中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080406

割「聚」一「方」-切割重組正方形

學校名稱：高雄市三民區陽明國民小學

作者：	指導老師：
小六 張晏滕	林家薈
小六 杜松岱	林政霓

關鍵詞：多邊形切割、正方形連塊切割、重組正方形

得獎感言

割「聚」一「方」-切割重組正方形

回想參加科展的這一年，從開始找題目時，同學、指導老師各有不同的想法，我們在經由多次相互討論激盪，漸漸形成團隊合作的默契，最後參與科展到全國賽最後一哩路實屬不易，付出的努力及成果被評審老師肯定，而當時辛勞的汗水，在科學教育館臺下宣佈得獎的瞬間一切什麼都值得了。

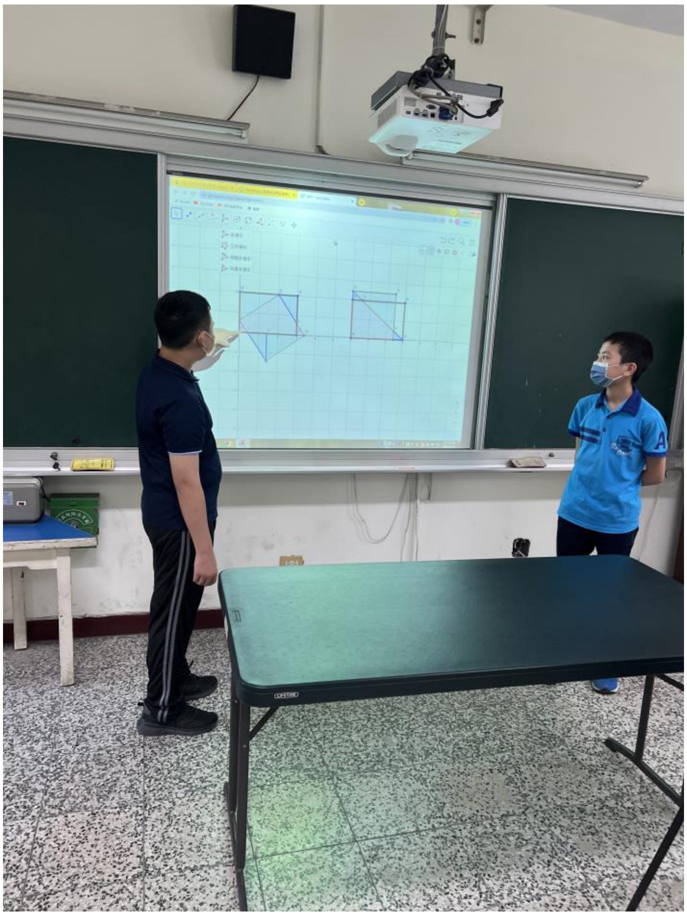
參加科展對我們最大的影響是學會依循探究的精神，一步步推理與驗證，再從想法轉換至實作的經驗法則。像是撰寫報告時，更能知道該如何把自己的想法以及研究歷程完整的寫出，並且在口頭報告時也能擷取重點說明。除此之外，在做此研究的過程讓我也學會了如何使用 GeoGebra 電腦繪圖軟體，學習到很多數學知識與技能。

而研究進行中也曾面臨思緒的膠著，其中印象最深是正七邊形，因查閱文獻，皆無有關正七邊形切割重組成正方形資訊，後來想到改變切割刀法，再使用疊合法切割重組，就能解出正確排列方法；還有我們無意間發現了新的長方形的切割方法，導致我們需要將報告重新修改，但是比賽日期已經逼近，所以只能擠出午休時間到資優班修改報告，經過這段時間努力後，我們將阻力化為動力，因此切割正多邊形和連塊都有了新的突破，甚至比文獻的做法更簡單且切割刀數更少刀！

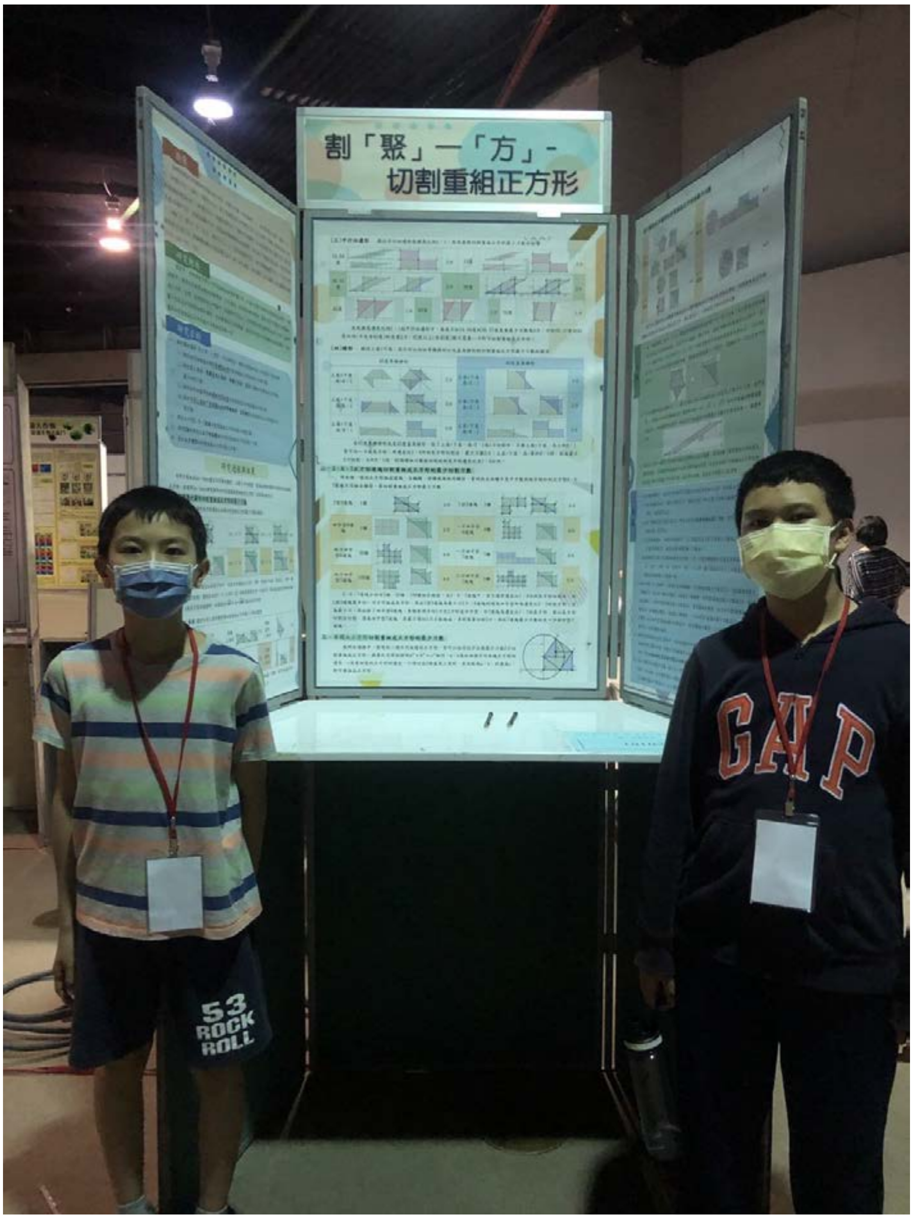
研究過程冗長且艱辛，我們建議學弟妹們研究時，要選擇自己有興趣的主題，才有動力花更多的時間深入探討。而一開始的文獻資料要收集的夠多，才不會做到一半時，發現已經有人做過了。在報告中有條不紊地指出研究的特色，尤其是作品與眾不同或是突破文獻之處，可以為自己大大加分。

一路走來，感謝研究的夥伴，我們在過程中堅持不懈的努力，才有現在的成果。更感謝指導老師家薈老師及政霓老師，還有指導作品精進的施皓耀教授，不厭其煩地指導我們精進切割、重組及疊合方法，其研究過程讓我們受益良多，讓我們知道在作品中還可以繼續改進的地方。也要再次感謝評審以及主辦單位，認同我們的研究，未來我們會依循國小做科展累積的寶貴經驗，繼續在研究之路上接續挑戰進階的課題。

從希臘十字的切割，引發我們對切割重組正方形的興趣。



找到比文獻少一刀的突破性發現。



一年來用心的研究，在高雄市賽的時候初登場。

摘要

本研究探討各種多邊形經由切割重組正方形，求取最少刀數。研究發現：一、長方形邊長比 1：4^n時，最少 n 刀切割重組成正方形，為 1：$m^2(4^n < m^2 < 4^{n+1})$時，最少 n+1 刀，介於 1：4^n 、1：4^{n+1}間最少 n+2 刀；二、三角形中，等腰直角三角形只需 1 刀切割，正三角形為 3 刀，在相同的底與高比時，銳角三角形和鈍角三角形會比直角三角形和等腰三角形多 1 刀；三、平行四邊形影響最少刀數是底與底延伸長度比；四、梯形的上底+下底比高相同時，不規則梯形比等腰梯形、直角梯形的最少刀數多 1 刀；五、正多邊形中，正五邊形最少 5 刀；正六邊形為 4 刀；正七邊形為 9 刀；正八邊形為 4 刀；六、正方形連塊中，使用長方形切割法，三連塊最少刀數為 2 刀，六連塊為 2 刀，七連塊為 3 刀。

壹、 研究動機

課堂中，老師請我們將正方形五連塊組成的希臘十字，以最少切割刀數來切割，並重組成正方形。切割的過程中，運用四年級學過幾何切割重組，以及邊長、角度與面積的概念，最後以最少刀數 2 刀切割，並重組成正方形。這時，我們想到在七巧板中，是運用不同大小、不同形狀的幾何圖形來組成正方形。若將希臘十字改成不同形狀的幾何圖形、不同數量的正方形連塊，這些圖形切割重組成正方形的最少刀數，會需要幾刀呢？

貳、 研究目的

目的一、探討各種多邊形經由切割重組成正方形求取最少切割刀數。	
問題一	相同面積長方形的<u>**不同邊長比**</u>對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題二	<u>**不同種類**</u>三角形的<u>**底與高比**</u>對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題三	<u>**不同底與高比**</u>平行四邊形的<u>**不同底與底延伸長度比**</u>對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題四	梯形<u>**不同上底加下底與高的比**</u>對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題五	<u>**正多邊形**</u>在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
目的二、探討正方形<u>**連塊**</u>經由切割重組成正方形求取最少切割刀數。	
問題一	正方形 <u>**3 連塊不同組合類型**</u>在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
問題二	正方形 <u>**6 連塊不同組合類型**</u>在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
問題三	正方形 <u>**7 連塊不同組合類型**</u>在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。

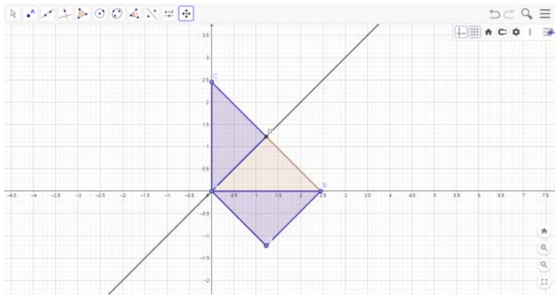
參、 文獻探討

根據重組正方形的相關文獻參考如下表：

文獻名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
變形方塊~最少刀切割五、八方塊重組為正方形的探討	一、正方形 3 連塊到 8 連塊以數字找尋所有組合類型，其結果分別為：2 種、5 種、12 種、35 種、108 種、369 種。 二、5 連塊組合類型在切割重組成正方形的最少刀數中，有 5 種為 2 刀，7 種為 3 刀；8 連塊組合類型在切割重組成正方形的最 少刀數中，有 4 種為 1 刀，215 種為 2 刀，149 種為 3 刀，1 種為 4 刀。	一、本研究以**圖示**呈現出 3 連塊、6 連塊以及 7 連塊的組合類型，以便後續能做切割的分類。 二、5 連塊是 $1^{2+}2^2$ 正方形的邊長為 $\sqrt{5}$，而 8 連塊是 2^2+2^2，皆是兩正方形的面積和。從文獻延伸以非平方數的組合，探討 **3、6、7 連塊所有組合類型**經由切割重組成正方形的最少刀數。
面積切割	一、在 3、6、7 連塊最少刀數皆是運用鑲嵌法以最少刀數切割並重組成正方形，其切法為利用邊長做出要的面積，再把原圖形切補過來，在 3 連塊最少刀數為 4 刀，6 連塊為 3 刀，7 連塊為 4 刀。	一、同為鑲嵌法，但本研究在長方形與正方形中，找出兩圖形疊合時最適合的位置。將 3、6、7 連塊視為長方形來與正方形鑲嵌，並突破文獻的最少刀數，依序分別為 2 刀、2 刀、3 刀。
剪剪貼貼拼成「正」	一、正三角形以內切旋轉的方式切割重組成正方形。 二、銳角三角形與鈍角三角形依據底與高的長度，以高的一半或底的一半著手，剪拼成一個長方形，再從長方形切成正方形。 三、長方形 2 刀切割成正方形有兩種方法，為長方形與正方形疊合。 四、將多邊形切割成多個三角形，從多個三角形分別切割成數個正方形，再組成一個正方形。	一、本研究在正三角形中找出不同的切割方式，且以相同最少刀數。 二、我們除了探討了銳角三角形及鈍角三角形，我們也探討了各種三角形的切割方式以及底與斜邊長比例的最少切割刀數。 三、找尋不同邊長比例中合適的長方形切割方式，求取最少刀數。 四、本研究以正多邊形來探討，並簡化其複雜的程序，以更少刀數切割重組成正方形。

肆、 研究設備與器材

利用 Geo Gebra 畫出不同幾何圖形，以最少刀切割後，重組成相同面積的正方形。並運用 Geo Gebra 繪製精準的切割過程與重組後的正方形，且說明切割方式。

Geo Gebra (數學繪圖軟體)		

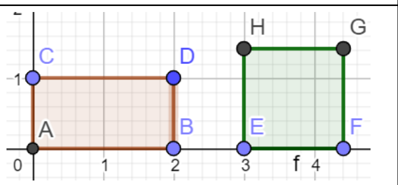
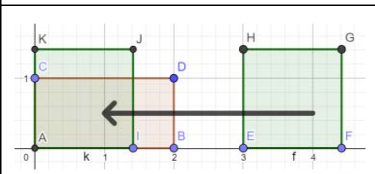
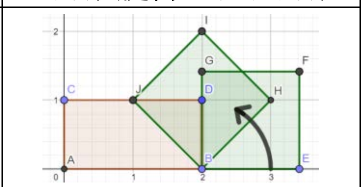
伍、 研究過程與結果

本研究探討**不同邊長比**的長方形、**各種類型**三角形、在**不同底與底延伸長度比**、**不同底與高比**的平行四邊形、**各種類型**的梯形及**正多邊形**。在正方形中以**不同數量的連塊**求取切割並重組成正方形的最少刀數，先求 3、6、7 連塊所有組合類型，再找出各種連塊組合類型的切割重組成正方形的最少刀數。

一、不同幾何圖形切割重組成正方形的最少刀數

(一) 長方形

欲將長方形經由切割重組成正方形，因面積相同，由長方形面積可得正方形邊長，在長方形與正方形的疊合過程，可藉由**平移**與**旋轉**的方式來改變正方形疊合在長方形的位置，並由正方形重疊的邊長來找出切割的刀法，並求取最少切割刀法。

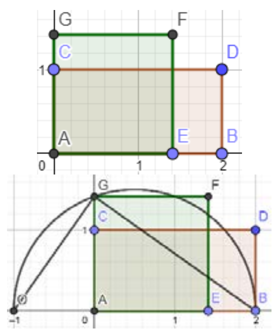
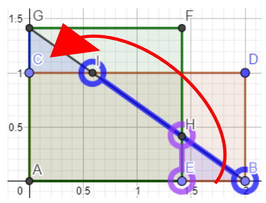
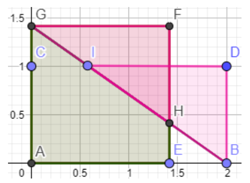
相同面積的長方形與正方形	正方形**平移**疊合長方形	正方形**旋轉**疊合長方形
		

但長方形會因邊長比的不同，而形成趨近正方形的長方形，或是細細長長的長方形。在長方形邊長比為 1：4 時，一邊剛好為正方形邊長的一半，另一邊則為正方形的 2 倍，可 1 刀截半，即可重組成正方形。在長方形邊長比小於 1：4 時，可藉由同面積正方形與長方形的疊合狀況，求出最少切割刀數，重組成正方形；當邊長比大於 1：4 時，長邊超過正方形邊長的兩倍，切割後剩餘的部分依然比正方形邊長還長，無法直接將切割後的圖形重組成正方形，需先切割重組成小於或等於邊長比 1：4 的長方形，才可進行疊合。

研究一：在邊長比小於 1：4 時，運用疊合法求長方形最少刀數切割重組成正方形

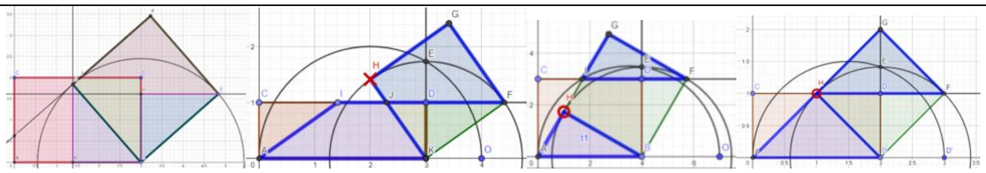
將相同面積的正方形，經由上下左右的平移與旋轉疊合在長方形上，會形成一、長方形與正方形的直角完全貼合；二、長方形與正方形直角的點貼合；三、長方形與正方形的邊完全貼合；四、長方形與正方形邊與角的點貼合；五、長方形與正方形邊的點貼合；六、長方形與正方形的點與邊不貼合，以下將討論六種疊合情況是否能以最少刀數來切割，並重組成正方形。

疊合情況一　長方形與正方形的直角完全貼合

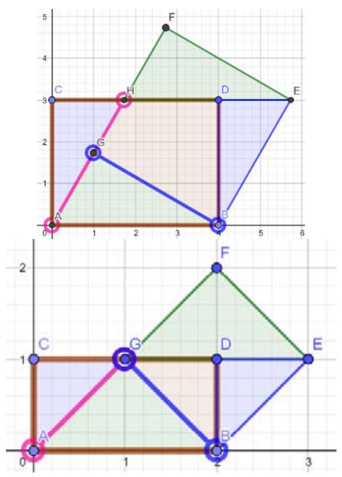
	疊合：長方形與相同面積的正方形於一個直角中完全疊合。將長方形的寬$\overline{AC}$旋轉 90 度，形成$\overline{AO}$，與長方形的長$\overline{AB}$相連成一條長度為長方形長加寬的$\overline{BO}$，再以$\overline{BO}$為直徑，畫出一個半圓，將長方形的寬延伸，與半圓相交於 G 點，根據子母相似定理，$\overline{AG}$長度為$\sqrt{長方形的長\times長方形的寬}$，即為切割後正方形邊長。
	切割：以子母相似定理繪出的長方形與正方形的疊合圖中，發現三角形的$\overline{BG}$與疊合圖中的線段$\overline{EH}$，相交出一大一小的直角三角形，且從邊長可得 ΔBEH 與 ΔCGI 為全等三角形，因此平移填補正方形區塊。 第一刀：做$\overline{BG}$，形成 ΔBDI。 第二刀：做$\overline{EH}$，使$\overline{EH}\perp\overline{AB}$，切出 ΔBEH，並移至 ΔCGI。
	平移：從邊長可得$\overline{FG}$與$\overline{DI}$皆為正方形邊長，且為平行線，由$\overline{BG}$這條截線可求出 ΔBDI 與 ΔFGH 為全等三角形，平移後即可重組成正方形。

當 a 為長方形長邊、b 為短邊時，因面積切割前後皆相同，可得知$\sqrt{ab}$為新的正方形的邊長，在長方形的兩個長邊切正方形邊長，且必須符合$\sqrt{ab} > a-\sqrt{ab}$，才能以疊合法去切割重組。當$\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}$時，a：b=**4：1**，因此在邊長比 1：4 內的長方形可運用求正方形的邊長在長方形切割兩個三角形，再移動，以最少 2 刀切割即可重組成正方形。

疊合情況二　長方形與正方形直角的點貼合



疊合：將長方形與相同面積的正方形疊合於其中一個角的點。不能以任意方式旋轉，因點 F 不在長方形的長邊延長線或點 H 不在長方形內時，長方形最少 2 刀切割後，不能形成兩個全等三角形，需有更多刀來進行切割。若要以最少 2 刀切割後，切割後圖形可完全填補至正方形，需**正方形一角與長方形長邊的延長線段相交**，且**長方形的邊長比必須小於 1：2**。

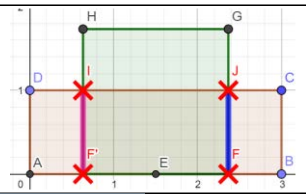


切割：長方形與正方形重疊後，其中一刀為正方形邊長的線段延長，另一刀為重疊線段。

第一刀： 將$\overline{CD}$延長，從 B 點以正方形邊長為半徑畫一個半圓，與$\overline{CD}$延長線段交於 E 點，為$\overline{BE}$，以正方形邊長為距離，畫$\overline{BE}$的平行線，交於長方形的兩個長邊，為$\overline{AH}$，形成 ΔACH，移至 ΔBDE。

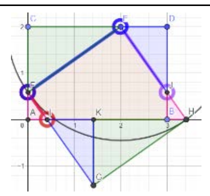
第二刀：將$\overline{BE}$旋轉 90 度，為$\overline{BG}$，形成 ΔABG 移至 ΔEFH，即可形成正方形。

疊合情況三　長方形與正方形邊完全貼合



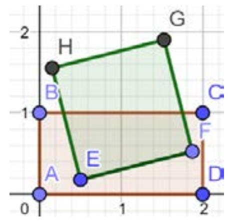
疊合：將長方形與相同面積的正方形疊合於長邊的中間，長方形的邊長比 3：1 時，因長方形最少 2 刀切割後，未疊合的區域形狀不同，需要以更多刀切割。

疊合情況四　長方形與正方形邊的點貼合



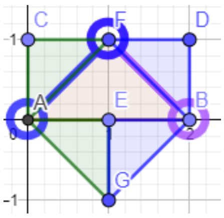
疊合：將長方形與相同面積的正方形疊合於其中一個邊的點。由於疊合後最少需要切割 3 刀，並不是最少刀。

疊合情況五　長方形與正方形的點與邊不貼合



疊合：將長方形與相同面積的正方形疊合。由於疊合後重疊在區塊內的線段有 3 條，因此將線段延伸最少需切割 3 刀，並且切割後區塊，無法完全貼合待填補的區塊，因此無法以最少 2 刀進行切割，並重組成正方形。

疊合情況六　長方形與正方形的邊與角的點貼合

	疊合：將長方形與相同面積的正方形疊合於其中一個邊的中點與兩角上。邊長比 1：2 的長方形，且正方形兩點對齊長方形的長邊時以最少兩刀切割。
	切割 第一刀、第二刀：將正方形的一角對齊長方形長邊$\overline{CD}$的中點，其餘兩角切在長方形兩角 A、B。連接$\overline{AF}$，形成 ΔACF，移至 ΔAEG。連接$\overline{BF}$，形成 ΔBDF 移至 ΔBEG，形成正方形。

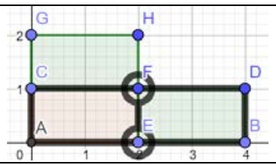
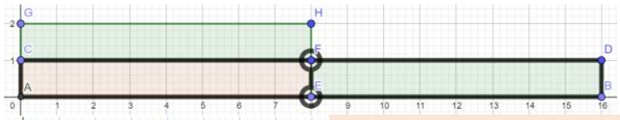
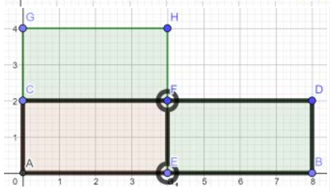
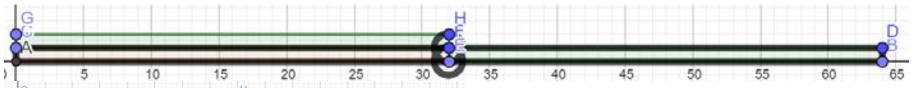
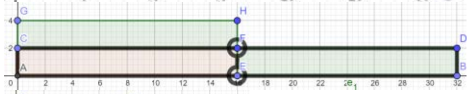
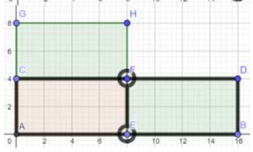
經由各種形式疊合，能以最少刀數 2 刀切割，並重組成正方形的疊合情況有：邊長比 1：4 以內的**長方形與正方形的直角完全貼合**、邊長比 1：2 以內的**長方形與正方形的直角的點貼合**以及邊長比 1：2 的**長方形與正方形的邊與角的點貼合**；其餘的疊合情形都需要 3 刀以上，非最少切割刀數。

研究二：當長方形邊長比大於 1：4，以不同切割方式重組成能進行疊合的長方形，並找出最少刀數與長方形邊長關係

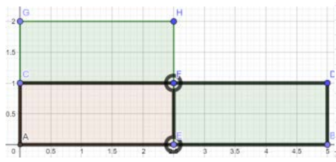
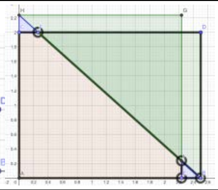
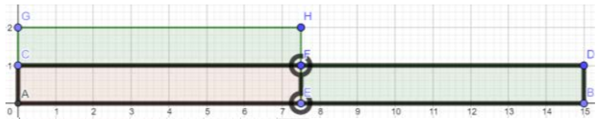
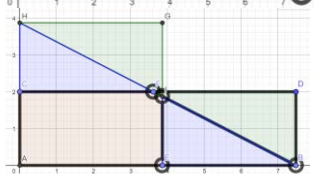
當長方形邊長比大於 1：4，其長邊超過正方形邊長的兩倍時，切割後剩餘的部分依然比正方形邊長還長，無法直接使用疊合法來切割，並重組正方形，必須縮短其邊長比。因此要先進行第一次切割，並重組成邊長比小於或等於 1：4 的長方形，再使用疊合法來第二次切割，並重組成正方形。縮短長方形邊長比的切割方式，可以多次截半重組、等分成多段重組或是結合前方兩者，來達到目的。因此以下我們運用這幾種方式來討論不同長方形邊長比適用的切割重組方式。

類型一　將邊長比大於 1：4 的長方形截半重組

由疊合情況一可知長方形邊長比 1：4 是使用疊合法的臨界值，且只需 1 刀截半，即可重組成正方形。反推可由正方形截半後重組，來找出長方形的邊長比。當邊長比 1：1 的正方形一刀截半重組成長方形時，會使一邊邊長÷2；而另一邊邊長×2，形成邊長比 1：4^1的長方形。在 2 刀截半正方形時，一邊邊長÷4，一邊邊長×4，可重組成邊長比 1：4^2的長方形，即可找出 2 刀截半長方形可重組成正方形的邊長比為 1：16，以此推論出 3 刀截半邊長比 1：4^3的長方形可重組成正方形。從截半的刀數與長方形邊長比的關係可得，在**邊長比 1：4^n(n 為正整數)的長方形**中，可用最少 **n** 刀截半，並重組成正方形。

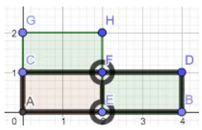
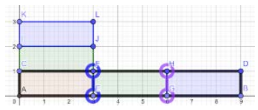
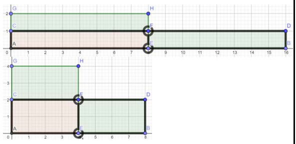
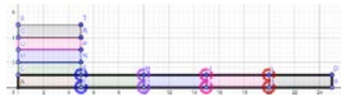
邊長比 $1：4^1$=1：4		第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，截半即可重組成正方形。
邊長比 $1：4^2$=1：16	 	第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，切半成邊長比 1：4 的長方形。 第二刀：做$\overline{AB}$中垂線，切半成正方形。
邊長比 $1：4^3$=1：64	  	第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，切半成邊長比 1：16 的長方形。 第二刀、第三刀：同邊長比 1：16 長方形切割刀法。

由上述實驗可知，長方形介於 $1：4^n$ 、$1：4^{n+1}$之間，先切半 n 次，會形成邊長比 1：4 以內的長方形，再以疊合法 2 刀切割，因此最少刀數為 n+2 刀。以邊長比 1：5、1：15 為例，此長方形介於 $1：4^1$ 、$1：4^{1+1}$之間，皆一刀切半成邊長比 1：4 以內的長方形，再以疊合法 2 刀切割，因此最少刀數為 1+2 刀。

邊長比 1：5	 	第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，形成邊長比小於 1：4 的長方形 BDFE，將長方形 BDFE 移至長方形 CFHG。 第二刀、第三刀：與類型一邊長比 1：4 內的長方形切割法相同。
邊長比 1：15	 	

類型二　將邊長比大於 1：4 的長方形多次等分多段並重組

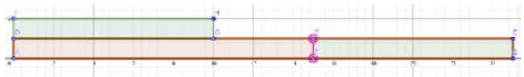
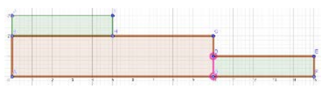
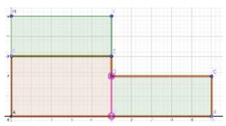
使用等分法時，發現可將等分 2 段並重組成正方形是邊長比 1：4 的長方形；等分 3 段為邊長比 1：9 的長方形；等分 4 段為邊長比 1：16 的長方形，皆為完全平方數。因等分時，長方形短邊× 等分段數，長方形長邊÷ 等分段數，長方形的邊長比須為 $1：n^2$(n 為等分段數)才可等分重組成正方形。

1：4	1：9	1：16	1：25
			

在長方形邊長比 1：n^2 中使用等分法，在邊長比 1：2^2、1：4^2 等 1：2^n 的長方形進行多次平分即為截半法，僅有 1：3^2 使用等分法會比截半再疊合少 1 刀，其餘的 1：n^2 使用一次等分法會比多次截半再疊合更加多刀，須以不同方式進行重組。

類型三　將邊長比大於 1：4 的長方形用等分的概念以 P 字型重組

在長方形邊長比 1：m^2，其 m 不為 2^n 與 3 時，可結合截半與等分的概念，採用 P 字型的方式進行切割，並重組為正方形。在 1：m^2 中，將 1：m^2 視為 m 等分，將其切割成兩個長方形，且長邊比例接近 1：1，進行重組，接著使用等分法直到其變為正方形為止。

以長方形邊長比 1：5^2 舉例	
	可先視為 5 段 1：5 的長方形。
	在 3 段與 2 段間切一刀，形成 2 層上面 2 段下面 3 段的 P 字型。
	再以長邊 2 段 1 段間切一刀，形成 3 層上面 1 段中間下面各 2 段的 P 字型。
	最後以 P 字型 2 段中間切最後一刀， 5 層 5 段長方形邊長比 1：5 即可組成邊長比 5：5 的正方形。

使用截半疊合重組法與等分 P 字型重組法在邊長比 1：n^2 的長方形中，於邊長比 1：$4n^2$ 時，使用多次截半即可用最少刀數重組成正方形；其餘邊長比為完全平方數的長方形，則用等分 P 字型進行多次切割，以最少刀數重組成正方形。

邊長比	1：4	1：9	1：16	1：25	1：36	1：49
等分 P 字型重組法	1 刀	2 刀	2 刀	3 刀	3 刀	3 刀
截半疊合重組法	1 刀	3 刀	2 刀	4 刀	4 刀	4 刀
邊長比	1：64	1：81	1：100	1：144	1：169	1：225
等分 P 字型重組法	3 刀	4 刀	4 刀	4 刀	4 刀	4 刀
截半疊合重組法	3 刀	5 刀	5 刀	5 刀	5 刀	5 刀

長方形邊長比的最少刀數

邊長比	$1:4^n$(n 為整數且≥ 0)	$1:m^2$且$4n<m^2<4n^{+1}$
最少刀數	n 刀	n+1 刀
邊長比	介於$1:4^n$ (n 為整數且≥ 0) 、$1:4^{n+1}$之間	
最少刀數	n+2 刀	

從不同邊長比的長方形中，在邊長比為$1:4^n$(n 為整數且≥ 0)時，以截半法最少 n 刀，可重組成正方形；在邊長比為$1:m^2$($4^n<m^2<4^{n+1}$)時，用等分 P 字型重組法，重組成正方形以最少 n+1 刀；當邊長比介於$1:4^n$與$1:4^{n+1}$之間，以截半重組後，再疊合，以最少 n+2 刀，可重組成正方形。

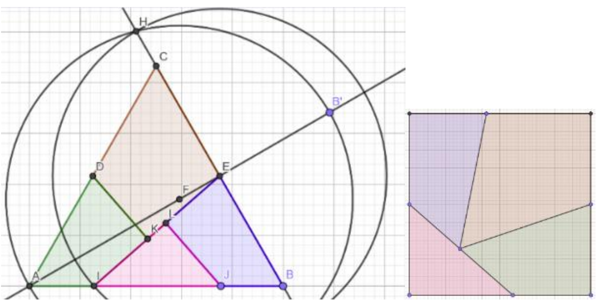
(二) 三角形

三角形是由三條直線組成內角和為 180 度的幾何圖形，其總類有正三角形、等腰直角三角形、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形與銳角三角形。由切割長方形，並重組成正方形的研究中，找出在不同邊長比之下適用的切割方式與最少刀數。基於此核心的概念，嘗試將其運用至三角形中，在不同種類的三角形以最少刀數切割重組成長方形，再依據長方形邊長比以最少刀數的切割方式重組成正方形。

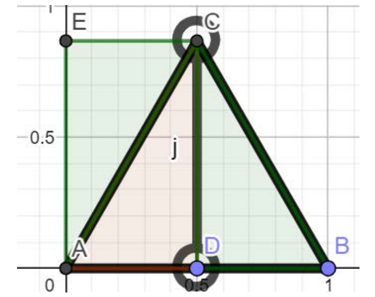
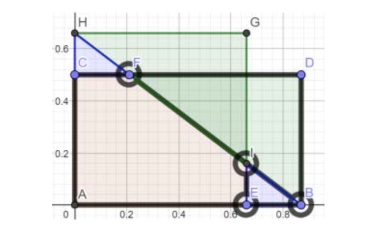
類型一　正三角形

在「讓幾何有趣些!漫談幾何切割」及「剪剪貼貼拼成『正』」的文獻中，發現他們皆使用內切旋轉法最少 3 刀切割正三角形。從正三角形的性質可得知：正三角形可以切割成兩個全等的直角三角形，並重組成長方形，基於長方形切割的概念進行延伸，以更簡單的切割方法，來求出最少刀數。

內切旋轉法

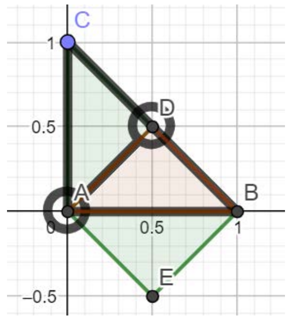


由於正三角形為線對稱圖形，以對稱軸切割後會形成兩個全等的直角三角形，而兩個全等的直角三角形可重組成長方形。正三角形底與高比為$1:\frac{\sqrt{3}}{2}$，切割成長方形後的邊長比為$1:\sqrt{3}$，邊長比在 1：4 以內，可直接使用疊合法 2 刀切割，因此只要在 1 刀內切割成長方形，即可達到最少 3 刀。

	從三角形切割重組成長方形 第一刀：在$\overline{AB}$做中垂線，形成 ΔBCD，將 ΔBCD 移至 ΔACE，形成長方形 ADCE。
	判斷長方形邊長比 第二刀、第三刀：其長方形邊長比在為 1：$\sqrt{3}$，邊長比在 1：4 以內，可直接使用疊合法 2 刀切割。

類型二　等腰直角三角形

等腰直角三角形為線對稱圖形，以對稱軸切割形成兩個全等的等腰直角三角形，由於等腰直角三角形的兩個銳角皆為 45 度，而切割的兩個 45 度角，合在一起就可形成正方形的 90 度直角，加上 2 個等腰直角三角形的 90 度直角與 4 個等長的邊，即可重組成正方形，因此等腰直角三角形只需 1 刀切割成兩個全等等腰直角三角形，並組成正方形。

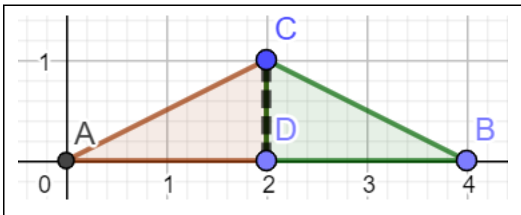
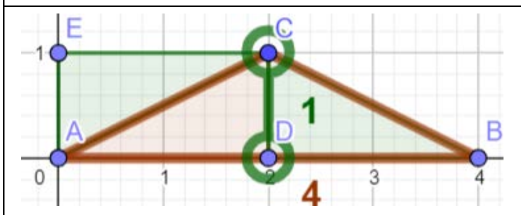


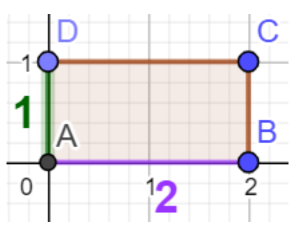
從三角形切割重組成正方形

第一刀：在$\overline{BC}$中點做一點 D，連接 A、D 點為$\overline{AD}$，形成 ΔACD，並移至 ΔABE，即可組成正方形。

類型三　等腰三角形

由於等腰三角形為線對稱圖形，無論角度大小，以對稱軸只需 1 刀即可切割成兩個全等的直角三角形，並重組成長方形，由於邊長是截半，所以邊長比的倍數會減半，再依據長方形邊長比來增加切割刀數。

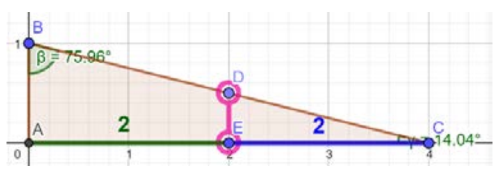
	組成：等腰三角形可視為兩個直角三角形的組成。
	從三角形切割重組成長方形 第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，形成 ΔBCD，將 ΔBCD 移至 ΔADE。組成長方形 ACDE。

<table>
<tr><td>
</td><td>在三角形的底邊畫一條中垂線，將切割出的三角形重組成長方形，三角形底的長度會變一半，而高的長度不變，因此底與高的比轉換成長方形邊長比會相差$\frac{1}{2}$倍。</td></tr>
<tr><td colspan="2">不同邊長比的長方形切割
長方形邊長比小於 1：4 時，使用疊合法 2 刀切割。
長方形邊長比等於 1：$4n^2$時，使用截半法 n 刀切割。
長方形邊長比為 1：m^2且 4^n＜m^2<4^{n+1}時，使用等分 P 字型重組法 n+1 刀切割。
長方形邊長比介於 1：4^n 、1：4^{n+1}之間，使用截半+疊合法 n+2 刀切割。</td></tr>
</table>

由此可知，在等腰三角形中影響最少刀數的因素為三角形底與高的比，其底與高的比為重組後長方形邊長比的$\frac{1}{2}$倍。

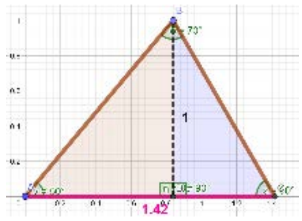
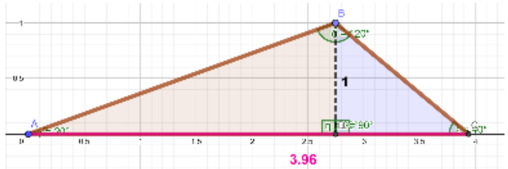
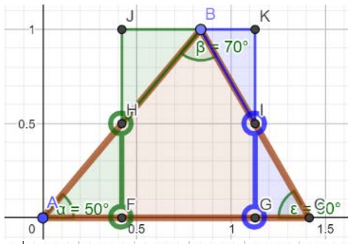
類型四　直角三角形

直角三角形的兩個銳角為互餘的關係，不論未切割前直角三角形底與高的比為多少，只要將兩個長邊的中點連接，皆可 1 刀切割出 1 個梯形和 1 個三角形，切割的兩個長邊等長，角又能互餘，三角形經由移動與旋轉，即可形成長方形，依據長方形的切割概念，可得不同邊長比的長方形需增加多少刀數切割來重組成正方形。

<table>
<tr><td>
</td><td>從兩邊中點切割將邊等分切割重組成長方形
第一刀：連接$\overline{AC}$、$\overline{BC}$中點為$\overline{DE}$，形成 ΔCDE，移至 ΔBEF，組成長方形 ABFD。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>經由旋轉重組成長方形
在三角形的底邊畫一條中垂線，將切割出的三角形重組成長方形，三角形底的長度會變一半，而高的長度不變，因此底與高的比轉換成長方形邊長比會相差$\frac{1}{2}$倍。</td></tr>
<tr><td colspan="2">後續刀數依據長方形邊長比進行切割，並重組成正方形。</td></tr>
</table>

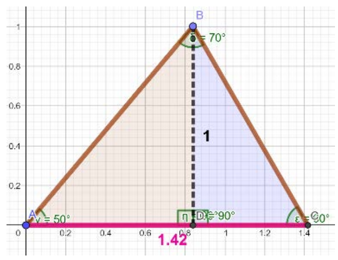
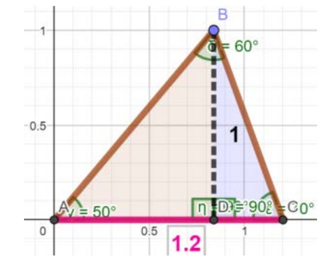
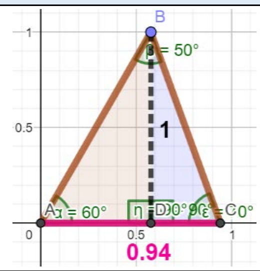
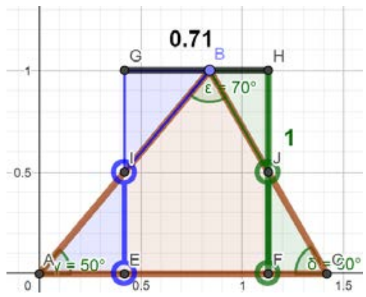
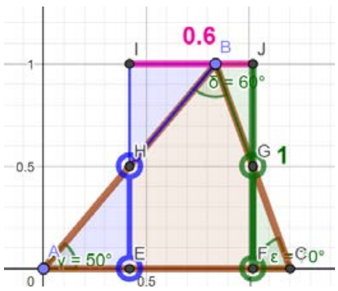
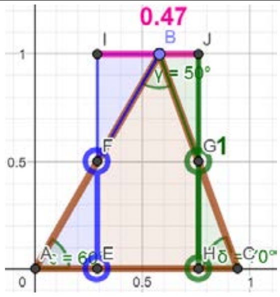
類型五　銳角三角形、鈍角三角形

欲求出最接近邊長比 1：1 的長方形，不論其角度大小，都要以三角形的最長邊為底，銳角及鈍角三角形可視為兩個直角三角形，因此基於直角三角形的切割概念，在其餘兩邊中點切兩條垂直於底邊的線，形成兩個小直角三角形，可將三角形底的長度縮短一半，並旋轉組成長方形。

<table>
<tr><td>銳角三角形</td><td>
</td><td rowspan="2">組成：銳角三角形與鈍角三角形皆可視為由兩個直角三角形組成的三角形，因此基於直角三角形的切割刀法，從可視為直角三角形的兩中點連接，做切割。</td></tr>
<tr><td>鈍角三角形</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">


</td><td>切割
第一刀：取一邊中點做垂線，垂直$\overline{AB}$，切割出 ΔADF 移至 ΔCDH。
第二刀：取另一邊中點做垂線，垂直$\overline{AB}$，切割出 ΔBEG 移至 ΔCEI，形成長方形。</td></tr>
<tr><td colspan="3">後續刀數依據長方形邊長比進行切割，並重組成正方形。</td></tr>
</table>

欲求出切割的最少刀數，就必須先切割出最接近邊長比 1：1 的長方形，才不會因長方形邊長比大於切割刀數臨界值，而多加 1 刀。本研究針對三角形的三個邊長作為底，分別探討其形成長方形邊長比的

以最長邊為底，切割重組正方形	以第二長邊為底，切割重組正方形	以最短邊為底，切割重組正方形
		
形成邊長比 1：0.71 的長方形	形成邊長比 1：0.6 的長方形	形成邊長比 1：0.47 的長方形
		

分別以三個邊長作為底，切割成長方形的邊長比可知，當最長邊為底，長方形的邊長比才會最接近 1：1，且三角形的底與高為長方形邊長比的 $\frac{1}{2}$ 倍。

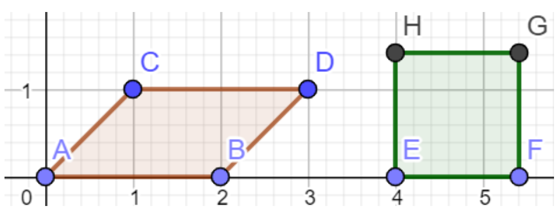
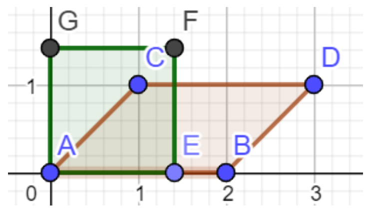
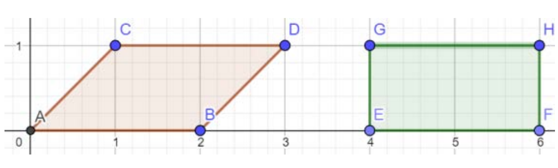
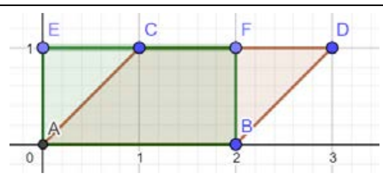
不同種類三角形的最少刀數

<table>
<tr><td colspan="2">等腰直角三角形</td><td>1 刀</td></tr>
<tr><td colspan="2">正三角形</td><td>3 刀</td></tr>
<tr><td>等腰三角形、直角三角形
1 刀切割成長方形</td><td rowspan="2">三角形底與高比轉換成長方形邊長比相差$\frac{1}{2}$倍</td><td rowspan="2">**依據長方形邊長比增加切割刀數**</td></tr>
<tr><td>銳角三角形、鈍角三角形取最長邊為底，**2 刀切割成長方形**</td></tr>
</table>

在三角形的幾何圖形切割重組正方形中，正三角形、等腰直角三角形，由於底與高的比不變，切割成正方形的刀數固定，分別為 1 刀、3 刀，而其餘三角形皆是以固定刀數切割成長方形，再依據長方形邊長比決定切割刀數，並重組成正方形。且因三角形底與高的比為切割後長方形邊長比的$\frac{1}{2}$倍，因此**三角形底與高的比為主要影響最少總刀數的主要原因**。

(三) 平行四邊形

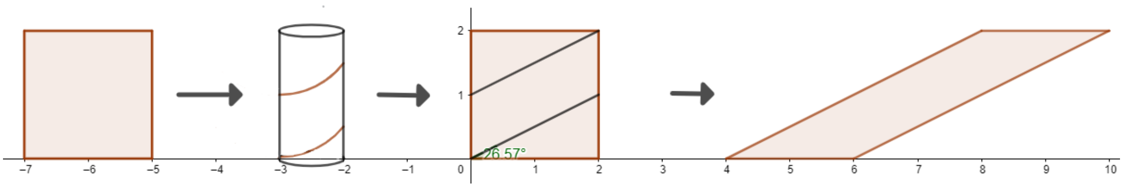
欲將平行四邊形經由切割，重組成正方形，因面積相同，由平行四邊形面積可得正方形邊長，在平行四邊形與正方形的疊合過程，可藉由**平移**的方式來改變正方形疊合在平行四邊形的位置，並由正方形重疊的邊長來找出切割的刀法，並求取最少切割刀法。

<table>
<tr><td>面積與平行四邊形相同的正方形</td><td>正方形平移至平行四邊形的角進行疊合</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">平行四邊形與正方形的疊合：正方形疊合在底與高比 2：1 的平行四邊形時，正方形未填滿區域與平行四邊形剩餘區域圖形不一樣，無法直接平移，需更多刀的切割，因此嘗試以平行四邊形底與高作為長方形的長與寬，再將兩者進行疊合。</td></tr>
<tr><td>以平行四邊形的底與高
作為長與寬的長方形</td><td>長方形平移至平行四邊形的角進行疊合</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

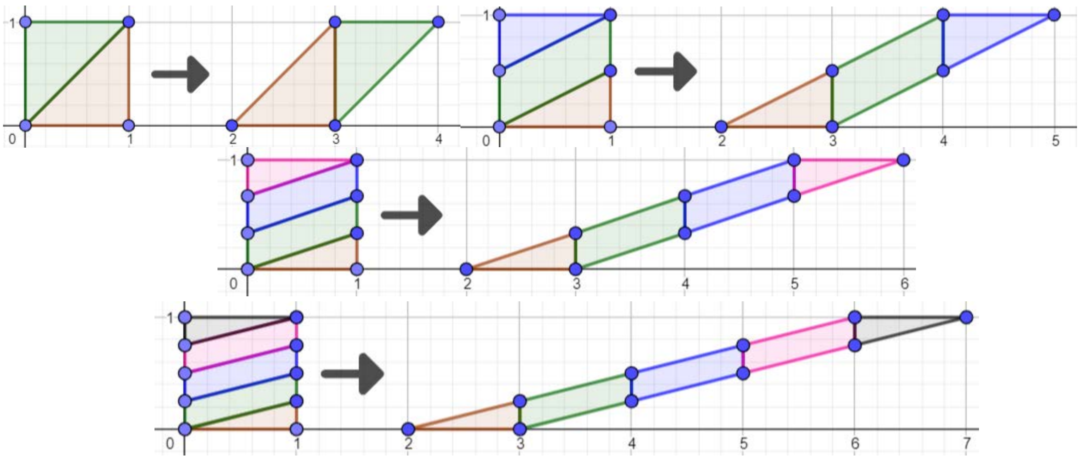
類型一　底與高比 1：1 的平行四邊形

從立體切割概念思考平面切割

底與高比 1：1 的平行四邊形，可由一個正方形，捲曲成圓柱體，以某個角度切割，可 1 刀切割成平行四邊形。但本研究僅探討平面切割，因此將圓柱體攤平成正方形，可知要將平行四邊形切割成正方形時，可 2 刀切割，並重組成正方形。



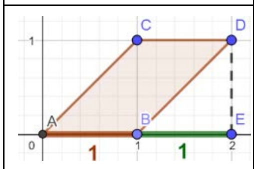
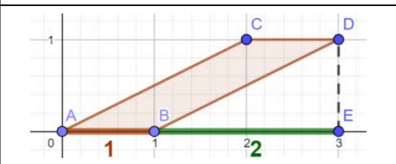
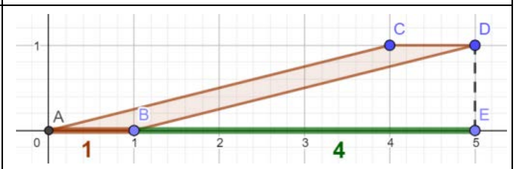
而當正方形以斜對角切割成平行四邊形時，為 45 度，1 刀切割；將正方形邊長分成 2 等份切割成平行四邊形，為 26.57 度，2 刀切割；正方形邊長分成 3 等份切割成平行四邊形，為 18.43 度，3 刀切割，以此類推。

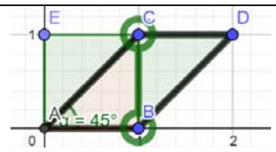
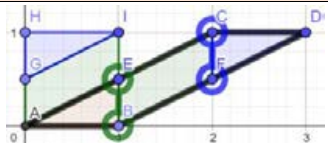
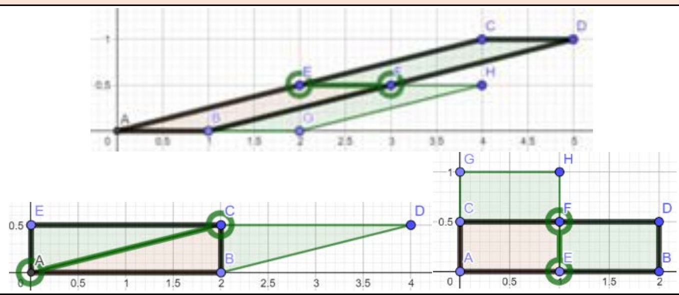


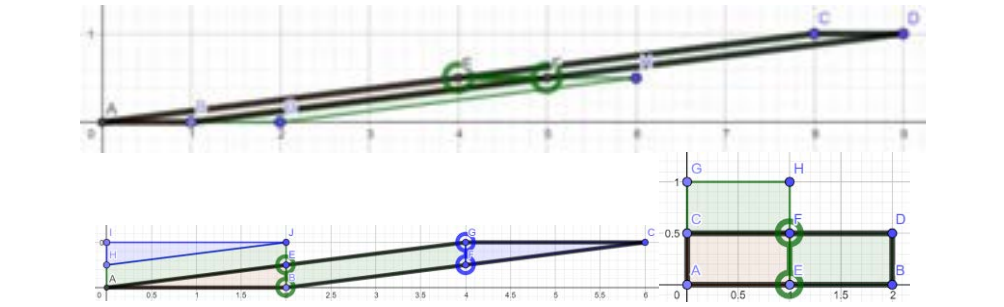
從正方形展開圖可以得知，當正方形邊長分成數個等份時，即為平行四邊形重組成正方形的刀數，也是底與底延伸的長度比的相差倍數。

以疊合方式切割

在底與高比 1：1 的平行四邊形當中， 疊合一個以平行四邊形的底與高作為長與寬的長方形，即為長寬比 1：1 的正方形，但平行四邊形會因為角度不同，而產生斜邊長度的不同，進而影響長方形與平行四邊形的疊合狀況。

底與底延伸的 長度比 1：1	底與底延伸的 長度比 1：2	底與底延伸的 長度比 1：4
		

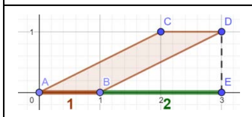
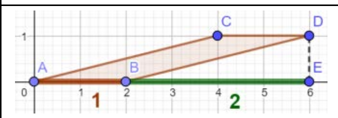
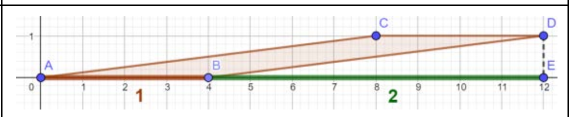
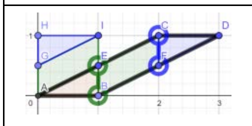
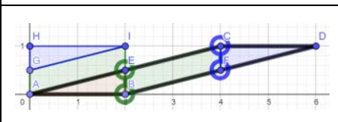
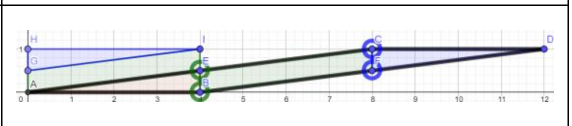
<table>
<tr><td rowspan="2">底與底
延伸的
長度比
1：1</td><td></td></tr>
<tr><td>正方形疊合法
在底與底延伸長度比 1：1 的平行四邊形中，疊合正方形，發現平行四邊形會被分割出一個三角形，且三角形剛好可以平移至正方形內。
第一刀：找一線段⊥$\overline{AD}$相交於 D 點，且⊥$\overline{BC}$相交於 B 點，即為$\overline{BD}$，切割成 ΔBCD，並移至 ΔABE，形成正方形。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">底與底
延伸的
長度比
1：2</td><td></td></tr>
<tr><td>正方形疊合法
在底與底延伸長度比 1：2 的平行四邊形時，疊合正方形後，1 刀切割重疊部分，超出正方形的部分，切割三角形平移後，即組成正方形。
第一刀：在$\overline{AB}$找一條垂線且相交於 B 點，為$\overline{BG}$，切割出 ΔABE 與四邊形 BDCE。
第二刀：在$\overline{CD}$找一條垂線且相交於 C 點，為$\overline{CF}$，切割出 ΔCDF 移至 ΔGHI，以及平行四邊形 BFCE 移至平行四邊形 AEGI。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">底與底
延伸的
長度比
1：4</td><td></td></tr>
<tr><td>縮小底與斜邊邊長比，切長方形，並用長方形切割法
在底與底延伸的長度比為 1：4 的平行四邊形時，先將平行四邊形的高截半，形成底與高比為 4：1 的平行四邊形，再疊合一個邊長比 1：4 的長方形，接著再切割超出疊合圖形的部分，最少 3 刀切割。
第一刀：先從高 0.5 的地方切一刀，即為$\overline{EF}$，切割後將平行四邊形 CDEF 移至平行四邊形 BFGH，形成底與高比 4：1 的平行四邊形。
第二刀：找一線段⊥$\overline{AH}$，相交於 H 點，且與$\overline{EG}$相交於 I 點，為$\overline{HI}$，切割後將 ΔGHI 移至 ΔAEL，形成長與寬比 4：1 的長方形 AHIL。
第三刀：從長邊截半形成正方形。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">底與底延伸的長度比 1：8</td><td></td></tr>
<tr><td>縮小底與斜邊邊長比，切長方形，並用長方形切割法
當平行四邊形的底與底延伸的長度比 1：8 時，先將平行四邊形的高截半，形成底與高比為 4：1、底與底延伸的長度比為 1：2 的平行四邊形，可以用 2 刀切割成邊長比 1：4 的長方形，在截半重組成正方形，最少 4 刀切割。</td></tr>
</table>

在 1：1 的平行四邊形中，發現轉換切割刀數的臨界值為**底與底延伸的長度**，皆為整數倍，因此影響平行四邊形切割刀數的主要因素為底與底延伸的長度比，發現底與底延伸的長度比多兩倍時，最少刀數就會加 1 刀。當平行四邊形的**底與底延伸長度比小於等於 1：2^n (n 為整數且≥ 0) 時，切割成長方形最少刀數為 n+1 刀。**

類型二　不同底與高比的平行四邊形

在不同底與高比的平行四邊形中， 發現平行四邊形的底與高不同，並不會影響切割成長方形的最少刀數，只要底與底延伸的長度比相同，切割成長方形的最少刀數就會相同。

底與高比 1：1	底與高比 2：1	底與高比 4：1
		
		

平行四邊形底與高的比不同， 會影響長方形的邊長比，且長方形的長和寬即為平行四邊形的底與高，而後續切割刀數則依據長方形邊長比增加。

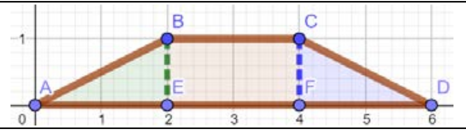
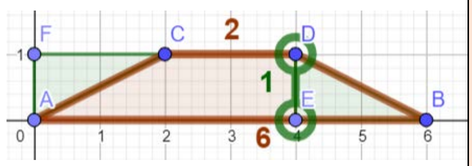
(四) 梯形

梯形的種類含等腰梯形、直角梯形、不規則梯形等，梯形可視為長方形或正方形與不同類型三角形的組合，若要切割出正方形或長方形，可從三角形著手先切割。從前面研究可知，在三角形中影響刀數的主要因素為底與高的比，為重組成長

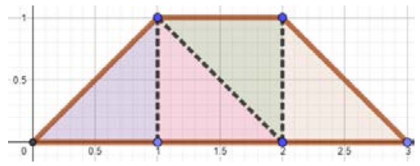
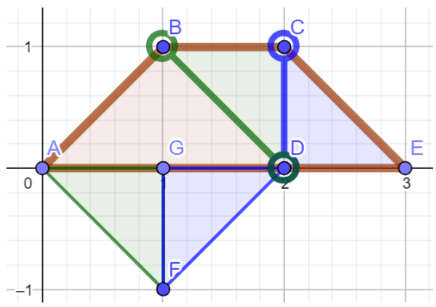
方形邊長比的$\frac{1}{2}$倍，再依據長方形的邊長比增加刀數切割來重組成正方形。因此本研究將以此概念來探討<u>**不同類型**</u>的梯形。

類型一　等腰梯形

等腰梯形可視為一個長方形及兩個全等三角形組成，無論角度大小，皆可把一邊三角形切割後填補至另一邊，形成長方形，再依據長方形邊長比增加切割刀數。

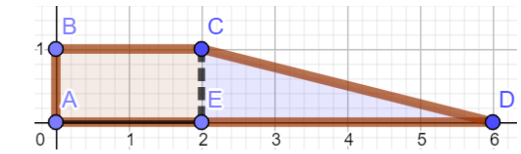
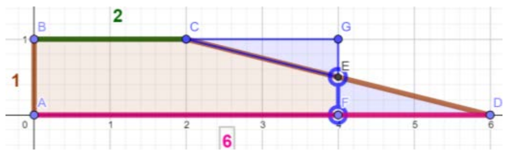
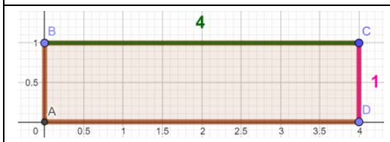
<table>
<tr><td></td><td>組成：等腰梯形可視為一個長方形及兩個全等三角形組成。</td></tr>
<tr><td></td><td>切割：找一線段⊥$\overline{AD}$相交於 C 點，且與$\overline{BC}$相交於 F 點為$\overline{CF}$，切割出 ΔCDE 及直角梯形 ABCF，切割後 ΔCDE 移至 ΔABG。形成邊長比 1：4 的長方形 AFCG。</td></tr>
<tr><td></td><td>上底+下底與高轉變成長方形邊長比的關係
切割後，梯形上底加下底的長度會變一半，而高的長度不變，因此上底加下底與高的比轉換成長方形邊長比會相差$\frac{1}{2}$倍。</td></tr>
<tr><td colspan="2">後續刀數依據長方形邊長比進行切割，並重組成正方形。</td></tr>
</table>

在梯形當中有個特例，為**上底+下底與高比為 4：1** 的等腰梯形，其可視為 4 個等腰直角三角形的組合，切割兩個等腰直角三角形，與另外兩個組合，即可重組成正方形。

<table>
<tr><td></td><td>組成：上底+下底與高比 4：1 的等腰梯形可視為 4 個全等的等腰直角三角形組成。</td></tr>
<tr><td></td><td>切割
第一刀：找一線段⊥$\overline{BC}$相交於 C 點，且與$\overline{AE}$相交於 D 點為$\overline{CD}$，切割成 ΔCDE，並移至 ΔAFG。
第二刀：找一線段⊥$\overline{AB}$相交於 B 點，且與$\overline{AD}$相交於 E 點為$\overline{BE}$，切割成 ΔBCE，並移至 ΔEFG，形成正方形。</td></tr>
</table>

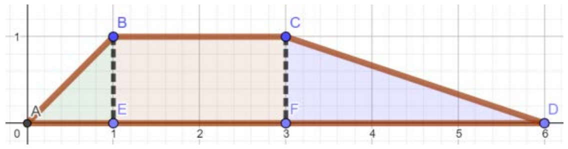
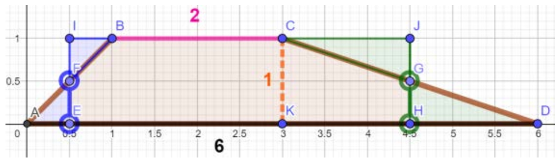
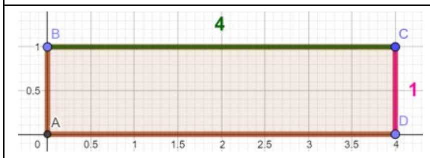
類型二　直角梯形

直角梯形可視為一個長方形及一個直角三角形所組成，不論角度大小，皆可在三角形的底畫一條中垂線，將切割出的小三角形移至帶填補的區塊，形成長方形，再依據長方形邊長比來增加切割刀數。

	組成：等腰梯形可視為一個長方形及一個直角三角形組成。
	切割 第一刀：在$\overline{CD}$取中點為 F 點，並從 F 點做一線段⊥$\overline{AD}$，其相交的點為 E 點，即為$\overline{EF}$，切割後 ΔDFE 移至 ΔCFG，即為正方形。
	上底+下底與高轉變成長方形邊長比的關係相差$\frac{1}{2}$倍

類型三　不規則梯形

不規則梯形可視為一個長方形及兩個不全等的直角三角形所組成，不論三角形的角度大小，皆可各在兩個直角三角形的底畫一條中垂線，將切割出的小三角形移至帶填補的區塊，形成一個較大的長方形，再依據長方形邊長比來增加切割刀數。

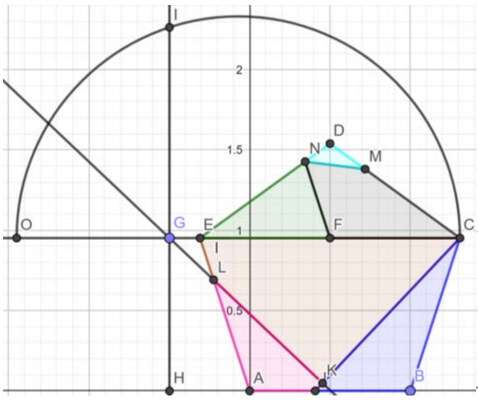
	組成：不規則梯形可視為一個長方形及兩個不全等的直角三角形所組成。
	切割：在兩三角形的底各畫一條中垂線，再將切割出的小三角形移至帶填補的區塊，形成邊長比 1：4 的長方形。
	上底+下底與高轉變成長方形邊長比的關係相差$\frac{1}{2}$倍

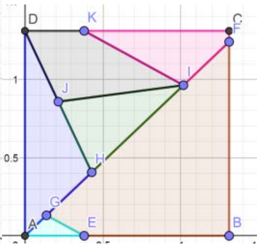
在不同類型的梯形切割重組正方形中，皆是以固定刀數切割成長方形，等腰梯形、直角梯形以及不規則梯形，分別為 1 刀、1 刀與 2 刀，再依據長方形邊長比決定切割刀數，並重組成正方形。且因梯形上底加下底與高的比為切割後長方形邊長比的$\frac{1}{2}$倍，因此**梯形上底加下底與高的比為主要影響最少總刀數的主要原因**。

(五) 正多邊形

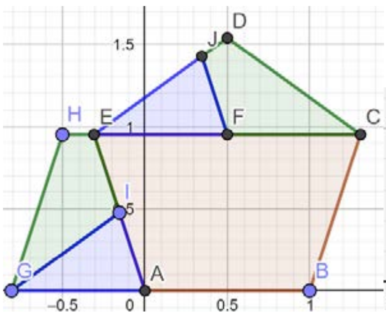
類型一　正五邊形

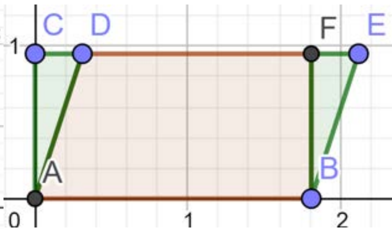
在「數趣-剪完再拼：將正五邊形剪成多塊，再拼回一個正方形」的文獻中發現他們使用邊長及角度概念切割正五邊形，最少 5 刀。從正五邊形的性質可以得知正五邊形可以分成一個等腰三角形及一個等腰梯形，可以將其組成平行四邊形，並重組成正方形，基於正方形切割的概念進行延伸，以更簡單的切割方法，來求出最少刀數。

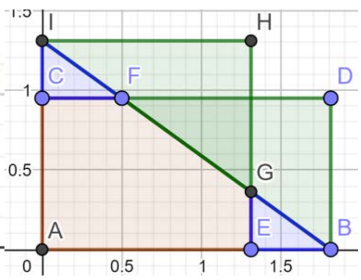




正五邊形在本研究的切割法，先以 2 刀切成平行四邊形，依據平行四邊形的切割概念可知，能以 1 刀切割並重組成長方形，最後以正方形疊合長方形的概念，以 2 刀切割後，即可組成正方形。從正五邊形切割重組成正方形最少刀數為 5 刀。







切割

第一刀：取兩個對角 C 點與 E 點連接，形成$\overline{CE}$。

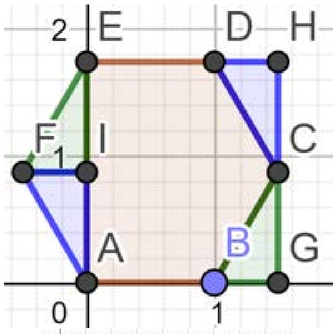
第二刀：在$\overline{CE}$取中點 F，從 E 點往 D 點作$\overline{EJ}$，使線段$\overline{EJ}$=$\overline{EF}$。將切割出的四邊形 CDJF 移至四邊形 EHGI，ΔEFJ 移至 ΔAGI，形成平行四邊形。

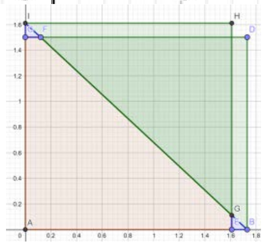
第三刀：作線段$\overline{BF}$，使$\overline{BF}\perp\overline{AB}$，將$\overline{BF}$切割出的 ΔBEF 移至 ΔACD。

第四刀、第五刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

類型二　正六邊形

正六邊形疊合一個長方形後，可以切割成切割出兩個直角三角形，並平移至長方形待填補區，即可以疊合法重組成長方形，最少刀數為 4 刀。





切割

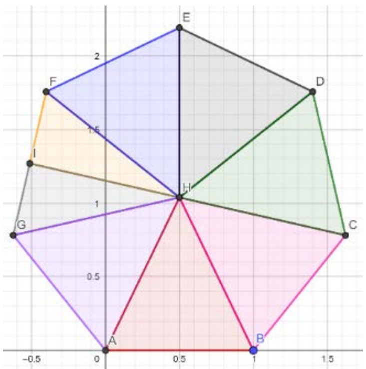
第一刀：連接 A 點與 E 點為$\overline{AE}$，切割出等腰三角形 AEF。

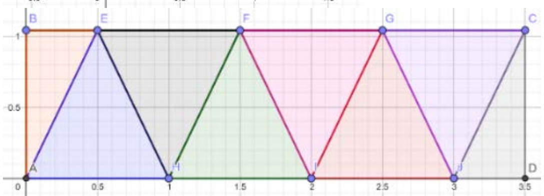
第二刀：做$\overline{AE}$的中垂線$\overline{FI}$，將 ΔAEF 切割成兩個直角 ΔEFI、ΔAFI，切割後 ΔEFI 移至 ΔCDG，ΔAEI 移至 ΔBCH，形成長方形 AEGH。

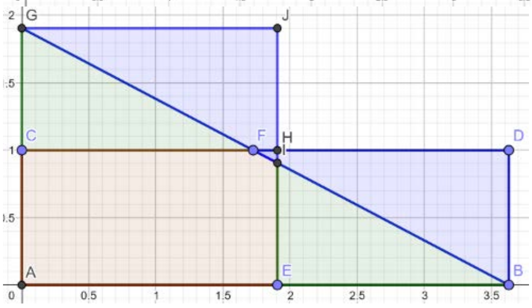
第三刀、第四刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

類型三　正七邊形

在正七邊形以角平分線找出中點，並切割成數個三角形來組成長方形，由於組成的長方形邊長比小於 1：4，因此可以兩刀來切割長方形，其最少刀數為 9 刀。







切割與重組

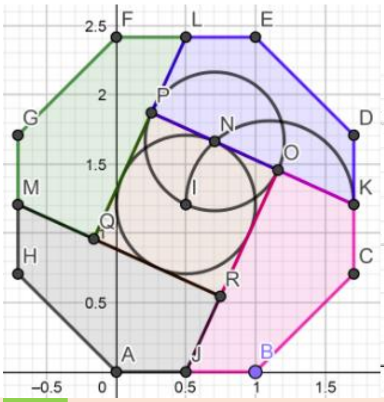
第一刀-第七刀：找出兩條角平分線，其交點為 H 點，再從 A 點、B 點、D 點、E 點、F 點、G 點往 H 點各拉一條角平分線，其中一條過 H 點並交對邊中點於 I 點，切成六個相等的等腰三角形和兩個相等的直角三角形。

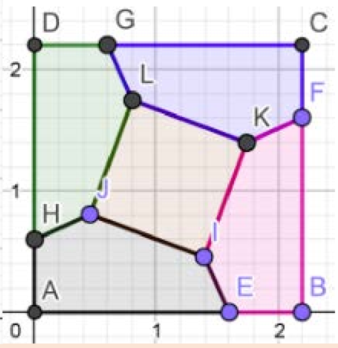
重組：六個相等的等腰三角形和兩個相等的直角三角形，重組成長方形。

第八刀、第九刀：同邊長比 1：4 內的長方形切割法。

類型四　正八邊形

在「正八邊形和正方形的等積變換」中，使用內切旋轉法切割，以四個正八邊形找出正方形，再以此概念在正八邊形中進行切割，並重組成正方形。雖然沒有找到更少刀數的做法，但本研究以詳細的尺規作圖方式，來呈現正八邊形切割並重組成正方形的方法。利用正八邊形的四個邊中點找出正八邊形邊長的正方形以及四個五邊形，重組成正方形，最少刀數為 4 刀。





切割

第一刀：作正八邊形的中心 I 點，作$\overline{AB}$的中點 J，作$\overline{CD}$的中點 K，作$\overline{EF}$的中點 L，作$\overline{GH}$的中點 M，以$\overline{IK}$為直徑做半圓 IK，以 I 點為圓心，$\frac{邊長}{2}$=0.5 為半徑作一圓，交半圓 IK 於 N 點，作$\overline{KN}$，以 N 點為圓心，$\overline{IN}$為半徑作一圓，交$\overline{KN}$於 O 點、P 點，以$\overline{OP}$為邊長，作一正方形，連接$\overline{KP}$，形成五邊形 DELPK。

第二刀：連接$\overline{LQ}$，形成五邊形 FGMQL

第三刀：連接$\overline{JO}$，形成五邊形 BCKOJ。

第四刀：連接$\overline{MR}$，形成五邊形 AHMRJ。

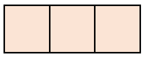
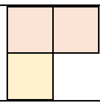
二、3、6、7 正方形連塊切割重組成正方形的最少切割刀數

在幾何圖形正方形中，我們將面積一樣的正方形組成連塊，嘗試找出不同連塊組合切割重組成正方形最少刀數。正方形 4 連塊可不切割或一刀切割成正方形，故不深入探討。而正方形 5 連塊、8 連塊皆為平方數的組合，在文獻探討中已經有完整各類型切割最少刀數，因此本研究以非平方數的組合，正方形 3、6、7 連塊的不同組合類型來探討其切割最少刀數。

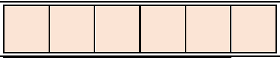
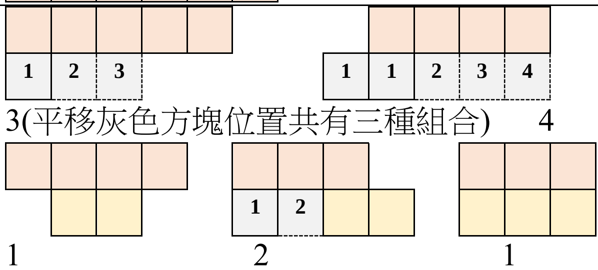
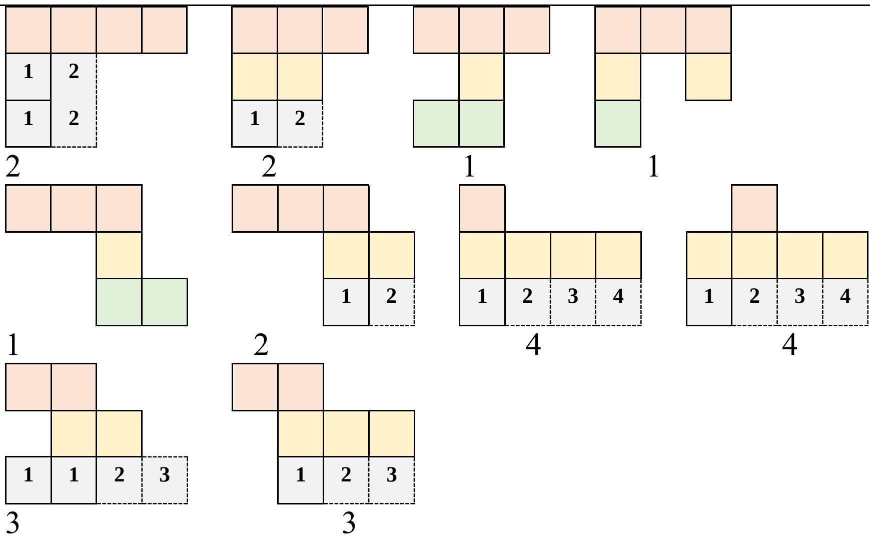
(一) 3、6、7 正方形連塊的組合類型

正方形連塊必須為**邊與邊完全貼合**，並找出相同數量連塊的不同組合類型，在本研究中**翻轉、旋轉視為相同類型**。

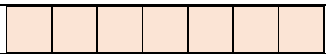
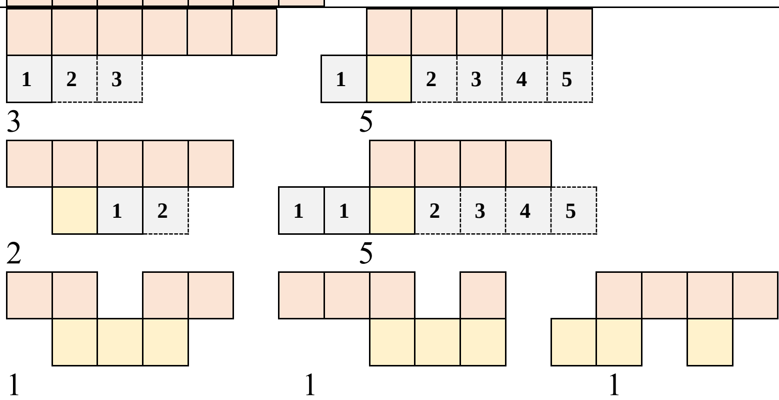
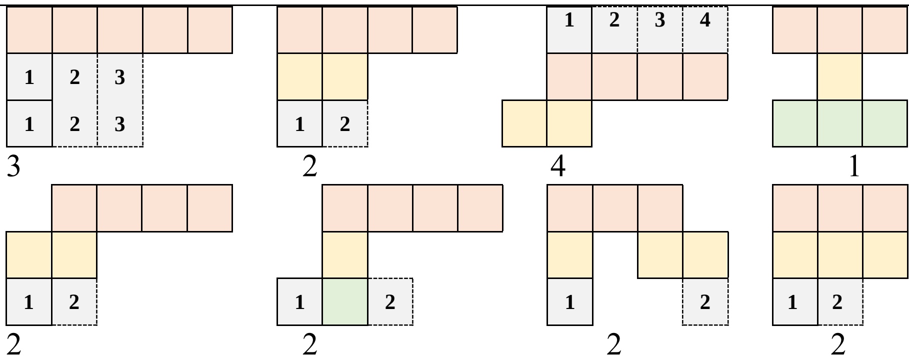
3 個正方形連塊-2 種

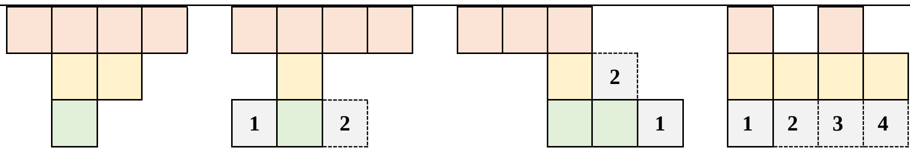
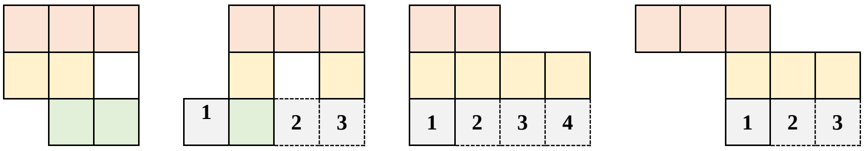
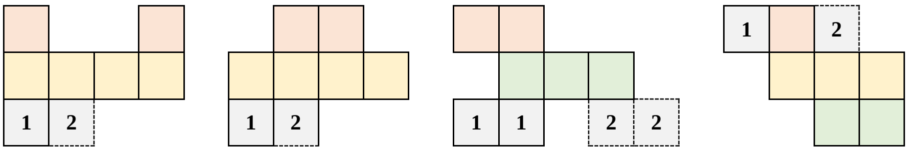
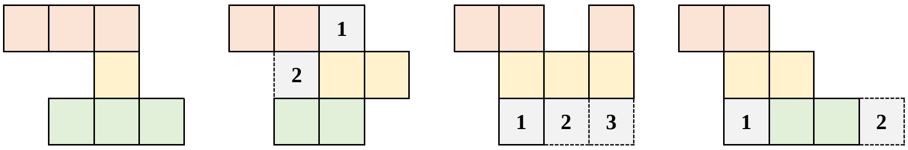
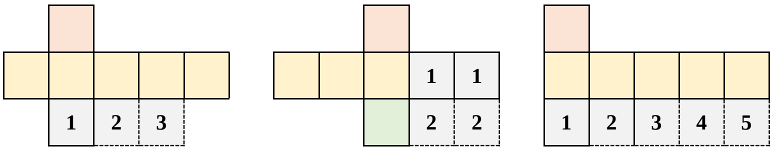
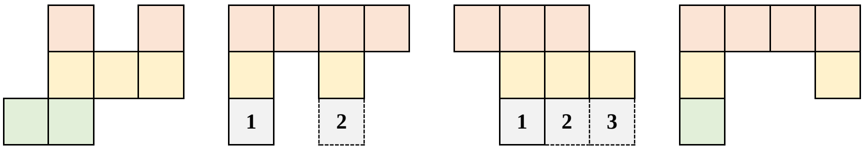
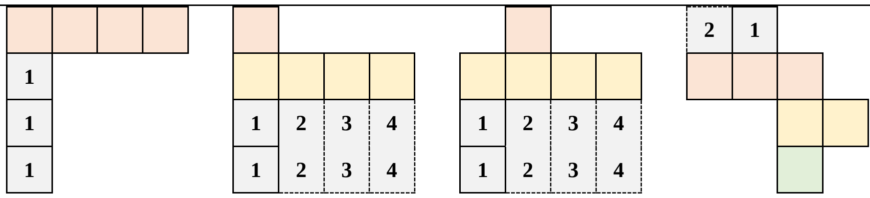
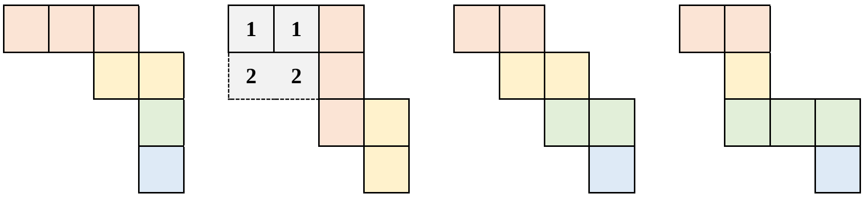
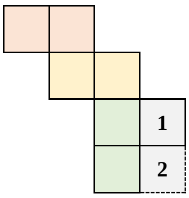
一層：1 種		兩層：1 種	

6 個正方形連塊-35 種

一層：1 種	
兩層：11 種	
三層：23 種	

7 個正方形連塊-108 種

一層：1 種	
兩層：18 種	
三層 71 種	

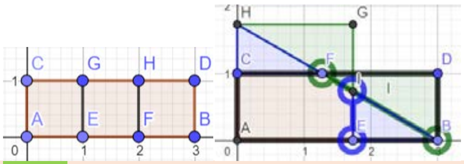
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
1 2 2 4

1 3 4 3

2 2 2 2

1 2 3 2

3 2 5

1 2 3 1</td>
</tr>
<tr>
<td>四層：18 種</td>
<td>
1 4 4 2

1 2 1 1

2</td>
</tr>
</table>

3 連塊有 2 種組合類型；6 連塊有 35 種組合類型；7 連塊有 108 種組合類型。

(二) 正方形 3 連塊的最少切割刀數

類型一　I 型 3 連塊

I 型 3 連塊僅有一種組合類型，且 I 型 3 連塊可視為邊長比 1：3 的長方形，因此與邊長比 1：3 長方形切割方法相同，最少 2 刀切割。

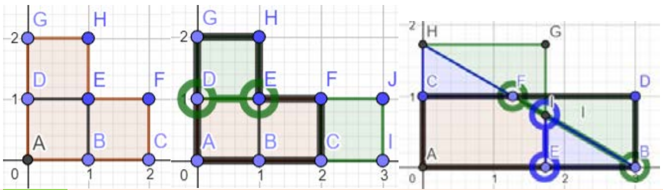


組成：正方形 I 型 3 連塊可視為邊長比 1：3 的長方形。

切割方法與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同

類型二　L 型 3 連塊

L 型 3 連塊也只有一種組合類型，只須多切一刀，將其變成邊長比 1：3 的長方形，再依據長方形切割法進行切割即可重組成正方形，其最少刀數為 3 刀。



切割

第一刀：連接$\overline{AE}$，將正方形 AEGF 移至正方形 BDIH。

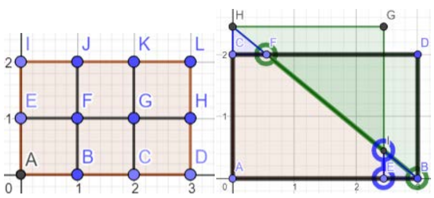
第二刀、第三刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

在正方形 3 連塊中， I 型 3 連塊最少 2 刀切割，L 型 3 連塊最少 3 刀切割，兩者皆運用邊長比 1：4 內的長方形切割法。但 L 型 3 連塊需多切一刀才可組成長方形，因此 I 型 3 連塊在正方形 3 連塊中為最少刀的組合類型。

(三) 正方形 6 連塊的最少切割刀數

類型一　田字型 6 連塊

田字型 6 連塊即為邊長比 2：3 的長方形，以邊長比 2：3 的長方形切割法最少 2 刀切割，田字型 6 連塊僅有 1 種組合類型。

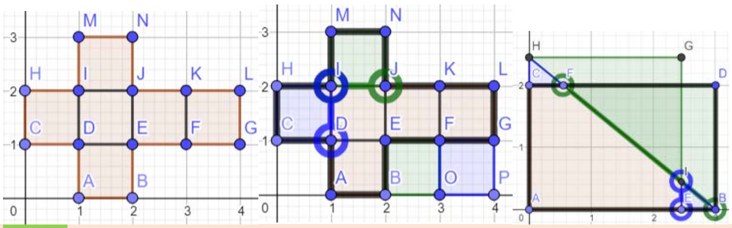


組成：可視為邊長比 2：3 的長方形。

切割方法與邊長比 2：3 的長方形切割方法相同

類型二　兩刀田字型 6 連塊

用 2 刀切成田字型 6 連塊，再以長方形疊合法進行切割，並重組成正方形。兩刀田字型 6 連塊最少 4 刀，共有 4 種組合類型。



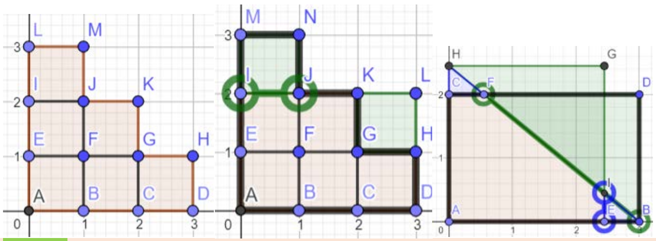
切割

第一刀、第二刀：將 6 連塊切成田字型 6 連塊，如藍、綠色區塊的切割與移動。

第三刀、第四刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

類型三　一刀田字型 6 連塊

用 2 刀切成田字型 6 連塊，再以長方形疊合法進行切割，並重組成正方形。一刀田字型 6 連塊最少 3 刀，共有 30 種組合類型。



切割

第一刀：將 6 連塊切成田字型 6 連塊，如綠色區塊的切割與移動。

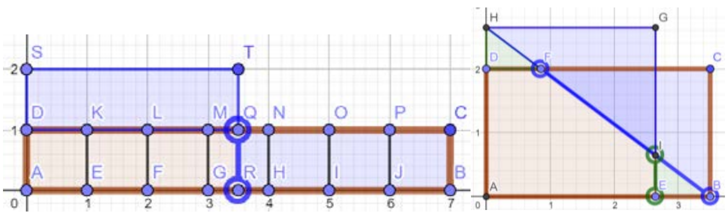
第二刀、第三刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

田字型 6 連塊僅有 1 種組合類型，最少刀數 2 刀；兩刀田字型 6 連塊共有 4 種組合類型，最少刀數 4 刀；一刀田字型 6 連塊共有 30 種組合類型，最少刀數 3 刀。田字型 6 連塊即為邊長比 2：3 的長方形，以此長方形切割方法為最少刀數 2 刀，其他組合類型的 6 連塊亦是切成田字型 6 連塊，再以長方形切割法為最少刀數的切割，因此 6 連塊最少刀數的組合類型是田字型 6 連塊。

(四) 正方形 7 連塊的最少切割刀數

類型一　一刀田字型 7 連塊

由於 I 型 7 連塊為邊長比 1：7 的長方形，其邊長比已超過 1：4，因此須多切一刀變成田字型 7 連塊，才可使用邊長比 1：4 內的長方形切割法，因此一刀田字型 7 連塊最少刀數為 3 刀，其組合類型共 7 種。



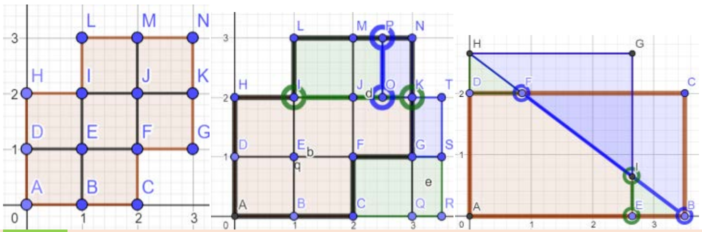
切割

第一刀：做$\overline{AB}$中垂線，將長方形 BDFE 移至長方形 CFHG，形成邊長比 2：3.5 的長方形 AEHG。

第二刀、第三刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

類型二　兩刀田字型 7 連塊

兩刀田字型 7 連塊須多兩刀，將 7 連塊切成田字型 7 連塊，再以長方形疊合法進行切割，並重組成正方形，最少刀數為 4 刀，其組合類型共 100 種。



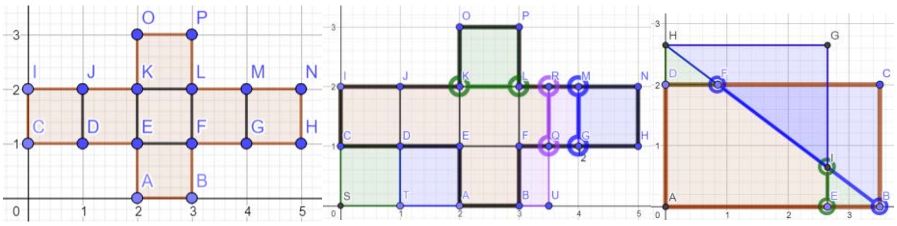
切割

第一刀、第二刀：切割綠色與藍色區塊並重組，形成邊長比 2：3.5 的田字型 7 連塊。

第三刀、第四刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

類型三　三刀田字型 7 連塊

三刀田字型 7 連塊須多三刀來將 7 連塊切成田字型 7 連塊，再以長方形疊合法進行切割，並重組成正方形，最少刀數為 5 刀，其組合類型僅有 1 種。



切割

第一刀~第三刀：切割綠色、藍色與紫色區塊並重組，形成邊長比 2：3.5 的田字型 7 連塊。

第三刀、第四刀：與邊長比 1：4 內的長方形切割方法相同。

一刀田字型 7 連塊有 7 種組合類型，最少刀數 3 刀；兩刀田字型 7 連塊共有 100 種組合類型，最少刀數 4 刀；三刀田字型 7 連塊僅有 1 種種組合類型，最少刀數 5 刀。7 連塊為邊長比 1：7 的長方形，要以長方形切割法切割，須為田字型 7 連塊，其最少須切一刀才能組成。因此 7 連塊最少刀數的是一刀田字型 7 連塊。

陸、討論

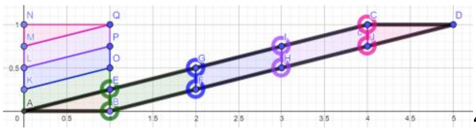
一、不同多邊形切割重組成正方形，多可運用長方形疊合正方形的方法找出最少刀數

多邊形中除了正八邊形以內切旋轉法切割外，其餘的多邊形，如不同類型三角形、平行四邊形、梯形、正五邊形、正六邊形與正七邊形，皆是以最少刀切割成長方形，再依據長方形的邊長比來增加後續切割刀數，且以此切割方式與其他文獻的切割方法相比，可求出更少刀數或相同刀數來切割重組正方形。

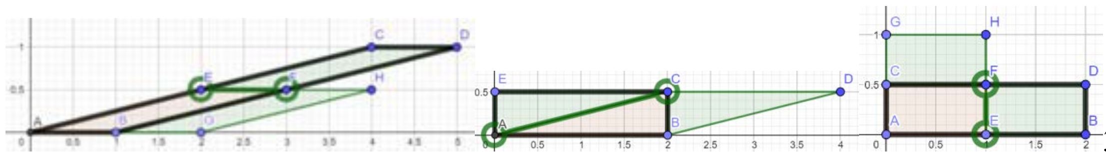
二、平行四邊形底與底延伸邊長大於 1：4 的切割刀法

(一) 比圓筒形切割法更少刀的截半切割法

在底與底延伸長度比小於 1：4 時，都可以直接使用圓筒形判斷最少切割刀數，但底與底延伸長度比為 1：4 時，先在高的部分截半，再切割成長方形，最後從長方形截半成正方形，可以比圓筒形切割法再少 1 刀。而底與底延伸長度比大於 1：4 時，使用截半切割法可比圓筒形切割法再減少更多刀。



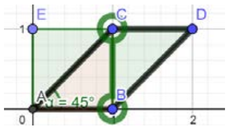
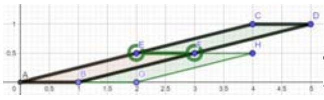
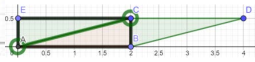
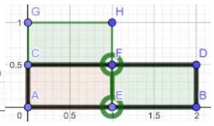
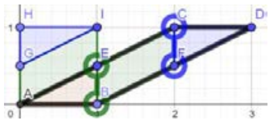
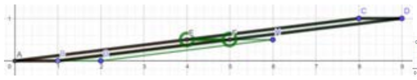
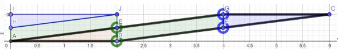
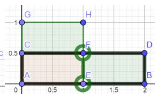
4 刀



3 刀

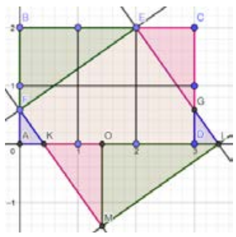
(二) 平行四邊形截半切割法為底與底延伸長度比為 1：1 與 1：2 的延伸循環

在底與高比 1：1 的平行四邊形中，底與底延伸長度比為 1：2^0，為 1：1 時，只需 1 刀切割出一個三角形，即可重組成正方形。底與底延伸長度比為 1：2^1時，需 2 刀切割出兩個三角形，重組成正方形。將底與底延伸長度比的 1：1 增加 4 倍，為 1：2^2時，需先將平行四邊形截半 1 次，縮短底與底延伸長度比，但底與高的比也會增加 4 倍，所以 1 刀切割重組成長方形後需要再截半 1 次，才會縮短 4 倍形成正方形，會比底與底延伸長度比 1：1 時多 2 刀，為 1+2 刀。同理，底與底延伸長度比為 1：2 的 4 倍，為 1：2^3時，會比底與底延伸長度比為 1：2 時多 2 刀，為 2+2 刀，而底與底延伸長度比 1：2^4時需先截半 2 次，以 1 刀切割重組成長方形後，需要再截半 2 次，為 1+4 刀。以此類推可知，當底與高比 1：1 平行四邊形的底與底延伸長度比小於等於 1：2^n (n 為整數且≥ 0) 時，切割成正方形所需刀數為 n+1 刀。

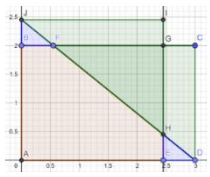
底與底延伸長度比 1：2^0為 1 刀	底與底延伸長度比 1：2^2為 1+2 刀
	  
底與底延伸長度比 1：2^1為 2 刀	底與底延伸長度比 1：2^3為 2+2 刀
	  

三、運用長方形切割法突破正方形 3、6、7 連塊的最少刀數

在第 42 屆科展的「面積切割」當中使用多種方法將不同連塊切割重組成正方形，其中 3、6、7 連塊皆用鑲嵌法來找出最少刀，其方法為：先計算長方形面積及切割成正方形後的邊長，在長方形中鑲嵌一個正方形，再將多餘的區塊補到正方形中，在 3、6、7 連塊的最少刀分別為 4 刀、3 刀、4 刀。但我們發現田字型的連塊皆為邊長比 1：4 以內的長方形，以長方形切割法切割重組後，3 連塊與 6 連塊最少只需 2 刀，7 連塊則多一刀切成田字型為 3 刀。



3 刀



2 刀

四、未來展望

在不規則梯形當中，還有一種斜邊向內切的內凹梯形，其邊長與角度變化較大，無法單純以長方形和三角形的組成來討論，未來可深入探討不規則梯形的斜邊向內切的角度不同時，其切割方式與最少刀數的差異。

柒、結論

一、在幾何圖形長方形、三角形、平行四邊形、梯形與正多邊形中，因邊長比例或角度皆會影響到其切割重組正方形的最少刀數，因此我們分別依據其不同變因進行切割，其結果如下：

(一) 在長方形邊長比為 1：4^n(n 為整數且≥ 0)時，最少 n 刀；在邊長比為 1：m^2(4^n＜m^2<4^{n+1})時，最少 n+1 刀；當邊長比介於 1：4^n 與 1：4^{n+1}之間時最少 n+2 刀。

(二) 正三角形最少刀數為 3 刀、等腰直角三角形最少刀數為 1 刀，而其餘三角形皆是以固定刀數切割成長方形，再依據長方形邊長比決定切割刀數，等腰三角形、直角三角形最少 1 刀切割成長方形， 銳角三角形、鈍角三角形最少 2 刀切割成長方形，再依據長方形邊長比決定切割刀數。

(三) 當平行四邊形的底與底延伸的長度比小於等於 1：2^n (n 為整數且≥ 0) 時，切割成長方形所需的刀數為 n+1 刀，再依據平行四邊形底與高的長度比，即為長方形邊長比，增加切割刀數。

(四) 在不同類型的梯形中，皆是以固定刀數切割成長方形，等腰梯形、直角梯形以及不規則梯形，分別為 1 刀、1 刀與 2 刀，再依據長方形邊長比決定切割刀數，並重組成正方形。且因梯形上底加下底與高的比為切割後長方形邊長比的$\frac{1}{2}$倍，因此梯形上底加下底與高的比為主要影響最少總刀數的主要原因。

(五) 在正多邊形的切割最少刀數，正五邊形的最少刀數為 5 刀；正六邊形的最少刀數為 4 刀 ；正七邊形的最少刀數為 9 刀；正八邊形的最少刀數為 4 刀。

二、在正方形 3、6、7 連塊中分別有 2 種、35 種、108 種組合類型，各種組合的最少刀數結果如下：

(一) 3 連塊只有兩種種類，I 型 3 連塊和 L 型 3 連塊。I 型 3 連塊的最少刀數是 2 刀，L 型 3 連塊的最少刀數是 3 刀，皆只有一種組合類型。

(二) 6 連塊有三種種類，田字型 6 連塊、一刀田字型 6 連塊和兩刀田字型 6 連塊。田字型 6 連塊的最少刀數是 2 刀，有 1 種組合類型；一刀田字型 6 連塊的最少刀數是 3 刀，有 30 種組合類型；兩刀田字型 6 連塊的最少刀數是 4 刀，有 4 種組合類型。

(三) 7 連塊有三種種類，一刀田字型 7 連塊、兩刀田字型 7 連塊和三刀田字型 7 連塊。一刀田字型 7 連塊的最少刀數是 3 刀，有 7 種組合類型；兩刀田字型 7 連塊的最少刀數是 4 刀，有 100 種組合類型；三刀田字型 7 連塊的最少刀數是 5 刀，只有 1 種組合類型。

捌、 參考文獻資料與其他

郭笛萱、黃建程、張高登(2008) •「變形方塊~最少刀切割五、八方塊重組為正方形的探討」•中華民國第四十八屆中小學科學展覽會。

蘇家霈、江婕瑋、陳薏文、任芸慧(2002) •「面積切割」•中華民國第四十二屆中小學科學展覽會。

蕭偉智、陳彩鳳(2012) •「讓幾何有趣些!漫談幾何切割」•科學研習月刊 51 卷第 1 期與第 2 期。

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會作品說明書 (2021)。剪剪貼貼拼成「正」。取自 http://sci.ptc.edu.tw/Pthsci61/Upfile/Works/1614906726_727052_44.pdf

數趣•剪完再拼(4)：將正五邊形剪成多塊，再拼回一個正方形。取自 http://www.mathsgreat.com/intnum/intnum_009.pdf

李信昌(2017) •昌爸工作坊：正八邊形和正方形的等積變換。取自 http://www.mathland.idv.tw/ggb/ggbhtml5/octsqu.html

【評語】080406

1. 該作品探討如何切割幾何圖形來重組成正方形，並追求在此方法下所需切割的最少刀數。主題具操作性且趣味性高。
2. 作者運用數學繪圖軟體呈現的切割歷程，具體明確、清晰易懂。
3. 作者先研究各種比例的長方形切割重組成正方形，以此為基準，再研究其它多邊形，以最少刀數切割成長方形。這種先解決簡單的問題，再將複雜問題逐步化簡成連串的簡單問題，邏輯思路清晰，而在口頭報告上，作者表達與應對能力亦佳；很值得讚許。
4. 此研究結果提供完整的切割歷程，又突破某些圖形的最少刀數，值得肯定。

作品簡報

割「聚」一「方」

-切割重組正方形

國小組 數學科

文獻探討

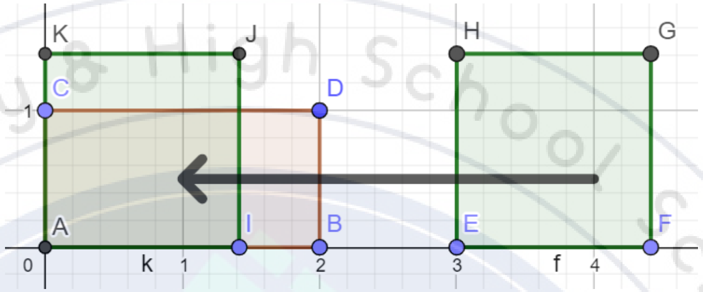
文獻名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
文獻一：變形方塊~最少刀切割五、八方塊重組為正方形的探討	一正方形3連塊到8連塊以**數字**找尋所有組合類型，其結果分別為：2種、5種、12種、35種、108種、369種。 二5連塊組合類型在切割重組成正方形的最少刀數中，有5種為2刀，7種為3刀；8連塊組合類型在切割重組成正方形的最 少刀數中，有4種為1刀，215種為2刀，149種為3刀，1種為4刀。	一 本研究以**圖示**呈現出3連塊、6連塊及7連塊的組合類型，以便後續能做切割的分類。 二 5連塊是1^2+2^2正方形的邊長為$\sqrt{5}$，而8連塊是2^2+2^2，皆是兩正方形的面積和。從文獻延伸以非平方數的組合，探討**3、6、7連塊所有組合類型**經由切割重組成正方形的最少刀數。
文獻二：面積切割	一 在3、6、7連塊最少刀數皆是運用評儀、旋轉的鑲嵌法以最少刀數切割並重組成正方形，其切法為利用邊長做出要的面積，再把原圖形切補過來，在3連塊最少刀數為4刀，6連塊為3刀，7連塊為4刀。	一 同為鑲嵌法，但本研究在長方形與正方形中，找出兩圖形疊合時最適合的位置。將3、6、7連塊視為長方形來與正方形平移鑲嵌，並突破文獻的最少刀數，依序分別為2刀、2刀、3刀。
文獻三：剪剪貼貼拼成「正」	一 正三角形以內切旋轉法切割重組成正方形。 二 銳角三角形與鈍角三角形依據底與高的長度，以高的一半或底的一半著手，剪拼成一個長方形，再從長方形切成正方形。 三 長方形2刀切割成正方形有兩種方法，為長方形與正方形疊合。 四 將多邊形切割成多個三角形，從多個三角形分別切割成數個正方形，再組成一個正方形。	一 本研究在正三角形中找出不同的切割方式，且以相同最少刀數。 二 我們除了探討了銳角三角形及鈍角三角形，我們也探討了各種三角形的切割方式以及底與斜邊長比例的最少切割刀數。 三 找尋不同邊長比例中合適的長方形切割方式，求取最少刀數。 四 本研究以正多邊形來探討，並簡化其複雜的程序，以更少刀數切割重組成正方形。

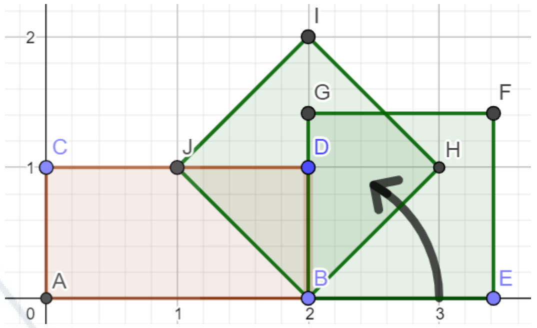
研究目的

目的一、探討各種**多邊形**經由切割重組成正方形求取最少切割刀數。	
問題一	相同面積長方形的**不同邊長比**對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題二	**不同種類**三角形的底與高比對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題三	**不同底與高比**平行四邊形的**不同底與底延伸長度比**對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題四	梯形**不同上底加下底與高的比**對求取切割並重組成正方形最少切割刀數之關係。
問題五	**正多邊形**在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
目的二、探討正方形連塊經由切割重組成正方形求取最少切割刀數。	
問題一	正方形**3連塊**不同組合類型在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
問題二	正方形**6連塊**不同組合類型在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。
問題三	正方形**7連塊**不同組合類型在求取切割並重組成正方形的最少切割刀數。

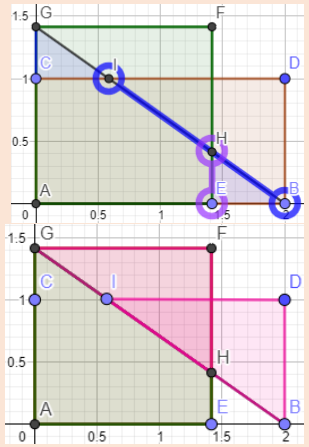
長方形切割重組正方形

將相同面積的長方形與正方形，以**平移**、**旋轉**方式進行疊合，有以下六種疊合情況：



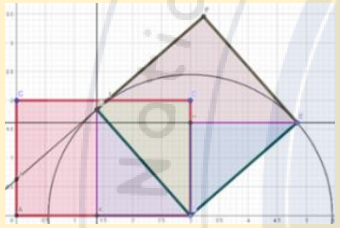


疊合情況一：長方形與正方形的直角完全貼合

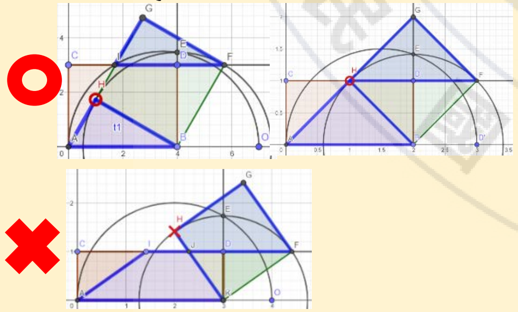


從子母相似定理，可2刀切出兩個全等小三角形，平移後，再將剩餘區塊平移，可得正方形。

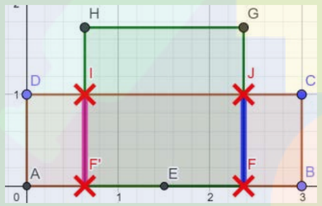
疊合情況二：長方形與正方形直角的點貼合



不能以任意方式旋轉，需正方形一角與長方形長邊的延長線段相交，且長方形的邊長比必須小於1：2，才能2刀切割重組成正方形。

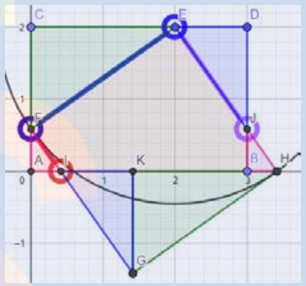


疊合情況三：長方形與正方形邊完全貼合



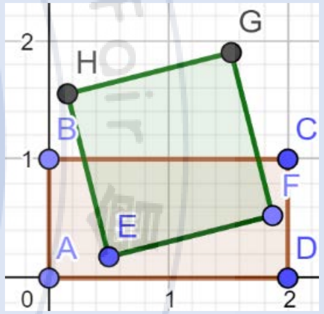
除了邊長比1：9的長方形與正方形疊合，能以2刀等分，而重組成正方形，其餘邊長比的長方形最少2刀切割後，未疊合的區域形狀不同，需要以更多刀切割。

疊合情況四：長方形與正方形邊的點貼合



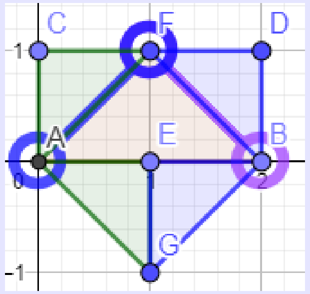
由於疊合後最少需要切割3刀，並不是最少刀的疊合狀況。

疊合情況五：長方形與正方形的點與邊不貼合



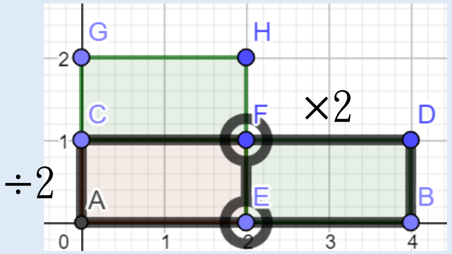
由於疊合後重疊在區塊內的線段有3條，因此將線段延伸最少需切割3刀，並不是最少刀的疊合狀況。

疊合情況六：長方形與正方形的邊與角的點貼合



在邊長比1：2的長方形，且正方形兩點對齊長方形的長邊時，可以最少2刀切割，重組成正方形。

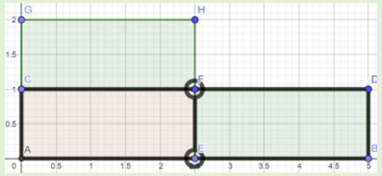
長方形邊長與最少刀數的關係

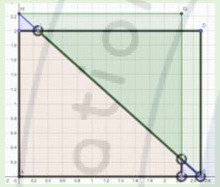


當邊長比1：1的正方形一刀截半重組成長方形時，會使一邊邊長÷2；而另一邊邊長×2，形成邊長比1：4^1的長方形。

在 2刀截半正方形時，一邊邊長÷4，一邊邊長×4，可重組成邊長比1：4^2的長方形。

反推可知，在邊長比1：4^n(n為正整數)的長方形中，可用最少n刀截半，並重組成正方形。



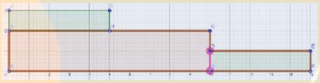


由上述實驗可知，長方形介於1：4^n 、1：4^{n+1}之間，先切半n次，會形成邊長比1：4以內的長方形，再以疊合法2刀切割，因此最少刀數為n+2刀 。

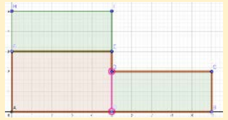
在1：m^2中，將1：m^2視為m等分，將其切割成兩個長方形，且長邊比例接近1：1，進行重組，接著使用等分法直到其變為正方形為止。 以長方形邊長比1：5^2舉例

可先視邊長比1：25的長方形為5段邊長比1：5的長方形

在3段與2段間切一刀，形成2層上面2段下面3段的P字型



以長邊2段1段間切一刀，形成3層，上面1段中間、下面各2段的P字型。



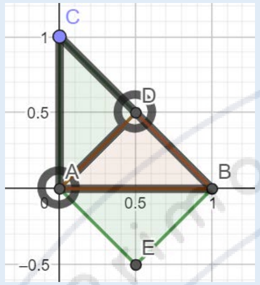
最後以P字型2段中間切最後一刀， 5層5段長方形邊長比1：5即可組成正方形。

邊長比	1：4^n(n為整數且≥ 0)	1：m^2且4^n＜m^2<4^{n+1}	介於1：4^n（n為整數且≥ 0）、1：4^{n+1}之間
最少刀數	n刀	n+1刀	n+2刀

不同種類三角形

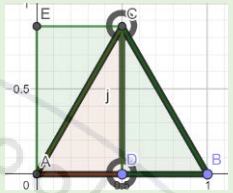
等腰直角三角形

從對稱軸1刀切割，重組成正方形

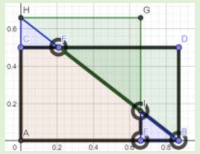


正三角形

從對稱軸1刀切割，重組成長方形

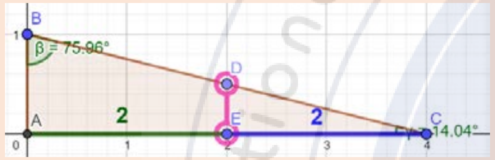


使用疊合法2刀切割，重組成正方形



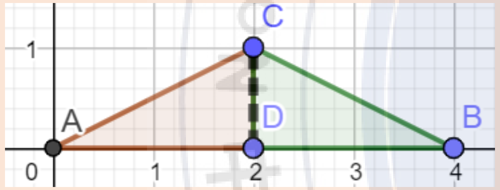
直角三角形

直角三角形可視為1個梯形和1個三角形

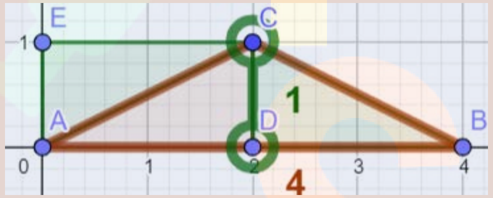


取中點1刀切割，重組成長方形

等腰三角形



等腰三角形可視為2個全等直角三角形

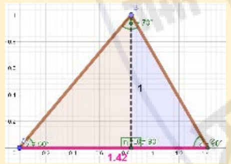


從對稱軸1刀切割，重組成長方形

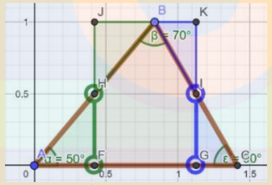
三角形**底與高比**轉換成

長方形邊長比相差$\frac{1}{2}$**倍**

銳角三角形

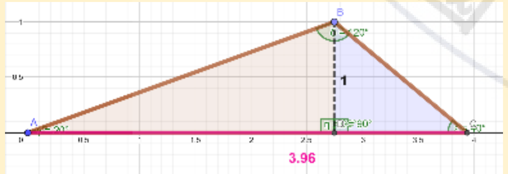


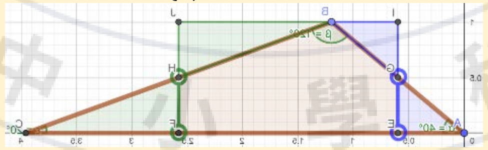
以最長邊為底



取兩短邊中點2刀切割，重組成長方形

鈍角三角形





依據轉換後的

長方形邊長比

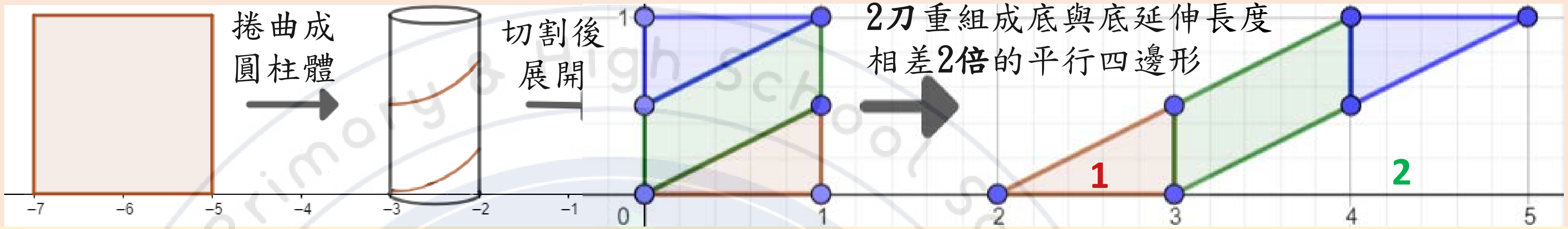
增加切割刀數，

重組成正方形。

平行四邊形

從立體切割概念

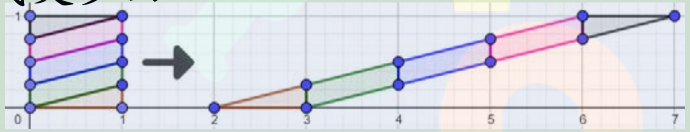
思考平面切割



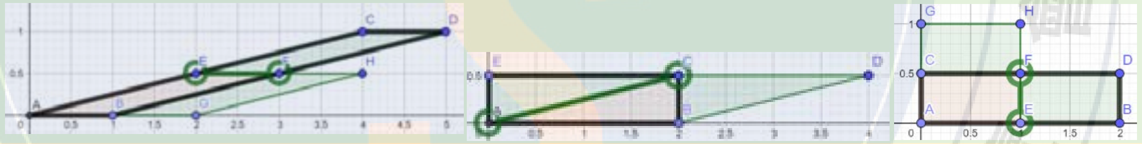
由正方形反推可以得知影響平行四邊形切割成長方形的最少刀數為底與底的延伸長度的倍數。

以疊合方式切割

當平行四邊形底與底的延伸長度比小於1：4時，其切割並重組成正方形最少刀數與立體概念切割方式相同。
當平行四邊形底與底的延伸長度比大於、等於1：4時，先將平行四邊形截半，切割成長方形，再截半重組成正方形，會比立體概念切割方式更少刀。



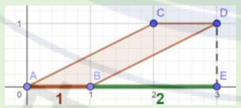
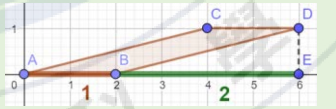
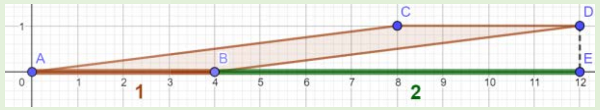
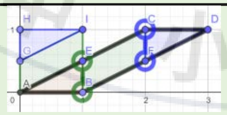
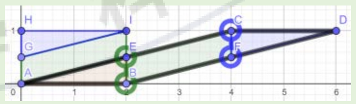
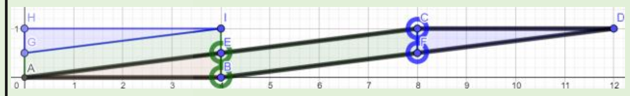
立體切割概念法4刀



截半疊合法3刀

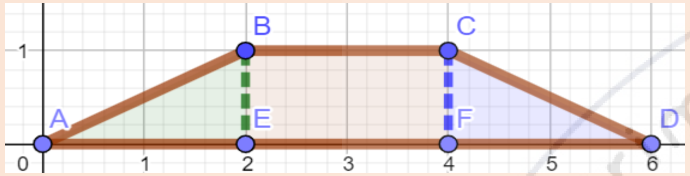
發現底與底延伸的長度比多兩倍時，最少刀數就會加1刀。當平行四邊形的**底與底延伸長度比小於等於1：2^n時，切割成長方形最少刀數為n+1刀**。

平行四邊形底與高的比不同，只會影響長方形的邊長比，且長方形的長和寬即為平行四邊形的底與高，而後續切割刀數則依據長方形邊長比增加。

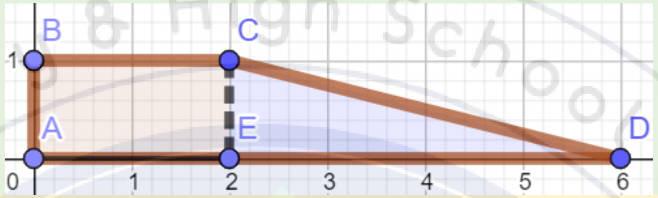
底與高比1：1	底與高比2：1	底與高比4：1
		
		

梯形

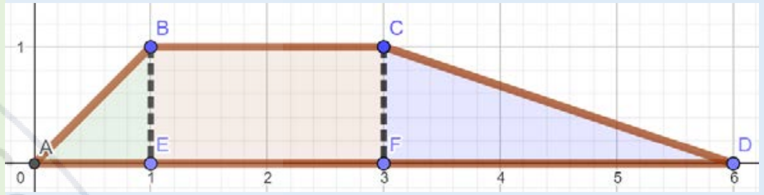
等腰梯形



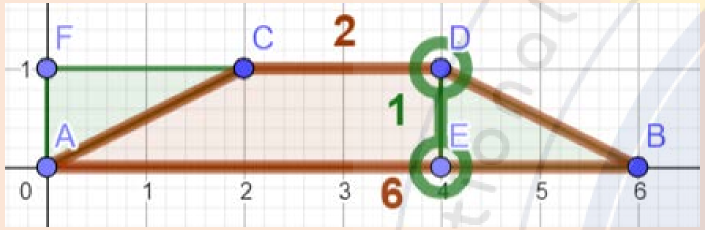
直角梯形

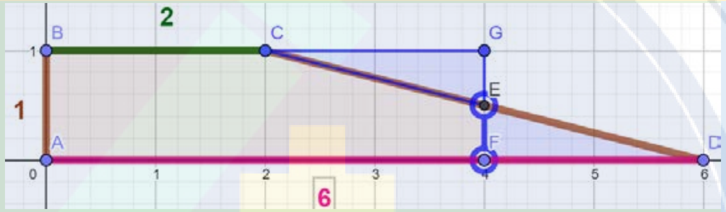


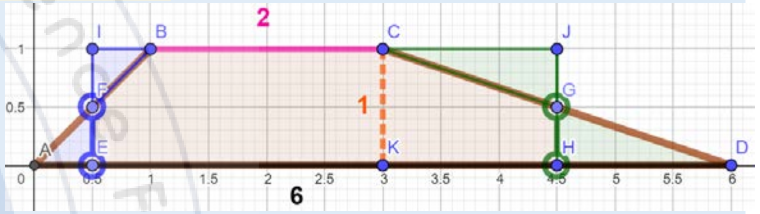
不規則梯形



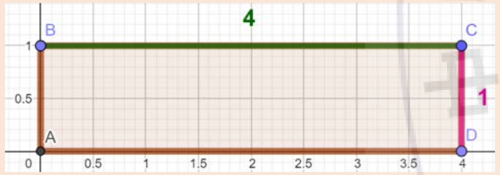
梯形可視為一個長方形及直角三角形所組成

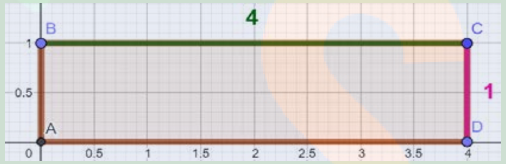


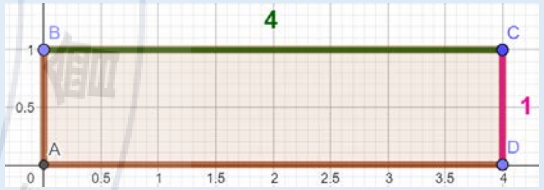




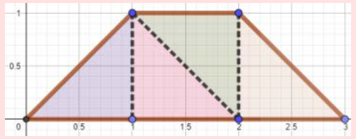
可以運用切割三角形的概念進行切割

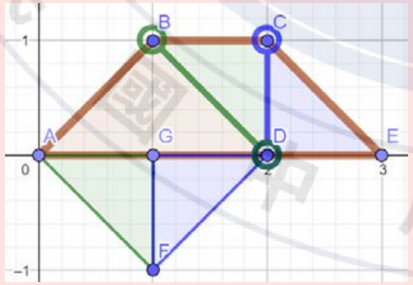






切割後，梯形上底加下底的長度會變一半，高的長度不變，因此上底加下底與高比轉換成長方形邊長比會相差$\frac{1}{2}$倍

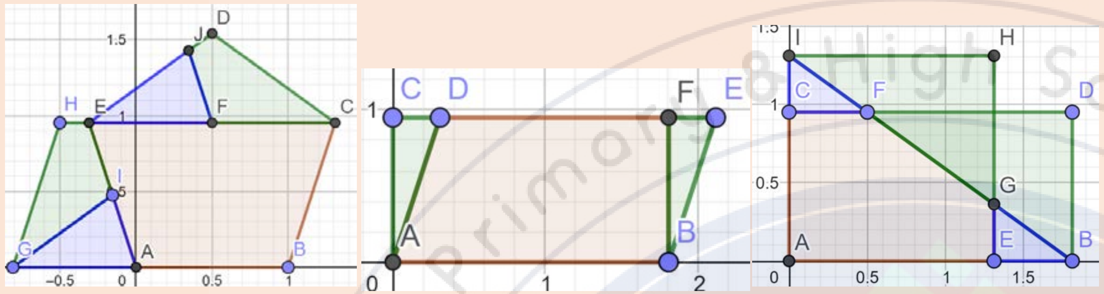




在梯形當中有個特例，為**上底+下底與高比為4：1的等腰梯形**，其可視為4個等腰直角三角形的組合，切割兩個等腰直角三角形，與另外兩個組合，即可重組成正方形。

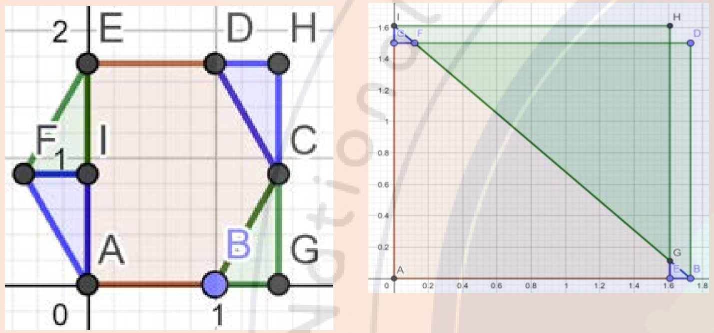
正多邊形

正五邊形



正五邊形的切割法，先以2刀切成平行四邊形，依據平行四邊形的切割概念可知，能以1刀切割並重組成長方形，最後以正方形疊合長方形的概念，2刀切割後，即可組成正方形，最少刀數為5刀。

正六邊形

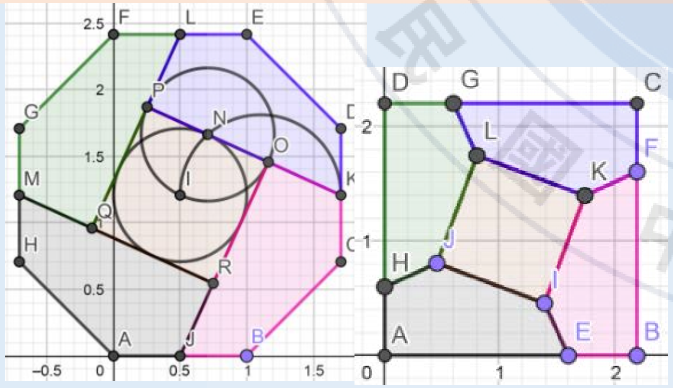


正六邊形疊合一個長方形後，可以切割成切割出兩個直角三角形，並平移至長方形待填補區，即可以疊合法重組成長方形，最少刀數為4刀。

正七邊形

在正七邊形以角平分線找出中點，並切割成數個三角形來組成長方形，由於組成的長方形邊長比小於1：4，因此以兩刀來切割長方形，最少刀數為9刀。

正八邊形

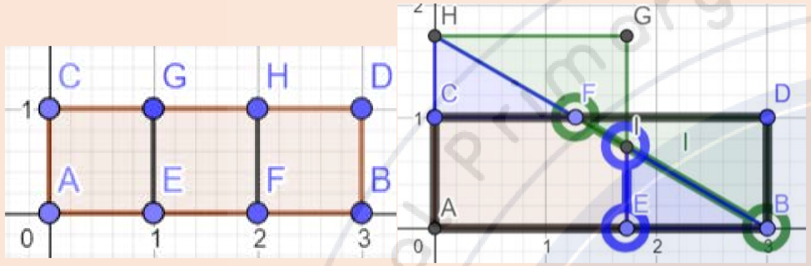


利用正八邊形的四個邊中點找出正八邊形邊長的正方形以及四個五邊形，重組成正方形，最少刀數為4刀。

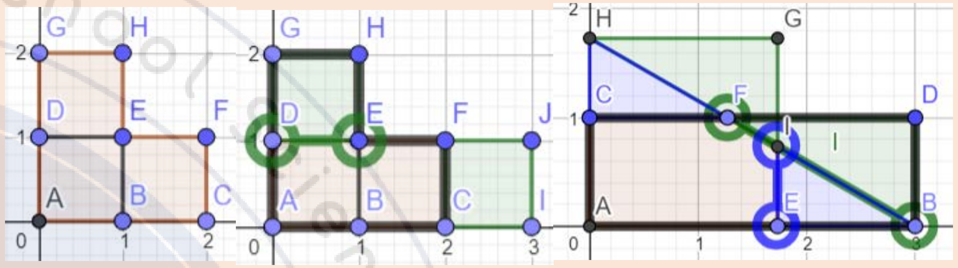
正方形連塊

3連塊有2種組合類型；6連塊有35種組合類型；7連塊有108種組合類型。

3連塊

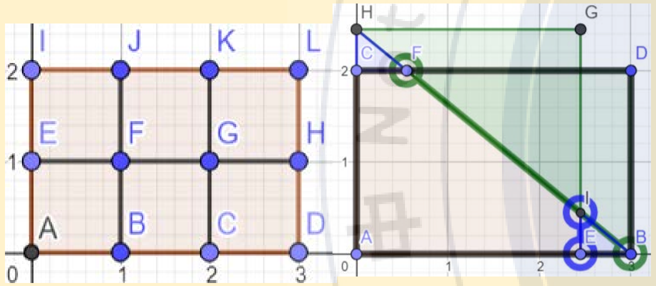


I型3連塊可視為邊長比1：3的長方形。

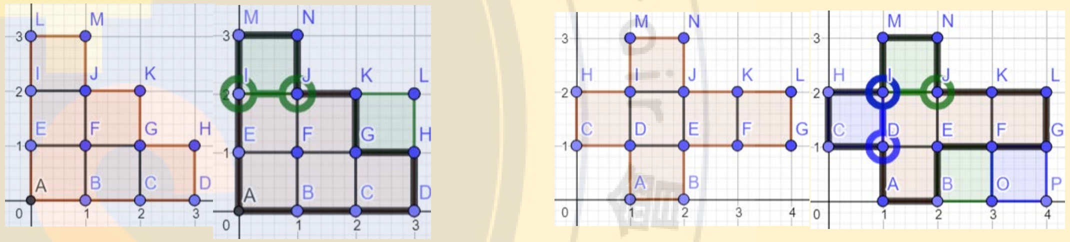


L型3連塊只須多切一刀，將其變成邊長比1：3的長方形，再依據長方形切割法進行切割即可重組成正方形。

6連塊

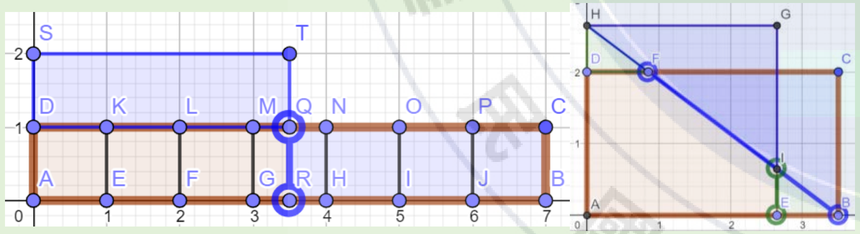


田字型六連塊可視為邊長比2：3的長方形。

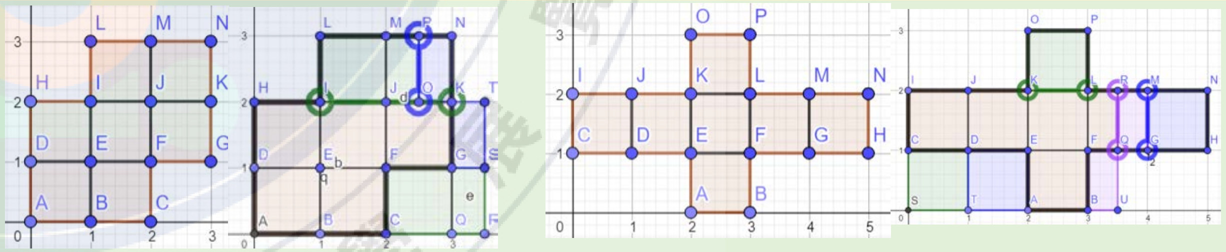


其餘六連塊皆是先切割成田字型六連塊，再切割成正方形。

7連塊



由於I型7連塊為邊長比1：7的長方形，其邊長比已超過1：4，因此須多切一刀變成邊長比為2：3.5的田字型7連塊。



其餘七連塊皆是先切割成田字型七連塊，再切割成正方形。

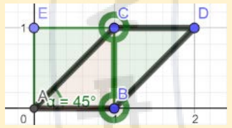
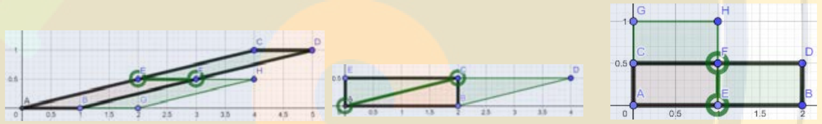
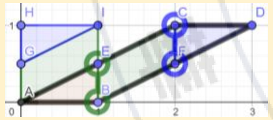
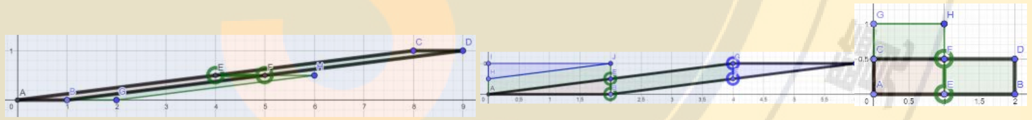
討論

一. 不同多邊形切割重組成正方形，多可運用長方形疊合正方形的方法找出最少刀數：除了正八邊形以內切旋轉法切割外，其餘的多邊形，皆是以最少刀切割成長方形，再依據長方形的邊長比來增加後續切割刀數，且以此切割方式與其他文獻的切割方法相比，可求出更少刀數或相同刀數來切割重組正方形。

二. 平行四邊形底與底延伸邊長大於1：4的切割刀法

(一)比圓筒形切割法更少刀的截半切割法：在底與底延伸長度比小於1：4時，都可以直接使用圓筒形判斷最少切割刀數，但底與底延伸長度比為1：4時，先在高的部分截半，再切割成長方形，最後從長方形截半成正方形，可以比圓筒形切割法再少1刀。而底與底延伸長度比大於1：4時，使用截半切割法可比圓筒形切割法再減少更多刀。

(二)平行四邊形截半切割法為底與底延伸長度比為1：1與1：2的延伸循環

底與底延伸長度比1：2^0為1刀	底與底延伸長度比1：2^2為1+2刀
	
底與底延伸長度比1：2^1為2刀	底與底延伸長度比1：2^3為2+2刀
	

三. 運用長方形切割法突破正方形3、6、7連塊的最少刀數：在第42屆科展的「面積切割」當中使用多種方法將不同連塊切割重組成正方形，其中3、6、7連塊皆用鑲嵌法來找出最少刀，其方法為：先計算長方形面積及切割成正方形後的邊長，在長方形中鑲嵌一個正方形，再將多餘的區塊補到正方形中，在3、6、7連塊的最少刀分別為4刀、3刀、4刀。但我們發現田字型的連塊皆為邊長比1：4以內的長方形，以長方形切割法切割重組後，3連塊與6連塊最少只需2刀，7連塊則多一刀切成田字型為3刀。

四. 在不規則梯形當中，還有一種斜邊向內切的內凹梯形，其邊長與角度變化較大，無法單純以長方形和三角形的組成來討論，未來可深入探討不規則梯形的斜邊向內切的角度不同時，其切割方式與最少刀數的差異。

結論

一. 在多邊形中，邊長比例或角度皆會影響到其切割重組正方形的最少刀數，依據其不同變因切割，其結果如下：

(一)在長方形邊長比為1：4^n(n為整數且≥ 0)時，最少n刀；在邊長比為1：m^2(4^n<m^2<4^{n+1})時，最少n+1刀；當邊長比介於1：4^n 與1：4^{n+1}之間時最少n+2刀。

(二)正三角形最少刀數為3刀、等腰直角三角形最少刀數為1刀，而其餘三角形皆是以固定刀數切割成長方形，再依據長方形邊長比決定切割刀數，等腰三角形、直角三角形最少1刀切割成長方形， 銳角三角形、鈍角三角形最少2刀切割成長方形，再依據長方形邊長比決定切割刀數。

(三)當平行四邊形的底與底延伸的長度比小於等於1：2^n（n為整數且≥ 0）時，切割成長方形所需的刀數為n+1刀，再依據平行四邊形底與高的長度比，即為長方形邊長比，增加切割刀數。

(四)在不同類型的梯形中，皆是以固定刀數切割成長方形，等腰梯形、直角梯形以及不規則梯形，分別為1刀、1刀與2刀，再依據長方形邊長比決定切割刀數，並重組成正方形。且因梯形上底加下底與高的比為切割後長方形邊長比的$\frac{1}{2}$ 倍，因此梯形上底加下底與高的比為主要影響最少總刀數的主要原因。

(五)在正多邊形的切割最少刀數，正五邊形的最少刀數為5刀；正六邊形的最少刀數為4刀 ；正七邊形的最少刀數為9刀；正八邊形的最少刀數為4刀。

二. 在正方形3、6、7連塊中分別有2種、35種、108種組合類型，各種組合的最少刀數結果如下：

(一)3連塊只有兩種種類，I型3連塊和L型3連塊。I型3連塊為最少刀數類型，以2刀切割重組成正方形。

(二)6連塊有三種種類，田字型6連塊、一刀田字型6連塊和兩刀田字型6連塊。田字型6連塊為最少刀數類型，以2刀切割重組成正方形。

(三)7連塊有三種種類，一刀田字型7連塊、兩刀田字型7連塊和三刀田字型7連塊。一刀田字型7連塊為最少刀數類型，以3刀切割重組成正方形。