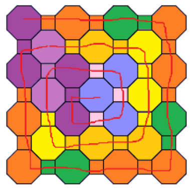
❷可完全漫遊路徑之四&八密鋪多邊形路徑方法數公式如下：

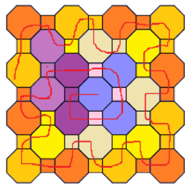


① n 層四&八密鋪多邊形 E5I類是中心花朵型，其完全漫遊路徑方法數公式為 $4\times2^3\times2^n$ 種，其中第 0 層為中心圖形。

分析：∵中心圖形的漫遊繞法出發時有 2 種選擇(紫色正方形或八邊形)，雖然有四個切口，但旋轉後視為相同，故還是 2 種選擇；加上選擇後行進路徑的方向有 2 種選擇。故為 $2\times2=2^2=4$ 種。
中心圖形的漫遊繞法為 8 種 (星星處各有 2 種路徑選擇)，故為 $2^3=8$ 種。
第 1 層後，對外每層連通選擇後行進路徑的方向有 2 種選擇(黑色正方形) 故為 2^n 種。

② n層四&八密鋪多邊形E5II類中心環型及中心花朵型完全漫遊路徑方法數公式分別為 6^{n+1} 種、$6\times3^{\frac{n}{2}}$種(偶數層花朵型)、$6\times3^{\frac{n-1}{2}}$種(奇數層花朵型)，其中第 0 層為中心圖形。





分析：∵花朵型或環型中心圖形的漫遊繞法出發時有 3 種選擇(紫色■或⬣)，雖然有四個切口，但旋轉後視為相同，故還是 2 種選擇；加上選擇後行進路徑的方向有 2 種選擇。故為 $3\times2=6$ 種。
環型第 1 層後每層跟前述中心圖形選擇一樣(紫色■或⬣)，方向亦同，為 6^n 種；而花朵型第 1 層後每層跟前述中心圖形選擇一樣(紫色■或⬣)，對外為了形成花朵形狀，每 2 層連接時切口連通選擇後行進路徑的方向有 3 種選擇，故偶數層花朵型$3^{\frac{n}{2}}$種；奇數層花朵型則 n-1 層為花朵，最外層無法形成花朵，故為$3^{\frac{n-1}{2}}$種。

★結論：

1.不同密鋪多邊形之基本幾何拼板組合可形成 10 種完全漫遊路徑，將其分類為:
❶中心型又分為①花朵型，②環型；❷無中心型:線型。

2.可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑方法數結果為：

❶可完全漫遊路徑之三&六密鋪多邊形路徑公式分成中心花朵型及中心環型、線型 3 種。

①n 層三&六密鋪多邊形 D0 類中心花朵型、中心環型路徑公式皆為 $2\times2^n=2^{n+1}$ 種，第 0 層為中心圖形。

②n 層三&六密鋪多邊形 E1 類線型完全漫遊路徑方法數公式為 $7\times6^{n-2}\times5$ 種(當 n≧2)。

❷可完全漫遊路徑之四&八密鋪多邊形路徑方法數公式如下：

① n 層四&八密鋪多邊形 E5I類是中心花朵型，其公式為 $4\times2^3\times2^n$ 種，第 0 層為中心圖形。

② n 層四&八密鋪多邊形 E5II類中心環型公式為 6^{n+1} 種，第 0 層為中心圖形。

③ n 層四&八密鋪多邊形 E5II類中心花朵型公式分別為 $6\times3^{\frac{n}{2}}$種(偶數層花朵型)、$6\times3^{\frac{n-1}{2}}$種(奇數層花朵型)，其中第 0 層為中心圖形。

研究六、密鋪多邊形可完全漫遊路徑與幾何拼板之關係

(一)研究過程

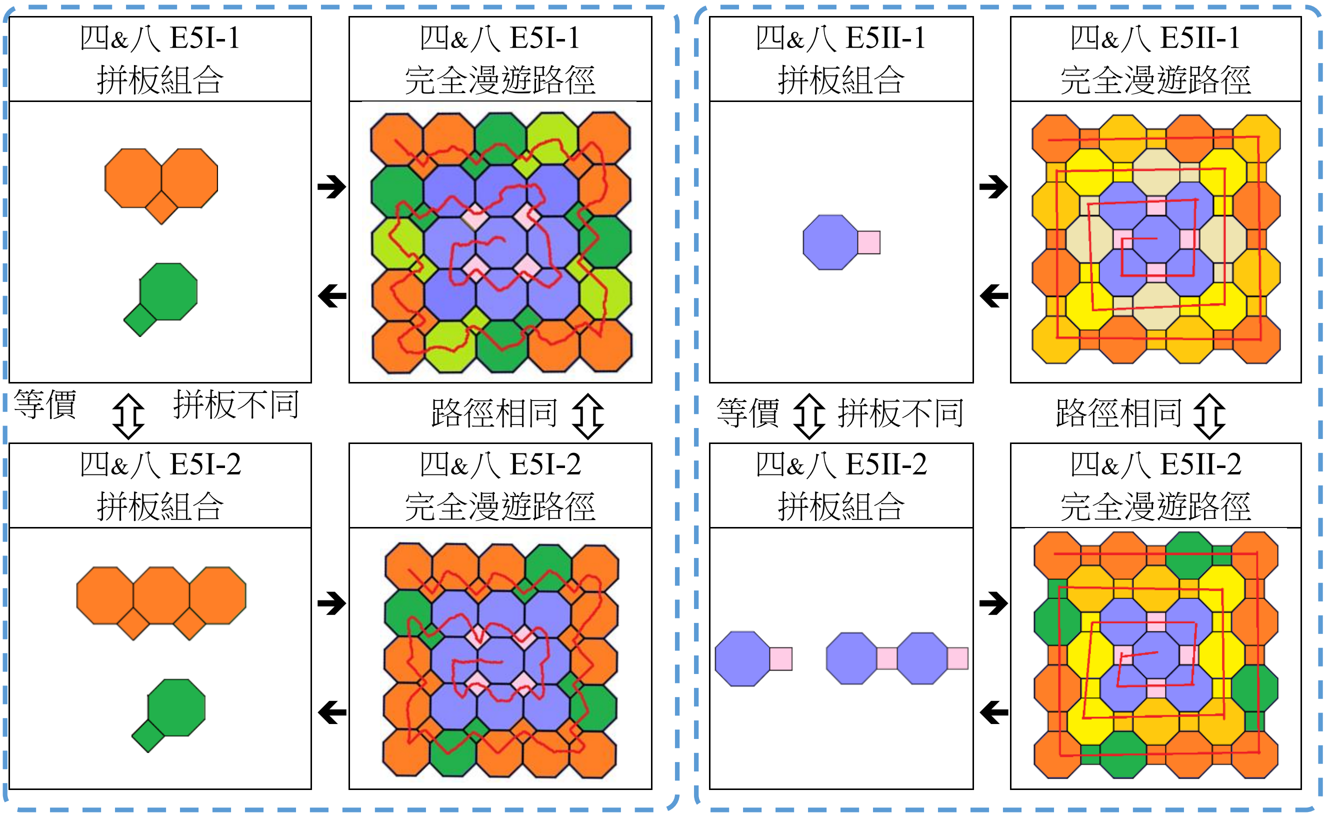
觀察不同密鋪多邊形可完全漫遊路徑中是否有同類型的路徑，其對應的基本幾何拼板組合是否有什麼關聯，找出密鋪多邊形之可完全漫遊路徑與幾何拼板之關係。

關係命名：密鋪多邊形不同的拼板組合具有相同的路徑，此兩種拼板具有等價關係(即路徑具等價關係)。

(二)研究結果

1.等價之四&八密鋪多邊形基本幾何拼板組合：

從研究五觀察四&八密鋪多邊形 E5I-1 拼板組合(簡稱四&八 E5I-1 拼板組合)及四&八 E5I-2 拼板組合雖然兩者拼板不同，但出發點一樣時，整體路徑相同，行進拼板路徑也是相同；四&八 E5II-1 及四&八 E5II-2 也有相同的狀況。可以得到四&八 E5I-1 拼板組合與四&八 E5I-2 拼板組合雖然拼板不同但走的路徑卻相同，代表相同完全漫遊路徑時，亦可能由不同拼板組合漫遊成功，亦意味著將來四&八密鋪多邊形 E5I、E5II類僅須各透過 1 種基本幾何拼板組合就可以找到完全漫遊路徑。

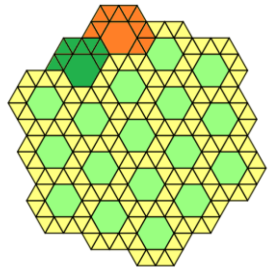
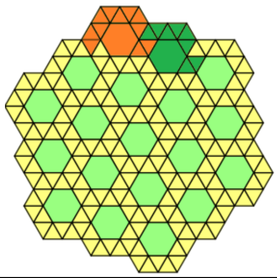
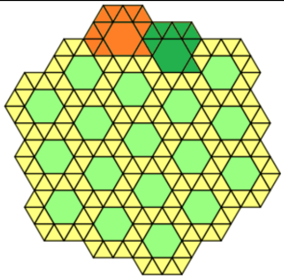
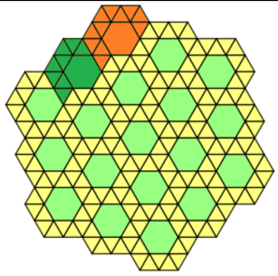
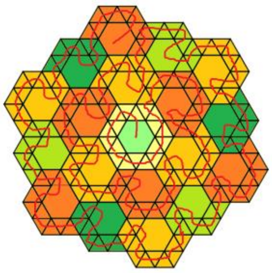
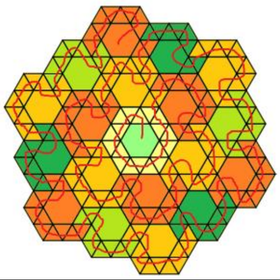
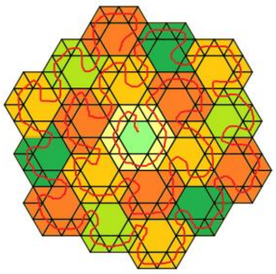
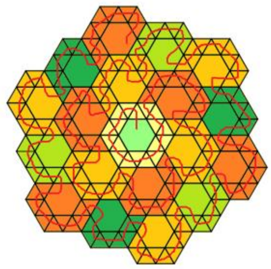
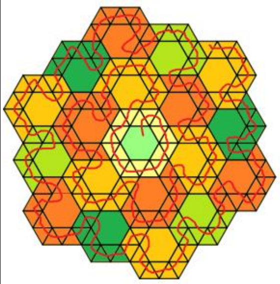
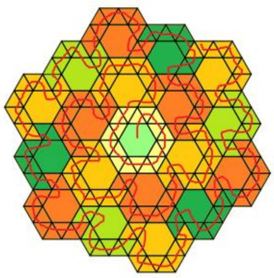
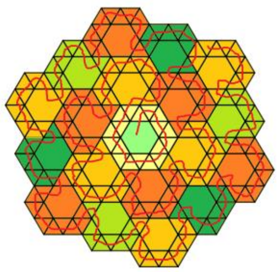
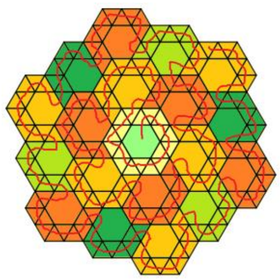


2.等價之密鋪多邊形三&六密鋪多邊形 D0 類拼板組合

可完全漫遊的 4 種基本幾何拼板組合(D0-1、D0-3、D0-4、D0-6)則亦有雷同的結果，即雖拼板不同但卻能走出同類完全漫遊路徑，代表三&六密鋪多邊形 D0 類 4 種不同基本幾何拼板組合僅須透過 1 種拼板組合就可以找到完全漫遊路徑。

❶當中心出發左繞時 D0-1、D0-3、D0-4 均需透過其他拼板組合才能完全漫遊且連通，此時等價於 D0-6 基本拼板組合(自己基本幾何拼板就可以漫遊且可對外連通)，意味著將來三&六密鋪多邊形 D0 類中心出發左繞僅須透過 1 種基本幾何拼板組合即 D0-6，就可以走出同類完全漫遊路徑。

❷當中心出發右繞時 D0-3、D0-4、D0-6 均需透過其他拼板組合才能完全漫遊且連通，此時等價於 D0-1 基本拼板組合(自己基本幾何拼板就可以漫遊且可對外連通)，意味著將來三&六密鋪多邊形 D0 類中心出發右繞僅須透過 1 種基本幾何拼板組合即 D0-1，就可以走出同類完全漫遊路徑。

拼板編號		D0-1	D0-3	D0-4	D0-6
拼板組合不同	關係等價				
↓	↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑
中心出發左繞	同類完全漫遊路徑				
中心出發右繞	同類完全漫遊路徑				

★結論：

在密鋪多邊形中，基本幾何拼板組合不同卻能走出同類完全漫遊路徑，此時代表不同基本幾何拼板組合可以歸類為「等價組合(Equivalent Combination)」，亦代表將來密鋪多邊形僅須各透過 1 種基本幾何拼板組合，就可以簡化地找到完全漫遊路徑。

研究七、可完全漫遊密鋪多邊形之形變轉換

(一)研究過程

想像如果在毛衣織上密鋪多邊形，經過拉扯後雖然圖形改變，但是毛衣上的線條也就是相當於路徑特性一樣還是不變。老師建議我們查閱資料，發現這就是所謂的「拓樸關係不變性」，是相同拓樸性質的圖形，研究幾何圖形在連續改變形狀時，還能保留不變的一些特性，在這個觀點下，就能脫離剛性幾何之思維，在保留原圖形之特性的情況下，做形體之改變。

而在研究六不同基本幾何拼板組合可以透過同類路徑形進行「等價組合」歸類過程中，觸發了我們更進階的想法：是否能將原本密鋪多邊形找出形變轉換之相關性?

思考： 因為在密鋪多邊形完全漫遊路徑時，「完全漫遊路徑(紅色的線，圖 7-1)」就好像「一條繩子」繞過在這密鋪多邊形上的每塊單位圖形，而此時起點與終點的單位圖形(圖 7-1 圖中粉紅色三角形)就是分別一進與一出，中間經過的每個單位圖形都是進出進出……。

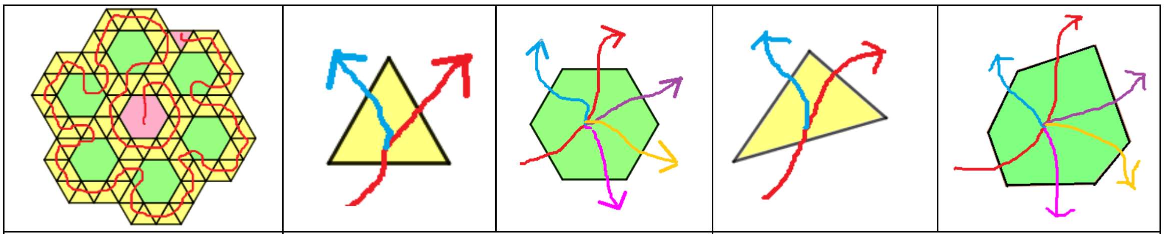


圖 7-1　圖 7-2　圖 7-3

再觀察一下，影響路徑行進方向就是「密鋪多邊形的邊數」(圖 7-2)，就算不是正多邊形，只要邊數維持原來的，也能維持原來行進的方向(圖 7-3)，此時原來的密鋪多邊形就能不需要是單位圖形組成，只要每個單位圖形符合原來的「圖形相鄰之特徵」，甚至全部扭曲變形(圖 7-4 局部轉變示意圖)，就仍然可以完全漫遊路徑(圖 7-5 局部轉變完全漫遊路徑示意圖)。

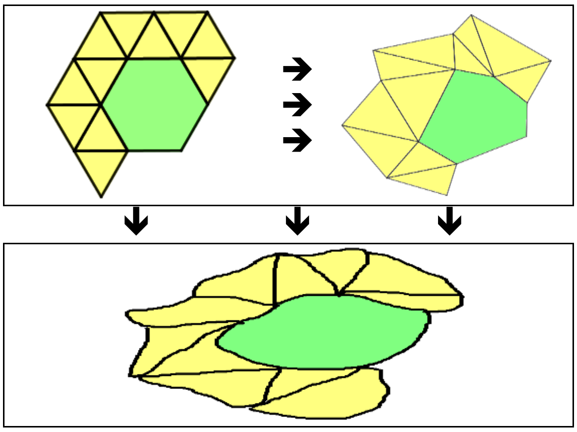


圖 7-4 局部轉變示意圖

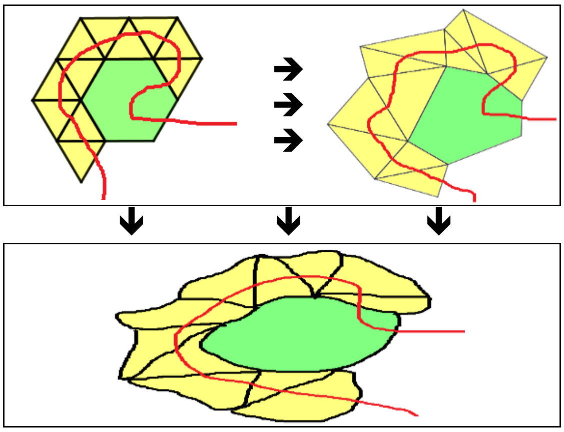


圖 7-5 局部轉變完全漫遊路徑示意圖

★結論：

只要密鋪多邊形中每個單位圖形維持拓樸不變性，即原來的「圖形相鄰特徵—路徑可行進方向數」，則「密鋪多邊形完全漫遊路徑可以進行任意形變轉換」，此時密鋪多邊形即可不受圖形外觀限制、不一定要是正多邊形，可變形成不規則形，甚至完全扭曲變形，局部圖形—基本幾何拼板，完全漫遊路徑亦可不受圖形外觀限制。

研究八、設計密鋪多邊形完全漫遊路徑多款遊戲

(一)設計過程

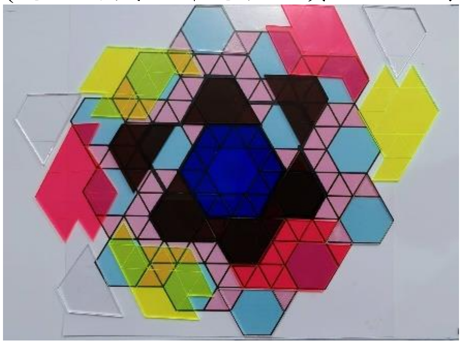
1.根據研究，要密鋪多邊形「需 2 種不同正多邊形相互搭配形成滿足頂點密鋪成 360°」及「規則層層往外密鋪」的條件，根據研究一的結果，我們設計遊戲的底圖以「三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形等 5 種正多邊形」為主。

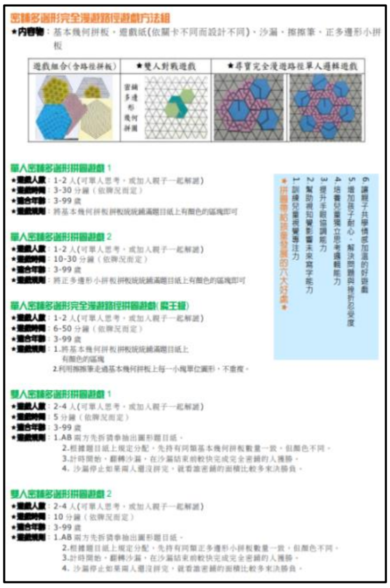
2.根據研究三及討論二的結果，設計遊戲的基本幾何拼板組合。

3.根據研究二和四的結果，設計遊戲的完全漫遊路徑之規則。

★結論：

運用研究一二三四結果，設計一款全新完全漫遊路徑邏輯拼圖遊戲，下圖是遊戲底圖及其中一組拼板，可單人思考、雙人對戰，同時可訓練幾何拼圖能力、又可漫遊路徑，訓練邏輯。(完整遊戲組詳見展示實品，內有詳細遊戲規則如左)





密鋪多邊形完全漫遊路徑遊戲方法組

★內容物：基本幾何拼板、遊戲紙(依關卡不同而設計不同)、沙漏、擦擦筆、正多邊形小拼板

單人密鋪多邊形拼圖遊戲 1

★遊戲人數：1-2 人(可單人思考，或加入親子一起解謎)

★遊戲時間：3-30 分鐘（依牌況而定）

★適合年齡：3-99 歲

★遊戲規則：將基本幾何拼板拼較統統鋪滿題目紙上有顏色的區塊即可

單人密鋪多邊形拼圖遊戲 2

★遊戲人數：1-2 人(可單人思考，或加入親子一起解謎)

★遊戲時間：10-30 分鐘（依牌況而定）

★適合年齡：3-99 歲

★遊戲規則：將正多邊形小拼板拼較統統鋪滿題目紙上有顏色的區塊即可

單人密鋪多邊形完全漫遊路徑拼圖遊戲(闖王級)

★遊戲人數：1-2 人(可單人思考，或加入親子一起解謎)

★遊戲時間：6-50 分鐘（依牌況而定）

★適合年齡：3-99 歲

★遊戲規則：1.將基本幾何拼板拼較統統鋪滿題目紙上有顏色的區塊

2.利用擦擦筆走過基本幾何拼板上每一小塊單位圖形，不重複。

雙人密鋪多邊形拼圖遊戲 1

★遊戲人數：2-4 人(可單人思考，或加入親子一起解謎)

★遊戲時間：5 分鐘（依牌況而定）

★適合年齡：3-99 歲

★遊戲規則：1.AB 兩方先猜拳抽出圖形題目紙。

2.根據題目紙上規定分配，先持有同類基本幾何拼板數量一致，但顏色不同。

3.計時開始，翻轉沙漏，在沙漏結束前較快完成完全密鋪的人獲勝。

4. 沙漏停止如果兩人還沒拼完，就看誰密鋪的面積比較多來決勝負。

雙人密鋪多邊形拼圖遊戲 2

★遊戲人數：2-4 人(可單人思考，或加入親子一起解謎)

★遊戲時間：10 分鐘（依牌況而定）

★適合年齡：3-99 歲

★遊戲規則：1.AB 兩方先猜拳抽出圖形題目紙。

2.根據題目紙上規定分配，先持有同類正多邊形小拼板數量一致，但顏色不同。

3.計時開始，翻轉沙漏，在沙漏結束前較快完成完全密鋪的人獲勝。

4. 沙漏停止如果兩人還沒拼完，就看誰密鋪的面積比較多來決勝負。

★拼圖帶給孩童發展的六大好處★

1.訓練兒童視覺專注力

2.幫助視知覺影響未來寫字能力

3.提升手眼協調能力

4.培養兒童獨立思考邏輯能力

5.增加孩子耐心，解決問題與挫折忍受度

6.讓親子共學情感加溫的好遊戲

肆、討論

本研究原定義之由 2 種單位圖形組成的密鋪多邊形，可分割成 2 種不同基本幾何拼板組成之限制，有機會擴展研究結果至「不同數量單位圖形組成之密鋪多邊形」及「不限由 2 種基本幾何拼板組成」，在此我們逐一討論：

討論一、探討密鋪多邊形完全漫遊路徑一般化之可行性

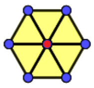
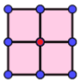
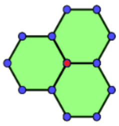
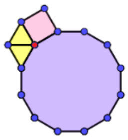
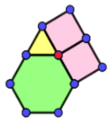
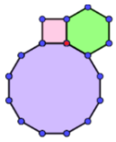
(一)研究過程

1.本研究定義之密鋪多邊形是由 2 種單位圖形組成，仿照研究一過程探討當各由 1、3、4……種單位圖形組成時是否能形密鋪多邊形。

2.仿照研究二三四探討當上述研究過程 1 可形成密鋪多邊形之圖形，先看中心或初始圖形是否可完全漫遊跟對外連通?找出密鋪多邊形的基本幾何拼板，再看基本幾何拼板是否可完全漫遊跟對外連通?是否能進行完全漫遊路徑。

(二)研究結果

1.單 1 種單位圖形可滿足圖形頂點內角和 360 度有正三角形、正方形跟正六邊形；而 3 種單位圖形可滿足密鋪條件的有❶三&四&六❷三&四&十二❸四&六&十二；4 種以上單位圖形則無法存在滿足圖形頂點內角和 360 度的組合。

情形	單 1 種單位圖形組合			3 種單位圖形組合成密鋪多邊形			4 種(含以上)不存在
組合圖形							

分析：頂點密鋪需要的正多邊形種類、對應所需的個數組合如下

❶6 個正三角形(內角 60^{O}) 🡐$6\times60^{O}=360^{O}$ ；

❷4 個正方形(內角 90^{O}) 🡐$4\times90^{O}=360^{O}$

❸3 個正六邊形(內角 120^{O}) 🡐$3\times120^{O}=360^{O}$

❹1 個正▲ (內角 60^{O}) +2 個■ (內角 90^{O}) +1 個正六邊形(內角 120^{O})🡐$1\times60^{O}+2\times90^{O}+1\times120^{O}=360^{O}$

❺2 個正▲(內角 60^{O}) +1 個■(內角 90^{O}) +1 個正十二邊形(內角 150^{O})🡐$2\times60^{O}+1\times90^{O}+1\times150^{O}=360^{O}$

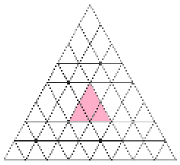
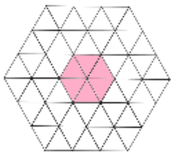
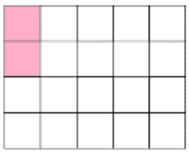
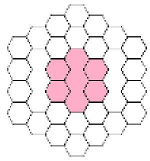
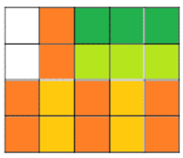
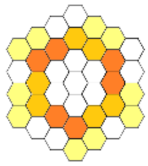
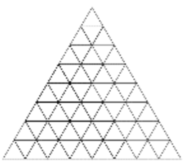
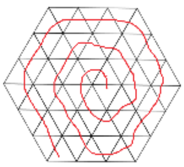
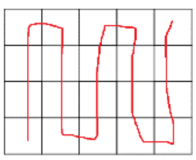
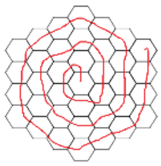
❻1 個■(內角 90^{O})+1 個正⬣ (內角 120^{O}) +1 個正十二邊形(內角 150^{O})🡐$1\times90^{O}+1\times120^{O}+1\times150^{O}=360^{O}$

❼1 個正▲ (內角 60^{O})+1 個■(內角 90^{O})+1 個正⬟(內角 108^{O})+1 個正⬣ (內角 120^{O})

此時 $1\times60^{O}+1\times90^{O}+1\times108^{O}+1\times120^{O}=378^{O}$ 🡒大於 360^{O}，最少邊數的 4 個多邊形各一個內角組成都超過 360^{O}，故 4 種以上單位圖形則無法存在滿足圖形頂點內角和 360^{O}的組合。

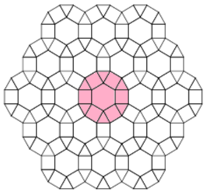
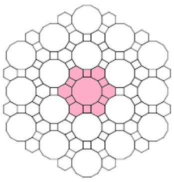
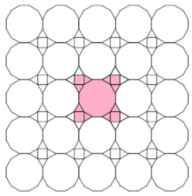
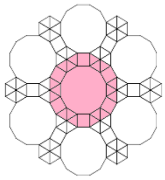
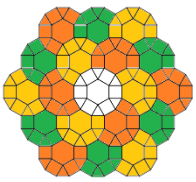
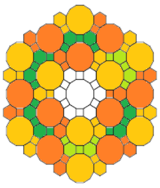
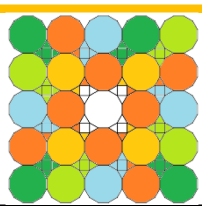
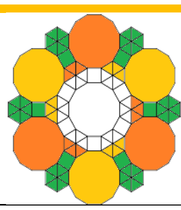
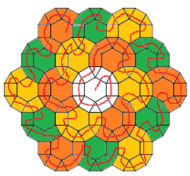
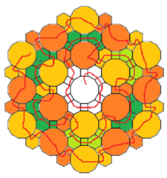
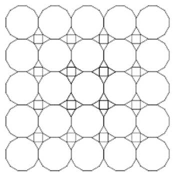
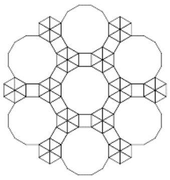
2.單位▲密鋪成的六邊形、單位■密鋪成的矩形、單位⬣密鋪成的六邊形(如分析的情形 2、3、4)中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通、配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則這些密鋪多邊形可完全漫遊路徑。但△密鋪的三邊形(如分析的情形 1)因為中心圖形就無法進行完全漫遊，故無法進行完全漫遊路徑。

分析:

情形	1	2	3	4
單位圖形	三角形	三角形	正方形	正六邊形
中心圖形或初始圖形				
可完全漫遊	×	○	○	○
可對外連通	×	○	○	○
基本幾何拼板組合				
可完全漫遊	○	○	○	○
可對外連通	○	○	○	○
密鋪多邊形(2 層圖舉例)				
可完全漫遊	×	○	○	○

3.三&四&六密鋪多邊形、四&六&十二密鋪多邊形(如下情形 1、2)中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通；配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則這些密鋪多邊形可完全漫遊路徑。但三&四&十二密鋪多邊形(A、B 類) 如下情形 3、4，因中心圖形就無法進行完全漫遊，基本幾何拼板無法完全漫遊也不能對外連通，則無法進行完全漫遊路徑。

分析：

情形	1	2	3	4
單位圖形	三&四&六	四&六&十二	三&四&十二(A 類)	三&四&十二(B 類)
中心圖形 或 初始圖形				
可完全漫遊	○	○	×	○
可對外連通	○	○	×	○
基本 幾何拼板				
可完全漫遊	○	○	×	○
可對外連通	○	○	×	×
密鋪多邊形 (三層圖舉例)				
可完全漫遊	○	○	×	×

★結論：

只要是中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通；配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則該密鋪多邊形可完全漫遊路徑。1 或 3 種單位圖形組合密鋪多邊形皆滿足上述判斷原則。

討論二、探討透過基本幾何拼板組合尋找完全漫遊路徑之結果一般化的可行性

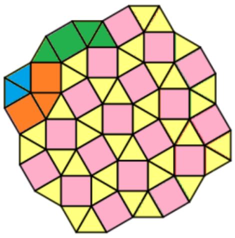
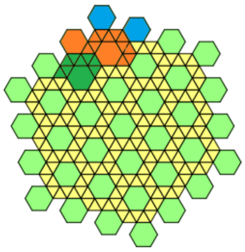
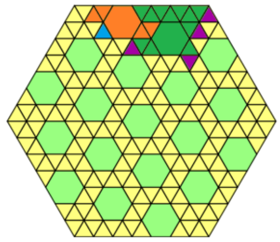
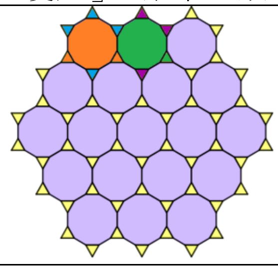
(一)研究過程

為了讓研究過程可系統且快速地找到完全漫遊路徑，故限制基本幾何拼板組合只能 2 種以內，故可能在研究二三四中部份密鋪多邊形沒辦法找到滿足本研究定義的基本幾何拼板組合，雖無法用最少(即 2 種) 基本幾何拼板組合找到完全漫遊路徑，但或許可能用更多基本幾何拼板而找到完全漫遊路徑，針對此透過更多基本幾何拼板組合觀察圖形特徵與完全漫遊路徑之關係。

(二)研究結果

1.若密鋪多邊形有「數個僅能進或僅能出之單位圖形的基本幾何拼板」，則基本幾何拼板就算可完全漫遊路徑，亦無法對外連通，造成無法完全漫遊。如三&四密鋪多邊形 V1 類、

三&六密鋪多邊形 D5、D1 類、三&十二密鋪多邊形 E3 類(下面 4 個圖中藍、紫色單位圖形，分別是橘、綠色基本幾何拼板僅能進或出的單位圖形)，與研究四「基本幾何拼板本身可完全漫遊路徑，卻無法與另一塊幾何拼板路徑連通，就無法完全漫遊」之結果一致。

			
三&四密鋪多邊形 V1 類	三&六密鋪多邊形 D5 類	三&六密鋪多邊形 D1 類	三&十二密鋪多邊形 E3 類

2.密鋪多邊形的若是「出現 3 種以上基本幾何拼板」，只要找到該基本幾何拼板組合可以完全漫遊亦可對外連通的基本幾何拼板，則亦可完全漫遊，如三&六密鋪多邊形 D3 類(見圖 4-1)，為中心圖形及前 3 層組成，共有 3 種基本幾何拼板—橘色系列、綠色系列及藍色系列基本幾何拼板，往外之後亦最少只有由 3 種基本幾何拼板組成(見圖 4-2)，這些拼板透過其他拼板就可以漫遊且對外連通，此與研究四「可進行完全漫遊路徑亦可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板，就可完全漫遊」之結果一致。

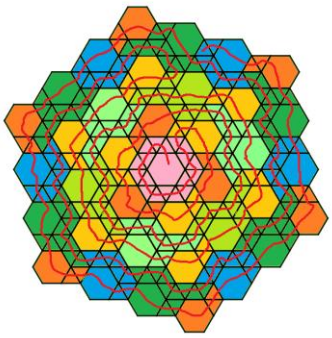
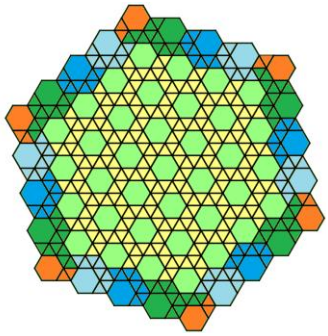
	

圖 4-1　3 種基本幾何拼板可以完全漫遊路徑圖	圖 4-2　三&六密鋪多邊形 D3 類由 3 種基本幾何拼板組成示意圖

★結論：

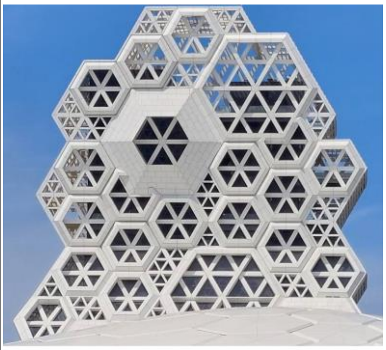
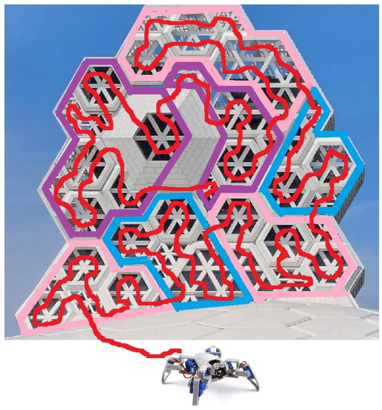
不管基本幾何拼板數量多寡，只要是中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通；配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則該密鋪多邊形可完全漫遊路徑。當然若是能將圖形切割成較少種類的基本幾何拼板，則對能進行判別是否能完全漫遊路徑越有效率。此亦為本研究限制密鋪多邊形由 2 種基本幾何拼板組合之主要原因。

討論三、一般化研究結果之實際應用至設計高空清潔智能蜘蛛人

清洗玻璃幕牆是一種高危險工作(圖 4-3)，近兩年有高科技公司為許多城市的高樓層大樓投入研發智能環保技術，根據研究二三四七及討論二結果，所有的密鋪多邊形皆可切割為幾何拼板，幾何拼板在一般化的討論後可以推廣至超過 2 種

	
圖 4-3 清洗玻璃幕牆圖	圖 4-4 高空清潔智能蜘蛛人

基本圖形組合而成；不管基本幾何拼板數量多寡，幾何拼板間的組合能完全漫遊且可對外連通，則密鋪多邊形必可完全漫遊。因此，可設計一款「**高空清潔智能蜘蛛人**」(圖 4-4是取自網路的示意圖)，讓像流行音樂中心這種漂亮的密鋪多邊形高樓層牆面，**能利用幾何拼板將整個牆面做切割分塊，找到完全漫遊路徑，有效率、一次就清潔完每一塊單位多邊形**。

		
原來待清洗的	利用幾何拼板 將整個牆面做切割分塊	找到完全漫遊路徑寫成程式 置入「**高空清潔智能蜘蛛人**」

伍、結論

綜合整體研究結果與討論，得到:

(一)密鋪多邊形之圖形組合特性

1.只有正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形等 5 種正多邊形可以 2 種不同正多邊形相互搭配形成密鋪多邊形。可組成密鋪多邊形的單位圖形組合如下:

❶正三角形+正方形，命之為三&四密鋪多邊形

❷正三角形+正六邊形，命之為三&六密鋪多邊形

❸正方形+正八邊形，命之為四&八密鋪多邊形

❹正三角形+正十二邊形，命之為三&十二密鋪多邊形

2.觀察密鋪多邊形中較大單位圖形的連接特徵，進一步進行圖形分類，發現可將密鋪多邊形分成: ❶不相連、❷點連接、❸邊連接共 3 種。

3.若依圖形擴張的特性可將密鋪多邊形分為「中心型」跟「無中心型」。「中心型」密鋪多邊形最開始出現的組合圖形稱之為「中心圖形」,「無中心型」密鋪多邊形又分成「單向擴張」及「雙向擴張」2 種，最開始出現的組合圖形稱之為「初始圖形」。

(二)密鋪多邊形完全漫游路徑之存在性及共通關聯性

1.研究發現不同密鋪多邊形有的完全漫游路徑存在，有的不存在。

2.不管是「可以完全漫遊路徑」或「不能完全漫遊的密鋪多邊形」之關鍵為「圖形的組合」，可以將密鋪多邊形進行分割成「基本幾何拼板」，再進行完全漫遊路徑之討論。

(三)密鋪多邊形之基本幾何拼板組合

1.中心型密鋪多邊形滿足條件的基本幾何拼板可分成「頂點類基本幾何拼板」與「頂點頂點間的基本幾何拼板」，且這兩類拼板組合不超過 2 種。

2.驗證可能基本幾何拼板，須排除不連續或不滿足基本幾何拼板的情況。

3.發現層層分析拼板組合時，只需要討論第 1 層出現 1 種拼板的情況。

4.發現所有密鋪多邊形無滿足條件的基本幾何拼板組合的有：三&四密鋪多邊形 V1 類、三&六密鋪多邊形 D5、D3、D1 類、三&十二密鋪多邊形 E3 類。三&四密鋪多邊形 E2 類有 2 種，三&六密鋪多邊形 D0、V4、V2、V0、E2、E1 類分別有 12、3、2、2、1、2 種，四&八密鋪多邊形 E5Ⅰ、E5Ⅱ、E2 類均各有 2 種滿足條件之基本幾何拼板。

(四)不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性

1.不同密鋪多邊形完全漫遊路徑之幾何拼板特性，有 3 大種類，每種可分成 2 小類型。

❶本身就無法進行完全漫遊路徑的基本幾何拼板—

①一種拼板可以漫遊另一種不行；②兩種都不行；此類型組合共 7+6=13 種。

❷本身可進行完全漫遊路徑卻無法與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板—

①對外圖不連續型、②起終點不一型；此類型組合共 4+5=9 種。

❸可進行完全漫遊路徑亦可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板—

①單一可漫遊且對外可連通型、②組合後可漫遊且可連通型；此類型組合共 9+1=10 種。

2.配合幾何拼板可行的路徑，將上述 32 種幾何拼板組合的密鋪多邊形進行完全漫遊，發現只有「可進行完全漫遊路徑且可與另一塊幾何拼板路徑連通的基本幾何拼板」中 10 種基本幾何拼板組合的密鋪多邊形可完全漫遊路徑。

3.只要是中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通；配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則該密鋪多邊形可完全漫遊路徑。1 或 3 種單位圖形組合密鋪多邊形皆滿足上述判斷原則。

4.不管基本幾何拼板數量多寡，只要是中心圖形或初始圖形是可完全漫遊路徑，且可對外連通；配合可行且可對外連通的基本幾何拼板，則該密鋪多邊形可完全漫遊路徑。當然若是能將圖形切割成較少種類的基本幾何拼板，則對能進行判別是否能完全漫遊路徑越有效率。

(五)可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑分類及路徑方法數公式

1.不同密鋪多邊形之基本幾何拼板組合可形成 10 種完全漫遊路徑，將其分類為:

❶中心型又分為①花朵型，②環型；❷無中心型:線型。

2.可完全漫遊路徑之密鋪多邊形的路徑方法數結果為：

❶可完全漫遊路徑之三&六密鋪多邊形完全漫遊路徑公式分成中心花朵型及中心環型、線型 3 種。

①n 層三&六密鋪多邊形 D0 類中心花朵型、中心環型完全漫遊路徑方法數公式皆為 $2\times2^n=2^{n+1}$ 種，第 0 層為中心圖形。

②n 層三&六密鋪多邊形 E1 類線型完全漫遊路徑方法數公式為 $7\times6^{n-2}\times5$ 種(當 n≧2)。

❷可完全漫遊路徑之四&八密鋪多邊形路徑方法數公式如下：

① n 層四&八密鋪多邊形 E5I類是中心花朵型，其公式為 $4\times2^3\times2^n$ 種，第 0 層為中心圖形。

② n 層四&八密鋪多邊形 E5II類中心環型完全漫遊路徑方法數公式為 6^{n+1} 種，第 0 層為中心圖形。

③ n 層四&八密鋪多邊形 E5II類中心花朵型完全漫遊路徑方法數公式為 $6\times3^{\frac{n}{2}}$種(偶數層花朵型)、$6\times3^{\frac{n-1}{2}}$種(奇數層花朵型)，其中第 0 層為中心圖形。

(六)密鋪多邊形之可完全漫遊路徑與幾何拼板之關係

在密鋪多邊形中，基本幾何拼板組合不同卻能走出同類完全漫遊路徑，此時代表不同基本幾何拼板組合可以歸類為「等價組合(Equivalent Combination)」，亦代表將來密鋪多邊形僅須各透過 1 種基本幾何拼板組合，就可以簡化地找到完全漫遊路徑。

(七)能將密鋪多邊形完全漫遊路徑之圖形形變轉換

只要密鋪多邊形中每個單位圖形維持拓樸不變性，即原來的「圖形相鄰特徵—路徑可行進方向數」，則「密鋪多邊形完全漫遊路徑可以進行任意形變轉換」，此時密鋪多邊形即可不受圖形外觀限制、不一定要是正多邊形，可變形成不規則形，甚至完全扭曲變形，局部圖形—基本幾何拼板，完全漫遊路徑亦可不受圖形外觀限制。

(八)應用結果設計一款「高空清潔智能蜘蛛人」及全新完全漫遊路徑邏輯拼圖遊戲

解決清洗玻璃幕牆高危險工作問題，讓像流行音樂中心這種漂亮的密鋪多邊形高樓層牆面，能利用幾何拼板將整個牆面做切割分塊，找到完全漫遊路徑，有效率、一次就清潔完每一塊單位多邊形。另外還設計一款全新完全漫遊路徑邏輯拼圖遊戲，可以單人思考、雙人對戰，同時可以訓練幾何拼圖能力、又可以漫遊路徑，訓練邏輯。

【總結】

所有的密鋪多邊形皆可切割為幾何拼板，幾何拼板在一般化的討論後可以推廣至超過 2 種基本圖形組合而成，因此對於任意的密鋪圖形來說，分割成幾何拼板是必然可做的步驟，所分割出來的幾何拼板若滿足組合能完全漫遊且可對外連通，則可保證可完全漫遊，此時其路徑必為線型、花朵型或環形其中一種。

經過漫遊路徑的等價組合歸類後，可將各種不同的幾何拼板組合簡化為 1 種基本幾何拼板組合。只要密鋪多邊形中每個單位圖形維持拓樸不變性，即原來的「圖形相鄰特徵—路徑可行進方向數」，則「密鋪多邊形完全漫遊路徑可以進行任意形變轉換」。

陸、參考文獻

1.林書逸、孫培文、徐英傑(2014)。一筆畫圖形之最長路徑探討。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)。高中組數學科第三名。

2.張伯仲、李建慈、吳長庭、朱家麒(2007)。8╳8 棋盤路徑解之一般化推廣。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)。國中組數學科第二名。

3.簡丞皓(2013)。一步一腳印-探討方格棋盤中各種路徑問題。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科佳作。

4.詹壹荃、黃裕彰(2011)。三階魔方一筆畫—三階立方體中的漢米頓路徑。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)。國中組數學科最佳鄉土教材獎。

5.蕭頌叡、謝汶融、黃仁甫、闕珮菁(2012)。絲絲入扣－從縫扣子策略論空間中的一筆畫路徑。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科第三名。

6.密鋪。維基百科。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%86%E9%8B%AA

【評語】080411

1. 作品分兩個層次：鋪磚的可能性、漫遊的可能性。作者先解決密鋪多邊形切割為幾何拼板的問題，接著探討可完全漫遊之基本幾何拼板特性，討論完全漫遊路徑與幾何拼板之關係。

2. 作者考慮周詳、細膩，完整且具體地呈現問題的複雜度。

作品簡報

圖形密碼—
密鋪多邊形完全漫遊之研究

組別:國小組
科別:數學科
編號:080411

研究動機

高流燈光秀

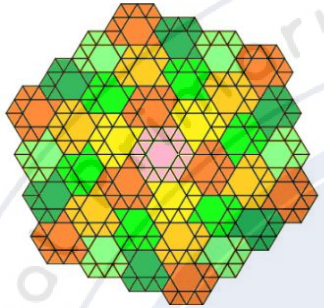
發想 發想

路徑問題

查閱 文獻

~~一筆畫問題~~

研究主題與目的



- 密鋪多邊形的圖形組成與幾何特性
- 模組化系統尋找完全漫遊路徑
- 一般化、等價組合、形變轉換與應用設計

研究架構

圖形組成 → 模組化處理 → 延伸推廣

圖形組成

單位圖形
- 角度
- 結構

密鋪多邊形
- ▪連接特徵
  - 不相連
  - 點連接
  - 邊連接
- ▪擴張方式
  - 中心型
  - 無中心型

模組化處理

完全漫遊路徑

系統分割
1. 分類
2. 標定
3. 分層數量分析
4. 重複
5. 確定

判別完全漫遊原則
1. 本身就無法進行完全漫遊
2. 本身可完全漫遊但不能對外連通
3. 本身可完全漫遊也可對外連通

路徑分類
1. 中心花朵型
2. 中心環型
3. 線型

路徑方法數公式

基本幾何拼板組合

延伸推廣

等價組合

形變轉換

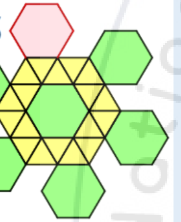
一般化
- 任意組成密鋪多邊形
- 任意幾何拼板組合

應用設計
- 高空智能蜘蛛人
- 多款拼板遊戲

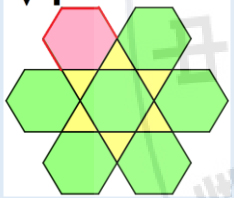
研究一、依密鋪多邊形的連接特徵，分類圖形組合

1. 密鋪條件(內角和360^0)
2. 擴張方式(有無中心)
3. 連接特徵

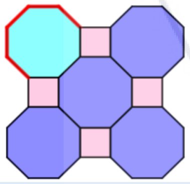
❶不相連
(Disconnected)
最大單位圖形不相連

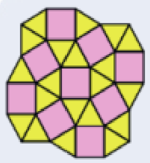
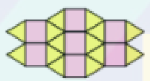
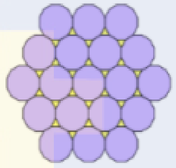
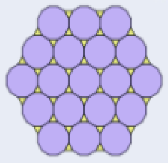
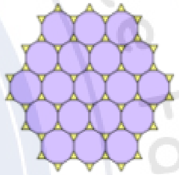
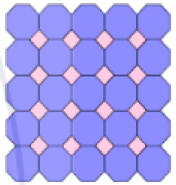
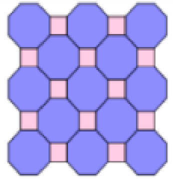
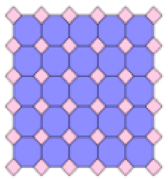
D5


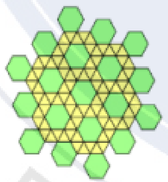
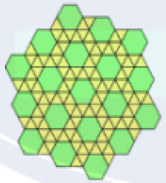
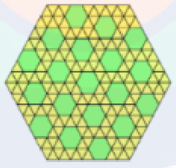
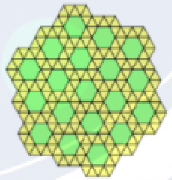
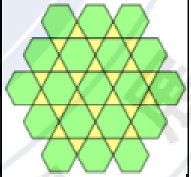
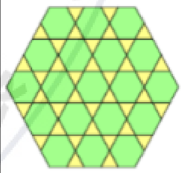
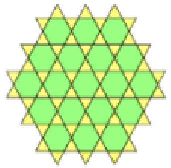
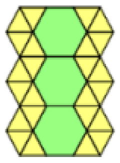
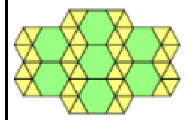
❷點連接
(Vertex to Vertex)
最大單位圖形頂點相連

V4


❸邊連接
(Edge to Edge)
最大單位圖形邊相連

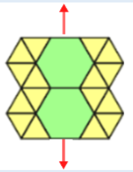
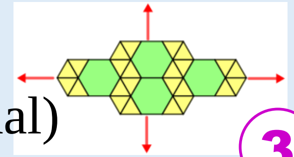
E5


圖形	三&四密鋪多邊形		三&十二密鋪多邊形			四&八密鋪多邊形		
類型	中心型	無中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型
連接特徵	點連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接	邊連接
類別	V1	E2	E7	E5	E3	E5I	E5II	E2
擴張2層示意圖								

圖形	三&六密鋪多邊形								
類型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	中心型	無中心型	無中心型
連接特徵	不相連	不相連	不相連	不相連	點連接	點連接	點連接	邊連接	邊連接
類別	D5	D3	D1	D0	V4	V2	V0	E1	E2
擴張2層示意圖									

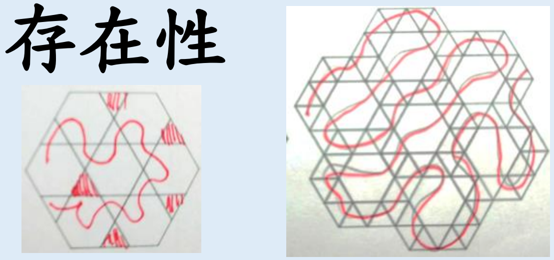
4. 圖形編碼

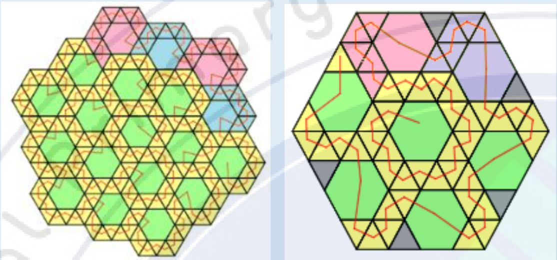
❶暴露邊數:
最外層最大單位圖形與小單位圖形不相連的邊數

❷擴張向度:
單向(unidirectional)

雙向(bidirectional)


研究二、找出可完全漫遊之密鋪多邊形的特徵

• 存在性



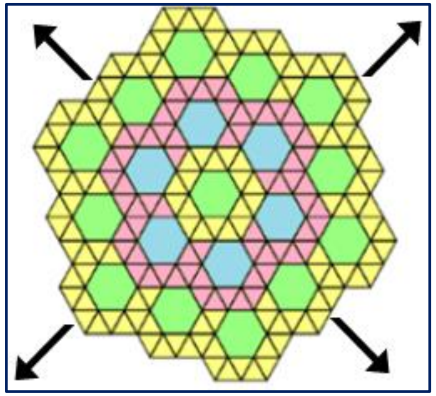


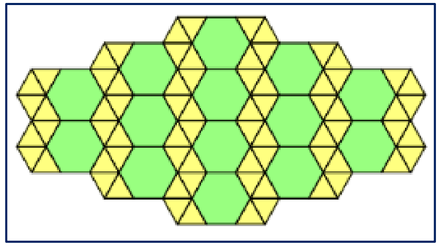
• 關鍵:圖形組合方式

• 密鋪多邊形 $\xrightarrow{\text{分割基本幾何拼板}}$ 完全漫遊

研究三、找出可分割之基本幾何拼板組合

• 模組化處理





密鋪多邊形

❶ 分類	❷ 標定	❸ 分層數量分析		❹ 重複步驟	❺ 確定
中心型	中心圖形	將除中心圖形外的第 1 層密鋪圖形進行分割		重複步驟❸開始切割第 2 層密鋪圖形	確定可能幾何拼板組合
		❸-1	計算第 1 層密鋪單位圖形的總數量	重複❸-1	
		❸-2	分析並計算可能形成基本幾何拼板個數	重複❸-2	
		❸-3	針對圖形中局部滿足基本幾何拼板計算結果去做分割	重複❸-3	
		❸-4	驗證可能基本幾何拼板	重複❸-4	
無中心型	初始圖形	針對除初始圖形外的局部去做分割		針對圖形中延伸的局部繼續去做分割	

基本幾何拼板組合舉例說明

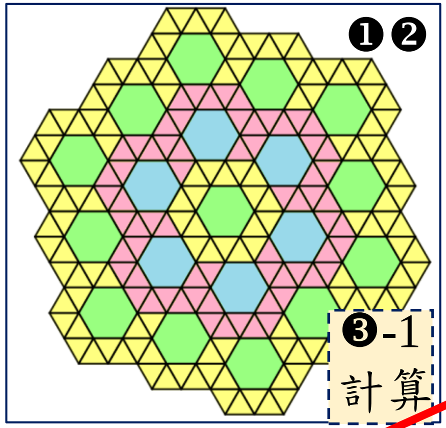
- 以三&六密鋪多邊形 D0 類 (中心型)為例

❶分類	❷標定	➔	❸分層數量分析	➔	❹重複步驟	➔	❺確定
中心型	中心圖形		分割除中心圖形外的第 1 層密鋪圖形❸-1➔❸-2➔❸-3➔❸-4		重複步驟❸切割第 2 層密鋪圖形		拼板組合

橘色系列為頂點類幾何拼板

綠色系列為頂點與頂點間類幾何拼板

❶❷



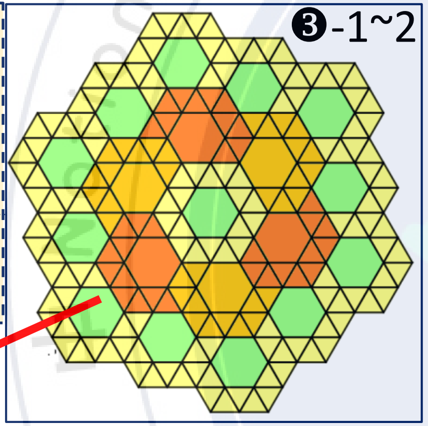
❸-1 計算

❸-2 切割

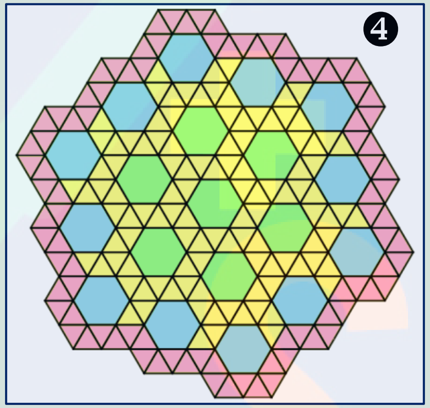
❸-3 再找

❸-4 驗證

❸-1~2

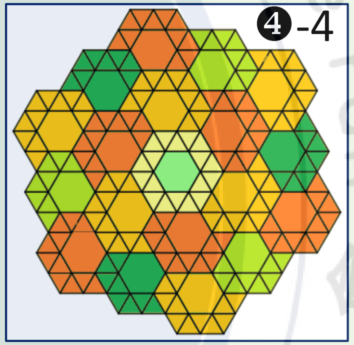


❹

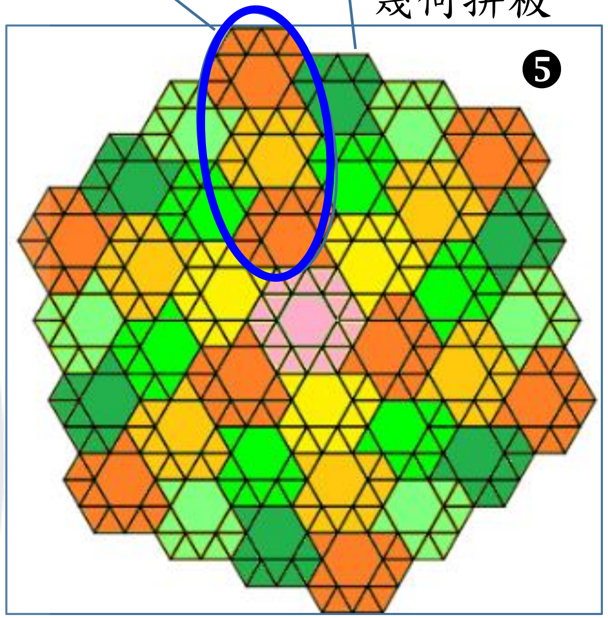


拼板滿足定義→○

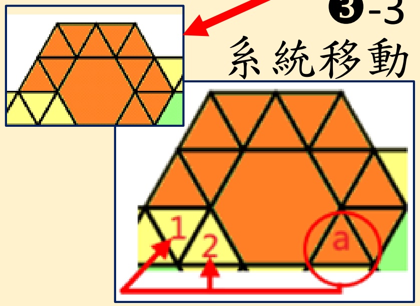
❹-4



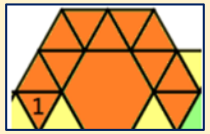
❺



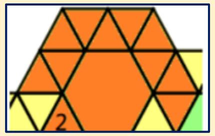
❸-3 系統移動



新拼板1

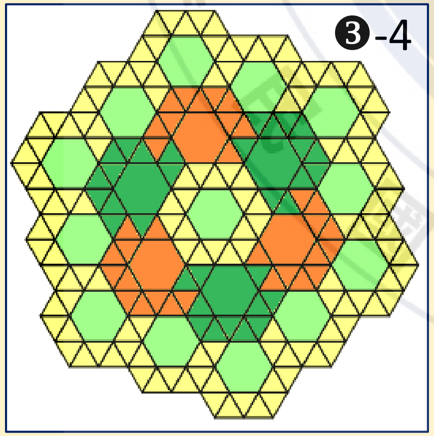


新拼板2



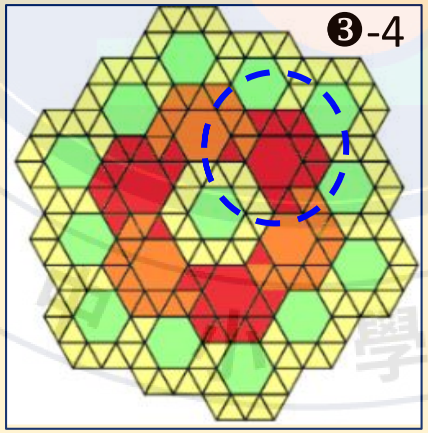
第1層2種拼板→×

❸-4



拼板不連續→×

❸-4

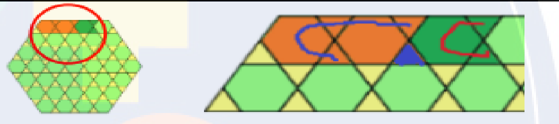
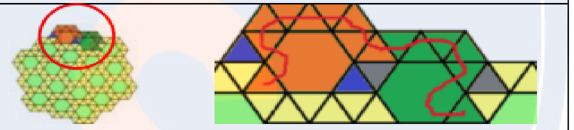
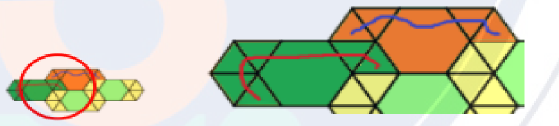
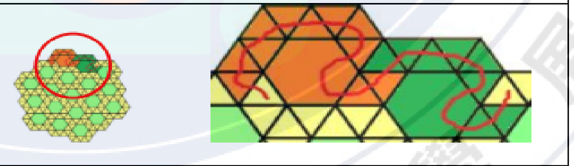
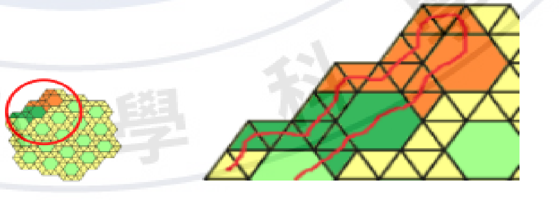


- 中心型密鋪多邊形滿足條件的基本幾何拼板，可分成：「頂點類」與「頂點與頂點間」2種。
- 驗證基本幾何拼板時，必須排除不連續或不滿足基本幾何拼板定義的情況。

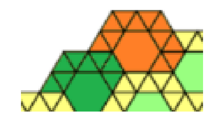
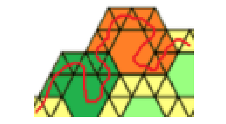
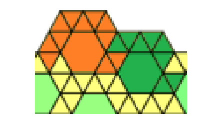
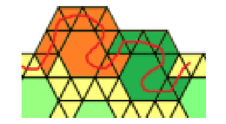
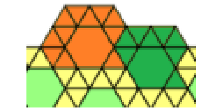
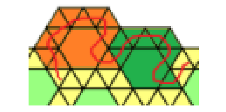
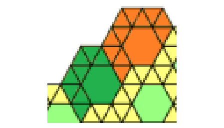
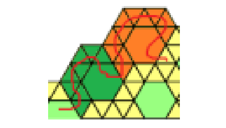
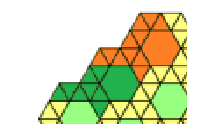
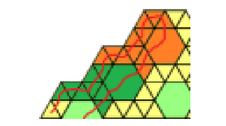
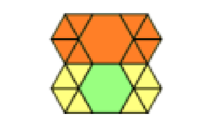
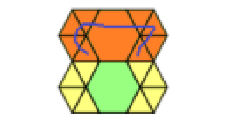
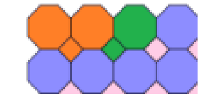
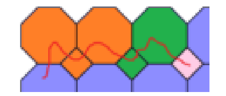
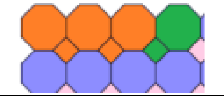
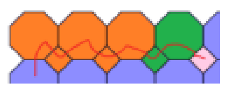
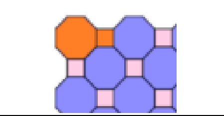
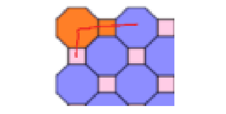
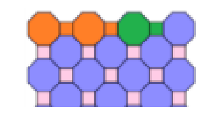
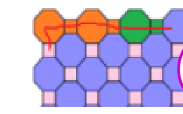
研究四、可完全漫遊之基本幾何拼板特性

嘗試漫遊 → 不一定有拼板分割就可漫遊 → 觀察特性 → 密鋪多邊形特徵 / 拼板組合圖形特徵 → 整理特性

完全漫遊基本幾何拼板特性

基本幾何拼板種類		類型		舉例
❶	本身無法完全漫遊路徑	①	一種可以一種不行	
		②	兩種都不行	
❷	本身可完全漫遊，卻無法與另一幾何拼板路徑連通	①	對外圖不連續	
		②	起終點不相連	
❸	可完全漫遊，亦可與另一幾何拼板路徑連通	①	單一可漫遊且對外可連通	
		②	組合後可漫遊且對外可連通	

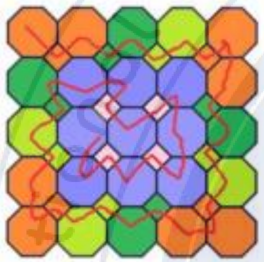
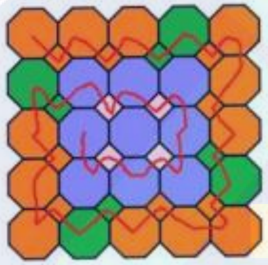
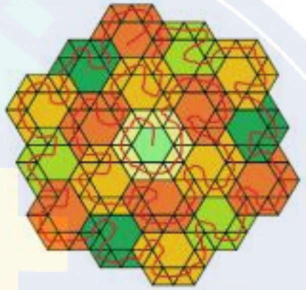
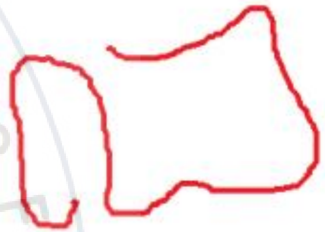
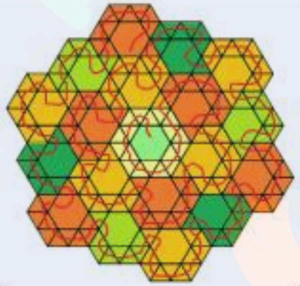
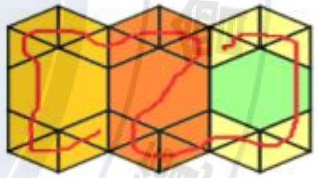
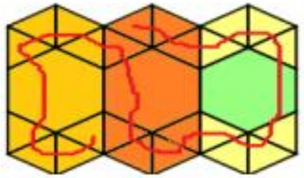
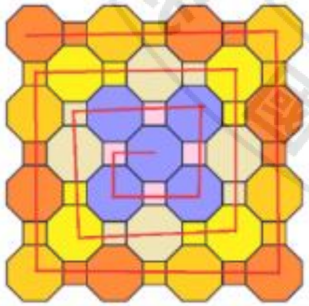
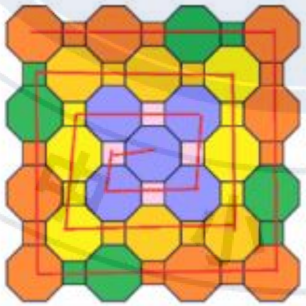
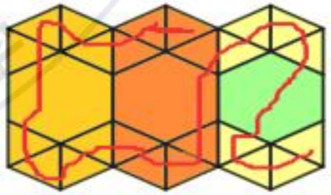
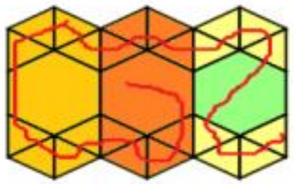
共10種基本幾何拼板組合可完全漫遊

類別	可行基本幾何拼板局部示意圖	路徑示意圖
三&六 D0-1		
三&六 D0-3		
三&六 D0-4		
三&六 D0-6		
三&六 D0-10		
三&六 E1-1		
四&八 E5I-1		
四&八 E5I-2		
四&八 E5II-1		
四&八 E5II-2		

研究五-1、可完全漫遊密鋪多邊形的路徑分類

- 路徑分類:依基本幾何拼板組合圖形特徵歸納出規律

思考

中心花朵型	類	四&八 E5I-1	四&八 E5I-2	三&六 D0-1	無中心線型	
	圖形					
	類	三&六 D0-3	三&六 D0-4	三&六 D0-6	三&六 E1	三&六 E1
	圖形					
中心環型	類	四&八 E5II-1	四&八 E5II-2	三&六 D0-10	三&六 E1	三&六 E1…
	圖形					 …

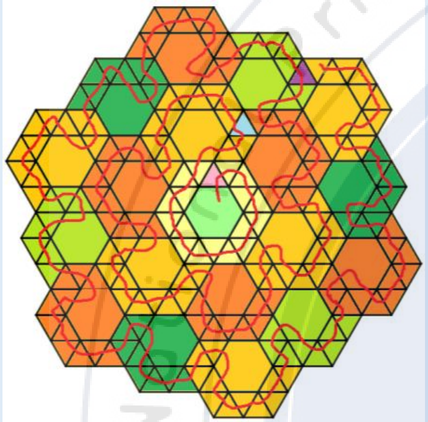
〈不管什麼路徑分類，都跟拼板組合有關，或許可以依照圖形特徵推出路徑公式〉

研究五-2、可完全漫遊密鋪多邊形路徑方法數公式

三&六D0類中心花朵型

分析：

- 粉紅▲：中心圖形對外下一層連接選擇方向有2種
- 藍色▲：第1層需選擇方向有2種
- 紫色▲：第2層需選擇方向位置
- n層路徑方法數有2^n種



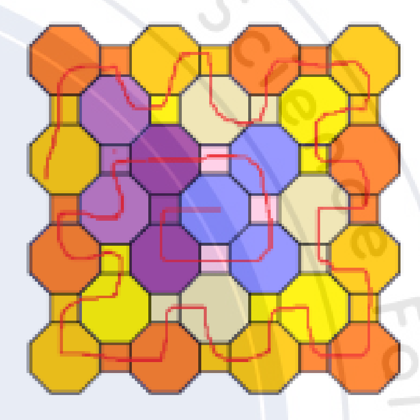
路徑方法數公式

2^{n+1} 種

四&八E5II類中心花朵型

分析：

- 深紫■或●：中心圖形出發有3種，選擇方向2種，共6種
- 淺紫■或● ：第1層後每2層連接時選擇方向有3種
- 偶數層$3^{\frac{n}{2}}$種；
- 奇數層n-1層為花朵，最外層無法形成花朵，為$3^{\frac{n-1}{2}}$種

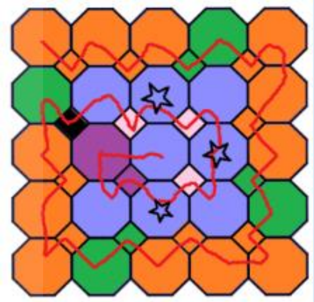


路徑方法數

偶數層 $6\times3^{\frac{n}{2}}$ 種

奇數層$6\times3^{\frac{n-1}{2}}$種

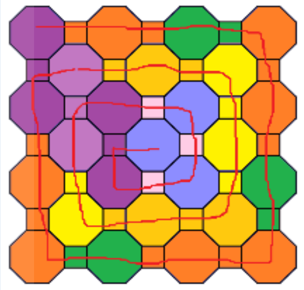
四&八E5I類中心花朵型



路徑方法數公式

$4\times2^3\times2^n$種

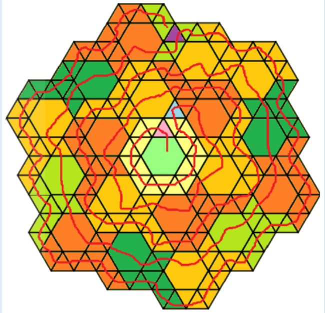
四&八E5II類中心環型



路徑方法數公式

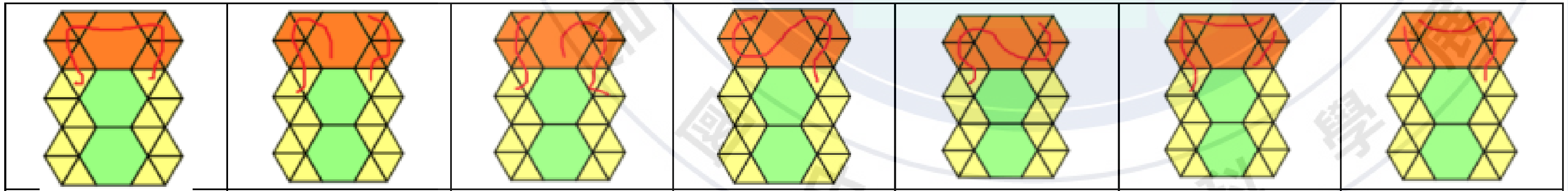
6^{n+1}種

三&六D0類中心環型



路徑方法數公式

2^{n+1}種



I	II	III	IV	V	VI	VII

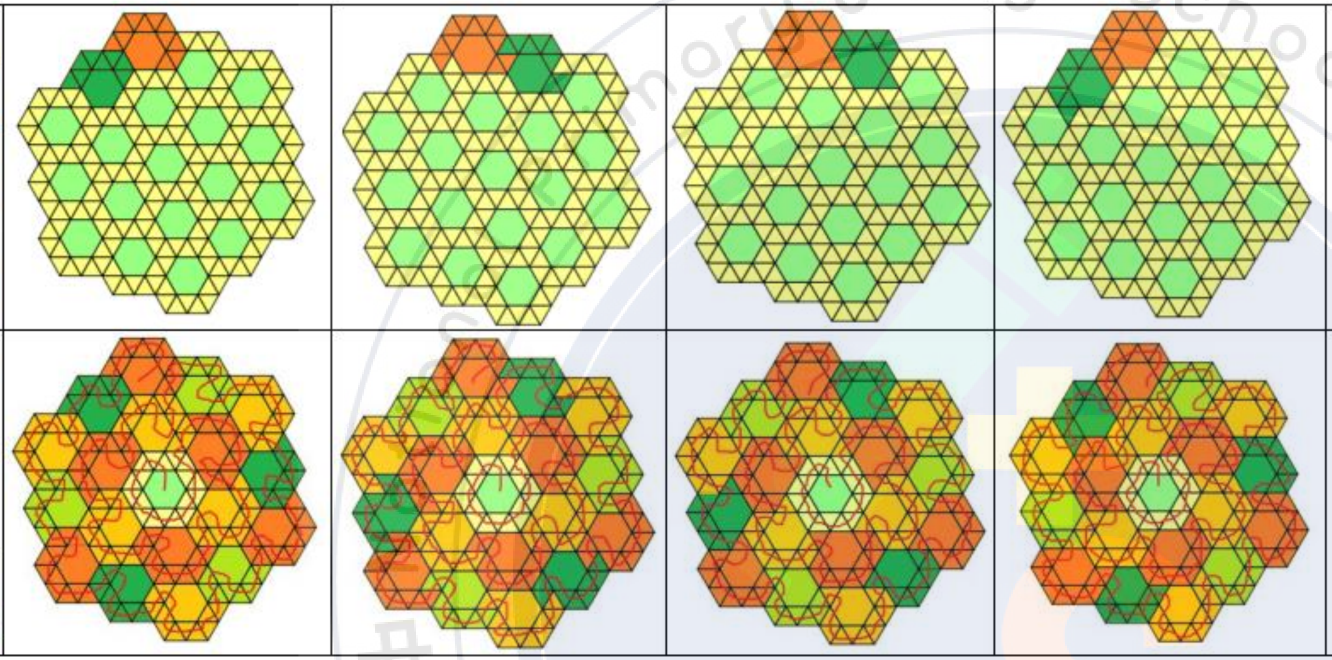
三&六E1類線型完全漫遊路徑方法數公式為 $7\times6^{n-2}\times5$ 種

研究六、完全漫遊路徑與幾何拼板之關係

拼板不同

組合不同

中心左繞



關係等價同類路徑

等價組合

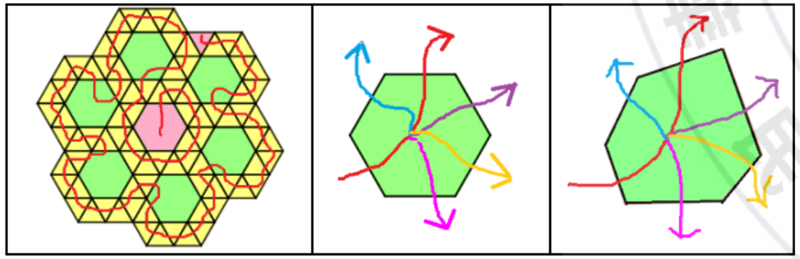
關係命名－等價關係

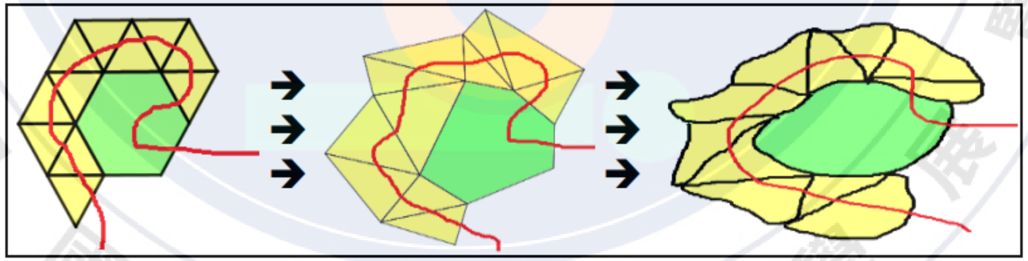
密鋪多邊形不同的拼板組合有相同路徑，此兩種拼板具有等價關係。

等價組合

密鋪多邊形僅須透過1種幾何拼板組合，可簡化地找到完全漫遊路徑。

研究七、完全漫遊密鋪多邊形之形變轉換





形變轉換

密鋪多邊形、局部圖形、完全漫遊路徑可不受圖形外觀限制，可變形成不規則形，甚至完全扭曲變形。

•拓樸不變性 ⟵ 圖形相鄰特徵—路徑可行進方向數 ⟶ 形變轉換

不受圖形外觀限制

討論一、密鋪多邊形完全漫遊路徑一般化之可行性

- 不同數量單位圖形組成之密鋪多邊形

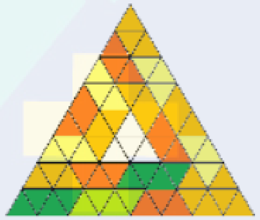
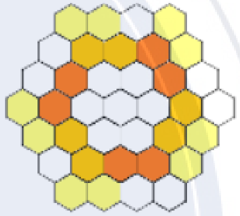
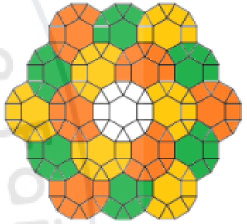
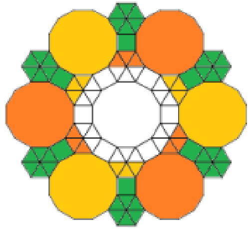
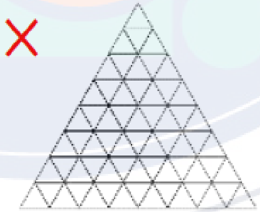
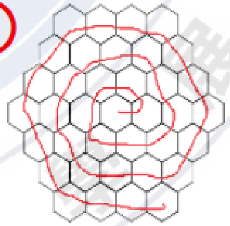
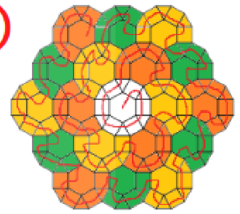
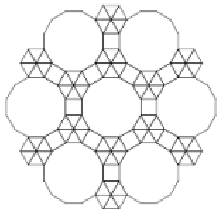
不同數量單位圖形

組成密鋪多邊形

完全漫遊路徑

- **完全漫遊判斷原則**

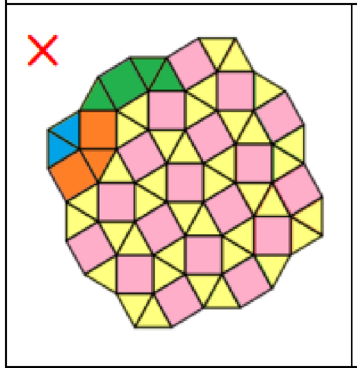
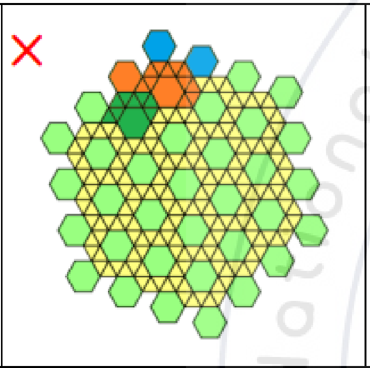
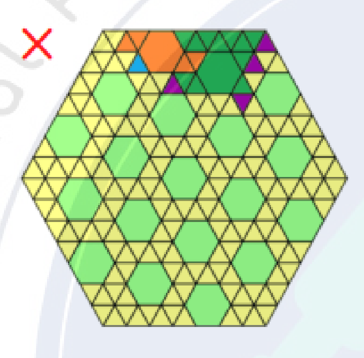
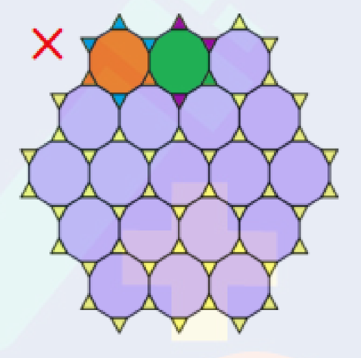
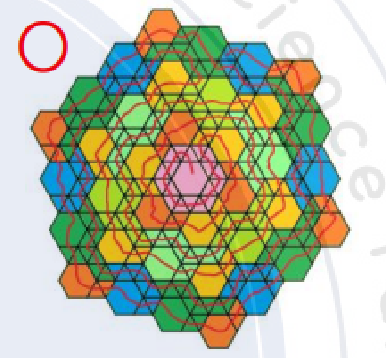
中心圖形或初始圖形是可完全漫遊且可對外連通；配合可行且可對外連通的幾何拼板，則該密鋪多邊形可完全漫遊。

組合	1 種單位圖形				3 種單位圖形				4種以上單位圖形組合不存在
舉例	三角形		六邊形		三&四&六		三&四&十二		
密鋪多邊形									
	中心圖形	拼板組合	中心圖形	拼板組合	初始圖形	拼板組合	中心圖形	拼板組合	
完全漫遊	×	○	○	○	○	○	○	○	
對外連通	×	○	○	○	○	○	○	×	
完全漫遊	× 		○ 		○ 		× 		

可一般化 ⟷ 1或3種單位圖形組合的密鋪多邊形皆滿足判斷原則

討論二、透過基本幾何拼板組合找完全漫遊一般化

• 不限數量基本幾何拼板組成

數個僅能進或僅能出之單位圖形的基本幾何拼板				3 種拼板組合
× 	× 	× 	× 	○ 
三&四密鋪多邊形 V1 類	三&六密鋪多邊形 D5 類	三&六密鋪多邊形 D1 類	三&十二密鋪多邊形 E3 類	三&六密鋪多邊形 D3 類

- 只要拼板可完全漫遊，且可對外連通，則密鋪多邊形可完全漫遊。
- 若能將圖形切割成較少種類的拼板，則能更有效判別是否完全漫遊。

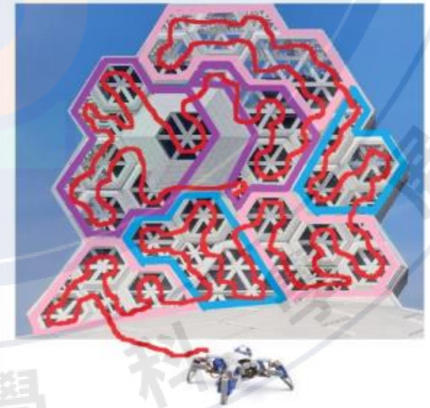
應用、設計高空清潔智能蜘蛛人及拼板遊戲

高空清潔智能蜘蛛人

清洗玻璃幕牆示意圖

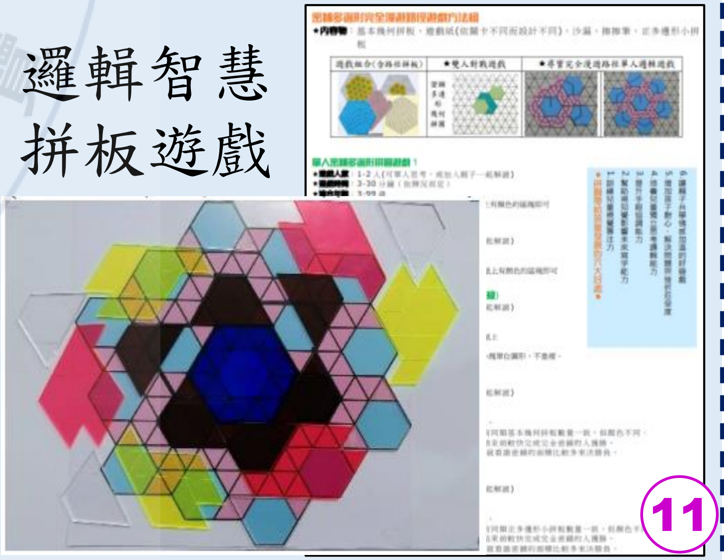
原來待清洗的

利用幾何拼板將整個牆面做切割分塊



找到完全漫遊路徑寫成程式置入「高空清潔智能蜘蛛人」

邏輯智慧拼板遊戲



結論

(一)**判斷原則:**任意數量幾何拼板組合，只要滿足完全漫遊判斷原則—切割成幾何拼板滿足可完全漫遊路徑，且可對外連通，則任意單位圖形組成之圖形可完全漫遊路徑。若是能將圖形切割成較少種類的基本幾何拼板，則能更有效率判斷是否能完全漫遊路徑。

(二)**等價組合:**可歸類同類路徑中不同幾何拼板之等價組合。

(三)**形變轉換:**滿足拓樸不變性，維持圖形相鄰特徵—路徑可行進方向數，可作圖形形變轉換。

(四)**路徑分類:**不同密鋪多邊形之基本幾何拼板組合可形成完全漫遊路徑分類有1.中心花朵型，2.中心環型，3.無中心線型。

(五)**路徑公式:**找出密鋪多邊形完全漫遊路徑方法數的計算公式，如n層三&六密鋪多邊形E1類線型路徑公式為$7 \times 6^{n-2} \times 5$ 種。

(六)**實際應用:**設計高空清潔智能蜘蛛人及邏輯智慧拼板遊戲。

參考資料

- 蕭頌叡、謝汶融、黃仁甫、闕珮菁(2012)。絲絲入扣 - 從縫扣子策略論空間中的一筆畫路徑。中華民國中小學科展作品說明書(未出版)
- 密鋪。維基百科。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%86%E9%8B%AA