中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080407

隱藏在天秤裡的秘密

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小五 王苡馨	楊錦花
小五 洪宥緹	林東岳
小五 葉俞均	

關鍵詞：不等臂天秤、輔幣、類三分法

摘要

題目源自科學研習月刊[1]，與以往討論真假金幣最大的差異在於天秤的臂長為不等臂，故不能如以往的研究，單純的採用三分法判斷金幣的真偽。

為克服不等臂天秤無法採用三分法的限制，我們提出「類三分法」和「輔幣」作法。

輔幣是配合不等臂天秤左、右盤的比值，在短臂端(本研究設為右盤)填加已確認的真幣當輔幣，使天秤達平衡的做法。

類三分法是針對不等臂天秤設計以最少輔幣需求，處理首秤之後左、右、平盤金幣的分法。

此外，我們根據輔幣供應量與輔幣需求量提出了 3 個輔幣判斷式。

因此「類三分法」與「輔幣判斷式」，幫助我們以不等臂天秤快速且簡單的找出分辨金幣真偽的最大值。

壹、前言

一、研究動機

我們從科學研習月刊看到「奇怪天秤」這個題目時，感覺非常有趣且神奇，題目摘錄如下：

> 實驗室中有一個奇怪天秤，左臂長度是右臂長度的兩倍，也就是說，左盤重量剛好為右盤的一半時，天秤會平衡。
>
> 1. 如果有5個硬幣，已知4個是真幣，另一個是只輕一點點的假幣，硬幣的外觀都一樣，利用這個天秤最少要秤幾次，就可以找到假金幣？
> 2. 已知假幣只比真幣輕了一點點而且只有一個，可以秤四次，請問你最多可以從多少個硬幣中找出這個假幣？

首先左臂長度是右臂長度的兩倍的天秤我們是第一次聽說，很新奇，因此我們努力的找出答案、方法和規律。

研讀了前人分辨金幣真偽研究的作品，都限於「等臂天秤」的研究，所以這次科展，我們就鎖定以「不等臂天秤」分辨金幣真偽為主題，試圖找出秤數與分辨金臂真偽最大量的關係。

二、文獻探討

(一) 歷屆得獎作品分析

參展組別	得獎名次	作品名稱	研究範疇
第 31 屆國小組	第 3 名	12 枚金幣的奧妙[2]	已知 1 假幣輕或重求秤數與金幣數的關係
第 33 屆國小組	第 1 名	16 枚金幣的奧秘[3]	假幣 1 輕 1 重求秤數與金幣數的關係
第 47 屆高中組	入選	圖窮幣現[4]	n 枚金幣找出 k 枚假幣的次數
第 48 界國中組	入選	假錢幣快出來[5]	1 枚不知輕重假幣最少秤數及假幣輕或重。
第 57 屆國小組	佳作	神奇的砝碼[6]	k 磅砝碼碎成 i 塊放到 1：n 不等臂天平中，那些重量可以被秤出。

(二) 歷屆作品與本研究異同

1. 前 4 件作品皆以等臂長天秤分辨真假金幣，故可單純的以三分法的思考去推敲金幣與秤數的關係，而我們的作品是以不等臂天秤分辨真假金幣，故無法直接套用。

2. 57 屆「神奇的砝碼」提出$1:n$不等臂天平概念，研究重點鎖定將k磅砝碼分成i塊分析分法中的可秤量與不可秤量，與我們的研究方向不同，故研究方法和結果也差異很大。

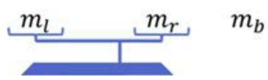
三、名詞定義

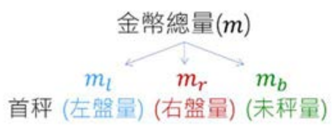
(一) m_l：代表首秤左盤放入的金幣數(本研究指**長臂端**的秤量)。

(二) m_r：代表首秤右盤的金幣量(本研究指**短臂端**的秤量)。

(三) m_b：代表首秤的未秤量。

當左、右盤金幣量出現「平衡」狀況，代表偽幣出現在未秤量，因此我們把未秤量稱為「平盤」。

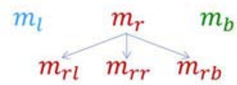




(四) m_r的分法：分辨右盤(m_r)金幣的真偽，採分 3 盤的方法。

m_{rl}表示左盤的量；m_{rr}表示右盤的量；

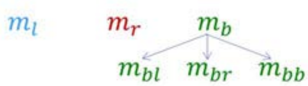
m_{rb}表示平盤的量。



(五) m_b的分法：分辨平盤(m_b)金幣的真偽，採分 3 盤的方法。

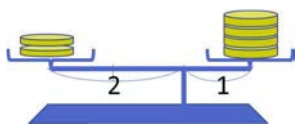
m_{bl}表示左盤的量；m_{br}表示右盤的量；

m_{bb}表示平盤的量。



(六) 秤量比：天秤達平衡時左盤與右盤的金幣的數量比，如圖金幣數左盤為 2，右盤為 4，則秤量比為$1:2$。

(七) t 值：本研究指在秤量比為$1:t$的天秤，後項的值。如秤量比為$1:2$，則 t 值為 2。



(八) 秤數(n)：分辨真假金幣需以「天秤」秤幾次才能分辨真偽的次數，以「n」表示。

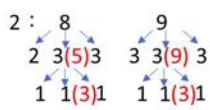
(九) 金幣數(m)：包含 1 假幣的金幣總量，以「m」表示。

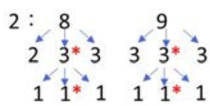
(十) M_n：以不等臂天秤，秤n次可分辨真假金幣數(m)的最大值。

(十一) 輔幣：不等臂天秤為讓天秤左右平衡，需在「右盤」的一端填加已確認的真幣，稱為「輔幣」。

在樹狀圖中右盤填加的輔幣數，以「(m)」表示代表配置m個金幣；或簡化以「*」表示配置應填加的輔幣。

以t值＝4 為例





(十二) $\lfloor\ \ \rfloor$：高斯地板，無條件捨去取整數，例$\lfloor 3.54\rfloor=3$，$\left\lfloor\frac{9}{2}\right\rfloor=4$。

(十三) $\lceil\ \ \rceil$：高斯天花板，無條件進入取整數，例$\lceil 3.54\rceil=4$，$\left\lceil\frac{9}{2}\right\rceil=5$。

四、研究目的

(一) 用不等臂天秤，找出分辨金幣真偽的最佳方法。

(二) 用秤量比為 1：t 的不等臂天秤，找出秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

(三) 用秤量比為 1：t 的不等臂天秤，找出m個金幣(包含 1 假幣) 分辨真偽的最少次數。

(四) 用秤量比為 a：b 的不等臂天秤，找出秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

五、研究設備及器材

(一) 筆記簿、筆、白板、電腦、計算機。

(二) PowerPoint、Word、Excel。

六、研究架構

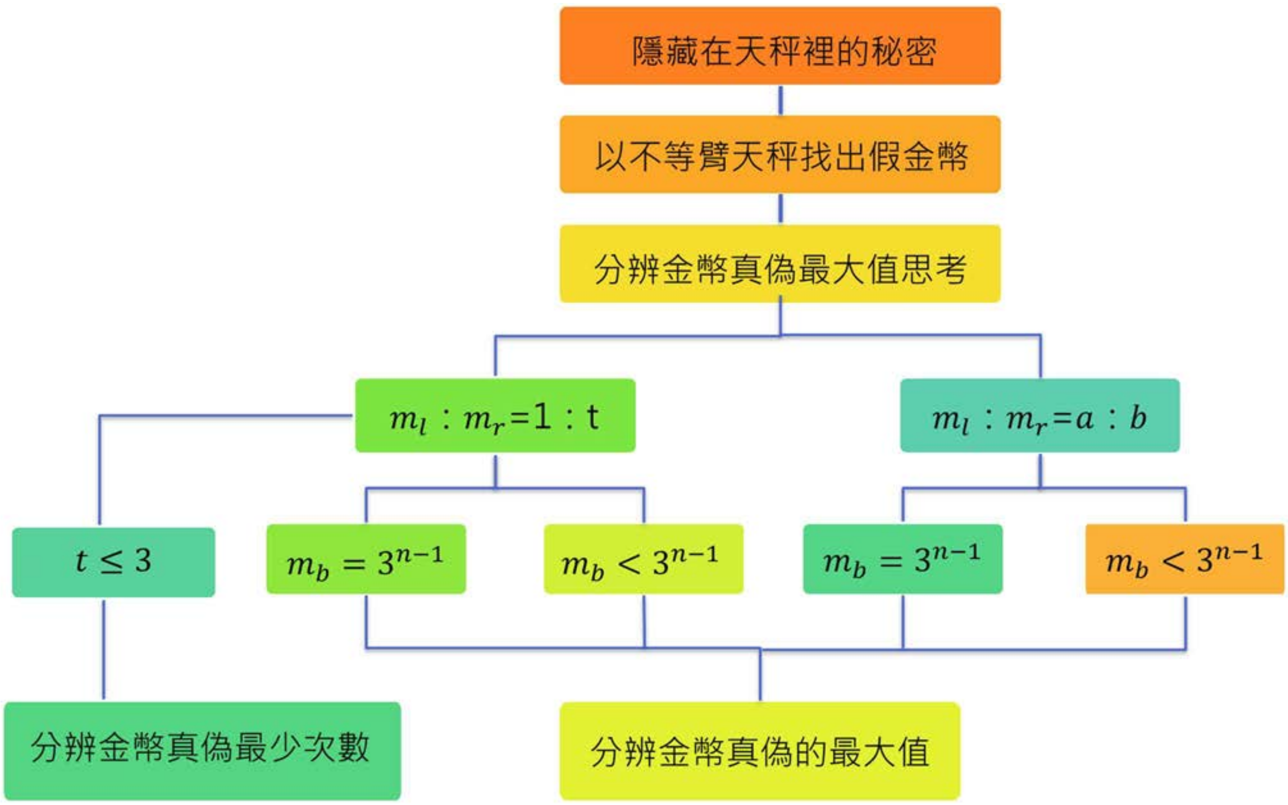


圖 1：研究架構圖

貳、研究過程與方法

一、以樹狀圖分析秤量比為 1：2~1：4 的不等臂天秤，不同首秤量的最小秤數與可分辨金幣真偽。

二、整理樹狀圖結果，找出當秤數為n時，可分辨金幣真偽的最大值。

三、以輔幣的概念即「輔幣供應量需大於等於輔幣的需求量」，推出了 3 個輔幣判斷式。

(一) 平盤(m_b)為3^{n-1}的判斷式：確定秤量比 1：t，不等臂天秤 t 值的限制。

(二) 右盤(m_r)輔幣判斷式：確認不增加秤數狀況下，可分辨金幣真偽最大量與右盤的關係。

(三) 右盤(m_b)輔幣判斷式：確認不增加秤數狀況下，可分辨金幣真偽最大量與右盤的關係。

四、針對不等臂天秤左、右盤不等的特性提出類三分法以最少輔幣需求分再秤量的方法。

五、以首秤 3 盤預估最大值配合輔幣概念，推出當平盤(m_b)的值小於3^{n-1}時，找出分辨金幣真偽最大值的方法。

六、將 1：t 不等臂天秤的發現，推到a：b 天秤，找出分辨金幣真偽最大值的方法。

參、研究結果

一、在秤量比為 1：2 的天秤放入不同數量的金幣，求秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

(一) 將金幣分別以①、②、③、...編號，放入不等臂天秤左、右盤，求首次金幣左、右盤分別為 1 個與 2 個，可分辨金幣真偽的最大值。

表 1：3 個金幣分辨真偽分析

秤次	左盤：右盤(金幣)	說明	秤數
秤(1)	①：②③	左輕則①號金幣為假。...秤(1) 右輕則假幣在右盤，故進行秤(2)	2
秤(2)	②：③①	①為輔幣 左輕則②號金幣為假。...秤(1)+(2) 右輕則③號金幣為假。...秤(1)+(2)	

表 2：4 個金幣分辨真偽分析

秤次	左盤：右盤(金幣)	說明	秤數
秤(1)	①：②③	左輕則①號金幣為假。...秤(1) 右輕則假幣在右盤故進行秤(2) 平則④號金幣為假。...秤(1)	2
秤(2)	②：③①	左輕則②號金幣為假。...秤(1)＋(2) 右輕則③號金幣為假。...秤(1)＋(2)	

表 3：5 個金幣分辨真偽分析

秤次	左盤：右盤(金幣)	說明	秤數
秤(1)	①：②③	左輕則①號金幣為假。...秤(1) 右輕則假幣在右盤故進行秤(2) 平則秤(3)	2
秤(2)	②：③①	左輕則②號金幣為假。...秤(1)＋(2) 右輕則③號金幣為假。...秤(1)＋(2)	
秤(3)	④：⑤①	左輕則④號金幣為假。...秤(1)＋(3) 右輕則⑤號金幣為假。...秤(1)＋(3)	

表 4：6 個金幣分辨真偽分析

秤次	左盤：右盤(金幣)	說明	秤數
秤(1)	①：②③	左輕則①號金幣為假。...秤(1) 右輕則假幣在右盤故進行秤(2) 平則秤(3)	2
秤(2)	②：③①	左輕則②號金幣為假。...秤(1)＋(2) 右輕則③號金幣為假。...秤(1)＋(2)	
秤(3)	④：⑤①	左輕則④號金幣為假。...秤(1)＋(3) 右輕則⑤號金幣為假。...秤(1)＋(3) 平則⑥號金幣為假。...秤(1)＋(3)	

1. 因為秤量比為 1：2，首秤左、右盤分別為 1 個與 2 個故最少秤量為 3，秤數n為 2。

2. 由表 1~表 4 的分析可看出不增加秤數n為 2 的狀況，可分辨金幣真偽的最大值為 6。

(二) 用樹狀圖分析不同首秤量，分辨金幣真偽最大值與秤數的關係。

1. 樹狀圖數字(1、2、…)表示金幣數量，「*」或「①」為輔幣(以已確認真幣為輔幣)。

表 5：樹狀圖分析說明

首秤量(左：右)	平可秤最大量	可分辨量
1 ： 2 .....秤(1) 1 1* .....秤(2)；*等量真幣	3 1 1* 1 .....秤(3)	1＋2＋3＝6
秤(1)→ ①：②③ (秤量比為 1：2) 左輕則①號金幣為假， 右輕則秤(2)， 平則秤(3) 秤(2)→ ②：③① (秤量比為 1：1*) 左輕則②號金幣為假。 右輕則③號金幣為假。	秤(3)→ ④：⑤① (秤量比為 1：2) 左輕則④號金幣為假。 右輕則⑤號金幣為假。 平則⑥號金幣為假。	

2. 由於首秤左、右盤金幣分別為 1 個和 2 個，右邊金幣較多，故「樹狀圖」分析秤數只需分析右邊金幣所需分辨真假的最大秤數，即可知道最大秤數。

(1) 首秤「平衡」(左、右相等)時，代表假金幣在未秤的金幣。

「平衡」時的再秤次數只能等於左盤的再秤次數，才能找出秤的次數與分辨金幣的最大值的關係。

(2) 可分辨真偽的金幣量為首秤「左盤」+「右盤」+「平盤」所秤的金幣量。

以首秤量 1：2 為例，左盤為 1，右盤為 2，平盤的最大量為 3，

故首秤量為 1：2，可秤的最大量為 1＋2＋3＝6。

3. 用樹狀圖分析秤量比為 1：2 的不等臂天秤，可分辨金幣真偽的最大值與秤數的關係。

表 6：樹狀圖分析秤量比 1：2 天秤，秤數 2~6 次可分辨金幣真偽的最大值

首秤量(左：右)圖示	右量秤數	平可秤最大量	可分辨真偽最大量	秤數
1 ： 2 1 1*	(1)＋1＝2	3 1 1* 1	1＋2＋3＝6	2
2 ： 4 1 1*2 1 1*	(1)＋2＝3	9 3 3* 3 1 1* 1	2＋4＋9＝15	3
3 ： 6 3 3* 1 1* 1	(1)＋2＝3	9 3 3* 3 1 1* 1	3＋6＋9＝18	3
4 ： 8 2 2*3 1 1* 1	(1)＋2＝3	9 3 3* 3 1 1* 1	4＋8＋9＝21	3

首秤量(左：右)圖示	右量秤數	平可秤最大量	可分辨真偽最大量	秤數
5 ： 10 3 3*4 1 2 1 1 1*	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	5＋10＋27＝42	4
6 ： 12 4 4* 4 1 2 1 1 1*	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	6＋12＋27＝45	4
7 ： 14 5 5* 4 2 2* 1 1 1*	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	7＋14＋27＝48	4
8 ： 16 5 5* 6 2 2* 2 1 1*	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	8＋16＋27＝51	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12 ： 24 8 8* 8 3 3* 2 1 1* 1	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	12＋24＋27＝63	4
13 ：26 9 9* 8 3 3* 3 1 1* 1	(1)＋3＝4	27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	13＋26＋27＝66	4
14 ：28 9 9* 10 3 3* 4 1 1* 2 1 1*	(1)＋4＝5	81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	14＋28＋81＝123	5
15 ：30 10 10* 10 3 3* 4 1 1* 2 1 1*	(1)＋4＝5	81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	15＋30＋81＝126	5

首秤量(左：右)圖示	右量秤數	平可秤最大量	可分辨真偽最大量	秤數
16 ：32 11 11* 10 4 4* 3 1 1* 2 1 1*	(1)＋4＝5	81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	16＋32＋81＝129	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40 ：80 27 27* 26 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	(1)＋4＝5	81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	40＋80＋81＝201	5
41 ：82 28 28* 26 10 10* 8 4 4* 2 1 1* 2 1 1*	(1)＋5＝6	243 81 81* 81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	41＋82＋243＝366	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
121 ：242 81 81* 80 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	(1)＋5＝6	243 81 81* 81 27 27* 27 9 9* 9 3 3* 3 1 1* 1	121＋242＋243＝606	6

(三) 整理樹狀圖分析結果

表 7：不同秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值M_n的關係

秤數(n)	2	3	4	5	6	…	n
左最大量	$1=\frac{3^1-1}{2}$	$4=\frac{3^2-1}{2}$	$13=\frac{3^3-1}{2}$	$40=\frac{3^4-1}{2}$	$121=\frac{3^5-1}{2}$		$\frac{3^{n-1}-1}{2}$
右最大量	$2=3^1-1$	$8=3^2-1$	$26=3^3-1$	$80=3^4-1$	$242=3^5-1$	…	$3^{n-1}-1$
平最大量	$3=3^1$	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$	$243=3^5$	…	3^{n-1}

(四) 分辨金幣真偽的最大值(M_n)與秤數(n)的關係

1. 由(表 6)天秤的樹狀圖和(表 7)樹狀圖的結果分析可推出：

   平盤(m_b)的最大量為3^{n-1}；右盤(m_r)的最大量為$3^{n-1}-1$；左盤(m_l)最大量為$\frac{3^{n-1}-1}{2}$。

2. 分辨金幣真偽的最大值 M_n＝左盤(m_l)最大量＋右盤(m_r)最大量＋平盤(m_b)最大量。

3. 故 M_n＝$(\frac{3^{n-1}-1}{2})+(3^{n-1}-1)+(3^{n-1})=\frac{3^{n-1}-1}{2}+\frac{(3^{n-1}-1)\times 2}{2}+\frac{3^{n-1}\times 2}{2}=\frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$。

4. 以 n＝3 為例，則$M_3=\frac{3^{3-1}\times 5-3}{2}=\frac{9\times 5-3}{2}=21$。(與表 6 樹狀圖分析結果相符)

   以 n＝5 為例，則$M_5=\frac{3^{5-1}\times 5-3}{2}=\frac{81\times 5-3}{2}=201$。(與表 6 樹狀圖分析結果相符)

5. 根據以上結果因此我們得到定理 1。

定理 1：秤量比為 1：2 的不等臂天秤， 設秤數為n，則分辨金幣真偽的最大值(M_n) 為 $\frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$。

(五) 分辨金幣真偽的最小次數

1. 整理金幣數 m (包含 1 假幣) 與分辨真偽最小秤數 n 的關係

表 8：秤量比為 1：2，不同秤數與可分辨金幣真偽量的範圍。

秤數(n)	2	3	4	5	6	...	n
金幣數m	3 ~ 6	7 ~ 21	22 ~66	67 ~201	202 ~606	...	$\leq \frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$

2. 根據定理 1 和表 8，可推出總幣數 $m\leq\frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$ 。

   $2m\leq 3^{n-1}\times 5-3$ ，$3^{n-1}\geq\frac{2m+3}{5}$ 。

   $n-1\geq log_3\frac{2m+3}{5}$ ，$n\geq log_3\frac{2m+3}{5}+1$

   $n=\left\lceil log_3\frac{2m+3}{5}\right\rceil+1$。

3. 以 m＝60 為例，則 $n=\left\lceil log_3\frac{2\times 60+3}{5}\right\rceil+1=\lceil log_3 24.6\rceil+1=log_3 27+1=3+1=4$。

   以 m＝100 為例，則 $n=\left\lceil log_3\frac{2\times 100+3}{5}\right\rceil+1=\lceil log_3 40.6\rceil+1=log_3 81+1=4+1=5$。

   (與表 8 結果相符)

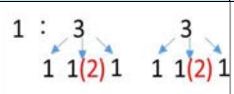
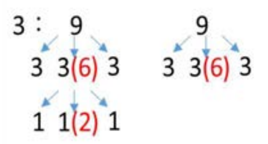
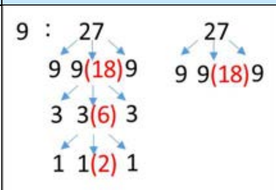
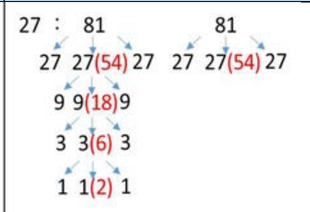
4. 根據以上結果，我們得到定理 1.1。

定理 1.1：秤量比為 1：2 的不等臂天秤，分辨m個金幣真偽的最少秤數 n為$\lceil log_3\frac{2m+3}{5}\rceil+1$

二、在秤量比 1：3 的天秤放入不同數量的金幣，求秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

(一) 以「樹狀圖」分析秤數(n)與分辨金幣真偽最大值 M_n的關係。

表 9：以樹狀圖分析秤量比為 1：3 的天秤，不同秤數可分辨金幣真偽的最大值。

秤數(n)	2	3	4	5
樹狀圖				
M_n	7	21	63	189

(二) 整理秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值的關係

表 10：t ＝3，可分辨金幣真偽左盤、右盤與平盤的最大量

秤數(n)	2	3	4	5	…	n
左最大量	1	3	9	27		$\frac{3^{n-1}}{3}$
右最大量	3	9	27	81	…	3^{n-1}
平最大量(M_n)	3	9	27	81	…	3^{n-1}

1. 由表 10 發現首秤左盤最大量為$\frac{3^{n-1}}{3}$，右盤最大量為3^{n-1}，平盤最大量為3^{n-1}。
2. 秤數n可分辨金幣真偽的最大量

$$M_n = \left(\frac{3^{n-1}}{3}\right) + (3^{n-1}) + (3^{n-1}) = 3^{n-2} + 3^{n-2} \times 3 + 3^{n-2} \times 3 = 3^{n-2} \times 7。$$

3. 以n＝4為例，$M_n = 3^{n-2} \times 7 = 3^{4-2} \times 7 = 63$。(與表 9 結果相符)

   以n＝5為例，$M_n = 3^{n-2} \times 7 = 3^{5-2} \times 7 = 189$。(與表 9 結果相符)

4. 因此我們得到定理 2。

> **定理 2**：秤量比為 1：3 的不等臂天秤，
>
> 設秤數為n，可分辨金幣真偽的最大值 M_n 為$3^{n-2} \times 7$。

(三) 金幣數 m (包含 1 假幣)與分辨真偽最小秤數 n 的關係

1. 整理金幣數 m (包含 1 假幣) 與分辨真偽最小秤數 n 的關係

表 11：t ＝3，不同秤數與可分辨金幣真偽的範圍

秤數(n)	2	3	4	5	…	n
金幣數(m)	3 ~ 7	8 ~ 21	22 ~63	64~189	…	$\leq 3^{n-2} \times 7$

2. 根據定理 2 和表 11，可推出總幣數 $m \leq 3^{n-2} \times 7$。

$\frac{m}{7} \leq 3^{n-2}$， $3^{n-2} \geq \frac{m}{7}$，

$n-2 \geq log_3 \frac{m}{7}$，$n \geq log_3 \frac{m}{7} + 2$。

$n = \left\lceil log_3 \frac{m}{7} \right\rceil + 2$ 。

故分辨 m 個金幣真偽的最少秤數 $n = \left\lceil log_3 \frac{m}{7} \right\rceil + 2$。

3. 以m＝60 為例，則 $n = \left\lceil log_3 \frac{60}{7} \right\rceil + 2$，$n = log_3 9 + 2 = 2 + 2 = 4$。

以m＝100 為例，則 $n = \left\lceil log_3 \frac{100}{7} \right\rceil + 2$，$n = log_3 27 + 2 = 3 + 2 = 5$。(與表 11 結果相符)

4. 因此我們得到定理 2.1。

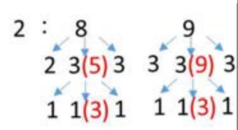
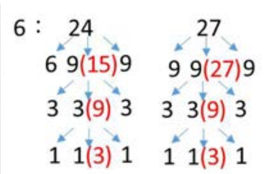
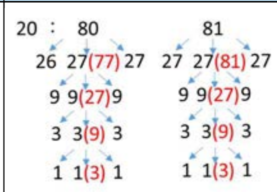
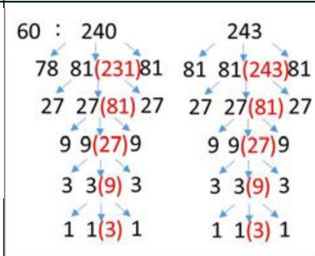
定理 2.1：秤量比為 1：3 的不等臂天秤，

設秤數為n，分辨m個金幣真偽的最少秤數 $n = \left\lceil log_3 \frac{m}{7} \right\rceil + 2$。

三、在秤量比 1：4 的天秤放入不同數量的金幣，求秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

(一) 以「樹狀圖」分析可分辨金幣真偽最大值M_n。

表 12：以樹狀圖分析秤量比為 1：4 的天秤，不同秤數可分辨金幣真偽的最大值

秤數(n)	3	4	5	6
樹狀圖				
M_n	19	57	181	543

(二) 秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值的關係

表 13：t ＝4，不同秤數可分辨金幣真偽左盤、右盤與平盤的最大量

秤數(n)	3	4	5	6	…	n 奇數	n 偶數
左最大量	2	6	20	60	…	$\frac{3^{n-1}-1}{4}$	$\frac{3^{n-1}-3}{4}$
右最大量	8＝9－1	24＝27－3	80＝81－1	240＝243－3	…	$3^{n-1}-1$	$3^{n-1}-3$
平最大量	9＝3^2	27＝3^3	81＝3^4	243＝3^5	…	3^{n-1}	

1. 由表 13 發現秤量比為$1:4$的不等臂天秤，秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值(M_n)的關係如下：

(1) 若n為奇數，則左盤最大量為$\frac{3^{n-1}-1}{4}$，右盤最大量為$3^{n-1}-1$，平的最大量為3^{n-1}。

可分辨金幣真偽的最大值

$$M_n=\left(\frac{3^{n-1}-1}{4}\right)+(3^{n-1}-1)+(3^{n-1})=\frac{3^{n-1}}{4}\times 9-\frac{5}{4}=\frac{3^{n+1}-5}{4}。$$

(2) 若n為偶數，則右盤最大量為$3^{n-1}-3$，左盤最大量為$\frac{3^{n-1}-3}{4}$，平的最大量為3^{n-1}。

可分辨金幣真偽的最大值$\mathrm{M}_n=3^{n-1}+3^{n-1}-3+\frac{3^{n-1}-3}{4}=\frac{3^{n-1}}{4}\times 9-\frac{15}{4}=\frac{3^{n+1}-15}{4}$。

(3) 若 n 為奇數，則 M_n為$\frac{3^{n+1}-5}{4}$；若 n 為偶數，則 M_n為$\frac{3^{n+1}-15}{4}$。因此我們得到定理 3。

定理 3：秤量比為 1：4 的不等臂天秤，設秤數為n，

若 n 為奇數，則分辨金幣真偽最大值 M_n為$\frac{3^{n+1}-5}{4}$；

若 n 為偶數，則分辨金幣真偽最大值 M_n為$\frac{3^{n+1}-15}{4}$。

2. 分辨金幣真偽的最大值因n為奇、偶而不同，故無法準確地由金幣數去推斷最少秤數。

3. 此外，當秤量比$m_l:m_r=1:4$時，出現一個例外，即 5 個金幣數($m=5$)，因輔幣不足而出現比 6 個金幣($m=6$)的最少秤次(n)多 1。

表 14：秤量比為 1：4，分辨 5 個金幣與 6 個金幣秤數分析

秤次	5 個金幣	6 個金幣	說明
秤(1)	①：②③④⑤	①：②③④⑤	左輕則①號金幣為假。 右輕則假幣在右盤故進行秤(2) 平$m=6$，⑥號金幣為假
秤(2)	②：③④⑤①	②：③④⑤①	左輕則②號金幣為假。 右輕則假幣在右盤故進行秤(3)
秤(3)	③：④⑤①②	③：④⑥①②	秤(3)時，$m=6$，⑥號金幣可以為輔幣，故可以 3 分法找出左③右④平⑤ $m=5$，則④、⑤號金幣則需再秤(4)。
秤(4)	④：⑤①②③	故 5 個金幣比 6 個金幣，秤數多 1。	

四、不等臂天秤可分辨金幣真偽的最大值思考。

(一) 不等臂天秤平盤($\boldsymbol{m_b}$)、 左盤($\boldsymbol{m_l}$)與 右盤($\boldsymbol{m_r}$)的最大值

1. 等臂天秤分辨金幣真偽的分堆方法為 3 等分法[5]，即每一次欲秤的金幣都能 3 等分未分辨真偽的金幣量在左盤、右盤與平盤，依此推論分辨金幣最大值為3^k。
2. 平盤(m_b)的金幣真偽分辨，在首秤之後，即確定首秤左、右盤的金幣皆為「真」的狀況下進行，故可用真幣當輔幣，使天秤達到平衡的要求。故「平盤」可分辨的最大值應可等於 3^k。
3. 若平盤的金幣數為3^k，要分k次才能保證分辨出金幣真偽，再加上首秤的 1 次，故秤數為 $k+1$ 次。
4. 設秤數為 n，則平盤(m_b)的最大值等於3^{n-1}。
5. 因我們研究的天秤為「不等臂」，首秤的金幣量 m_l：m_r為 1：t，故首秤的左盤與右盤不一定能湊到3^k金幣量，即3^{n-1}的金幣量。
6. 右盤量較多，故右盤的量越接近3^{n-1}，越能使分辨金幣真偽的值達到最大，右盤為左盤的 t 倍，故左盤(m_l)為 $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤為左盤的 t 倍，故右盤(m_r)為 $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$。
7. 因此我們整理出性質 1

> **性質 1**： 設不等臂天秤秤量比為 1：t ，秤數為n，
> 則首秤 3 盤分辨金幣真偽的最大值左盤(m_l) $\le \left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤($m_r$) $\le \left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$，
> 平盤(m_b)$\le 3^{n-1}$。

(二)平盤最大值為 $\boldsymbol{3^{n-1}}$的條件

> **定理 4**：設不等臂天秤秤量比為 1：t ，秤數為n，
> 若$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)\ge\ 3^{n-2}\times(t-1)$，則平盤最大值為 3^{n-1}。

證明：

1. 平盤最大值為 3^{n-1}，需平盤(m_b)輔幣的供應量 ≥ 輔幣的需求量，分辨平盤(m_b)金幣的右盤(m_{br})才有足夠的輔幣使天秤平衡，達到分辨金幣真偽的功能。

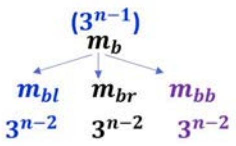
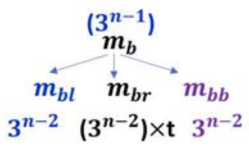
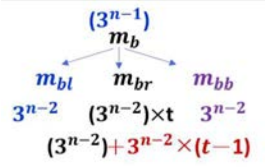
2. 平盤(m_b)輔幣供應量

平盤(m_b)的測量在首秤之後，故左、右盤金幣皆可為輔幣。即

平盤(m_b)輔幣供應量＝首秤的左盤(m_l)＋右盤(m_r) $=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]+\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$。

3. 平盤(m_b) 為3^{n-1}的輔幣需求量

表 15：平盤(m_b) 為3^{n-1}的輔幣需求量分析

平盤欲分辨金幣量	加入輔幣使天秤達平衡的量	m_{br}輔幣需求量(紅字)
		

(1) 若平盤(m_b)可分辨量的最大值為3^{n-1}，依 3 分法等分 3 份，

左盤(m_{bl})＝右盤(m_{br})＝平盤(m_{bb})＝3^{n-2}。(如表 15 左圖)

(2) m_{bl}：m_{br}秤量比為 1：t，故左盤(m_{bl})為3^{n-2}時，右盤(m_{br})需為$3^{n-2}\times t$，不等臂天秤才能達平衡狀況，故m_{br}需填加「輔幣」使天秤達平衡。(如表 15 中圖)

(3) m_{br}的輔幣需求量＝「天秤達平衡的金幣量」減「欲分辨真偽的金幣量」

$=3^{n-2}\times t-3^{n-2}=3^{n-2}\times(t-1)$⋯(如表 15 右圖)

(4) 輔幣的供應量 ≥ 輔幣的需求量，平盤的金幣量才能為3^{n-1}，

平盤(m_b)輔幣的最大供應量$=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)$，輔幣需求量$=3^{n-2}\times(t-1)$，

$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)\geq 3^{n-2}\times(t-1)$。故平盤最大值為 3^{n-1}；

(5) 故$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)\geq 3^{n-2}\times(t-1)$也可視為平盤最大值為 3^{n-1}的判斷式。

(三) 分析平盤為 $\boldsymbol{3^{n-1}}$，秤量比 1：$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t}$ 的最大值

1. 由表 6、表 9 和表 12 的樹狀圖分別推出的定理 2、定理 3 和定理 4 平盤最大值都等於3^{n-1}，秤量比 1：t，t越大，所需的輔幣就越多，故以t的最大值「4」，代入平盤(m_b)為 3^{n-1}的判斷式，證明是否符合。

(1) 若秤量比 1：t，t＝4， m_b為 3^{n-1}的判斷式為$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]\times(4+1)\geq 3^{n-2}\times(4-1)$。

(2) 右式＝$3^{n-2}\times(4-1)$＝$3^{n-2}\times 3$ ＝3^{n-1} 。

(3) 左式中$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]$，若秤數$n$為奇數則$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]=\frac{3^{n-1}-1}{4}$，若秤數$n$為偶數，則 $\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]=\frac{3^{n-1}-3}{4}$。

① 若秤數 n為奇數，則左式＝$\frac{3^{n-1}-1}{4}\times(4+1)$＝$3^{n-1}+\left(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)$。

$t=4$，最小秤量為 1：4，$3^1<4<3^2$，最小秤數為 3，故$\left(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)>0$，

故$3^{n-1}+\left(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)>3^{n-1}$；左式>右式。

② 若秤數 n為偶數，則 $\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]$＝$\frac{3^{n-1}-3}{4}$；秤數$n$為偶數的最小值為 4，

則右式＝$\frac{3^{n-1}-3}{4}\times(4+1)$＝$3^{n-1}+\left(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{15}{4}\right)$，$(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{15}{4})>0$，

故$3^{n-1}+\left(3^{n-1}\times\frac{1}{4}-\frac{15}{4}\right)>3^{n-1}$，左式 >右式。

③秤量比 1：t，$t\le 4$，秤數n無論奇、偶，左式都大於右式，故符合m_b為 3^{n-1}的條件。

2. 若秤量比 1：t，t為 5， m_b為 3^{n-1}的ㄆㄢ為$\left[\frac{3^{n-1}}{5}\right]\times(5+1)\geq 3^{n-2}\times(5-1)$。

$\left[\frac{3^{n-1}}{5}\right]$變數較大，故我們直接以$n$＝3、4、5代入求證

表 16：代入平盤=3^{n-1}的判斷式分析 t為 5，平盤(m_b)能否等於 3^{n-1}

n	3	4	5	6
左式：$\left[\frac{3^{n-1}}{5}\right]\times(5+1)$	6	30	96	288
右式：$3^{n-2}\times(5-1)$	12	36	108	324
結果	$6-12=-6$ 左式＜右式	$30-36=-6$ 左式＜右式	$96-108=-12$ 左式＜右式	$288-324=-36$ 左式＜右式

故當秤量比 1：t，t為 5時，秤數$n=3\sim6$皆無法滿足平盤最大值為 3^{n-1}的判斷式。

3. 若秤量比 1：t，t＝6、7、8、9，平盤(m_b)的最大值是否為3^{n-1}。

(1) 以秤數n＝3 和 4，分析能否滿足m_b為 3^{n-1}的判斷式。

表 17：t＝6～9，秤數n為 3，平盤(m_b)能否滿足 3^{n-1}的判斷式分析

t	6	7	8	9
左式：$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)$	$\left[\frac{9}{6}\right]\times7=7$	$\left[\frac{9}{7}\right]\times8=8$	$\left[\frac{9}{8}\right]\times9=9$	$\left[\frac{9}{9}\right]\times10=10$
右式：$3^{n-2}\times(t-1)$	3×5＝15	3×6＝18	3×7＝21	3×8＝24
結果	7－15＝－8 左式＜右式	$8-18=-10$ 左式＜右式	$9-21=-12$ 左式＜右式	$10-24=-14$ 左式＜右式

表 18：t＝6～9，n為 4，平盤(m_b)能否滿足 3^{n-1}的判斷式分析

t	6	7	8	9
左式：$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)$	$\left[\frac{27}{6}\right]\times 7=28$	$\left[\frac{27}{7}\right]\times 8=24$	$\left[\frac{27}{8}\right]\times 9=27$	$\left[\frac{27}{9}\right]\times 10=30$
右式：$3^{n-2}\times(t-1)$	9×5＝45	9×6＝54	9×7＝63	9×8＝72
結果	$28-45=-17$ 左式＜右式	$24-54=-30$ 左式＜右式	$27-63=-36$ 左式＜右式	$30-72=-42$ 左式＜右式

(2) 當秤量比 1：t，t＝6～9，定理 4 中左式與右式的差值會隨著秤數 n的增加而擴大，故無法符合m_b為 3^{n-1}的判斷式，因此平盤(m_b)可分辨的最大值小於 3^{n-1}。

4. 當秤量比 1：t，$t\leq 4$，平盤(m_b)的最大值為3^{n-1}； $t\geq 5$，平盤的最大值小於3^{n-1}。

(四) 整理秤量比 1：t，$t\leq 4$，最少秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值(M_n)的關係。

> **定理 5**：設不等臂天秤秤量比為 1：t ，秤數為n，
>
> 當 $t\leq 4$，則可分辨金幣真偽最大值(M_n) 為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)+3^{n-1}$。

證明：

1. 當 $t\leq 4$ 時，符合m_b為 3^{n-1}的判斷式，故平盤(m_b)可分辨的最大值為3^{n-1}。
2. 右盤量較多，故右盤的量越接近3^{n-1}，越能使分辨金幣真偽的值達到最大，

   右盤為左盤的 t 倍，故左盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤為左盤的 t 倍，故右盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$。
3. M_n＝左盤最大量＋右盤最大量＋平盤最大量 ＝ $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]+\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t+3^{n-1}$

   ＝$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)+3^{n-1}$。
4. 分別以 t ＝2、3、4 代入 M_n＝$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)+3^{n-1}$驗證

   (1) t＝2， M_n＝$\left[\frac{3^{n-1}}{2}\right]\times(2+1)+3^{n-1}$＝$\frac{3^{n-1}-1}{2}$×3＋$3^{n-1}$＝$\frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$ (與定理 1 相符)

   (2) t＝3， M_n＝$\left[\frac{3^{n-1}}{3}\right]\times(3+1)+3^{n-1}$＝$3^{n-2}\times 4+3^{n-2}\times 3$＝$3^{n-2}\times 7$ (與定理 2 相符)

   (3) t=4，M_n＝$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]\times(4+1)+3^{n-1}$；

   若 n 為奇數，則$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]=\frac{3^{n-1}-1}{4}$；$M_n$＝$\frac{3^{n-1}-1}{4}\times 5+\frac{3^{n-1}\times 4}{4}=\frac{3^{n-1}\times 9-5}{4}$＝$\frac{3^{n+1}-5}{4}$。

   若 n 為偶數，則$\left[\frac{3^{n-1}}{4}\right]=\frac{3^{n-1}-3}{4}$；$M_n$＝$\frac{3^{n-1}-3}{4}\times 5+\frac{3^{n-1}\times 4}{4}=\frac{3^{n-1}\times 9-15}{4}$＝$\frac{3^{n+1}-15}{4}$。

   (與定理 3 相符)
5. 故當 $t\leq 4$，可分辨金幣真偽最大值(M_n) 為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)+3^{n-1}$。

五、當秤量比 1：t，$t≥5$ 時，應如何找到最少秤數(n)與可分辨金幣真偽最大值(M_n)的關係

(一) 再秤量的分法：類 3 分法

1. 當 $t≥5$ 時，無法滿足m_b為 3^{n-1}判斷式，主要原因在於輔幣供應量小於輔幣需求量，如何在不改變分析的金幣量的狀況下，有效降低輔幣的需求量，首秤之後的再秤量，我們提出了「類 3 分法」。

定義 1：「類 3 分法」是針對不等臂天秤首秤之後的金幣真偽分辨，設計「**最低輔幣需求的分類方法**」。即在天秤的右盤和平盤各分3^k個金幣，其餘 $m-3^k×2$ 個金幣分在左盤的方法。

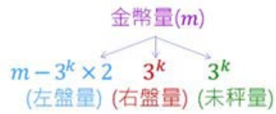


表 19：類 3 分法與 3 等分法的比較(秤量比 1：t，$t=5$，金幣量= 21)

類 3 分法	21 → 3　9(6)　9	類 3 分法是將 21 分成 3、9、9， 則右盤的輔幣需求量 $=3×5-9=6$
3 等分法	21 → 7　7(28)　7	3 等分法是將 21 分成 7、7、7， 則右盤的輔幣需求量 $=7×5-7=28$

2. 我們採用的「類 3 分法」，就是將影響「輔幣量」多寡的「**左盤壓到最低，右盤提到最高，使輔幣需求量降至最低**」的分類方法，能幫助我們使用不等臂天秤分辨金幣真偽時，以最少的秤數分辨出金幣真偽的最大量。

(二) 右盤(m_r)輔幣考量

定理 6：設不等臂天秤秤量比為 1：t，秤數為n，則右盤(m_r) 的輔幣判斷式為

$m_l+m_b≥(m_r-3^{n-2}×2)×t-3^{n-2}$。

說明：

表 20：右盤(m_r)的輔幣需求分析

類 3 分法分m_r欲秤金幣	加入輔幣使天秤達平衡的量	m_{rr}輔幣需求量
m_r → $m_r-3^{n-2}×2$　3^{n-2}　3^{n-2}	m_r → $m_r-3^{n-2}×2$　$(m_r-3^{n-2}×2)×t$　3^{n-2}	m_r → $(m_r-3^{n-2}×2)×t-3^{n-2}$

1. 以「類 3 分法」分首秤右盤金幣，則

右盤(m_{rr})＝平盤(m_{rb})＝3^{n-2}，左盤(m_{rl})＝首秤右盤(m_r)－$3^{n-2}×2$。(如表 20 左圖)

2. 右盤(m_{rr})為左盤(m_{rl}) 的 t倍，天秤才能平衡，故右盤(m_{rr})加入輔幣使天秤達平衡的量為($m_r-3^{n-2}\times 2)\times t$。

3. 右盤(m_{rr})輔幣的需求量＝達平衡的量－欲秤量＝($m_r-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$

4. 右盤(m_{rr})的輔幣的供應量＝首秤左盤(m_l)＋平盤(m_b)

5. 輔幣供應量 ≥ 輔幣需求量，才能使不等臂天秤數維持平衡分辨金幣真偽，故
   左盤(m_l)＋平盤(m_b) ≥ ($m_r-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$為右盤($m_r$)的輔幣判斷式。
   換句話說**右盤(m_r)的極大值需符合右盤(m_r)的輔幣判斷式**。

(三) 平盤(m_b) 輔幣考量

定理 6.1：設不等臂天秤秤量比為 1：t ，秤數為n，則平盤(m_b) 的輔幣判斷式為

$$m_l+m_r\geq(m_b-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$$ 。

說明：

表 21：平盤(m_b)的輔幣需求分析

類 3 分法分未秤金幣	m_{bl}與m_{br}天秤達平衡的量	m_{br}輔幣需求量
m_b $m_b-3^{n-2}\times 2$　3^{n-2}　3^{n-2}	m_b $m_b-3^{n-2}\times 2$　$(m_b-3^{n-2}\times 2)\times t$　3^{n-2}	m_b $(m_b-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$

1. 首秤平盤(m_b)可分辨的最大理想值為 3^{n-1}，已知 $t\geq 5$ 時，因輔幣需求增加，故
   平(m_b)可分辨的最大值小於 3^{n-1} 。

2. 平盤(m_b)，以「類 3 分法」分首秤平盤金幣，則右盤(m_{br})＝平盤(m_{bb})＝3^{n-2}，
   左盤(m_{bl})＝首秤平盤(m_b)－$3^{n-2}\times 2$。

3. 左盤(m_{bl}) ＝$m_b-3^{n-2}\times 2$，為使天秤左、右盤平衡(右盤為左盤的t倍)，
   則右盤(m_{br}) 加入輔幣使天秤達平衡的量為($m_b-3^{n-2}\times 2)\times t$

4. 故右盤(m_{br})的輔幣需求量＝達平衡的量－欲秤量＝($m_b-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$

5. 右盤(m_{br})的輔幣供應量＝首秤左盤(m_l)＋右盤(m_r)

6. 輔幣供應量 ≥ 輔幣需求量，才能使秤數＝n，故
   左盤(m_l)＋右盤(m_r)需 ≥ ($m_b-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$，我們稱之為平盤($m_b$)的輔幣判斷式。
   換句話說平盤(m_b)的極大值需符合平盤(m_b)的輔幣判斷式。

(四) 當 $t\geq 5$ 時，分辨金幣真假的最大值M_n需符合輔幣要求的 **2** 個條件

1. 左盤(m_l)＋平盤$(m_b)\geq(m_r-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$……右盤$(m_r)$的輔幣判斷式。

2. 左盤(m_l)＋右盤$(m_r)\geq(m_b-3^{n-2}\times 2)\times t-3^{n-2}$……平盤$(m_b)$的輔幣判斷式。

3. 換句話說，當秤量比 1：t，$t\geq 5$ 時，我們可以「類 3 分法」分配再秤量，搭配m_r與m_b的輔幣判斷式推算分辨金幣真偽的最大值M_n。

(五) 當 $t\geq 5$ 時，加入類 3 分法與輔幣的概念，推算分辨金幣真偽的最大值。

性質 2：設不等臂天秤秤量比為 1：t ，秤數為n，當 $t\geq 5$ 時，

左盤$(m_l)\leq\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤$(m_r)=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$，平盤$(m_b)\leq\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$。

且 $3^{n-1}\geq m_b\geq m_r$。

說明：

1. 由性質 1(14 頁)得知首秤 3 盤分辨金幣真偽的最大值左盤$(m_l)\leq\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，

   右盤$(m_r)\leq\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$，平盤$(m_b)\leq 3^{n-1}$。

2. 以輔幣的概念思考平盤的最大值

表 22：平盤(m_b)最大值分析

類 3 分法分未秤金幣	加入輔幣後m_{bl}與m_{br}天秤達平衡的量	m_b 最大值
m_b m_{bl} 3^{n-2} 3^{n-2}	m_b $\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]$ $\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]\times t$ 3^{n-2}	m_b $\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]$ 3^{n-2} 3^{n-2}

(1) 分平盤(m_b)金幣採「類 3 分法」(如表 22 左圖)，右盤m_{br}與平盤m_{bb}皆為3^{n-2}。

(2) 左盤(m_l)＋右盤(m_r)為分析平盤(m_b)金幣真偽時輔幣的供應最大量，故右盤(m_{br})加入輔幣使天秤達平衡的最大量為$3^{n-2}+(m_l+m_r)$。

(3) m_{br}為m_{bl}的 t倍，故 m_{bl}最大量為$\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]$。

(4) 首秤平盤 (m_b)的最大量$=m_{bl}+3^{n-2}\times 2=\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$。

3. 若平盤 m_b為$\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$。指以最大輔幣需求量估算$m_b$的值，故輔幣需求量＝輔幣供應量。

4. 右盤的輔幣需求量因左盤m_l與t值而有所不同，換句話說，右盤的輔幣需求量不一定達最大量(輔幣供應量)。右盤(m_r)為$m_l \times t$時，輔幣需求量≤輔幣供應量。

5. 重新審視m_r與m_b的輔幣判斷式。

(1) 左盤(m_l)＋平盤$(m_b) \geq (m_r - 3^{n-2} \times 2) \times t - 3^{n-2}$......$m_r$的輔幣判斷式。

(2) 左盤(m_l)＋右盤$(m_r) \geq (m_b - 3^{n-2} \times 2) \times t - 3^{n-2}$......$m_b$的輔幣判斷式。

(3) 若右盤(m_r)的輔幣供應量＝輔幣需求量，則$m_l + m_b = (m_r - 3^{n-2} \times 2) \times t - 3^{n-2}$......①

平盤(m_b)的輔幣供應量＝輔幣需求量，則$m_l + m_r = (m_b - 3^{n-2} \times 2) \times t - 3^{n-2}$......②

①式－②式，則

$m_b - m_r = m_r \times t - m_b \times t$.....③

$m_b + m_b \times t = m_r + m_r \times t$，

$m_b(1+t) = m_r(1+t)$

$m_b = m_r$。

(4) 若右盤(m_r) 輔幣需求量<輔幣供應量，設輔幣供應量＝輔幣需求量$+a$，

則①式可修正為④式

$m_l + m_b = (m_r - 3^{n-2} \times 2) \times t - 3^{n-2} + a$...④。

④式－②式，則

$m_b - m_r = m_r \times t - m_b \times t + a$...⑤

$m_b + m_b \times t = m_r + m_r \times t + a$

$m_b(1+t) = m_r(1 + \times t) + a$

$m_b = m_r + \frac{a}{1+t}$

$m_b > m_r$。

(5) 平盤$(m_b) \leq 3^{n-1}$ (性質 1)，故$3^{n-1} \geq m_b \geq m_r$。

6. 當我們以性質 2 首秤預估最大值左盤(m_l)為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤$(m_r)$為$m_l \times t$，

平盤(m_b)為$\left[\frac{(3^{n-2} + m_l + m_r)}{t}\right] + 3^{n-2} \times 2$，推算分辨金幣真偽最大值$M_n$時，需注意

$3^{n-1} \geq m_b \geq m_r$。

7. 故推算分辨金幣真偽最大值M_n時，

若出現平盤$(m_b) <$ 右盤(m_r)，我們可直接調降左盤(m_l)與右盤(m_r)的值。

若出現平盤(m_b)的預估值$\left[\frac{(3^{n-2} + m_l + m_r)}{t}\right] + 3^{n-2} \times 2 > 3^{n-1}$，則將平盤$(m_b)$的值調為$3^{n-1}$。求得分辨金幣真偽的最大值$M_n$。

(1) 以 $t=6$，$n=6$ 為例

① m_l為 $\left[\frac{3^{6-1}}{6}\right] \leq 40$；$m_r = 40\times 6 = 240$，$m_b = \left[\frac{(3^{6-2}+40+240)}{6}\right] + 3^{6-2}\times 2 = 222$。

222<240(不符第 20 頁性質 2 要求)，調降m_l為 38。

② $m_l = 38$；m_r=38×6=228，$m_b = \left[\frac{(3^{6-2}+38+228)}{6}\right] + 3^{6-2}\times 2 = 219$。

219<228，$m_b < m_r$(不符性質 2 要求)。調降m_l為 37。

③ $m_l = 37$；$m_r = 37\times 6 = 222$，$m_b = \left[\frac{(3^{6-2}+37+222)}{6}\right] + 3^{6-2}\times 2 = 218$。

218<222(不符性質 2 要求)。調降m_l為 36。

④ $m_l = 36$；$m_r = 36\times 6 = 216$，$m_b = \left[\frac{(3^{6-2}+36+216)}{6}\right] + 3^{6-2}\times 2 = 217$。

217>216(符合性質 2 要求)，則分辨金幣最大值M_n=36+216+217=469

(2) 代入m_r與m_b的輔幣判斷式，發現與我們推測相符。

表 23：$t=6$，$n=6$ 推估分辨金幣真偽最大值M_n過程

平盤與右盤		① 222<240	② 219<228	③ 218<222	④ 217>216
圖示		40 ： 240 222 78 81 (387) 81 60 81 (279) 81	38 ： 228 219 66 81 (315) 81 57 81 (261) 81	37 ： 222 218 60 81 (279) 81 56 81 (261) 81	36 ： 216 217 54 81 (243) 81 55 81 (249) 8
判斷式	m_r	40+222<387	38+219<315	37+218<279	36+217>253
	m_b	40+240>279	38+228>261	37+222>261	36+216>249

小結：秤量比為1：t 的不等臂天秤，能以首秤 3 盤的預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值M_n。

1. 以首秤預估最大值左盤m_l為 $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤$m_r$為 $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$，

   平盤m_b為 $\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right] + 3^{n-2}\times 2$，代入求左盤$m_l$、右盤$m_r$與平盤$m_b$的最大值。

2. 若平盤m_b<右盤m_r，則調降左盤m_l與右盤m_r的值，直至平盤m_b≥右盤m_r；

   若$\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right] + 3^{n-2}\times 2 > 3^{n-1}$，則$m_b$為$3^{n-1}$。

3. 分辨金幣真偽最大值M_n等於此時左盤、右盤和平盤的和。

   即 $M_n = \left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(1+t) + \left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right] + 3^{n-2}\times 2$。

(六)以首秤 3 盤預估最大值求分辨金幣真偽的最大值是否適用秤量比 1：t，$t \le 4$。

1. 首秤 3 盤預估最大值$m_l=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，$m_r=m_l\times t$， $m_b=\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$，且 $3^{n-1}\ge m_b\ge m_r$。

2. 設秤數n為 4，秤量比 1：t，t為 2~4，求首秤 3 盤預估最大值關係。

表 24：秤量比 1：t，$t=2$、3、4，秤數n為 4 推估分辨金幣真偽最大值M_n

t	2	3	4
m_l	13	9	6
m_r	26	27	24
m_b預估值	42= 3^3+15→3^3	33= 3^3+6→3^3	27= 3^3
$m_b\ge m_r$	27>26(符合)	27=27(符合)	27>24(符合)
M_n	13+26+27=66	9+27+27=63	57

(1) 由表 24，可看出當秤量比 1：t，t為 2~4 時，符合平盤m_b≥右盤m_r的要求。

(2) 但平盤m_b的值皆大於3^{n-1}，故m_b為$\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$的值皆需調整為$3^{n-1}$。

3. 故當秤量比 1：t，t為 2~4 時，分辨金幣真偽的最大值(M_n)

$=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]+\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t+3^{n-1}=\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times(t+1)+3^{n-1}$。(與定理 5 的推測相符)

4. 故以首秤3 盤預估的最大值推測分辨金幣真偽的最大值亦適用秤量比 1：t，$t\le 4$。

5. 以首秤 3 盤的預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值M_n，適用所有秤量比 1：t 的天秤對最大值的推估。

六、不等臂天秤秤量比為 a：b，分辨金幣真偽最大值探討。

(一) 若不等臂天秤秤量比為 a：b 是否存在平盤m_b最大值為3^{n-1}的狀況？

定理 7：秤量比為 a：b 的不等臂天秤，設秤數為n，則平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的判斷式為 $\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times(a+b)\ge\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right]\times(a+b)-3^{n-2}\times 2$。

證明：

1. 設不等臂天秤秤量比m_l：$m_r=a$：b，右盤量較多，故右盤的量≤3^{n-1}，

左盤為右盤的$\frac{a}{b}$倍，故左盤≤$\frac{3^{n-1}}{b}\times a$，且為$a$的整數倍，故左盤≤$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a$。

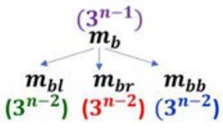
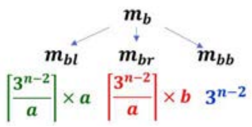
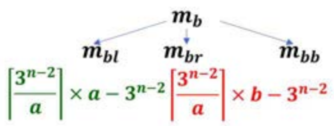
2. 右盤為左盤的$\frac{b}{a}$倍，故右盤≤$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a\times\frac{b}{a}=\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times b$。

3. 平盤 (m_b) 輔幣供應量＝首秤的左盤 (m_l) ＋右盤 (m_r) ，

平盤 (m_b) 輔幣供應的最大量= $\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times a + \left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times b = \left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times (a+b)$ 。

4.平盤 m_b 為 3^{n-1} 的輔幣需求量

表 25：平盤 m_b 為 3^{n-1} 的輔幣需求量分析

平盤欲分辨真偽金幣量	m_{bl} 與 m_{br} 天秤達平衡的量	m_{br} 輔幣需求量
		

(1) 平盤 (m_b) 可分辨量的最大值為 3^{n-1}，可依 3 分法等分 3 份，

左盤 (m_{bl})＝右盤 (m_{br})＝平盤 (m_{bb})＝ 3^{n-2} 。

(2) 天秤平衡的狀況，加入輔幣後左盤 $(m_{bl}) \geq 3^{n-2}$ 且為 a 的整數倍，故

左盤 (m_{bl})＝ $\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times a$；左盤 (m_{bl}) 的輔幣需求＝ $\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times a - 3^{n-2}$ 。

(3) 加入輔幣後右盤 (m_{br}) 為 $\left[\frac{3^{n-1}}{a}\right] \times b$，右盤 (m_{br}) 的輔幣需求＝ $\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times b - 3^{n-2}$ 。

(4) m_b 輔幣需求量＝ $\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times a - 3^{n-2} + \left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times b - 3^{n-2}$ ＝ $\left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$ 。

5. 輔幣的供應量需 ≥ 輔幣的需求量，平盤 (m_b) 才有足夠的輔幣分辨金幣的真偽。

故平盤 (m_b) 最大值為 3^{n-1} 的判斷式為 $\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times (a+b) \geq \left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$ 。

(二) 若秤量比 m_l ： m_r ＝ a ： b，求平盤 (m_b) 最大值為 3^{n-1} 的限制。

1. m_l ： m_r ＝1： t 時， $t \leq 4$ 符合平盤最大值為 3^{n-1}，故 m_r 與 m_l 的比值暫取 3~5 之間加以分析。

2. 以秤數 n＝4，秤量比 a ： b ＝2：3、2：5、2：7、2：9 代入定理 7 分析是否符合平盤 (m_b) 最大值為 3^{n-1} 的判斷式。

表 26：秤量比為 2：b 不等臂天秤，平盤 (m_b) 最大值為 3^{n-1} 分析

秤量比 $(m_l$ ： $m_r)$	2：5	2：7	2：9	2：11
左式＝ $\left[\frac{3^{4-1}}{b}\right] \times (2+b)$	5×7＝35	3×9＝27	3×11＝33	2×13＝26
右式＝ $\left[\frac{3^{4-2}}{2}\right] \times (2+b) - 3^{4-2} \times 2$	5×7－18＝17	5×9－18＝27	5×11－18＝37	5×13－18＝47
結果	35－17＝18 左式>右式	27－27＝0 左式>右式	33－37＝－4 左式<右式	26－47＝－21 左式<右式

(1) 秤量比 2：b 的不等臂天秤，當 b 值≤7 時，平盤 (m_b) 最大值為 3^{n-1} 。

3. 以秤數 $n=4$，秤量比$a：b=$ 3：10、3：11、3：13、3：14 代入代入定理 7 分析是否符合平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的判斷式。表 27：秤量比為 3：b 不等臂天秤，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}分析

$m_l：m_r$	3：10	3：11	3：13	3：14
左式＝$\left[\frac{3^{4-1}}{b}\right]\times(a+b)$	2×13＝26	2×14＝28	2×16＝32	1×17＝17
右式＝$\left[\frac{3^{4-2}}{3}\right]\times(a+b)-3^{4-2}\times2$	3×13－18＝21	3×14－18＝24	3×16－18＝30	3×17－18＝33
結果	26－21＝5 左式>右式	28－24＝4 左式>右式	32－30＝2 左式>右式	17－33＝－16 左式<右式

秤量比 3：b 的不等臂天秤，當 b 值≤13 時，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}。

4. 以秤數 $n=4$，秤量比$a：b=$4：11、4：13、4：15、4：17 代入代入定理 7 分析是否符合平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的判斷式。

表 28：秤量比為 4：b 不等臂天秤，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}分析

$m_l：m_r$	4：11	4：13	4：15	4：17
左式＝$\left[\frac{3^{4-1}}{b}\right]\times(a+b)$	2×15＝30	2×17＝34	1×19＝19	1×21＝21
右式＝$\left[\frac{3^{4-2}}{4}\right]\times(a+b)-3^{4-2}\times2$	3×15－18＝27	3×17－18＝33	3×19－18＝39	3×21－18＝45
結果	30－27＝3 左式>右式	34－33＝1 左式>右式	19－39＝－20 左式<右式	21－45＝－24 左式<右式

4：b 的不等臂天秤，當 b 值≤13 時，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}。

5. $a=5$，以以秤量比$m_l：m_r=$5：13、5：14、5：17、5：19 代入定理 7 分析是否符合平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的判斷式。

表 29：秤量比為 5：b 不等臂天秤，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}分析

$m_l：m_r$	5：13	5：14	5：16	5：17
左式＝$\left[\frac{3^{4-1}}{b}\right]\times(a+b)$	2×18＝36	1×19＝19	1×21＝21	1×22＝22
右式＝$\left[\frac{3^{4-2}}{5}\right]\times(a+b)-3^{4-2}\times2$	2×18－18＝18	2×19－18＝20	2×21－18＝24	2×22－18＝26
結果	36－18＝18 左式>右式	19－20＝－1 左式<右式	21－24＝－3 左式<右式	22－26＝－4 左式<右式

5：b 的不等臂天秤，當 b 值≤13 時，平盤(m_b)最大值為3^{n-1}。

6. 若 a：b不等臂天秤符合平盤m_b最大值為3^{n-1}的判斷式，則分辨金幣最大值

M_n＝左盤(m_l)和右盤(m_r)最大值 $+\ 3^{n-1}=\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times(a+b)+3^{n-1}$。

7. 不等臂天秤秤量比為 a：b ，亦存在符合平盤m_b最大值為3^{n-1}的判斷式。但會因 a值的不同，合乎條件的m_r與m_l比值也不一樣，故比不上 1：t 不等臂天秤的單純化。

8. 若平盤(m_b)最大值為 3^{n-1} ，則分辨金幣真偽的最大值$M_n=\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times(a+b)+3^{n-1}$。

(三) 秤量比為 *a*：*b* 不等臂天秤的輔幣判斷式

定理 8：秤量比為 a：b 的不等臂天秤，設秤數為n，則右盤(m_r) 的輔幣判斷式為

$$m_l+m_b\geq\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times(a+b)+3^{n-2}-m_r。$$

定理 8.1：秤量比為 a：b 的不等臂天秤，設秤數為n，則平盤(m_b) 的輔幣判斷式為

$$m_l+m_r\geq\left\lceil\frac{m_b-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times(a+b)+3^{n-2}-m_b。$$

說明：

表 30：右盤m_r輔幣需求量分析

類 3 分法分右盤(m_r)金幣	加輔幣後天秤達平衡量	m_r輔幣需求量
m_r $m_r-3^{n-2}\times 2$　3^{n-2}　3^{n-2}	m_r $\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times a$　$\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times b$　3^{n-2}	m_r $\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times a-(m_r-3^{n-2}\times 2)$　$\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times b-3^{n-2}$

1. 首秤右盤(m_r)的輔幣判斷式

(1) 以類 3 分法分右盤(m_r)未分辨真偽的金幣，則右盤$(m_{rr})=$平盤$(m_{rb})=3^{n-2}$，左盤$(m_{rb})=m_r-3^{n-2}\times 2$。(見表 30 左圖)

(2) 秤量比為 a：b，故m_{rl}與m_{rr}加入輔幣後取其較大值，分別為$\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times a$與$\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times b$。(見表 30 中圖)

(3) 右盤(m_r)的輔幣需求量＝m_{rl}與m_{rr}加輔幣後達平衡量－m_{rl}與m_{rr}的金幣量

$$=\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times a+\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times b-(m_r-3^{n-2}\times 2)-3^{n-2}$$

$$=\left\lceil\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right\rceil\times(a+b)+3^{n-2}-m_r$$。(見表 30 右圖)

(4) 右盤m_r的輔幣量供應量＝左盤(m_l)＋平盤(m_b)

(5) 左盤(m_l)＋平盤(m_b) ≥ $\left[\frac{m_r-3^{n-2}\times 2}{a}\right]\times(a+b)+3^{n-2}-m_r$……$m_r$的輔幣判斷式。

2. 同理，左盤(m_l)＋右盤(m_r) ≥ $\left[\frac{m_b-3^{n-2}\times 2}{a}\right]\times(a+b)+3^{n-2}-m_b$…$m_b$的輔幣判斷式。

(四) 套用秤量比為1：t 不等臂天秤「以首秤 3 盤的預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值」模式(性質 2)求分辨金幣真偽的最大值$\boldsymbol{M_n}$，我們得到性質 **3**。

性質 3：秤量比為 a：b 的不等臂天秤，以首秤 3 盤的最大值推算分辨金幣真偽的最大值 則，左盤$(m_l)\le\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a$，右盤$(m_r)$＝$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times b$， 平盤$(m_b)\le\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$。且 $3^{n-1}\ge m_b\ge m_r$。

說明：

1. 首秤左盤(m_l)與右盤(m_r)最大值× a，且為a的整數倍，以[ ]取$\frac{3^{n-1}}{b}$的較小值，

   故左盤＝$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a$。

2. 右盤為左盤的$\dfrac{b}{a}$倍，故右盤＝$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a\times\dfrac{b}{a}$＝$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times b$。

3. 平盤(m_b)的最大值

表 30：平盤m_b預估最大值

類 3 分法分m_b	加輔幣達平衡的最大值	m_b的最大值
m_b (m_{bl}) (m_{br}) (m_{bb}) m_{bl} 3^{n-2} 3^{n-2}	m_b $\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a$ $\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times b$ 3^{n-2}	m_b $\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a$ 3^{n-2} 3^{n-2}

(1) 分平盤(m_b)金幣採「類 3 分法」(如表 30 左圖)，m_{br}實際量＝3^{n-2}。

(2) 秤量比為a：b的天秤，m_{bl}與m_{br}都需加上輔幣，使天秤達平衡，

   故m_{br}達平衡最大量≤ $m_l+m_r+3^{n-2}$；秤量比為a：b，

   m_{bl}為m_{br}的$\frac{a}{b}$，且為a的整數倍，故$m_{bl}\le\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a$。

(3) 首秤平盤(m_b)的預估最大值為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a+3^{n-2}\times 2$。

4. 沿用等臂天秤「性質 2」的推論，我們得到「性質 4」中$3^{n-1}\ge m_b\ge m_r$。

5. 故依m_l為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a$，$m_r$為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times b$，平盤$m_b$為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a+3^{n-2}\times 2$

   代表m_b的輔幣供應量=輔幣需求量，故依此預估值最大值求首秤 3 盤的值時，

若出現右盤$m_r >$ 平盤m_b，則與推測不符，則需調降m_l與m_r的值，重新求m_b的值；

若出現平盤$m_b > 3^{n-1}$，則m_b調為3^{n-1}。(因$3^{n-1} \ge m_b \ge m_r$)

6. 不等臂天秤秤量比$a：b = 2：9$，以m_l為$\left[\frac{3^{n-1}}{9}\right] \times 2$，$m_r$為$\left[\frac{3^{n-1}}{9}\right] \times 9$，$m_b$為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{9}\right] \times 2 + 3^{n-2} \times 2$代入，求當$n$=3、4、5、6、7 時$m_l$、$m_r$與$m_b$的最大值。

表 31：秤量比$m_l：m_r$為 2：9 的不等臂天秤，秤數n=3、4、5、6、7 時M_n的值

n	3	4		5	6	7
m_l	2	6	4	18	54	162
m_r	9	27	18	81	243	729
m_b	8	26	24	82	246	738
判斷	8<9	26<27	24>18	82>81	246>243	738>729
M_n	無	調降	46	181	543	1629

(1) 秤數n=3 時，因 m_l的最小值為 2，故無法再調降m_l的值，故秤量比為 2：9 的不等臂天秤最少秤數為「4」。

(2) 秤數n=4，經過一次調降的過程，才找到分辨金幣真偽的最大值M_n。

7. 秤量比$a：b = 3：13$ 天秤，以m_l為$\left[\frac{3^{n-1}}{13}\right] \times 3$，$m_r$為$\left[\frac{3^{n-1}}{13}\right] \times 13$，$m_b$為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{13}\right] \times 2 + 3^{n-2} \times 2$代入，求當$n$=4、5、6 時分辨金幣真偽的最大值$M_n$。

表 32：$m_l：m_r$秤量比為 3：13 的不等臂天秤，秤數n=4、5、6 時M_n的值

n	4		5		6	
m_l	6	3	18	15	54	51
m_r	26	13	78	65	234	221
m_b	20	20	72	70	218	230
判斷	20<26	20>13	72<78	70>65	218<234	230>221
M_n	調降	36	調降	150	調降	732

(1) 秤數n=4、5、6 時，都經過一次調降的過程，才找到分辨金幣真偽的最大值M_n。

小結：$a：b$ 的不等臂天秤，以首秤 3 盤預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值M_n的過程。

1. 以首秤預估最大值左盤m_l為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times a$，右盤$m_r$為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times b$，

平盤m_b為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right] \times a + 3^{n-2} \times 2$，代入求左盤$m_l$、右盤$m_r$與平盤$m_b$的最大值。

2. 若平盤m_b<左盤m_l，則調降左盤m_l的值，直至平盤m_b≥左盤m_l；

若平盤預估值$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right] \times a + 3^{n-2} \times 2 > 3^{n-1}$，則將平盤$m_b$的值調為$3^{n-1}$。則分辨金幣真偽最大值$M_n$等於此時左盤、右盤和平盤的和。

3. $M_n = \left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times (a+b) + \left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right] + 3^{n-2} \times 2$，且 $3^{n-1} \geq m_b \geq m_r$。

肆、結論

一、以不等臂天秤分辨金幣真偽時，「類三分法」的金幣分法，可降低輔幣的需求量，找到以最少秤數(n)分辨金幣真偽的最大值。

二、不等臂天秤，平盤(m_b)最大值為 3^{n-1} 是個重要的分水嶺，當m_b最大值為 3^{n-1}時，可以秤數(n) 和 t 值，直接找出分辨金幣真偽的最大值 M_n。

(一) 秤量比為1：t的不等臂天秤，

平盤(m_b)最大值為 3^{n-1} 的判斷式為 $\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right] \times (t+1) \geq 3^{n-2} \times (t-1)$。

若平盤(m_b)最大值為 3^{n-1}，則分辨金幣真偽的最大值(M_n)為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right] \times (t+1) + 3^{n-1}$。

(二) 秤量比為a：b的不等臂天秤，

平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的條件為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times (a+b) \geq \left[\frac{3^{n-2}}{a}\right] \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$。

若平盤(m_b)最大值為 3^{n-1}，則分辨金幣真偽的最大值$M_n = \left[\frac{3^{n-1}}{b}\right] \times (a+b) + 3^{n-1}$。

三、秤量比m_l：m_b＝1：t的不等臂天秤，當 t 值≤ 3 時，分辨 m 個金幣的最少秤數(n)可由分辨金幣真偽最大值M_n的公式推出。

(一) t＝1，分辨 m 個金幣最少秤數 $n = \lceil log_3 m \rceil$。

(二) t＝2，分辨 m 個金幣最少秤數 $n = \lceil log_3 \frac{2m+3}{5} \rceil + 1$。

(三) t＝3，分辨 m 個金幣最少秤數 $n = \left\lceil log_3 \frac{m}{7} \right\rceil + 2$。

四、不等臂天秤，可以首秤 3 盤的預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值$\boldsymbol{M_n}$。

(一) 首秤 3 盤的預估最大值

1. 秤量比為 1：t的不等臂天秤

左盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]$，右盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{t}\right]\times t$，平盤為$\left[\frac{(3^{n-2}+m_l+m_r)}{t}\right]+3^{n-2}\times 2$。

2. 秤量比為a：b的不等臂天秤

左盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times a$，右盤為$\left[\frac{3^{n-1}}{b}\right]\times b$，平盤為$\left[\frac{m_l+m_r+3^{n-2}}{b}\right]\times a+3^{n-2}\times 2$。

(二) 若平盤m_b<右盤m_r，則調降左盤m_l與右盤m_r的值，直至平盤m_b≥右盤m_r；

若平盤$m_b > 3^{n-1}$，則m_b的值調為3^{n-1}。

(三) 分辨金幣最大的值(M_n)為首秤 3 盤的預估最大值的和。

五、右盤($\boldsymbol{m_r}$)與平盤($\boldsymbol{m_b}$)的輔幣判斷式，能檢核我們求出的分辨金幣真偽最大值($\boldsymbol{M_n}$)是否正確。

六、以不等臂天秤分辨金幣真偽時，「類三分法」、平盤($\boldsymbol{m_b}$)最大值為$\boldsymbol{3^{n-1}}$的條件，及$\boldsymbol{m_r}$與$\boldsymbol{m_b}$的輔幣判斷式，是幫助我們找到分辨金幣真偽最大值$\boldsymbol{M_n}$的重要工具。

伍、參考資料

[1] 游森棚(2021)。森棚教官的數學題－奇怪天秤。科學研習月刊第 60 卷第 5 期。

[2] 江瑋平、廖宜嶢、洪立強、陳政堯(1991)。12 枚金幣的奧秘。全國中小學第 31 屆科展高小組數學科作品。

[3] 喬旋、郭美辰等 5 名(1993)。16 枚金幣的奧秘。全國中小學第 33 屆科展高小組數學科作品。

[4] 廖冠傑、石智凱、呂建宏、李泓靖(2007) 。圖窮幣現。全國中小學第 47 屆科展高中組數學科作品。

[5] 郭玥均、吳承軒、李承熹、郭家綺(2008)。假錢幣快出來。全國中小學第 48 屆科展國中組數學科作品。

[6] 藍宇潔(2017)。神奇的砝碼。全國中小學第 57 屆科展國小組數學科作品。

【評語】080407

1. 該作品為利用不等臂天秤判斷偽幣之研究，研究者提出『類三分法』的研究方法有效處理秤量與秤數，並在上述之方法下提出『輔幣』輔以該作法討論，最終得到秤數與最大幣量之關係並將研究結果推廣到一般比例的不等臂天秤，圖表與樹狀圖的利用讓研究思路清晰有趣。

2. 該作品結果具一般性，可再多討論問題所對應的日常生活場景及其應用，讓作品鋪陳更加生動。

作品簡報

隱藏在天秤裡的秘密

數學科　國小組

研究動機

科學研習月刊[1]「**奇怪天秤**」這個題目引起我們的興趣。

實驗室中有一個奇怪天秤，**左臂長度是右臂長度的兩倍**，也就是說，左盤重量剛好為右盤的一半時，天秤會平衡...。

研究目的

(一) 用不等臂天秤，找出分辨金幣真偽的最佳方法。

(二) 用秤量比為1：t 的不等臂天秤，找出秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

(三) 用秤量比為1：t 的不等臂天秤，找出分辨m個金幣(包含1假幣)真偽的最少次數。

(四) 用臂長比為 a：b 的不等臂天秤，找出秤數與可分辨金幣真偽最大值的關係。

研究過程

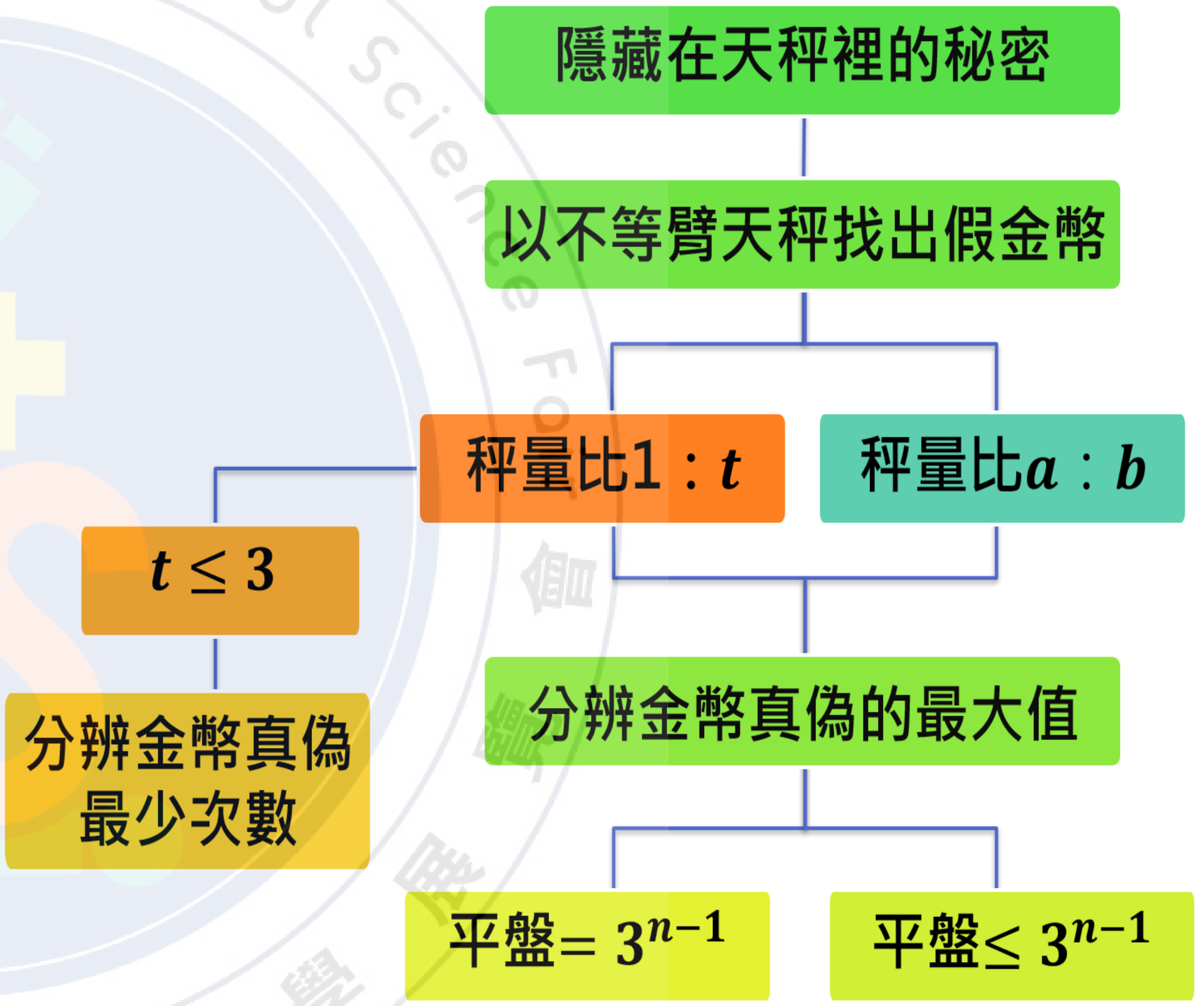


圖1：研究架構圖

名詞定義

(一) m_l：代表首秤左盤放入的金幣數(本研究指長臂端的秤量)。

(二) m_r：代表首秤右盤的金幣量(本研究指短臂端的秤量)。

(三) m_b：代表金幣總量扣除首秤左盤和右盤的未秤量。

(四) m_r的分量：分辨右盤(m_r)金幣的真偽，m_{rl}表示左盤的量；
m_{rr}表示右盤的量； m_{rb}表示平盤的量。

(五)m_b的分量：分辨右盤(m_b)金幣的真偽，m_{bl}表示左盤的量；
m_{rr}表示右盤的量； m_{rb}表示平盤的量。

(六) 秤量比：天秤達平衡時左盤與右盤的金幣的數量比，
如圖5金幣數左盤為2，右盤為4，則秤量比為1：2。

(七) t 值：本研究指在秤量比為1：t 的天秤，後項的值。
如秤量比為1：2，則t 值為2。

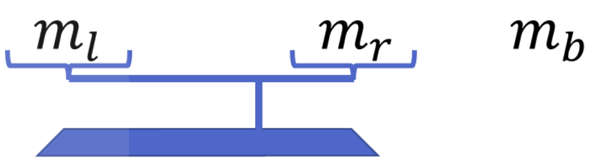


圖2：天秤首秤盤

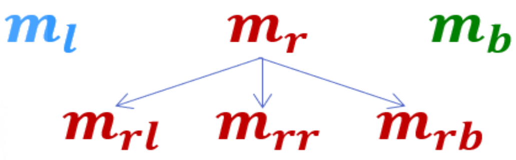


圖3：右盤再秤量

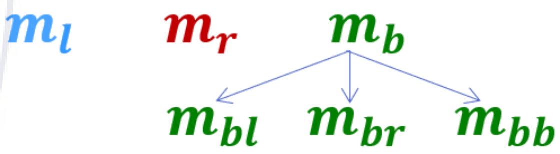


圖4：平盤再秤量

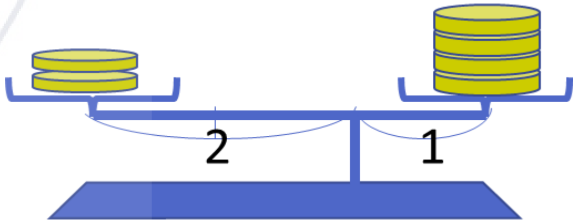


圖5：秤量比與t值

研究結果：秤量比1：t的天秤可分辨金幣真偽的最大值探討

以樹狀圖分析不同首秤，找出秤數(n)與可分辨真偽最大值(M_n)的關係

表1：秤量比1：2不同首秤最大值樹狀圖

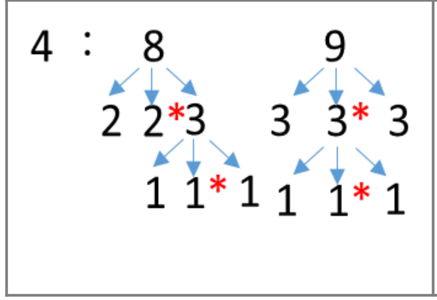
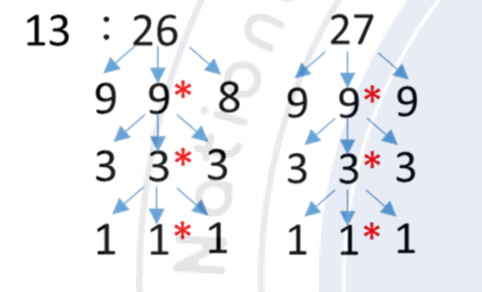
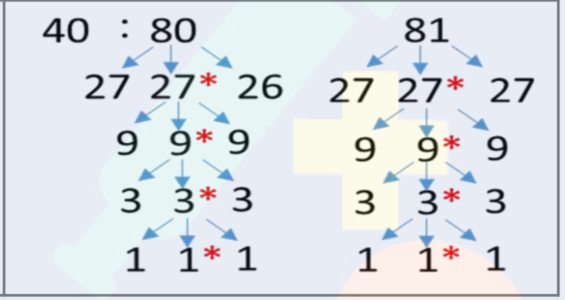
秤數=3	秤數=4	秤數=5
		

表2：秤量比1：2天秤秤數與最大值關係

秤數	3	4	5
左最大量	$4=\frac{3^2-1}{2}$	$13=\frac{3^3-1}{2}$	$40=\frac{3^4-1}{2}$
右最大量	$8=3^2-1$	$26=3^3-1$	$80=3^4-1$
平最大量	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$
金幣數m	7~21	22~66	67~201

定理 1 $t=2$，分辨金幣真偽最大值M_n為 $\frac{3^{n-1}\times 5-3}{2}$。

分辨m個金幣真偽的最少秤數 $n=[\log_3\frac{2m+3}{5}]+1$

定理 2 $t=3$，分辨金幣真偽最大值M_n為 $3^{n-2}\times 7$。

分辨m個金幣真偽的最少秤數 $n=\left\lceil \log_3\frac{m}{7}\right\rceil+2$

定理 3 $t=4$，n若為奇數，分辨金幣真偽最大值M_n為$\frac{3^{n+1}-5}{4}$。

n若為偶數，分辨金幣真偽最大值M_n為$=\frac{3^{n+1}-15}{4}$。

性質 1

首秤3盤分辨金幣真偽最大值

左盤$\le\left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor$，右盤$\le\left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor\times t$，

平盤$\le 3^{n-1}$

平盤m_b最大值為 3^{n-1}的條件與分辨金幣真偽最大值M_n

平盤(m_b)輔幣供應量 = 首秤左盤 + 右盤= $\left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor \times t$。

平盤的輔幣需求量 = $3^{n-2} \times t - 3^{n-2} = 3^{n-2} \times (t-1)$

表3：平盤為3^{n-1}輔幣需求分析

分辨金幣量	達平衡的量
(3^{n-1}) m_b → m_{bl}: 3^{n-2}, m_{br}: $\boxed{3^{n-2}}$, m_{bb}: 3^{n-2}	(3^{n-1}) m_b → m_{bl}: 3^{n-2}, m_{br}: $(3^{n-2})\times t$, m_{bb}: 3^{n-2}

定理 4

平盤最大值= 3^{n-1}的條件為$\left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor \times (t+1) \geq 3^{n-2} \times (t-1)$。

定理 5

當秤量比$t \leq 4$，平盤(m_b)的最大值為3^{n-1}，可分辨金幣真偽最大值(M_n) 為$\left\lfloor\frac{3^{n-1}}{t}\right\rfloor \times (t+1) + 3^{n-1}$

平盤m_b最大值小於 3^{n-1}分辨金幣真偽最大值

定義 1 類3分法

「**類3分法**」是針對不等臂天秤首秤之後的金幣真偽分辨設計「**最低輔幣需求的分類方法**」。即在天秤的右盤和平盤各分3^k個金幣，其餘 m - 3^k×2個金幣分在左盤的方法。

金幣量(m)

$m-3^k\times 2$ (左盤量)　3^k (右盤量)　3^k (未秤量)

圖6：類3分法

表4：t=5,類3分法與3等分法

類 3 分法	3 等分法
21 → 3, 9(6), 9	21 → 7, 7(28), 7

右盤與平盤再秤量輔幣需求分析

定理 6 左盤(m_l) + 平盤$(m_b) \geq (m_r - 3^{n-2}\times 2)\times t - 3^{n-2}$為右盤$(m_r)$的輔幣判斷式。

1. 右盤(m_{rr})輔幣的需求量 = $(m_r$ - $3^{n-2}\times 2)\times t$ - 3^{n-2}
2. 右盤(m_{rr})輔幣的供應量 = 首秤左盤(m_l) + 平盤(m_b)
3. 輔幣供應量需≥ 需求量，右盤的秤數才能不增加。
4. 左盤(m_l) + 平盤$(m_b) \geq (m_r$ - $3^{n-2}\times 2)\times t$ - 3^{n-2}為右盤(m_r)的輔幣判斷式。

表5：右盤m_r輔幣需求分析

分辨金幣量			達平衡的量		
	m_r			m_r	
$\boxed{m_r - 3^{n-2}\times 2}$	3^{n-2}	3^{n-2}	$m_r - 3^{n-2}\times 2$	$(m_r - 3^{n-2}\times 2)\times t$	3^{n-2}

定理 6.1 左盤(m_l) + 右盤$(m_r) \geq (m_b - 3^{n-2}\times 2)\times t - 3^{n-2}$為平盤$(m_b)$的輔幣判斷式。

1. 平盤(m_{br})輔幣的需求量 = $(m_b$ - $3^{n-2}\times 2)\times t$ - 3^{n-2}
2. 平盤(m_{br})輔幣的供應量 = 首秤左盤(m_l) + 右盤(m_r)
3. 輔幣供應量需≥ 需求量，右盤的秤數才能不增加。
4. 左盤(m_l) + 右盤$(m_r) \geq (m_b$ - $3^{n-2}\times 2)\times t$ - 3^{n-2}為平盤(m_b)的輔幣判斷式。

表6：平盤m_b輔幣需求分析

分辨金幣量			達平衡的量		
	m_b			m_b	
$\boxed{m_b - 3^{n-2}\times 2}$	3^{n-2}	3^{n-2}	$m_b - 3^{n-2}\times 2$	$(m_b - 3^{n-2}\times 2)\times t$	3^{n-2}

表7：以右盤與平盤的輔幣判斷式分析t=5，n=5再秤量最大值

16+81<103(不符)，16+80<108(不符)	15+79>78(符合)，15+75<98(不符)	15+77>78(符合)，15+75>88(符合)
16 ： 80 81	15 ： 75 79	15 ： 75 77
26 27 (103) 27 27 27 (108) 27	21 27 (78) 27 25 27 (98) 27	21 27 (78) 27 23 27 (88) 27

以首秤3盤預估最大值推算分辨金幣真偽最大值M_n

性質 2 首秤3盤最大值左盤≤ $\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{t} \right\rfloor$，右盤≤ $\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{t} \right\rfloor \times t$，平盤≤ $\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor + 3^{n-2} \times 2$。

表8：平盤m_b預估最大值

欲分辨金幣	m_{bl}與m_{br}天秤達平衡的最大量	m_b最大值
m_b m_{bl} $\boxed{3^{n-2}}$ 3^{n-2}	m_b $\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor$ $\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor \times t$ 3^{n-2}	m_b $\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor$ 3^{n-2} 3^{n-2}

1. 右盤m_{br}達平衡最大量為(3^{n-2}+所有輔幣)，且為t的倍數，故$m_{br} \le \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor \times t$。
2. 故左盤$m_{bl} \le \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor$；因此首秤平盤$m_b \le \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor + 3^{n-2} \times 2$。

小結

(1) 以首秤三盤預估最大值代入求分辨金幣真偽最大值M_n。

(2) 若平盤m_b<右盤m_r，則需調降左盤m_l與右盤m_r的值，直至平盤$m_b \ge$右盤m_r；若平盤> 3^{n-1}，則平盤m_b調為3^{n-1}。

(3) $M_n = \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{t} \right\rfloor \times (1+t) + \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{t} \right\rfloor + 3^{n-2} \times 2$，且$3^{n-1} \ge m_b \ge m_r$。

平盤m_b最大值為 3^{n-1}的條件與分辨金幣真偽最大值M_n

定理 7 **平盤為3^{n-1}的判斷式為$\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b) \ge \left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$ 。**

1. 輔幣供應量

(1)秤量比為 a：b，右盤$\le 3^{n-1}$且為b的整數倍，以$\lfloor\ \rfloor$取較小值，

故右盤$m_r \le \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times b$，左盤$m_l \le \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times a$。

(2)輔幣供應量取左、右盤最大值為$\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b)$

2.輔幣需求量

(1)平盤m_b為3^{n-1}，故再秤量的左、右、平盤皆為3^{n-2}。

(2)左盤m_{bl}加入輔幣的平衡量$\ge 3^{n-2}$，且為a的整數倍，以$\lceil\ \rceil$取其較大值，故左盤m_{bl}為$\left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times a$，右盤$m_{br}$為$\left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times b$。

(3)平盤m_b為3^{n-1}的輔幣需求量為 $\left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$。

表9：平盤為3^{n-1}的首秤3盤

右盤	首秤3盤
首秤 金幣總量(m) m_l m_r m_b $\le 3^{n-1}$ 3^{n-1}	首秤 金幣總量(m) m_l m_r m_b $\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times a$ $\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times b$ 3^{n-1}

表10：平盤為3^{n-1}輔幣需求分析

平盤欲分辨量	加輔幣達平衡量
(3^{n-1}) m_b m_{bl} m_{br} m_{bb} (3^{n-2}) (3^{n-2}) (3^{n-2})	m_b m_{bl} m_{br} m_{bb} $\left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times a$ $\left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times b$ 3^{n-2}

3.平盤為3^{n-1}的判斷式為$\left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b) \ge \left\lceil \frac{3^{n-2}}{a} \right\rceil \times (a+b) - 3^{n-2} \times 2$

右盤與平盤再秤量輔幣需求分析

定理 8 右盤(m_r)的輔幣判斷式：左盤(m_l) + 平盤$(m_b) \geq \left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor \times (a+b) + 3^{n-2} - m_r$ 。

表11：右盤m_r輔幣需求

類3分法分m_r欲秤金幣	m_{rl}與m_{rr}天秤達平衡的量	m_{rr}輔幣需求量
m_r $m_r-3^{n-2}\times2$　3^{n-2}　3^{n-2}	m_r $\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times a$　$\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times b$　3^{n-2}	m_r $\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times a-(m_r-3^{n-2}\times2)$　$\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times b-3^{n-2}$

1.以類3分法分右盤(m_r)的金幣，右盤m_{rr}=平盤m_{rb}=3^{n-2}，左盤m_{rl}為$m_r-3^{n-2}\times2$。

2. 秤量比為$a：b$，故加輔幣天秤平衡左盤m_{rl}為$\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times a$，右盤$m_{rr}$為$\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times b$

3. 輔幣需求量 = $\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times(a+b)$ - $(m_r-3^{n-2}\times2)$ - 3^{n-2} = $\left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times(a+b)+3^{n-2}$- m_r

4.左盤(m_l) + 平盤$(m_b) \geq \left\lfloor\frac{m_r-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times(a+b)+3^{n-2}-m_r$ 。...為右盤(m_r)的輔幣判斷式。

定理 8.1 平盤(m_b)的輔幣判斷式：

左盤(m_l) + 右盤$(m_r) \geq \left\lfloor\frac{m_b-3^{n-2}\times2}{a}\right\rfloor\times(a+b)+3^{n-2}-m_b$ 。

以首秤3盤預估最大值推算分辨金幣真偽最大值M_n

性質 3 首秤3盤最大值左盤$\leq \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times a$，右盤 $\leq \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times b$，平盤 $\leq \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a + 3^{n-2} \times 2$

表12：平盤m_b預估最大值

欲分辨金幣	m_{bl}與m_{br}天秤達平衡的最大量	m_b最大值
m_b：m_{bl}　3^{n-2}　3^{n-2}	m_b：$\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a$　$\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times b$　3^{n-2}	m_b：$\left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a$　3^{n-2}　3^{n-2}

首秤平盤預估最大值推算

右盤m_{br}達平衡最大量為3^{n-2}+所有輔幣，且為b的倍數，故$m_{br} \leq \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times b$；左盤$m_{bl} \leq \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a$；因此首秤平盤$m_b \leq \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a + 3^{n-2} \times 2$。

小結

(1) 以首秤三盤預估最大值代入求分辨金幣真偽最大值M_n。

(2) 若平盤m_b<右盤m_r，則需調降左盤m_l與右盤m_r的值，直至平盤$m_b \geq$右盤m_r；若平盤> 3^{n-1}，則平盤m_b調為3^{n-1}。

(3) 則$M_n = \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b) + \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a + 3^{n-2} \times 2$，且$3^{n-1} \geq m_b \geq m_r$。

結論

一、以不等臂天秤分辨金幣真偽時，「類三分法」、平盤(m_b)最大值為3^{n-1}的條件，及m_r與m_b的輔幣判斷式，是幫助我們找到分辨金幣真偽最大值M_n的重要工具。

二、秤量比為$a：b$的不等臂天秤，當m_b最大值為 3^{n-1}時，分辨金幣真偽的最大值

$$M_n = \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b) + 3^{n-1}$$ 。

三、不等臂天秤，可以首秤3盤的預估最大值推算分辨金幣真偽的最大值M_n。

$$M_n = \left\lfloor \frac{3^{n-1}}{b} \right\rfloor \times (a+b) + \left\lfloor \frac{3^{n-2}+m_l+m_r}{b} \right\rfloor \times a + 3^{n-2} \times 2$$，且$3^{n-1} \geq$平盤$m_b \geq$左盤m_l。

四、秤量比1：t 是秤量比$a：b$ 不等臂天秤的特例，故秤量比$a：b$的一般式亦適用1：t 的天秤。

五、當t值≤ 3時，可由M_n的公式推出分辨m個金幣真偽的最少秤數(n)。

六、右盤(m_r)與平盤(m_b)的輔幣判斷式，能檢核我們求出的分辨金幣真偽最大值(M_n)是否正確。

未來展望

一、分辨*m*個金幣(包含1假幣)真偽的最少秤數。

關於分辨金幣真偽的最少次數，目前我們僅在1：2，1：3這兩種天秤找到解決的辦法，其他秤量比的不等臂天秤並沒有繼續探討。

但我們相信不等臂天秤分辨金幣真偽最少次數，應該是個可以繼續探討的主題。

二、分辨出2個以上的假金幣

在等臂天秤的研究中，已將分辨金幣真偽問題推到2個以上假金幣的研究，相信未來在不等臂天秤的研究，這也是個值得繼續探討的問題。

參考資料

[1] 游森棚(2021)。森棚教官的數學題 - 奇怪天秤。科學研習期刊第60卷第5期。

[2] 廖冠傑、石智凱、呂建宏、李泓靖(2007) 。圖窮幣現。全國中小學第47屆科展高中組數學科作品。

[3]藍宇潔(2017)。神奇的砝碼。全國中小學第57屆科展國小組數學科作品。