中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080408

聖誕「數」好好玩

學校名稱：國立臺南大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小五 黃詠馨 小五 吳妏翎 小五 何禹岑	蔡錕承 林士揚

關鍵詞：立體卡片、三角立基、相似三角形

摘　要

本研究的目的在探討以90°直角展開直立的立體聖誕卡片中，做為聖誕樹的等腰三角形，底部的中點在凸出時傾斜的原理。我們發現立體聖誕樹底部的中點傾斜的程度和等腰三角形的高度與寬度比例有極大的關聯性。我們發現當等腰三角形的寬度固定時，若它的高度愈低，則在立體卡片以90°直角展開站立時，底部中點凸出時會愈傾斜；相反的，若等腰三角形的高度愈高，則底部中點凸出的角度會愈接近水平。我們推導出如何利用等腰三角形的高度與寬度計算出底部中點凸出時上升高度的公式，以及如何裁切等腰三角形，進而做出底部呈現水平的立體聖誕樹。

壹、研究動機

在我們四年級時，藝術與人文老師帶著我們班去奇美博物館參觀「紙上奇蹟」的展覽，其中有些作品是以 90°直角展開站立的立體卡片（如圖 1-1）。我們看到這些立體書和立體卡片呈現的立體圖案時，不禁覺得好奇：為什麼書中的圖案可以如此栩栩如生呢？大約一個月後就是聖誕節，老師讓我們做聖誕卡片應景，所以我們就想要做可以90°直角展開站立的立體聖誕樹卡片，讓這個卡片在摺成90°直角時，卡片中間能夠呈現一棵立體凸出的聖誕樹。

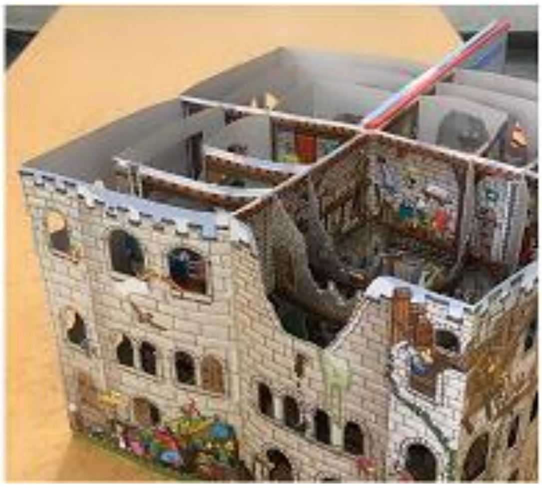


圖 1-1：以 90°直角展開站立的立體卡片

為了收集更多的資料，我們在 Youtube 上找到有關「一刀剪出立體聖誕樹卡片」的示範影片（Tao's 紙工房，2020，如圖 1-2），在這支影片中是用切割與彎摺的方式做出立體聖誕樹。首先在完全攤開的卡片中央畫一個等腰三角形對稱於卡片的中央對摺線，然後將這個等腰三角形的底邊切割開來，接著將等腰三角形的兩個側邊用「谷線」摺，等腰三角形的中央對稱軸用「山線」

摺起來，則當這個卡片摺成 90° 直角展開時，等腰三角形的部分就會因為受到卡片兩側的擠壓與拉扯而凸出來，造成立體的效果。這個等腰三角形就稱作「三角立基」。

圖 1-2：應用切割型的三角立基製作立體聖誕樹卡片，圖片取自 Tao's 紙工房

https://www.youtube.com/watch?v=NI-MtOFar-M

我們依照影片中的方法以等腰三角形實際做了立體聖誕樹卡片，所以一開始當卡片完全攤開時，等腰三角形底部是在一條水平線上（如圖 1-3），但是當我們將卡片摺成90°直角時，做為聖誕樹的等腰三角形，底部的中點會往上翹（如圖 1-4），也就是說**聖誕樹的底部變成傾斜的。**聖誕樹底部的中點與左右的兩個端點不在同一個水平高度。我們也使用黏貼式的等腰三角形來做立體聖誕樹（如圖 1-5），將卡片摺成 90°直角立起來之後，都有這種情形（如圖 1-6）。

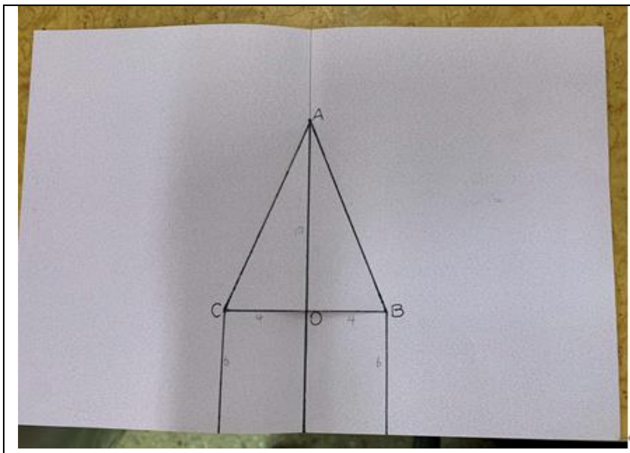


圖 1-3：卡片攤開時，等腰三角形底部是在一條水平線上。	圖 1-4：卡片摺成90°直角時，做為聖誕樹的等腰三角形底部的中點（K 點）會往上翹。

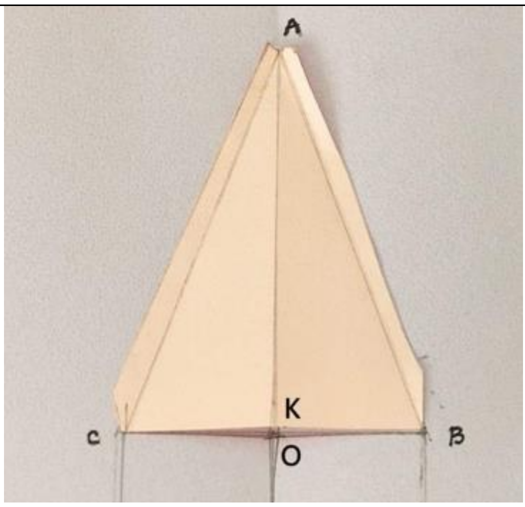
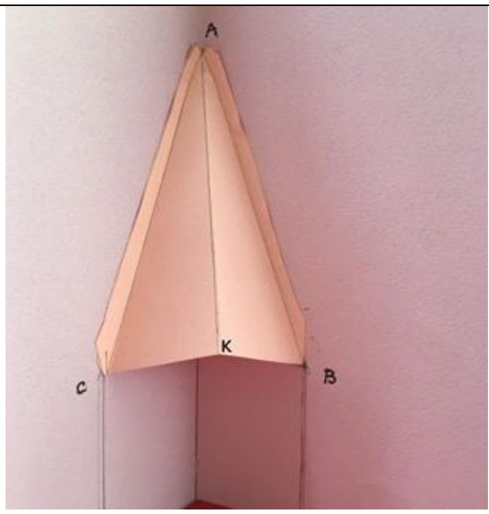
	

圖 1-5：用黏貼式的等腰三角形做立體聖誕樹。	圖 1-6：卡片摺成90°直角時，做為聖誕樹的等腰三角形底部的中點（K 點）會往上翹。

我們覺得很好奇，一開始沒有意料到這個結果，也不清楚為什麼會有這種傾斜的現象，所以就想要研究當立體卡片摺成90°直角時，凸出的三角立基底部會傾斜的原理。如果我們能夠了解它背後的原理，便能進一步找到解決此問題的方法，如此才能在摺成90°直角的立體卡片中，呈現一棵完美的聖誕樹。

貳、研究（實驗）目的

一、探討等腰三角形的高度與寬度如何影響立體聖誕樹底部中點的上升高度。

二、探討如何使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

三、探討等腰三角形的底部中點在卡片開合的過程中是如何改變高度的。

四、探討如何裁切等腰三角形使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

五、應用前面分析的結果製作完美的立體聖誕樹卡片。

參、文獻探討與名詞定義

我們查詢歷屆科展的作品，發現只有在第 53 屆中小學科展的作品中有一個關於立體書和立體卡片的相關研究，「POP-UP」-立體書中三角立基的研究。不過他們研究的立體書是將三角形黏貼在兩面書頁上，當書頁完全攤開成180°時，三角形因為受到兩邊力量的拉扯而站立起來，跟我們製作立體聖誕樹卡片的方法不同，研究目的也不同。我們製作的立體聖誕樹是當卡片完全攤平時，三角形平貼在卡片上，當卡片摺成90°直立時，三角形才凸出來。

為了方便起見，我們也把做為立體聖誕樹的等腰三角形ABC 稱作「三角立基」，這個等腰三角形是對稱於立體卡片中央的對摺線，也就是說，等腰三角形的頂點 A 和其底部 $\overline{BC}$ 的中點 O 都恰好在立體卡片中央的對摺線上。而等腰三角形ABC 的左右兩個邊，$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 等長，且對稱於卡片中央的對摺線。同時，$\overline{BC}$ 垂直於卡片的中央對摺線，$\overline{OB}=\overline{OC}$，並與卡片的底部邊緣平行。為統一規格且使測量結果有一致的標準，我們在製作三角立基時，是假設等腰三角形 ABC 的底部 $\overline{BC}$ 與卡片底部的邊緣相隔距離為 6 公分。接下來我們定義下列名詞（如圖 3-1）：

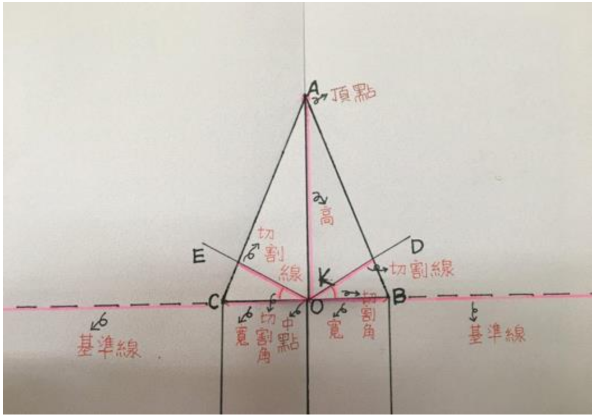


圖 3-1：三角立基的各部位名稱。

1. 高（$\overline{OA}$）：垂直於等腰三角形ABC的底部 $\overline{BC}$ 的線段，為本研究的操縱變因。如前面所說的，O 點為 $\overline{BC}$ 的中點。
2. 基準線與寬（$\overline{OB}$）：基準線是與卡片底部邊緣平行且相隔距離為 6 公分的水平線，恰好與卡片中央的對摺線互相垂直。等腰三角形的底部 $\overline{BC}$正好位於基準線上，$\overline{OB}=\overline{OC}$，我們定義三角立基的寬為等腰三角形 ABC 底部長度的二分之一，也就是 $\overline{OB}$ 或 $\overline{OC}$ 的長度，為本研究的操縱變因。
3. D 點、E 點、切割線：在 $\overline{AB}$上取一點 D，我們稱 $\overline{OD}$為切割線。同樣的，在$\overline{AC}$上取一點 E，使 $\overline{AE}$ 和 $\overline{AD}$ 等長並對稱於中央對摺線，則 $\overline{OE}$ 也是切割線。
4. 切割角：以 O 為中心，$\overline{OB}$為始邊，逆時鐘旋轉到終邊 $\overline{OD}$（即切割線）所形成的 $\angle BOD$ 稱為切割角。$\angle COE$ 也是切割角，且 $\angle BOD=\angle COE$。當切割角為 $0°$ 時，D 點恰好和 B 點重合，E 點恰好和 C 點重合。
5. K 點：位於三角立基的底部中點上，當卡片攤開平放時，原本是與 O 點重合的，但是在將立體卡片沿著中央對摺線摺成$90°$而站立起來的時侯，會隨著三角立基移動而向前凸出來的點。
6. $\overline{DG}$與$\overline{EH}$：在立體卡片的底部邊緣取 G 和 H 點，使得 $\overline{DG}$ 與 $\overline{EH}$ 恰好垂直於卡片的底部邊緣，畫這兩條線是為了測量 D 點和 E 點在立體卡片直立時的垂直高度。

7. 高度差：當立體卡片沿著中央對摺線摺成 90°而站立起來的時候，將 K 點的垂直高度減去 $\overline{DG}$（或$\overline{EH}$）的長度稱為高度差，為本研究要測量的應變變因。

肆、研究工具

1. 丹迪紙、剪刀、美工刀、切割墊、膠水、雙面膠。
2. 直尺(15 公分/30 公分)、量角器。
3. 立體尺：因為立體尺有三角錐，可以確保其垂直在 L 型測量平台上，不會因尺的置放角度不同而影響測量結果。另外，因為立體尺 0 點至尺的頂點有一段空白，我們測量結果為 1 公分，故測量 K 點結果均會加 1（圖 4-1）。
4. L 型測量平台(三角板\珍珠板\膠帶) （圖 4-2）：為了卡片打開的角度能固定在 90 度，以便測量三角立基的 K 點的實際高度，我們試著用許多工具固定。經過改良之後，我們做出用來測量的工具是將珍珠板黏起來呈 L 形，然後把 L 型珍珠板和另一塊當底座的珍珠板黏接在一起；最後在做好的珍珠板頂端再黏一個直角三角板以 L 型珍珠板由上至下確實保持直角。

	
圖 4-1：立體尺，0 點至尺的邊緣相距 1 公分	圖 4-2：測量三角立基的 K 點實際高度的 L 型測量平台。

伍、研究方法、結果與討論

一、研究一：探討不同的等腰三角形如何影響立體聖誕樹底部中點的上升高度。

我們在這個小節中，先做實驗探討不同等腰三角形的高度和寬度，立體聖誕樹底部中點的上升高度有何不同。我們主要是使用一體成形的切割方式來製作聖誕卡片，輔以黏貼方式來驗證測量結果。製作與測量方式如下：

（一）一體成形切割方式：（圖 5-1-1）

1. 將丹迪紙左右對摺，並畫出中央的垂直對稱軸。
2. 沿著對稱軸，從底部往上量 6 公分，設定為 O 點。接下來，跟對稱軸垂直，過 O 點畫出水平線。然後在水平線上，O 點左右兩邊依照預定的長度各取 B 點和 C 點，要使 $\overline{OB}$=$\overline{OC}$。
3. 在對稱軸上依照預定的 $\overline{OA}$ 長度設定 A 點，再連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$，得到等腰三角形 ABC，$\overline{OA}$即為這個等腰三角形 ABC 在底邊 $\overline{BC}$ 上的高。
4. 沿著 $\overline{\mathrm{BC}}$ 切開，再將$\overline{OA}$摺成「山線」，並將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 摺成「谷線」。
5. 將卡片摺成90° 展開直立並使三角立基凸出，置於 L 型測量平台上並固定好，再以立體尺測量 K 點距離平台底部的實際高度。（圖 5-1-2）

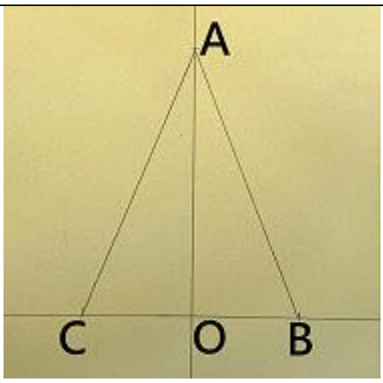


圖 5-1-1：用切割方式製作三角立基，等腰三角形 ABC 對稱於$\overline{OA}$。沿著 $\overline{\mathrm{BC}}$ 切開，**再將$\overline{OA}$摺成「山線」，並將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 摺成「谷線」**。	圖 5-1-2：將卡片摺成90° 展開直立，使三角立基凸出，置於 L 型測量平台上並固定好，再以立體尺測量 K 點距離測量平台底部的實際高度。

（二）黏貼方式（圖 5-1-3）

1. 如同切割方式的步驟 1~3，在卡片上畫出對稱於中央對摺線的等腰三角形 ABC。
2. 在另一張紙上畫出相同大小的等腰三角形 ABC，並在兩側邊的外圍預留一條細長的帶區域做為黏貼處，將它剪下再黏貼至卡片上，使它與卡片上的等腰三角形重合。
3. 將卡片摺成90° 展開直立並使黏貼的三角立基凸出，置於 L 型測量平台上並固定好，再以立體尺測量 K 點距離平台底部的實際高度。（圖 5-1-4）

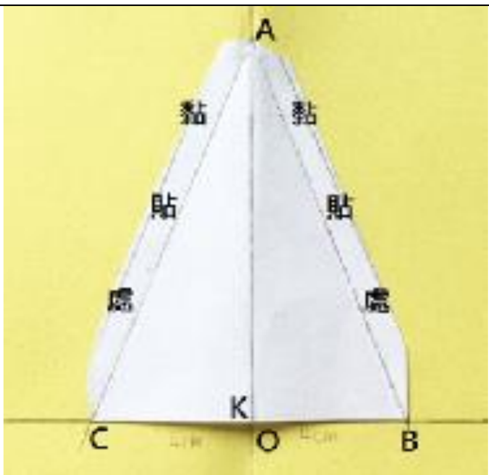


圖 5-1-3：在另一張紙上畫出相同大小的等腰三角形 ABC，並在兩側邊的外圍預留一條細長的帶區域做為黏貼處，將它剪下再黏貼至卡片上，使它與卡片上的等腰三角形重合。	圖 5-1-4: 將卡片摺成90° 展開直立並使黏貼的三角立基凸出，置於 L 型測量平台上，固定好之後再以立體尺測量 K 點距離平台底部的實際高度。

（三）實驗觀測結果：

我們以實驗進行各種不同三角立基的測量，將 K 點在卡片摺成90°之後的實際高度測量並紀錄下來，觀測結果整理成（表 5-1-1）。其中$\overline{OA}$即為等腰三角形在底邊上的高，$\overline{OB}$ 則為等腰三角形底邊寬度的一半。表中每一欄的數據，左側黑色數字為使用切割方式製作的測量結果，右側藍色數字為使用黏貼方式製作的測量結果，單位皆為公分。

當卡片完全攤平時，K 點是和 O 點重合的，也就是跟卡片底部邊緣的垂直距離為一開始所設定的 6 公分，但是從（表 5-1-1）的結果可看出，當卡片摺成90°時，做為立體聖誕樹的三角立基凸出來之後，K 點的高度都增加了。進一步我們發現：

表 5-1-1 不同高度和寬度的等腰三角形做成的三角立基，底部 K 點上升的情形。

$\overline{OB}$ 寬 / $\overline{OA}$ 高	2 公分		3 公分		4 公分		5 公分		6 公分		7 公分	
8 公分	6.5	6.4	7.3	7.0	7.9	8.0	8.6	8.7	9.5	9.2	10.5	10.6
9 公分	6.5	6.4	7.2	6.9	7.5	7.8	8.5	8.6	9.1	9.1	10.2	10.3
10 公分	6.5	6.4	7.1	6.8	7.6	7.6	8.3	8.5	9.0	8.8	10.0	10.1
11 公分	6.5	6.3	6.9	6.8	7.4	7.4	8.0	8.1	8.8	8.7	9.6	9.7
12 公分	6.5	6.2	6.8	6.7	7.3	7.5	7.7	8.0	8.6	8.6	9.5	9.5

1. 當等腰三角形的高$\overline{OA}$固定時，$\overline{OB}$越長（代表等腰三角形越寬）則 K 點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。
2. 當$\overline{OB}$固定時（代表等腰三角形的底邊固定），若等腰三角形的高$\overline{OA}$越小，則 K 點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。

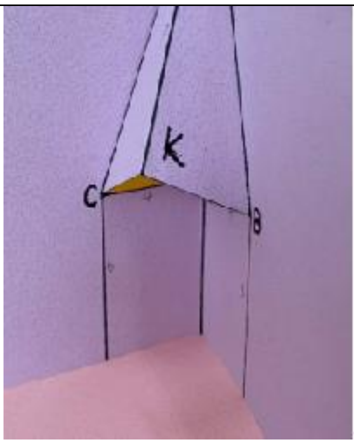
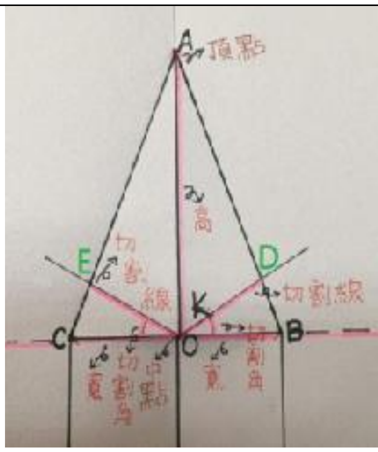
根據以上兩點，我們可以推論，**<u>若等腰三角形 ABC 的頂角 $\angle$BAC越大</u>**，則卡片摺成$90°$直立時，做為立體聖誕樹的三角立基凸出來之後，K 點的高度增加越多，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。相反的，**<u>若等腰三角形 ABC 的頂角 $\angle$BAC越小</u>**，則卡片摺成$90°$直立時，做為立體聖誕樹的三角立基凸出來之後，K 點的高度增加越少。

二、研究二：探討如何使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

確認立體聖誕樹凸出時的底部會因為 K 點上升而呈現傾斜的現象之後，我們開始思考如何解決這個問題。根據前面所說的立體卡片作法，當卡片摺成$90°$直立時，凸出的立體聖誕樹的底部就是 $\overline{KB}$ 和 $\overline{KC}$ （如圖 5-2-1）。因為在立體卡片的開合過程中，卡片上的 B 點和 C 點相對於卡片的位置是固定不會動的，所以當 K 點的高度增加之後，代表底部的 $\overline{KB}$ 和 $\overline{KC}$ 便會因此而呈現傾斜的狀況。

（一）思考改良方法並進行實驗：

那如果我們不要用 $\overline{KB}$ 和 $\overline{KC}$當作立體聖誕樹的底部呢？回到切割式立體聖誕樹卡片作法的步驟 4，我們不要再沿著 $\overline{BC}$ 切開。改成先在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上各取一點 D 和 E，使 $\angle BOD = \angle COE =$ 事先預定的切割角（如圖 5-2-2）。注意，**這時侯卡片是完全攤平的，所以 K 點是和 O 點重合的。**

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>圖 5-2-1：因為 K 點上升，使得代表底部的 $\overline{KB}$ 和 $\overline{KC}$ 因此而呈現傾斜的狀況。</td>
<td>圖 5-2-2：在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上各取一點 D 和 E，使 $\angle BOD = \angle COE$。</td>
</tr>
</table>

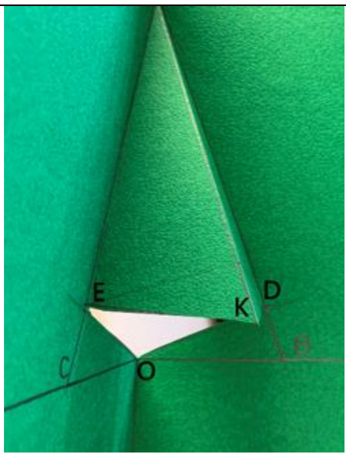


圖 5-2-3：只要選取適當的切割角，也就是 ∠BOD 和 ∠COE ，就可以讓凸出的立體聖誕樹的底部 $\overline{KD}$ 和 $\overline{KE}$ 變成水平的。

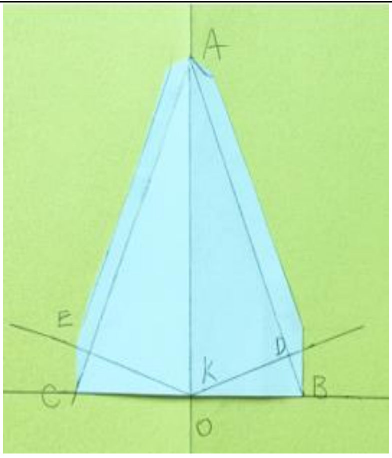


圖 5-2-4：黏貼式的三角立基也是可以用同樣的作法。在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上各取一點 D 和 E，使 ∠BKD = ∠CKE。再將三角形 BKD 和三角形 CKE 裁切掉。

我們改良的方法是沿著 $\overline{KD}$ 和 $\overline{KE}$ 切開來，使原本的等腰三角形變成「箏形」，則當立體卡片摺成 90°直立起來的時候，凸出的立體聖誕樹的底部就會變成 $\overline{KD}$ 和 $\overline{KE}$了。因為 D 點和 E 點是比 B 點和 C 點的位置高，所以我們只要選取適當的切割角，就可以讓凸出的立體聖誕樹的底部就會變成水平的了（如圖 5-2-3）。黏貼式的三角立基也是可以用同樣的作法（如圖 5-2-4）。所以我們接下來就針對不同的等腰三角形與不同的切割角進行實驗，觀測 K 點和 D、E 兩點的垂直高度差，並將結果紀錄如下。以下皆是以**切割方式**製作三角立基的測量結果，表格中的角度是代表∠BOD 和 ∠COE 的角度。

表 5-2-1　$\overline{OB}$=2 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overleftrightarrow{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度
8 公分	0.5	0.4	0.1	0	-0.2	-0.3	-0.4
9 公分	0.6	0.2	0.1	0	-0.1	-0.3	-0.5
10 公分	0.6	0.3	0.2	0	-0.2	-0.4	-0.5
11 公分	0.5	0.2	0	-0.1	-0.2	-0.2	-0.5
12 公分	0.5	0.1	0	-0.1	-0.3	-0.5	-0.6

表 5-2-2　$\overline{OB}$=3 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	16 度	20 度	24 度	25 度	30 度
8 公分	1.3	1.1	0.8	0.7	——	0.5	--	0.3	0
9 公分	1.2	0.9	0.8	0.3	——	0.2	0	-0.1	-0.2
10 公分	0.9	0.9	0.7	0.3	——	0	--	-0.4	-0.4
11 公分	0.9	0.5	0.5	0.1	0	-0.1	--	-0.4	-0.6
12 公分	0.8	0.6	0.4	0.1	——	-0.2	--	-0.2	-0.5

表 5-2-3　$\overline{OB}$=4 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度
8 公分	1.9	1.3	1.1	1.1	0.5	0.4	0
9 公分	1.5	1.2	0.8	0.6	0.3	0.1	-0.2
10 公分	1.5	1.0	0.9	0.5	0.2	0	-0.4
11 公分	1.4	1.0	0.8	0.4	0.1	-0.2	-0.5
12 公分	1.3	0.7	0.5	0.3	0	-0.4	-0.8

表 5-2-4　$\overline{OB}$=5 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度	35 度	40 度
8 公分	2.7	2.1	1.8	1.6	1.2	1	0.5	--	0
9 公分	2.4	2.1	1.7	1.3	0.9	0.5	0.1	0	--
10 公分	2.3	1.5	1.4	1.1	0.8	0.4	0	--	--
11 公分	2.3	1.9	1.4	1.2	0.8	0.3	0.1	--	---
12 公分	1.7	1.4	1	0.8	0.3	0	-0.4	--	--

表 5-2-5 $\overline{OB}$=6 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度	32 度	35 度	45 度
8 公分	3.5	3	2.4	2.4	1.7	1.5	1.2	--	--	-0.1
9 公分	3.5	2.7	2.1	2.1	1.3	0.8	0.8	--	--	-0.1
10 公分	3	2.6	2.1	1.6	1.4	0.9	0.4	--	-0.1	
11 公分	2.8	2.5	1.8	1.4	1	0.7	0.3	0	--	
12 公分	1.7	1.2	1.1	1	0.2	0	-0.1	--	--	

表 5-2-6 $\overline{OB}$=7 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overleftrightarrow{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度	35 度	40 度	45 度	48 度	51 度
8 公分	4.4	3.8	3.5	3.8	2.4	2	1.7	--	__	__	--	-0.1
9 公分	4.2	3.6	3	3	2	1.5	1.6	-	-__	__	0	--
10 公分	4.1	3.3	2.9	2.1	1.9	1.4	1.2	--	__	-0.1	--	--
11 公分	3.5	3.2	1.6	1.9	1.5	1.2	0.6	--	-0.1	__	__	--
12 公分	3.3	3	2.3	1.8	1.2	1	0.4	0.1	--	--	--	---

（二）歸納觀測結果：

針對寬度與高度不同組合的各種三角立基，根據上面的觀測結果，我們找到了使 K 點和 D、E 兩點的垂直高度差為零（或非常接近零）所需要的切割角。同時，我們也針對這些觀測結果歸納出下面兩個性質：

1. 要使高度差為零，**$\overline{OA}$與切割角 ∠BOD、∠COE 的關係**：

   固定 $\overline{OB}$ 的長度，當$\overline{OA}$愈小時，∠BAC 就會愈大，K 點就會翹得愈高。而為了使聖誕樹的底部能保持水平，因此 D 點及 E 點就要愈高，所以要使立體聖誕樹的底部保持水平（即高度差為零）的切割角 ∠BOD 和 ∠COE 的角度就要愈大。

2. 要使高度差為零，**$\overline{OB}$與切割角 ∠BOD、∠COE 的關係**：

   固定 $\overline{OA}$ 的長度，當$\overline{OB}$愈寬時，∠BAC就會愈大，K 點會翹得愈高。為了使聖誕樹的底部能保持水平，因此 D 點及 E 點就要愈高，所以要使立體聖誕樹的底部保持水平（即高度差為零）的切割角 ∠BOD 及 ∠COE 的角度就要愈大。

為了更精確的分析能使高度差為零的切割角大小和 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 的數量關係，我們需要更進一步的探討下面這個問題： **K 點在卡片開合的過程中是如何改變高度的**？

三、研究三：探討等腰三角形的底部中點在卡片開合的過程中是如何改變高度的。

根據前面【研究一】的結果，我們發現當立體卡片摺成 90° 直立時，等腰三角形底部中點（K 點）上升的高度大小是跟頂角 $\angle BAC$ 的大小有關。當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越大時，K 點上升的高度越大；相反的，當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越小時，K 點上升的高度則越小。

而頂角 $\angle BAC$ 的大小跟 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的傾斜程度有關，因為等腰三角形 ABC 是對稱於卡片中央的對摺線，所以當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越大時，等腰三角形的兩側邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 越接近水平（如圖 5-3-1）；而當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越小時，兩側邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 越接近垂直（如圖 5-3-2）。所以**在立體卡片開合的過程中，會影響 K 點如何移動位置的因素，應該與 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 這兩條側邊的傾斜程度有關。**

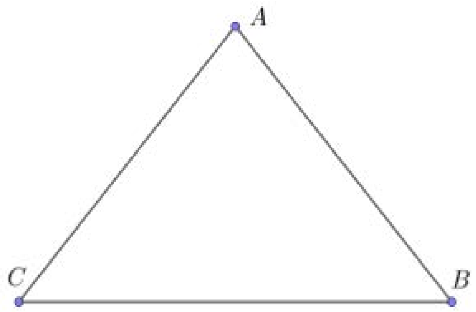
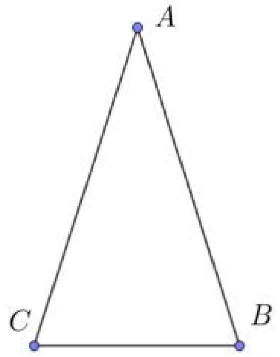
	

圖 5-3-1：當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越大時，兩側邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 越接近水平。	圖 5-3-2：當等腰三角形的頂角 $\angle BAC$ 越小時，兩側邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 越接近垂直。

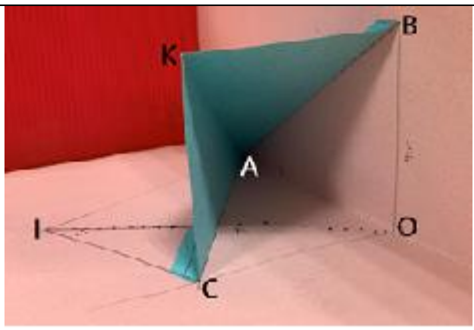
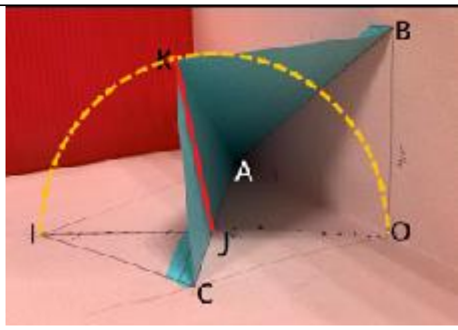

	

圖 5-3-3：將卡片的左半邊平放在桌上，卡片的右半邊和桌面垂直，沿著 $\overline{AC}$ 的方向觀察。	圖 5-3-4：在 $\overline{AC}$ 上取 J 點，使 $\overline{JO}$ 垂直 $\overline{AC}$。K 點移動的軌跡恰好是一個圓，圓心為 J 點，半徑為 $\overline{JO}$。而且 $\overline{JO}=\overline{JI}=\overline{JK}$ 。

因此，<u>**我們換另一個角度觀察摺成 90° 的立體卡片**</u>。先將卡片完全攤開平放在桌上，固定卡片的左半邊不動，然後將卡片的右半邊順著中央對摺線摺起來。從一開始的攤平，到跟卡片的左半邊垂直（如圖 5-3-3），這時侯三角立基（圖中藍色的部分，由直角三角形 ABK 和直角三角形 ACK 組成）會逐漸凸起來，K 點也會隨著移動。

再繼續摺，最後使得卡片的左右兩邊重合。我們發現 K 點移動的軌跡會是一個半圓弧 OKI（如圖 5-3-4），這個半圓弧OKI 的圓心是 J 點，半徑長是 $\overline{JO}$，而且 $\overline{JO}=\overline{JI}=\overline{JK}$ 。一開始當卡片完全攤開平放時，K 點和 O 點重合，當卡片左右兩邊完全摺疊閉合時，K 點會移動到 I 點，並和 I 點重合。所以直角三角形 AOC、直角三角形 AIC、直角三角形 AKC，三者是全等的（如圖 5-3-5）。同時，$\overline{OI}$ 垂直 $\overline{AC}$ ，並相交於 J 點。

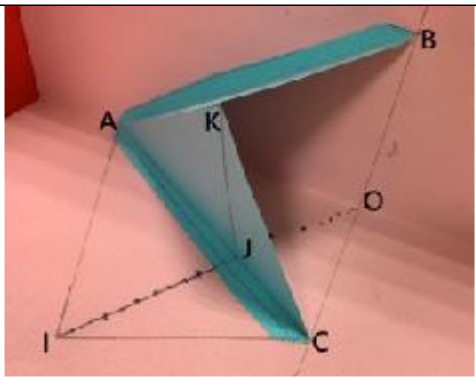
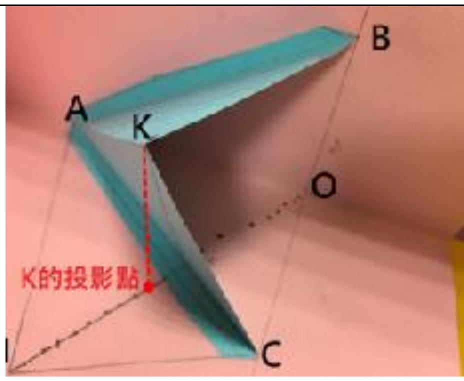
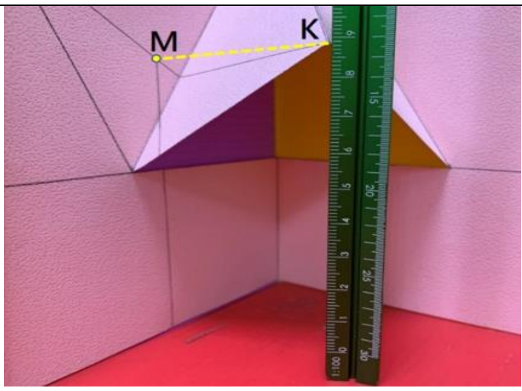
	

圖 5-3-5：直角三角形 AOC 和直角三角形 AIC 全等，且對稱於$\overline{AC}$，兩者互為鏡射。同時，$\overline{OI}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 J 點。	圖 5-3-6：K 點在卡片左半邊的垂直投影點恰好落在半圓弧的直徑 $\overline{OI}$ 上。

因為 K 點移動的軌跡是在以 J 點為圓心的半圓弧 OKI 上，所以不管 K 點移動到圓弧上的哪個位置，K 點在卡片左半邊的垂直投影點，都會恰好落在通過 J 點的半圓的直徑 $\overline{OI}$ 上（如圖 5-3-6）。

	圖 5-3-7：當卡片摺成 90° 並直立時，K 點的高度正好就是 K 點在卡片上的投影點(M 點)到卡片底部邊緣的垂直距離，也就是說，此時 M 點和 K 點是在同一個水平高度。

這個發現告訴我們，當卡片摺成 $90°$ 並直立時，我們在【研究一】的實驗裡觀測到的K點距離測量平台的高度，正好就是這時侯K點在卡片上的投影點(稱為M點)，到卡片底部邊緣的垂直距離（如圖5-3-7）。所以，只要找到這個投影點(M點)的位置，就可以在卡片上畫一條通過投影點(M點)並與卡片底部邊緣平行的水平線L（如圖5-3-8），然後這條水平線L和等腰三角形的兩條側邊 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的交點稱為D和E。連接 $\overline{OD}$ 和 $\overline{OE}$ ，則$\angle BOD$ 和 $\angle COE$ 就是我們在【研究二】的實驗中所要尋找的，能讓立體聖誕樹的底部呈現水平的最佳切割角。

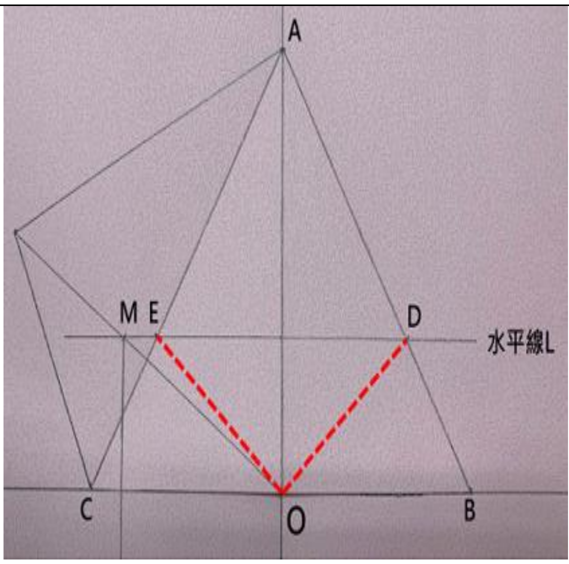


圖5-3-8：畫一條通過投影點(M點)並與卡片底部邊緣平行的水平線L，然後L和等腰三角形ABC的兩條側邊 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的交點稱為D點和E點。連接 $\overline{OD}$ 和 $\overline{OE}$ ，則 $\angle BOD$ 和 $\angle COE$ 就是最佳切割角。

四、研究四：探討如何裁切等腰三角形使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

接下來我們要探討的問題是，製作立體聖誕樹的卡片時，如何在知道等腰三角形的高度和寬度的情況下，直接**算出投影點的位置，並找出D點和E點**，以便畫出能讓立體聖誕樹的底部呈現水平的切割線 $\overline{OD}$ 和 $\overline{OE}$ 。

我們繼續觀察當卡片的左半邊平放在桌面上，而卡片的右半邊垂直於桌面時，三角立基凸出的情形（如圖5-4-1）。將K點在卡片左半邊的垂直投影點稱為M點，我們發現幾個有趣且重要的性質：

1. 因為K點的移動軌跡是在以J點為圓心、並以$\overline{JO}$為半徑的半圓弧上，所以B、O、J、M、I、K這幾個點是在同一個平面上。
2. $\overline{BO}=\overline{BK}$，$\overline{JO}=\overline{JK}$。所以三角形BOJ和三角形BKJ全等，因此 $\angle BOJ=\angle BKJ=90°$
3. 當卡片摺成 $90°$ 時（如圖5-4-1）， $\overline{BO}$ 和 $\overline{KM}$ 平行，且都垂直於 $\overline{OI}$ ，三角形KMJ也是直角三角形。

4. $\overline{\mathrm{JO}}$ 是直角三角形 AOC 的斜邊 $\overline{\mathrm{AC}}$ 上的高。所以 $\overline{\mathrm{JO}} = \overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{OA}} \div \overline{\mathrm{AC}}$。

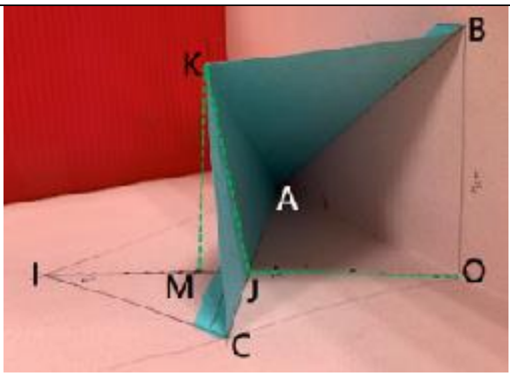
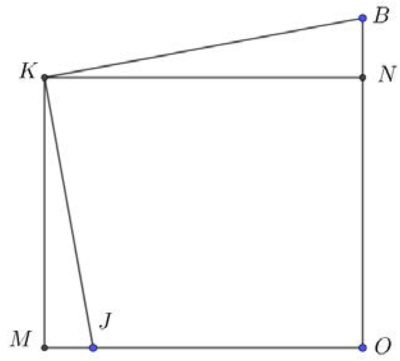
	

圖 5-4-1：當卡片的左半邊平放在桌面上，且卡片的右半邊垂直於桌面時，三角立基凸出的情形，此時 $\angle\mathrm{BOJ} = \angle\mathrm{BKJ} = 90°$。	圖 5-4-2：過 K 點畫一條水平線垂直 $\overline{\mathrm{BO}}$，並交 $\overline{\mathrm{BO}}$ 於 N 點，則 $\angle\mathrm{BKN} = \angle\mathrm{JKM}$。

我們的目的就是要利用這些性質推導出 $\overline{\mathrm{JM}}$ 的長度，如此即可計算出 K 點的投影點 M 的位置，進而找出我們想要的 D 點和 E 點。

首先，B、O、K、M 四個點正好在同一個平面上，且形成一個梯形，我們過 K 點畫一條水平線垂直 $\overline{\mathrm{BO}}$，並交 $\overline{\mathrm{BO}}$ 於 N 點（如圖 5-4-2）。因為 $\angle\mathrm{BKJ} = \angle\mathrm{NKM} = 90°$ ，所以 $\angle\mathrm{BKN} = \angle\mathrm{JKM}$。又因為 $\angle\mathrm{KNB} = 90° = \angle\mathrm{KMJ}$，所以三角形 KNB 和三角形 KMJ 相似。

我們知道「兩個相似三角形的對應邊，邊長比值相等」，因為直角三角形 KNB 和直角三角形 KMJ 相似，所以假設這兩個相似三角形的對應邊比值為 k，則

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{KN}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{JM}} = k$$

為了方便推導，我們假設 $\overline{BO} = \overline{KB} = b$，$\overline{JO} = \overline{KJ} = c$，$\overline{JM} = x$，$\overline{BN} = y$，則可知 $b = kc$，$y = kx$，且 $\overline{KN} = c + x$，$\overline{KM} = \overline{NO} = b - y$。

根據畢氏定理，在直角三角形 KNB 中，$\overline{KB}$是斜邊，$\overline{KN}$ 和 $\overline{BN}$ 是兩股，所以我們知道 $\overline{KB}^2 = \overline{KN}^2 + \overline{BN}^2$。同樣的，在直角三角形 KMJ 中，$\overline{KJ}$是斜邊，$\overline{KM}$ 和 $\overline{MJ}$ 是兩股，所以有 $\overline{KJ}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{MJ}^2$。也就是

$$b^2 = (c + x)^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2,$$
$$c^2 = (b - y)^2 + x^2 = b^2 - 2by + y^2 + x^2.$$

將上面的兩個式子相減，我們得到

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2cx + 2by.$$

移項並化簡上面的式子，再利用 $b = kc$，$y = kx$，我們得到

$$b^2 - c^2 = cx + by = cx + bkx = x(c + bk) = x\left(\frac{c^2 + b^2}{c}\right).$$

再移項，即可得到

$$x = \frac{c(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2}.$$

因此，我們只要知道 $\overline{\mathrm{BO}}$ 的長 b，和直角三角形 AOC 在斜邊 $\overline{\mathrm{AC}}$ 上的高 c，就可以利用上面推導出來的公式計算出 x，並且在 $\overline{JI}$ 上找到投影點 M 點的位置。最後再用（圖 5-3-8）的方法，就可以找到 D 點和 E 點，以及能讓立體聖誕樹的底部呈現水平的切割線 $\overline{\mathrm{OD}}$ 和 $\overline{\mathrm{OE}}$ 。

針對各種不同的 $\overline{\mathrm{OA}}$ 和 $\overline{\mathrm{OB}}$ 的組合，我們先利用上面的公式計算 x ，再找出投影點和 D 點、E 點的位置，畫出切割線 $\overline{\mathrm{OD}}$ 和 $\overline{\mathrm{OE}}$ ，並實際測量所得的最佳切割角，也就是 $\angle\mathrm{BOD}$ 和 $\angle\mathrm{COE}$ 的角度，所得的結果列於下表。下表中的測量結果與我們在【研究二】中所做的實驗結果（表 5-2-1～表 5-2-6）相當一致。

表 5-4-1 利用算式找出投影點和 D、E 點之後，畫出切割線，再測量切割角的大小

$\overline{\mathrm{OB}}$ \ $\overline{\mathrm{OA}}$	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分	6 公分	7 公分
8 公分	13°	22°	31°	36°	46°	53°
9 公分	11°	20.5°	25°	33°	40°	47°
10 公分	10°	18°	24°	29°	35°	43°
11 公分	10°	16.5°	22°	28°	33°	38°
12 公分	10°	14°	20°	25°	30°	34°

關於前面提到的【性質 4】，要如何得知直角三角形 AOC 在斜邊 $\overline{\mathrm{AC}}$ 上的高？我們可以直接在卡片上測量 $\overline{JO}$ 的長度（如圖 5-4-3），也可以利用直角三角形 AOC 的面積來計算。因為

$$\Delta AOC\text{的面積} = \frac{\overline{AO} \times \overline{CO}}{2} = \frac{\overline{AC} \times \overline{JO}}{2},$$

所以如果 $\overline{AO} = a$，$\overline{CO} = b$，根據畢氏定理得知 $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$，則可算出 $\overline{JO}$ 的長度：

$$c = \frac{a \times b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

觀察（圖 5-4-3），我們知道，當卡片完全攤平時，K 點和 O 點重合；當卡片摺成 90° 並直立時，K 點會上升到跟 M 點同一個水平高度。所以，如果 $\overline{\mathrm{MP}}$ 垂直 $\overline{\mathrm{CO}}$ ，則 K 點因為

卡片彎摺而上升的高度正好就是 $\overline{\mathrm{MP}}$ 的長度。那要如何計算 $\overline{\mathrm{MP}}$ 的長度呢？

從（圖 5-4-3）攤平的卡片中，我們可以發現直角三角形 AOC 和直角三角形 OPM 是相似的，因為 $\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{OPM}$ 而且 $\angle\mathrm{CAO} = \angle\mathrm{MOP}$。根據「相似三角形各組對應邊長的比值相等」的原理，我們知道

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{CO}}} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{MP}}} \ .$$

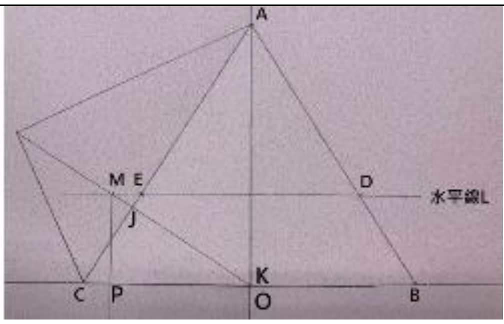


圖 5-4-3：$\overline{\mathrm{MP}}$ 垂直 $\overline{\mathrm{CO}}$ 。當卡片完全攤平時，K 點和 O 點重合；當卡片摺成 $90°$ 並直立時，K 點會上升到跟 M 點同一個水平高度。所以 K 點上升的高度正好就是 $\overline{\mathrm{MP}}$ 的長度。

因為 $\overline{\mathrm{AC}}$ 是直角三角形 AOC 的斜邊，設 $\overline{\mathrm{AC}} = \ell$，$\overline{\mathrm{AO}} = a$，$\overline{\mathrm{CO}} = b$，則如前面所說的，根據畢氏定理 $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$，然後再利用 $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{OJ}} + \overline{\mathrm{JM}} = c + x$，就可以算出

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{b \times (c + x)}{\ell} \ .$$

化簡上面的算式，我們得到

$$c + x = c + \frac{c \times (b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} = \frac{2 \times b^2 \times c}{b^2 + c^2} = 2 \times \mathrm{c} \times \frac{b^2}{b^2 + c^2} \ .$$

因為 c 是直角三角形 AOC 在斜邊 $\overline{\mathrm{AC}}$ 上的高，所以根據前面的推論， $\ell \times c = a \times b$，也就是

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{\ell} \ .$$

因此

$$\frac{b^2 + c^2}{b^2} = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 = \frac{\ell^2 + a^2}{\ell^2} \ .$$

或者，也可以寫成

$$\frac{b^2}{b^2 + c^2} = \frac{\ell^2}{\ell^2 + a^2} \ .$$

因此，

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{b \times (c + x)}{\ell} = \frac{b}{\ell} \times 2 \times \mathrm{c} \times \frac{b^2}{b^2 + c^2} = \frac{b}{\ell} \times 2 \times \mathrm{c} \times \frac{\ell^2}{\ell^2 + a^2} = \frac{2 \times \mathrm{b}}{\ell} \times \frac{\ell^2 \times c}{\ell^2 + a^2} \ .$$

再利用 $\ell \times c = a \times b$，以及 $\ell^2 = a^2 + b^2$ ，就可以將上式化簡，得到

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{2 \times b}{\ell} \times \frac{a \times b \times \ell}{\ell^2 + a^2} = \frac{2 \times a \times b^2}{\ell^2 + a^2} = \frac{2 \times a \times b^2}{2 \times a^2 + b^2} \,.$$

最後，如果我們設 $\frac{a}{b} = r$，並將上面的分子和分母同除以 b^2，則可得到

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{2}{2 \times r^2 + 1} \times a \,.$$

根據上面推導的結果，我們發現：

1. 如果固定 a 的值（代表等腰三角形的高 $\overline{\mathrm{OA}}$ 固定），則當 b 值越大（也就是 $\overline{\mathrm{OB}}$ 越寬）時，比值 r 就越小。因為分母越小，整個分數的比值越大，所以 $\overline{\mathrm{MP}}$ 就越大，代表 K 點會上升越高。
2. 如果固定 b 的值（代表等腰三角形的底邊固定），則當 a 值越大（也就是 $\overline{\mathrm{OA}}$ 越長）時，比值 r 就越大。我們可以將計算 $\overline{\mathrm{MP}}$ 的公式重新整理如下：

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{2}{2 \times r^2 + 1} \times a = \frac{2 \times b}{2 \times r^2 + 1} \times \frac{a}{b} = \frac{2 \times b}{2 \times r^2 + 1} \times r = \frac{2 \times b}{2 \times r + \frac{1}{r}} \,.$$

一般常見的聖誕樹造型一定都是 $a > b$，也就是 $r > 1$。上面的算式中，如果固定 b 的值，則最後一項的分子也會是固定的。當 a 值越大，比值 r 也會越大。我們可以證明，若 $r > 1$ ，當 r 越大時，最後一項的分母 $2 \times r + \frac{1}{r}$ 也會越大。先假設 $1 < r < R$ ，則

$$\begin{aligned}\left(2 \times \mathrm{R} + \frac{1}{R}\right) - \left(2 \times r + \frac{1}{r}\right) &= 2 \times (R - r) + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\\ &= 2 \times (R - r) + \frac{r - R}{R \times r}\\ &= 2 \times (R - r) - \frac{R - r}{R \times r}\end{aligned}$$

因為 $R \times r > 1$，所以

$$\frac{R - r}{R \times r} < R - r \text{。}$$

因此

$$\begin{aligned}\left(2 \times \mathrm{R} + \frac{1}{R}\right) - \left(2 \times r + \frac{1}{r}\right) &= 2 \times (R - r) - \frac{R - r}{R \times r}\\ &> 2 \times (R - r) - (R - r)\\ &= R - r > 0\end{aligned}$$

所以，若 $1 < r < R$，則

$$2\times \mathrm{R}+\frac{1}{R}>2\times r+\frac{1}{r}$$

因為分母越大，整個分數的比值越小，所以 $\overline{\mathrm{MP}}$ 就越小，代表 K 點會上升的高度越小。

以上這兩點正好解釋了我們在【研究一】中針對觀測結果（表 5-1-1）所做的推論。

五、研究五：應用前面分析的結果製作完美的立體聖誕樹卡片。

我們應用前面分析的結果實際製作立體聖誕樹卡片，完成的作品如下：（單位：公分）

1. 第一件作品： $\overline{OA}=a=12$ ， $\overline{OB}=\overline{OC}=b=5$ ， 所以 $\overline{AC}=\ell=13$ ， $r=\frac{12}{5}=2.4$ 。 利用我們研究得到的結果，計算 $c=a\times b\div \ell=12\times 5\div 13\approx 4.6$ $x=\dfrac{4.6\times(5^2-4.6^2)}{5^2+4.6^2}\approx 0.4$ $\overline{\mathrm{MP}}=\dfrac{2}{2\times 2.4^2+1}\times 12\approx 1.9$	
2. 第二件作品： $\overline{OA}=a=13$ ， $\overline{OB}=\overline{OC}=b=5$ ， 所以 $\overline{AC}=\ell=\sqrt{10^2+4^2}\approx 13.9$ ， $r=\frac{13}{5}=2.6$ 。 利用我們研究得到的結果，計算 $c=a\times b\div \ell=13\times 5\div 13.9\approx 4.7$ $x=\dfrac{4.7\times(5^2-4.7^2)}{5^2+4.7^2}\approx 0.3$ $\overline{\mathrm{MP}}=\dfrac{2}{2\times 2.6^2+1}\times 13\approx 1.8$	

3. 第三件作品：

$\overline{OA} = a = 10$ ， $\overline{OB} = \overline{OC} = b = 4$ ，

所以 $\overline{AC} = \ell = \sqrt{10^2 + 4^2} \approx 10.8$ ，

$r = \frac{10}{4} = 2.5$ 。

利用我們研究得到的結果，計算

$$c = a \times b \div \ell = 10 \times 4 \div 10.8 \approx 3.7$$

$$x = \frac{3.7 \times (4^2 - 3.7^2)}{4^2 + 3.7^2} \approx 0.3$$

$$\overline{\mathrm{MP}} = \frac{2}{2 \times 2.5^2 + 1} \times 10 \approx 1.5$$

圖 5-5-1　我們應用前面分析的結果實際製作立體聖誕樹卡片

陸、結論

一、　研究一：探討不同的等腰三角形如何影響立體聖誕樹底部中點的上升高度。

我們利用「切割型」和「黏貼型」兩種不同的方式，以不同高度和寬度的等腰三角形製作各種不同的三角立基，進行實驗觀察，歸納發現：

1. 當等腰三角形的高$\overline{\mathrm{OA}}$固定時，$\overline{\mathrm{OB}}$越長（代表等腰三角形越寬）則 K 點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。
2. 當$\overline{\mathrm{OB}}$固定時（代表等腰三角形的底邊固定），若等腰三角形的高$\overline{\mathrm{OA}}$越小，則 K 點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。

根據以上兩點，我們可以推論，**<u>若等腰三角形 ABC 的頂角 ∠BAC越大</u>**，則卡片摺成90°直立時，做為立體聖誕樹的三角立基凸出來之後，K 點的高度增加越多，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。相反的，**<u>若等腰三角形 ABC 的頂角 ∠BAC越小</u>**，則卡片摺成90°直立時，做為立體聖誕樹的三角立基凸出來之後，K 點的高度增加越少。

二、　研究二：探討如何使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

我們以各種不同的角度對三角立基的底部進行裁切，使原本的等腰三角形變成「箏形」，然後測量當立體卡片摺成 90° 並直立時，聖誕樹底部的傾斜程度。目的是要觀察各種不同的裁切角度和底部傾斜的程度有何關聯，希望能找到可以使立體聖誕樹的底部保持水平的最佳裁切角。我們針對這些觀測結果歸納出下面兩個性質：

1. 要使高度差為零，**$\overline{OA}$與切割角 ∠BOD、∠COE 的關係**：

固定 $\overline{OB}$ 的長度，當$\overline{OA}$愈小時，∠BAC 就會愈大，K 點就會翹得愈高。而為了使聖誕樹的底部能保持水平，因此 D 點及 E 點就要愈高，所以要使立體聖誕樹的底部保持水平（即高度差為零）的切割角 ∠BOD 和 ∠COE 的角度就要愈大。

2. 要使高度差為零，**$\overline{OB}$與切割角 ∠BOD、∠COE 的關係**：

固定 $\overline{OA}$ 的長度，當$\overline{OB}$愈寬時，∠BAC就會愈大，K 點會翹得愈高。為了使聖誕樹的底部能保持水平，因此 D 點及 E 點就要愈高，所以要使立體聖誕樹的底部保持水平（即高度差為零）的切割角 ∠BOD 及 ∠COE 的角度就要愈大。

三、 研究三：探討等腰三角形的底部中點在卡片開合的過程中是如何改變高度的。

我們發現當卡片從完全攤平的狀態，逐漸摺成卡片兩邊互相垂直，再繼續摺成卡片兩邊互相重合的過程中，做為三角立基的等腰三角形的左右半邊（恰好是兩個直角三角形）會各自以等腰三角形的左右兩個側邊為中心軸進行旋轉，所以卡片底部中點（K 點）的移動軌跡正好是一個半圓弧。因為等腰三角形的左右兩個側邊都是斜的，所以 K 點才會往上改變高度。經由這個觀察結果，我們發現，當卡片摺成左右兩邊互相垂直時，就可以利用 K 點在卡片上的「垂直投影點」，找到能讓立體聖誕樹的底部呈現水平的最佳切割角。

四、 研究四：探討如何裁切等腰三角形使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。

假設做為三角立基的等腰三角形底邊上的高為 a，底邊長的一半為 b，而且 $\mathrm{r}=\frac{a}{b}$ 。

我們的研究推導出計算 K **點上升的高度** $=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}\times r^{2}+\mathbf{1}}\times \boldsymbol{a}$ 。

再者，因為等腰三角形是由兩個互相對稱且全等的直角三角形構成的，而這兩個直角三角形的斜邊就是等腰三角形的左右兩側邊。假設左右兩側的邊長為 ℓ，則這兩個直角三角形在斜邊上的高就是 $c=\mathrm{a}\times \mathrm{b}\div \ell$。我們的研究也推導出如何計算 K 點在卡片上的「垂直投影點」的公式。 這個投影點會是在等腰三角形底部的中點往左右兩側邊分別做垂直線，再往外延伸超過左右兩側邊各 x 公分的地方，而計算 x 公式如下：

$$x=\frac{c(b^2-c^2)}{b^2+c^2}.$$

五、 研究五：應用前面分析的結果製作完美的立體聖誕樹卡片。

最後，我們應用前面研究所得的結果，改良了原本製作立體聖誕樹卡片的方法，只要先決定好等腰三角形的高度和底邊的長度，就能很快地計算出最佳切割線的位置。我們也實際製作出能讓聖誕樹的底部呈現水平的立體卡片。

柒、參考資料

Tao's 紙工房（2020）。零難度!一刀剪出立體聖誕樹卡片。2020 年 12 月 9 日，取自 https://www.youtube.com/watch?v=NI-MtOFar-M

【評語】080408

1. 此作品研究立體卡片上摺紙過程中所造成的失真現象，是生活數學探究的好問題，具實用價值。

2. 作者針對製作打開 90 度的聖誕樹底部必須是水平，進行實驗的觀測與歸納、並利用幾何分析與證明得到修正的方法，進而將此結果應用於立體卡片的實作上。此作品提出方法明確有效的解決問題，值得鼓勵。

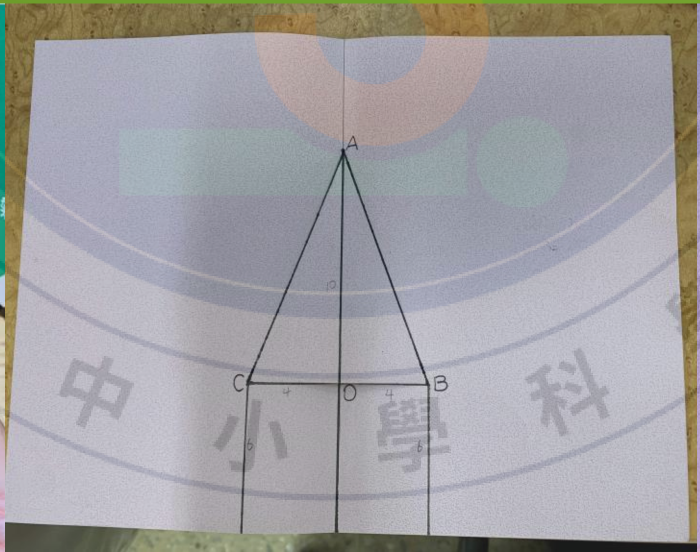
作品簡報

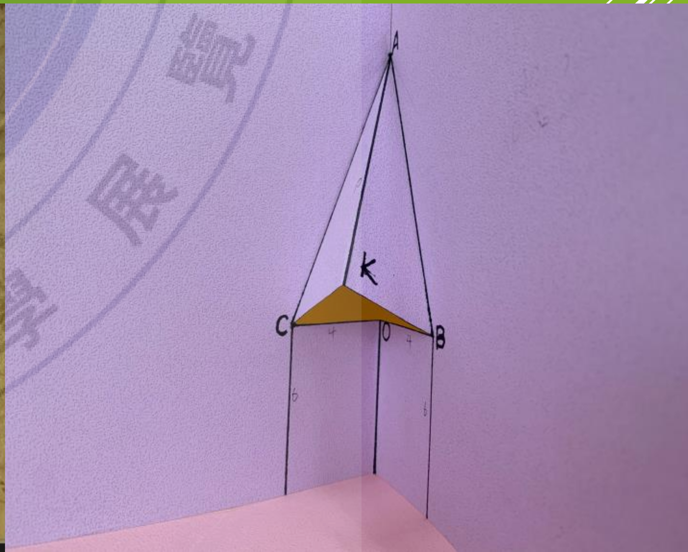
聖誕『數』
好好玩

科別：數學科
組別：國小組

研究動機

- 我們四年級時，藝術與人文老師帶著我們班去奇美博物館參觀「紙上奇蹟」的展覽，其中有些作品是以90°直角展開站立的立體卡片。快到聖誕節時，我們想做可以直角展開站立的立體聖誕樹卡片，所以上網找了一些資料。
- 但是我們做出的卡片，在摺成90°直角站立時，立體聖誕樹底部卻無法呈現水平，而是傾斜往上翹的，也就是K點會比O點高。於是我們想了解聖誕樹底部傾斜的原理，希望能加以改進，做出一棵完美的聖誕樹。





研究目的

- 探討等腰三角形的高度與寬度如何影響立體聖誕樹底部中點的上升高度。
- 探討如何使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。
- 探討等腰三角形的底部中點在卡片開合的過程中是如何改變高度的。
- 探討如何裁切等腰三角形使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平。
- 應用前面分析的結果製作完美的立體聖誕樹卡片。

文獻探討與名詞定義

當卡片攤平時，K點和O點是重合的，但是當卡片褶成90^0直角站立時，K點會往上升。

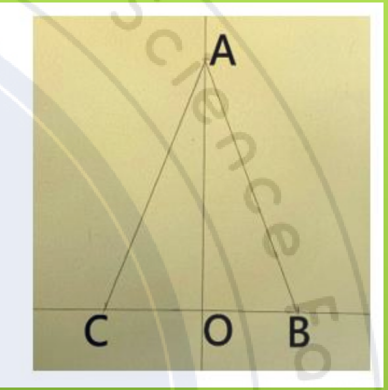
研究工具

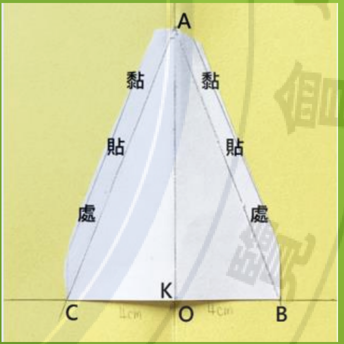
- 丹迪紙、剪刀、美工刀、切割墊、膠水、雙面膠、直尺(15公分/30公分)、量角器。
- <u>立體尺</u>：因為立體尺有三角錐，不會因尺的置放角度不同而影響測量結果。另外，因為立體尺0點至尺的頂點有一段空白，我們測量結果為1公分，故測量K點結果均會加1。
- <u>L型測量平台</u>(三角板\珍珠板\膠帶)：為了卡片打開的角度能固定在90°，我們將珍珠板黏起來呈L形，然後把L型珍珠板和另一塊當底座的珍珠板黏接在一起；最後在做好的珍珠板頂端再黏一個直角三角板以L型珍珠板由上至下確實保持直角。

研究一：探討不同的等腰三角形如何影響立體聖誕樹底部中點（K點）的上升高度。

表 5-1-1　　不同高度和寬度的等腰三角形做成的三角立基，底部 K 點上升的情形。

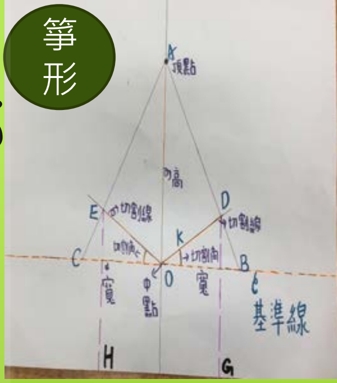
$\overline{OB}$寬 / $\overline{OA}$高	2 公分		3 公分		4 公分		5 公分		6 公分		7 公分	
8 公分	6.5	6.4	7.3	7.0	7.9	8.0	8.6	8.7	9.5	9.2	10.5	10.6
9 公分	6.5	6.4	7.2	6.9	7.5	7.8	8.5	8.6	9.1	9.1	10.2	10.3
10 公分	6.5	6.4	7.1	6.8	7.6	7.6	8.3	8.5	9.0	8.8	10.0	10.1
11 公分	6.5	6.3	6.9	6.8	7.4	7.4	8.0	8.1	8.8	8.7	9.6	9.7
12 公分	6.5	6.2	6.8	6.7	7.3	7.5	7.7	8.0	8.6	8.6	9.5	9.5





- 當等腰三角形的高$\overline{OA}$固定時，$\overline{OB}$越長則K點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。
- 當$\overline{OB}$固定時，若等腰三角形的高$\overline{OA}$越小，則K點上升越高，也就是立體聖誕樹的底部越傾斜。

箏形



研究二：探討如何使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平（即K點和D、E點的高度為0）。

表 5-2-1　$\overline{OB}$=2 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度
8 公分	0.5	0.4	0.1	0	-0.2	-0.3	-0.4
9 公分	0.6	0.2	0.1	0	-0.1	-0.3	-0.5
10 公分	0.6	0.3	0.2	0	-0.2	-0.4	-0.5
11 公分	0.5	0.2	0	-0.1	-0.2	-0.2	-0.5
12 公分	0.5	0.1	0	-0.1	-0.3	-0.5	-0.6

表 5-2-2　$\overline{OB}$=3 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	16 度	20 度	24 度	25 度	30 度
8 公分	1.3	1.1	0.8	0.7	—	0.5	--	0.3	0
9 公分	1.2	0.9	0.8	0.3	—	0.2	0	-0.1	-0.2
10 公分	0.9	0.9	0.7	0.3	—	0	--	-0.4	-0.4
11 公分	0.9	0.5	0.5	0.1	0	-0.1	--	-0.4	-0.6
12 公分	0.8	0.6	0.4	0.1	—	-0.2	--	-0.2	-0.5

表 5-2-3　$\overline{OB}$=4 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度
8 公分	1.9	1.3	1.1	1.1	0.5	0.4	0
9 公分	1.5	1.2	0.8	0.6	0.3	0.1	-0.2
10 公分	1.5	1.0	0.9	0.5	0.2	0	-0.4
11 公分	1.4	1.0	0.8	0.4	0.1	-0.2	-0.5
12 公分	1.3	0.7	0.5	0.3	0	-0.4	-0.8

表 5-2-4　$\overline{OB}$=5 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度	35 度	40 度
8 公分	2.7	2.1	1.8	1.6	1.2	1	0.5	--	0
9 公分	2.4	2.1	1.7	1.3	0.9	0.5	0.1	0	--
10 公分	2.3	1.5	1.4	1.1	0.8	0.4	0	--	--
11 公分	2.3	1.9	1.4	1.2	0.8	0.3	0.1	--	---
12 公分	1.7	1.4	1	0.8	0.3	0	-0.4	--	--

表 5-2-5　$\overline{OB}$=6 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

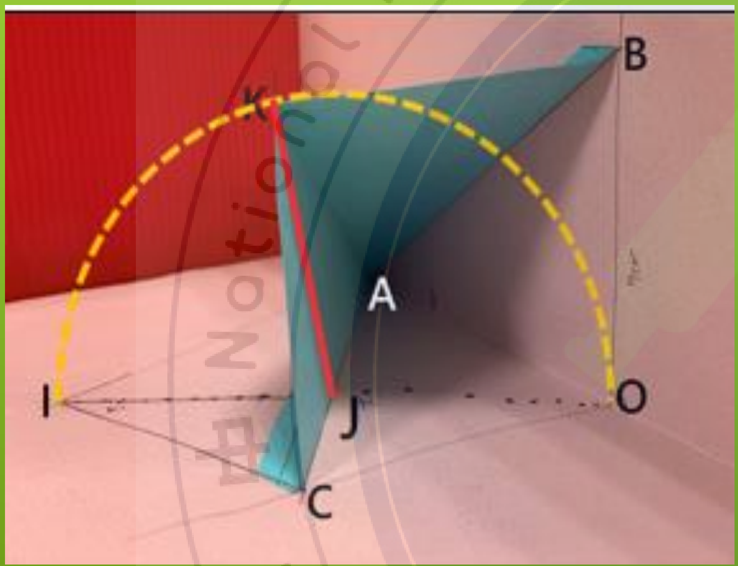
角度 / $\overline{OA}$	0 度	5 度	10 度	15 度	20 度	25 度	30 度	32 度	35 度	45 度
8 公分	3.5	3	2.4	2.4	1.7	1.5	1.2	--	--	-0.1
9 公分	3.5	2.7	2.1	2.1	1.3	0.8	0.8	--	--	-0.1
10 公分	3	2.6	2.1	1.6	1.4	0.9	0.4	--	-0.1	
11 公分	2.8	2.5	1.8	1.4	1	0.7	0.3	0	--	
12 公分	1.7	1.2	1.1	1	0.2	0	-0.1	--	--	

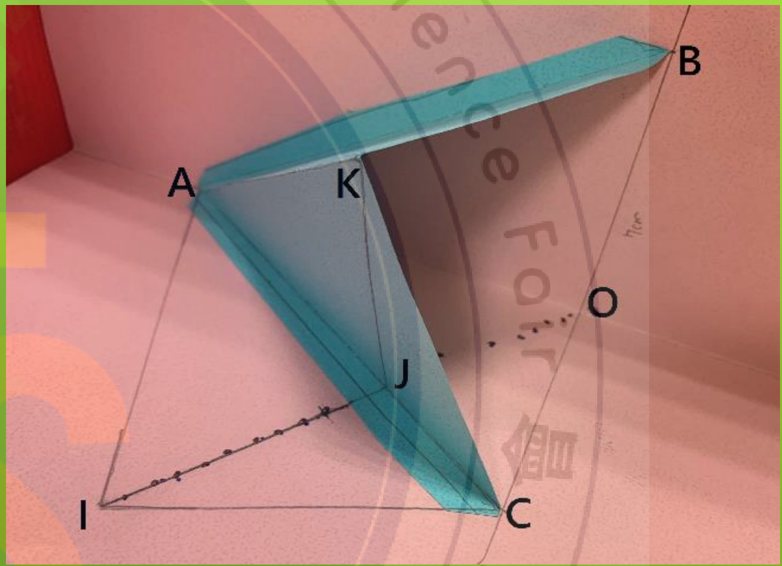
表 5-2-6　$\overline{OB}$=7 公分時，K 點和 D、E 兩點的垂直高度差（切割方式）

角度 / $\overline{OA}$	0度	5度	10度	15 度	20 度	25 度	30度	35度	40度	45度	48度	51度
8公分	4.4	3.8	3.5	3.8	2.4	2	1.7	--	_	_	--	-0.1
9公分	4.2	3.6	3	3	2	1.5	1.6	-	-_	_	0	--
10公分	4.1	3.3	2.9	2.1	1.9	1.4	1.2	--	_	-0.1	--	--
11公分	3.5	3.2	1.6	1.9	1.5	1.2	0.6	--	-0.1	_	_	--
12公分	3.3	3	2.3	1.8	1.2	1	0.4	0.1	--	--	--	---

- 固定$\overline{OB}$的長度，$\overline{OA}$愈小時，∠BAC 就會愈大，K點就會翹得愈高，切割角∠BOD和∠COE的角度就要愈大。
- 固定$\overline{OA}$的長度，當$\overline{OB}$愈寬時，∠BAC就會愈大，K點會翹得愈高，切割角∠BOD及∠COE的角度就要愈大。

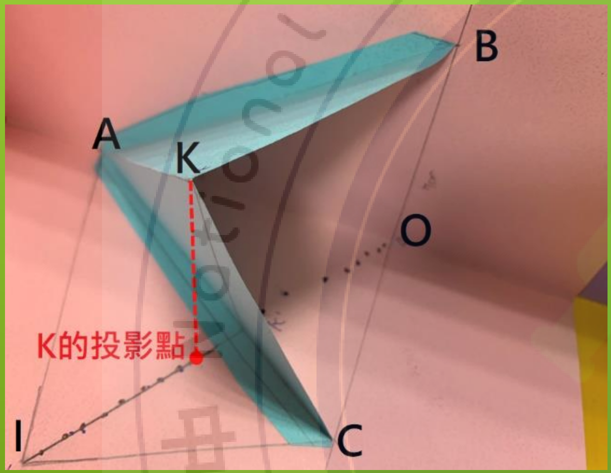
研究三：探討等腰三角形的底部中點（K點）在卡片開合的過程中是如何改變高度。

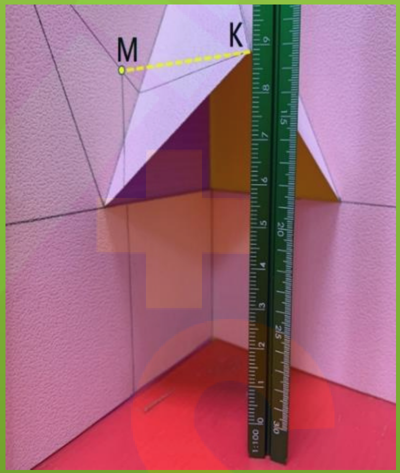


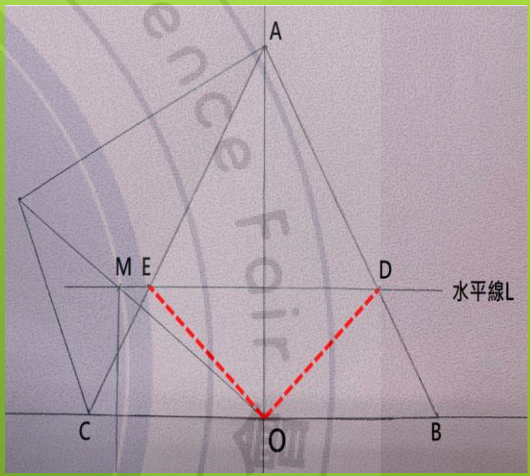


- 我們發現當卡片從左右兩邊完全攤開的180度，褶到左右兩邊互相垂直，再到左右兩邊完全重合時，K點會從O點移動到I點，它的軌跡剛好是一個半圓形。這個半圓形的圓心是J點，而且K點都會正好位於$\overline{OI}$的正上方。

研究三：探討等腰三角形的底部中點（K點）在卡片開合的過程中是如何改變高度。

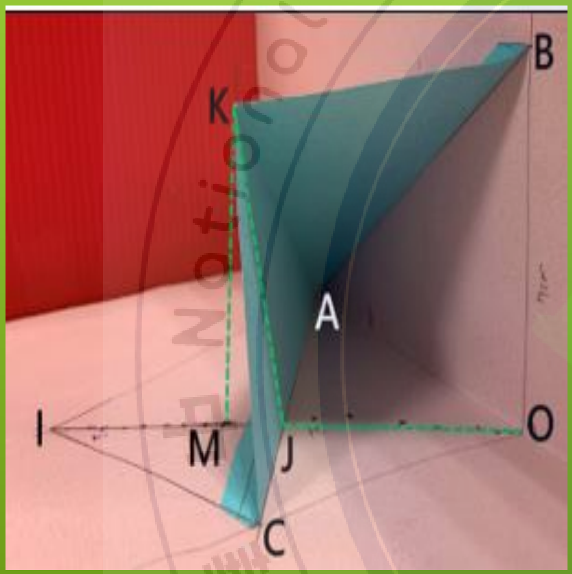


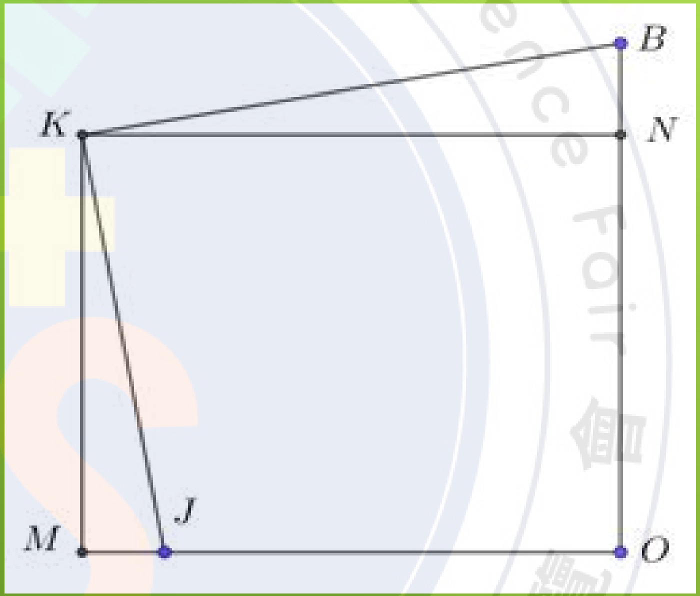




- 當卡片摺成90°時，K點的的投影點（M點）到卡片底部邊緣的垂直距離恰好就是K點的高度，所以我們可以利用M點得到K點上升的高度。
- 如果能找到M點的位置，過M點畫平行$\overline{BC}$的水平線L，L和等腰三角形的斜邊交於D、E兩點，則$\overline{OD}$和$\overline{OE}$就是最佳切割線。

研究四：探討如何裁切等腰三角形使立體聖誕樹凸出時的底部呈現水平（如何找到M點）。

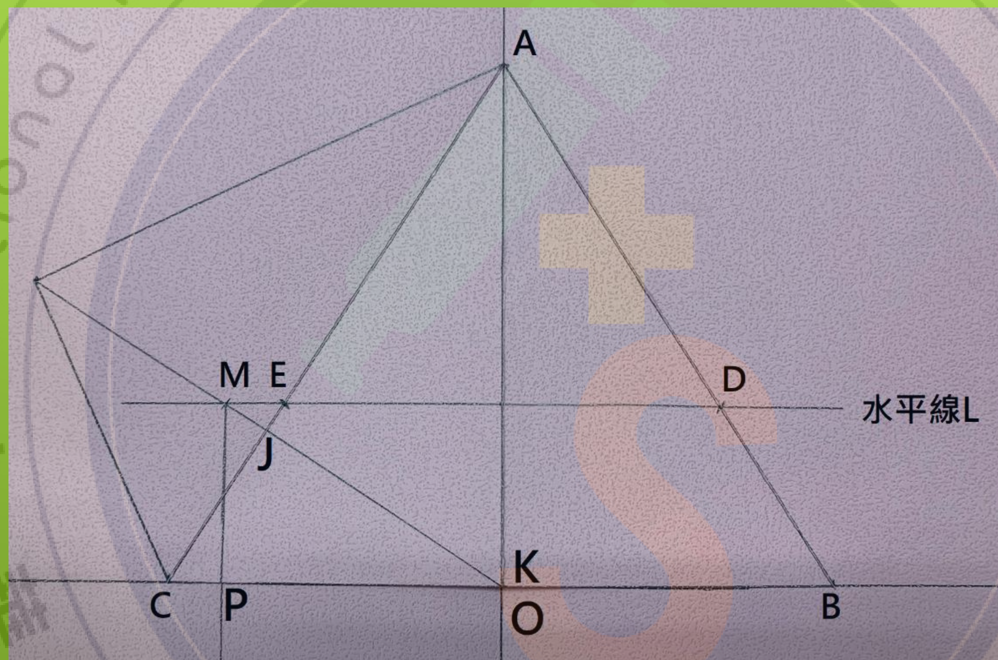




- 已知$\overline{\mathrm{OB}} = b$， $\overline{\mathrm{OJ}} = c$。設 $\overline{\mathrm{JM}} = x$，利用△KMJ和△KNB相似，我們可以算出

$$x = \frac{c\left(b^2 - c^2\right)}{b^2 + c^2}$$

研究四的推論：$\overline{\text{MP}}$的長度正好是K點上升的高度。



- 已知$\overline{\text{OA}} = a$，$\overline{\text{OB}} = b$，設$a : b = r$，利用△OMP和△ACO相似，我們可以算出：

$$\overline{\text{MP}} = \frac{2a}{2r^2 + 1}$$

研究五：應用前面分析的結果製作完美的立體聖誕樹卡片。