中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080405

費氏漫步

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六 詹凱婷	林東岳
小六 呂慕萱	楊錦花
小六 顏暄榆	
小六 廖文如	

關鍵詞：費氏數列、數列和、遞迴關係

摘要

本作品啟發於 2020 年一月份科學研習期刊中的特約專欄「森棚教官的數學題 – 散步的費波納契」，探討在數線上以費氏數列作正向或負向的移動，走 n 步的期間內距離最遠時的最小值為何？又有多少種方法？我們先利用窮舉法、樹狀圖與 Python 程式找出 n 在 1 到 22 之間的所有情形，發現最遠距離最小值近似於費氏數列的一半、方法數與「整數數列線上大全（OEIS）」收錄的類費氏的數列 A254308 相符。在探討走法時，得到符合條件的走法推廣並非是增加最後一項，而是在已知的走法中添加第一步。並利用找到規律性的走法、走法延伸規律與數學規納法驗證最遠距離最小值與方法數可推廣至所有的 n 值，最後我們將行走的方法改成盧卡斯數列與類費氏數列，也出現相似的結論。

壹、前言

一、研究動機

在課堂中老師介紹了「散步的費波那契」[2]這個題目給我們認識，在這個題目中，我們發現數學中還有很多不同的「規律」。如費氏數列不僅是和前一項有關。對於這個題目要利用費氏數列找出費波納契散步的方法，我們覺得很有趣，所以打算以這個主題當科展題目，做更深入的探討。

二、題目說明

費波那契 (Fibonacci) 先生想出去散散心。從位於原點的家門口出發，沿著數線共走五步，步長依次是 1 、 1 、 2 、 3 、 5 單位。每一步可以往數線的正方向走，也可以往數線的負方向走。但是他不想離家太遠，所以希望在散步的過程中，最遠的落腳處可以離家盡量近。

比如說，如果他走

$$+1、-1、+2、-3、+5$$

則過程中最遠會離家 4 單位（在最後一步走完後）。但如果他走

$$+1、+1、-2、+3、-5$$

則過程中最遠會離家 3 單位 （在走完 +3 之後）。因此，後者是比較好的走法。

事實上離家 3 單位不能再更好了，而且除了上面這一種方法之外，還有好幾種方法，你能幫費波那契先生全部找出來嗎？

請問如果他今天走了八步，步長依序是 1、1、2、3、5、8、13、21。那麼，「在行走過程中，最遠的落腳處離家最近」的走法要怎麼走？

依此題的描述，費波納契先生在散步時，可行的走法明顯有左右對稱。為了簡化問題，本次研究只討論「最後一步為向正方向走」時的情形。若要求出原題的答案，只需將我們找到的方法數乘 2 即可。

三、研究目的

（一） 找出原始題目的解答

（二） 找出利用費氏數走 n 步時，最遠距離的最小值與兩者間的關係。

（三） 找出滿足行走的最遠距離為最小值時的方法總數

（四） 找出滿足行走的最遠距離為最小值時的走法規律

四、名詞解釋與代號

定義 1.（本作品使用符號與代號）

1. 費氏步 (F_n)：費波納契先生在散步時，每步所移動的步長，在第 n 步時的步長設為 F_n ，亦為費氏數列的第 n 個數。

   費氏數列定義：$F_1 = 1$ 、 $F_2 = 1$ 。且當 $n > 1$ 時，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$。如表 1

2. 記錄移動方法：我們設定以家為原點，數線為一左右直線，向右為「$+$」、向左為「$-$」，例如：「$+3$」代表向右移動 3 單位、「-8」代表向左移動 8 單位。

   為了記錄方便，我們利用連續的正負號代表從出發開始利用費氏步的連續移動結果，例如：「$(+,-,-,+,-,+)$」代表依序走了 $+1$、-1、-2、$+3$、-5與$+8$ 步。

3. 最遠距離最小值 (M_n)：在走 n 步費氏步的過程中，離家最遠距離的最小值。

4. 最遠落腳步數 (P_n)：在走 n 步費氏步的過程中，達到 M_n 距離時在第幾步。

   例如：在走 3 步時，依序走「$+1,\ +1,\ -2$」可以滿足最遠距離的最小值 $M_3 = 2$ ，且在第 2 步時會走到最遠距離，所以 $P_3 = 2$ 。

5. 最小值方法數 (W_n)：總共走 n 步費氏步時，在最後一步為向正方向（向右）的前提下，最遠距離恰為 M_n 的方法數。

6. 半費氏數列 (f_n)：和費氏數列有類似的規律，其規則為：

$$f_n=\begin{cases} f_1=f_2=1 \\ f_{n-1}+f_{n-2} \quad ,如果\ f_{n-1}\ 為奇數 \\ f_{n-1}+f_{n-3} \quad ,如果\ f_{n-1}\ 為偶數 \end{cases}$$

。此數列收錄於 OEIS，編號為 A254308[1]。因此數列尚未有正式的命名，考量其與費氏數列相近，暫稱為半費氏數列。此數列與本次研究結果有相當關聯。我們在表 2 中列出半費氏數列前 15 項。

表 1：費氏步關係式列表

第n步	1	2	3	4	5	⋯	n
費氏步F_n	1	1	$2=1+1$	$3=1+2$	$5=2+3$	⋯	$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

表 2：半費氏數列前 15 項

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	1	1	2	3	5	8	11	19	30	41	71	112	153	265	418

五、文獻探討

（一） 新北市科展 109 學年度國小組數學科「費先生散步遇到威先生」[5]

該作品同樣探討此問題，表 3 列出該作品和本作異同之處：

表 3：文獻資料與本作的異同

	費先生散步遇到威先生	本作品
一般化問題後數據計算	列出前 10 項的所有結果，並依此推出前 16 項的答案	利用窮舉法推算出前 6 項的所有結果，並利用樹狀圖輔以試算表軟體（Google Sheet）得到前 22 項的所有可行走法，並用 Python 驗證數據正確性。
最遠距離最小值推論	找到最遠距離最小值的關係式。	找到最遠距離最小值的關係式。 先推論最遠距離最小值下限成立，並從可行的方法中找到有規律的走法，配合數學歸納法說明最小值必定成立。
方法數推論	利用最適合終點、最遠距離最小值，算出向左走的步長。並使用費氏表示法的方法數求得方法數。	找到方法數的規律性與半費氏數的關係。並找到行走方法的規律是「新增第一步」，再將行走方法的前後規律性畫出樹狀圖，並利用此樹狀圖的結論驗證方法數的規律性。

延伸討論	比較採納「1」的方式不同的三種費氏表示法關係，並與威氏遊戲中的上威氏數做連結。	探討在行走方法為盧卡斯數與其它起始值不同的類費氏數，最遠距離的最小值與方法數的關係。

六、研究大綱

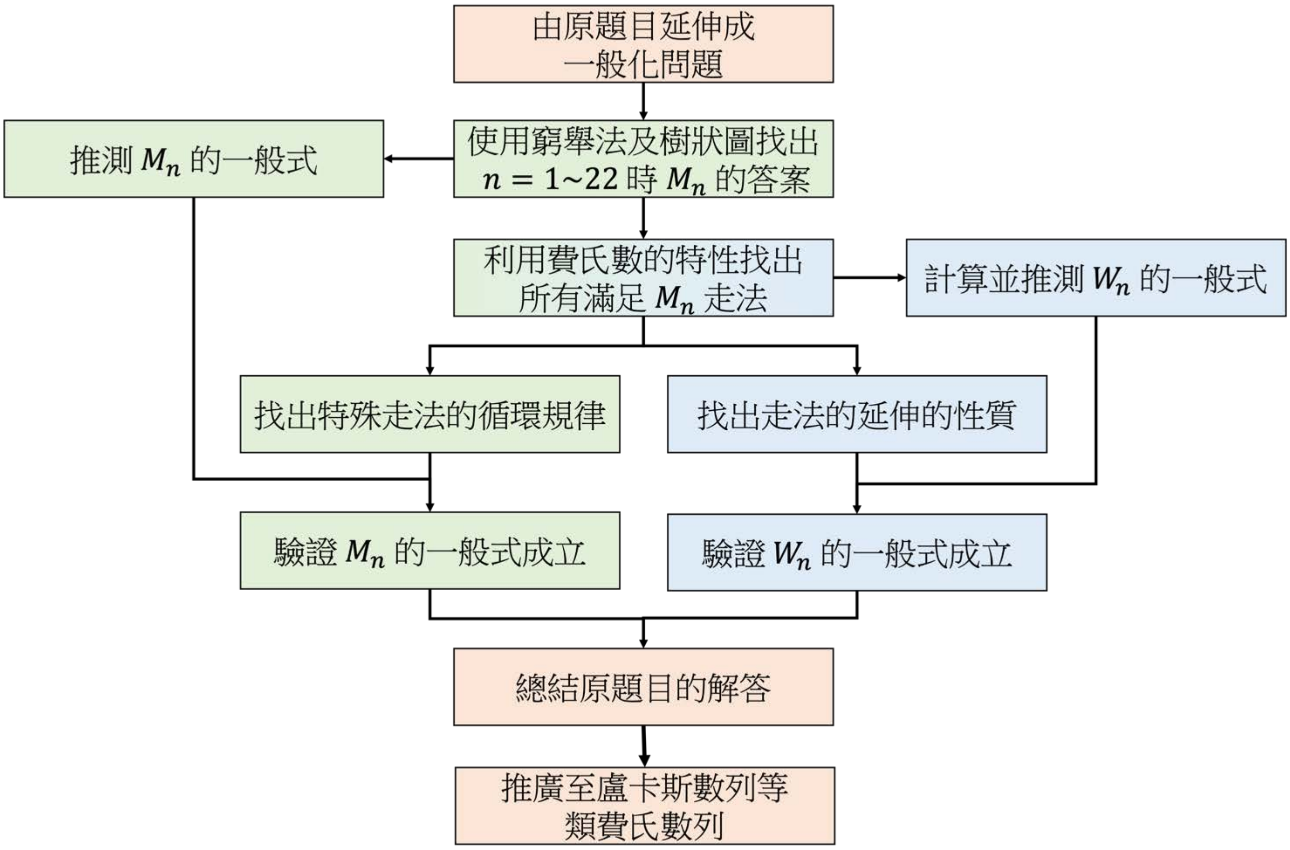

圖 1：研究大綱樹狀圖

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦（Google Sheet、Python）

參、研究過程及結果

一、在 $1 \leq n \leq 6$ 時，利用窮舉法找出費氏步行走 n 步時，離家最遠距離的最小值 M_n

我們先列出在 $1 \leq n \leq 6$ 時，所有可能的移動方式，並計算與每步的座標。並以著色表示最遠距離與發生的位置，如表 4（$n = 5,6$ 時僅列出符合條件的項目）。

表 4：利用窮舉法求得的結果

n	走法						走完該步後的落腳坐標						最遠距離
	1	1	2	3	5	8	1	1	2	3	5	8	
1	$+$						1						1
2	$+$	$+$					1	2					2
	$-$	$+$					-1	0					1
3	$+$	$+$	$+$				1	2	4				4
	$-$	$+$	$+$				-1	0	2				2
	$+$	$-$	$+$				1	0	2				2
	$-$	$-$	$+$				-1	-2	0				2
4	$+$	$+$	$+$	$+$			1	2	4	7			7
	$-$	$+$	$+$	$+$			-1	0	2	5			5
	$+$	$-$	$+$	$+$			1	0	2	5			5
	$-$	$-$	$+$	$+$			-1	-2	0	3			3
	$+$	$+$	$-$	$+$			1	2	0	3			3
	$-$	$+$	$-$	$+$			-1	0	-2	1			2
	$+$	$-$	$-$	$+$			1	0	-2	1			2
	$-$	$-$	$-$	$+$			-1	-2	-4	-1			4
5	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$		1	2	0	-3	2		3
	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$		-1	-2	0	-3	2		3
6	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	1	2	4	1	-4	4	4
	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	1	0	-2	1	-4	4	4
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	-1	0	-2	1	-4	4	4

由表 4 中，我們有以下推論：

觀察 1. 最遠距離的最小值 M_n，通常會接近 $\frac{F_n}{2}$

我們觀察數對 (n,F_n,M_n) 得到 $(1,1,1)$ 、 $(2,1,1)$ 、 $(3,2,2)$ 、 $(4,3,2)$ 、 $(5,5,3)$ 及 $(6,8,4)$ 六項，這六項中 M_n 與 $\frac{F_n}{2}$ 相差皆不超過 1 。

觀察 2. 最小值發生的位置（紅色部份），不一定是最後一步。

當 $n=2$ 到 6 時，最小值發生的位置有出現在倒數第二步上；當 $n=6$ 時有出現在倒數第四步，我們推測是因為最後三步是 $(-,-,+)$ ，後三項的和為 0 。所以在最後一步和倒數第四步皆符合所求。

觀察 3. n 越大，方法數 W_n 不一定越多。

如同表 4 所示。在 $n=3$ 時，$W_3=3$；但當 $n=4$ 時，$W_4=2$ 反而比 W_3 還少。

二、在 $1 \le n \le 22$ 時，利用倒推法配合樹狀圖找出費氏步行走 n 步時，離家最遠距離的最小值 M_n 與最小值發生在哪一個費氏步 P_n。

由觀察 1，我們猜測使用費氏步行走 n 步時，離家最遠的最小值 M_n 應該會靠近 $\frac{F_n}{2}$。換句話說，如果 F_n 為奇數，則最遠距離的最小值應該為 $\frac{F_n+1}{2}$；若為偶數，則為 $\frac{F_n}{2}$。又由觀察 2 得最遠距離不一定最後一步。所以我們就利用反推法，看有沒有辦法在最後一步會接近 $\frac{F_n}{2}$。

根據上述的推論，加上 n 越大時，要檢查的數量就越多，使用窮舉嘗試會越來越不可行。所以我們使用倒推法配合樹狀圖來找出最遠距離的最小值。具體的方法如下：

1. 假設最遠距離為最後一步 （即 $P_n=n$），並根據 n 值及 F_n 的值決定 M_n，並將其設為最初的節點。
2. 從第 n 項費氏數 F_n 開始，讓每個節點延伸出最多兩個分支，一個為 F_n 和 $-F_n$，並計算分支出來的新節點的數值。
3. 若新的節點數值的絕對值大於 M_n，則該節點捨棄（因超出所假設的最遠距離）。否則再做 F_{n-1} 與 $-F_{n-1}$ 的兩個分支，以此類推。
4. 完成到 F_1 和 $-F_1$ 的分支後，檢查最後的節點是否為 0 （起點座標）。若為 0，則此路徑即為所求。
5. 若無法達成，則嘗試將最遠距離設為倒數第二步。
6. 在最遠距離為倒數第二步時，因為最後一步必為向右，所以倒數第二步應位在原點左側，座標為負值，故設定其為 $-M_n$。而後一步為 F_n，前一步兩個分支： F_{n-1} 與 $-F_{n-1}$，同步驟 3 與步驟 4 繼續完成樹狀圖。

利用以上的方法，配合使用試算表軟體（Google Sheet），我們可以將所有的走法列出。以 $n=7$ 為例， $F_7=13$。我們猜測 $M_7=7$，尋找的方式如圖 2。

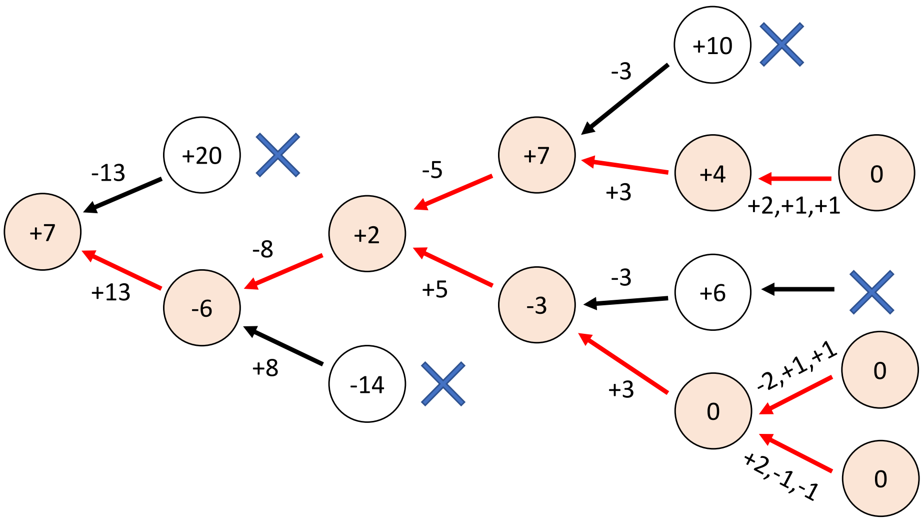

圖 2：$n = 7$ 時的倒推樹狀圖

由此樹狀圖可以得到在 $n = 7$ 、 $M_n = 7$ 且 $P_n = 7$ 時，滿足最遠距離的最小值有三種路徑，分別是 $(+,+,+,+,-,-,+)$ 、 $(+,+,-,+,+,-,+)$ 和 $(-,-,+,+,+,-,+)$。

在 $n = 8$ 時， $F_8 = 21$ 猜測 $M_8 = 11$ 且 $P_8 = 8$ ，但經過嘗試後無法得到可行的走法。我們退而求其次，若 $P_8 = 7$ 時是否有可行的解法。因為我們假設最後一步一定要是向右，所以要使走完第 7 步為最遠的話，落腳處應該在左側，也就是說，在走完第 7 步後的座標應為 -11 。得出此結論後，我們再次嘗試畫樹狀圖尋找，部份樹狀圖如圖 3。

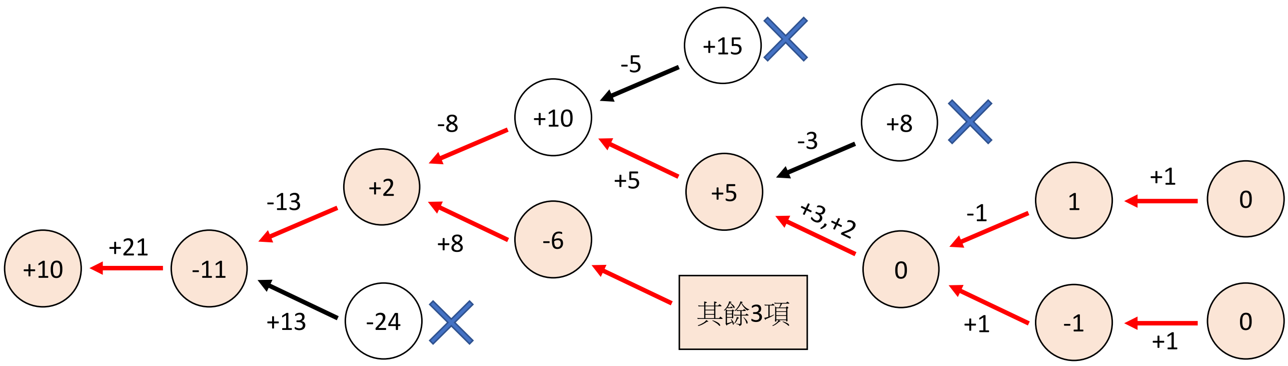

圖 3：$n = 8$ 時的倒推樹狀略圖

得到在 $n = 8$ 、 $M_n = 11$ 且 $P_n = 7$ 時，滿足最遠距離的最小值有三種路徑。

三、列出已知的 M_n 之值，找出規律並推廣至所有情形

為了驗證數據是否正確，我們在繪製樹狀圖後使用程式語言 Python 來模擬所有的移動情形，經比對以後兩者有相同的結論，表 5 為 M_n 與 F_n 的對應表。

表 5：以費氏步行走時，F_n 與 M_n 的對應表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
M_n	1	1	2	2	3	4	7	11	18	28	45
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
F_n	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711
M_n	72	117	189	306	494	799	1292	2091	3383	5474	8856

由上表，我們發現了一項有趣的規律：

結論 1. 當 $1 \le n \le 22$ 時，最遠距離的最小值 M_n 與費氏數列 F_n 的關係式為

$$M_n = \begin{cases} \frac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \frac{F_n}{2} + 1 & ,n = 6k+3 \quad（k \text{ 為非負整數}） \\ \frac{F_n+1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

我們推測結論 1 應該能推廣至所有的正整數 n ，所以接下來我們會對此進行探討。在我們做推廣時會分成兩個部份進行討論：

1. 在所有的正整數下， M_n 的下限與結論 1 相符。
2. 找到符合下限的走法

只要這兩個部份都能達成，那我們就可以說明結論 1 是可以推廣至所有正整數 n 。

要說明第一個部份成立，需要以下的引理：

引理 1-1. 費氏數列 F_n 在 $n = 3k+1$ 或 $3k+2$ 時為奇數；在 $n = 3k$ 時為偶數。更進一步的說， F_n 除以 4 的餘數為 (1,1,2,3,1,0) 六數一循環。

說明：引理 1-1 是我們參考新北市 103 學年度科展作品「費氏 book－費氏數列的一些特性」[4]中所提出的結論。

引理 1-2. 當 $n \ge 5$ 時，費氏數列的第 n 項之一半，必大於前 $n-4$ 項的總和。

意即：$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-4} < \frac{1}{2}F_n$

說明：在維基百科中[3]，有提到對於正整數 n 。費氏數列滿足恆等式

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

所以前 $n-4$ 項的總和

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{n-4}=F_{n-2}-1<\frac{1}{2}(2F_{n-2})<\frac{1}{2}(F_{n-2}+F_{n-1})<\frac{1}{2}F_n$$

得到引理 1-2 成立。

引理 1-3. 設 $S_n=F_1+F_2+\cdots+F_n$ 、 $m_n=p_1F_1+p_2F_2+\cdots+p_nF_n$（$p_i=\pm1$），則 S_n 與 m_n 不是同為奇數，就是同為偶數。

說明：假設在計算 m_n 中有 $p_{t_1},p_{t_2},\cdots,p_{t_c}$ 項為 -1。得到

$$m_n=(F_1+F_2+\cdots+F_n)-2\left(F_{t_1}+F_{t_2}+\cdots+F_{t_c}\right)$$

因後項為偶數。所以 m_n 與 S_n 不是同為奇數，就是同為偶數，得證。

由引理 1-1 到引理 1-3，我們可以得到以下的定理：

定理 1. 對於任意正整數 n ，其最遠距離的最小值 M_n 必滿足以下關係：

$$M_n\geq\begin{cases}\frac{F_n}{2} & ,n=6k\\ \frac{F_n}{2}+1 & ,n=6k+3 \quad（k \text{ 為非負整數}）\\ \frac{F_n+1}{2} & ,\text{其它}\end{cases}$$

說明：

1. 若 $n=6k+1$、$6k+2$、$6k+4$ 或 $6k+5$ 時，F_n 為奇數。考慮最後一步的步長為 F_n ，要有最小值，最後一步必為從「原點的左方往右走」或「從原點右方往左走」，且經過原點。若非如此，則最遠距離必大於 F_n，明顯不是最小值（如圖 4）。假設最遠距離 $M'_n\leq\frac{F_n-1}{2}$ （小於 $\frac{F_n+1}{2}$ 的最大整數），則兩端的距離將不大於 $2M'_n\leq F_n-1$ ，此時將無法容納最後一步的步長 F_n ，不合。

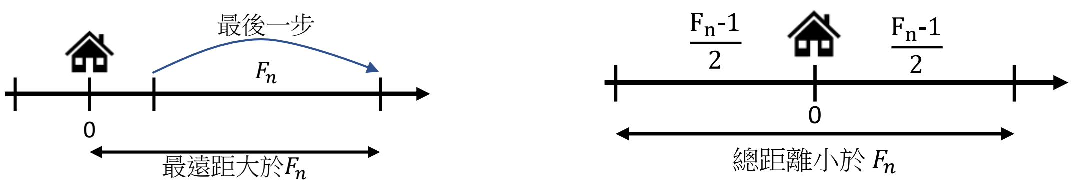

圖 4：最後一步移動方法與最遠距離關係

2. 若 $n=6k$ 時，F_n 為偶數，同上討論。若最遠距離 $M'_n<\frac{F_n}{2}$ （小於 $\frac{F_n}{2}$ 的最大整數），則兩端的距離將不大於 $2M'_n\leq F_n-2$，此時將無法容納最後一步的步長 F_n，不合。

3. 若 $n=6k+3$ 時。由引理 1-2 可知最遠距離不可能發生在前 $n-4$ 步。因為如此的話，最遠距離必小於 $\frac{F_n}{2}$ ，和上面的證明相同，此情形不可能發生。又此時 F_n 除以 4 餘 2，得 $\frac{F_n}{2}$ 為奇數。由引理 1-1 可知，每 6 個數中有 4 個為奇數。所以在前 $n-3$ 項的項數會剛好是 $6k$ 為 6 的倍數，所以這些費氏數中會有 $4k$ 個奇數，總和為偶數。而 F_{n-2}、F_{n-1} 亦為奇數、F_n 為偶數。故若假設此時的最遠距離 $M'_n=\frac{F_n}{2}$ 為奇數，由性質 3 可知 P_n 必須為 $n-2$ （如圖 5）。但當費波納契再往下走到 n 步時，必須再走步長為 F_{n-1} 和 F_n 的 2 步。如表 6，可知不論那 2 步怎麼走， M'_n 皆不為最遠距離，矛盾。故當 $n=6k+3$ 時，最遠距離的最小值只可能為 $\frac{F_n}{2}+1$ 。

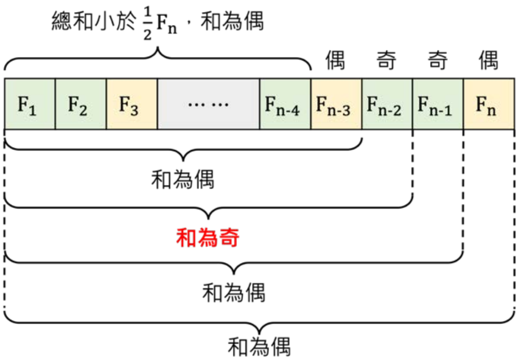

圖 5：費氏數列和的奇偶性質

表 6：移動倒數 2 步時的落腳座標比較

前 $n-2$ 步走完時的座標	走 F_{n-1} 時		走 F_n 時		最遠距離
	方向	落點座標	方向	落點座標	
$\frac{F_n}{2}$	$+$	$\frac{F_n}{2}+F_{n-1}$	$+$	$\frac{F_n}{2}+F_n+F_{n-1}$	$\frac{F_n}{2}+F_n+F_{n-1}$
	$+$	$\frac{F_n}{2}+F_{n-1}$	$-$	$-\frac{F_n}{2}+F_{n-1}$	$\frac{F_n}{2}+F_{n-1}$
	$-$	$\frac{F_n}{2}-F_{n-1}$	$+$	$\frac{F_n}{2}+F_n-F_{n-1}$	$\frac{F_n}{2}+F_n-F_{n-1}$
	$-$	$\frac{F_n}{2}-F_{n-1}$	$-$	$-\frac{F_n}{2}-F_{n-1}$	$\frac{F_n}{2}+F_{n-1}$

在定理 1 中，我們只能確定最遠距離最小值 M_n 的下限。接下來，如果我們能找到一種走法的規律，使得滿足該規律的走法的最遠距離皆為 M_n 的下限，那我們就可以確定該下限即為所求。

在我們使用 Python 驗證並將走法列出來以後，我們發現有一種規律的走法在 n 為 1 到 22 內皆滿足其最遠距離為最小值。表 7 列出其在 $n=5$ 到 12 時的情形。

表 7：$n=5\sim 12$ 時滿足題意的規律走法

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_m	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
5	+	+	−	−	+							
6	+	+	+	−	−	+						
7	+	+	+	+	−	−	+					
8	−	+	+	+	+	−	−	+				
9	−	−	+	+	+	+	−	−	+			
10	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+		
11	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	
12	+	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+

由上表 7，我們得到以下結論

結論 2. 在 $1\leq n\leq 22$ 時，走法由最後一步往前排列時為 $(+,-,-,+,+,+)$ 的循環，得到的最遠距離最小值滿足定理 1 的下限。

我們在定理 1 中，得到最遠距離最小值的下限，如果我們可以說明在 n 為任意正整數時結論 2 都能成立，那我們就可以確定其下限必成立，也就是找到了原題目在 n 為任意整數時，最遠距離最小值的答案。將結論 2 進行推廣時，我們把走法的規律列出會得到表 8。

表 8：滿足題意的規律走法一般化示意

m	1	$\cdots$	$n-8$	$n-7$	$n-6$	$n-5$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
方向	$\cdots$	$\cdots$	−	−	+	+	+	+	−	−	+

為了證明結論 2 能推廣至所有正整數的情形。我們需要先定義兩個符號：

定義 2.

1. E_k^n：總步數為 n 時，依結論 2 的方法走第 k 步時的方向及步長。其中走的方向為表 8 所列的規律，且該步的步長為 F_k。所以可以將 E_k^n 的值整理如表 9。
2. S_k^n：總步數為 n，以上述方法走 k 步時所在的座標。意即 $S_k^n=E_1^n+E_2^n+\cdots+E_k^n$。

表 9：E_k^n 與 F_k 的關係表

$n-k$ 除以 6 的餘數	0	1	2	3	4	5
E_k^n	F_k	$-F_k$	$-F_k$	F_k	F_k	F_k

由定義 2，我們會得到以下引理：

引理 2. $S_k^n = S_{k-2}^{n-2} + S_{k-1}^{n-1} + E_1^n$

說明：如圖 6 所示：

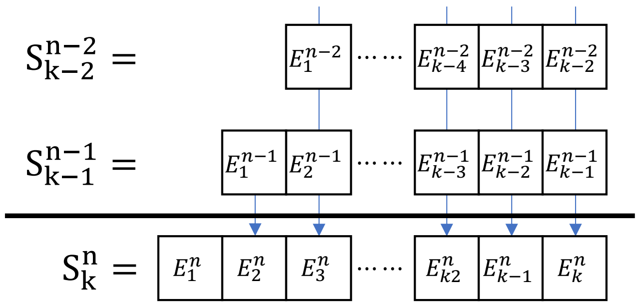

圖 6：引理 2 示意圖

以最右方為例，因為 E_{k-2}^{n-2} 、 E_{k-1}^{n-1} 和 E_k^n 同號（上下標的差皆為 0），且 E_{k-2}^{n-2} 、 E_{k-1}^{n-1} 和 E_k^n 的值為費氏數列的相鄰三項（F_{k-2} 、 F_{k-1} 和 F_k）。所以得到 $E_{k-2}^{n-2} + E_{k-1}^{n-1} = E_k^n$，其餘項同理。又 $E_1^{n-1} = E_2^n$ （兩者不是同為 1 就是同為 -1），由上圖的對照，可以知道 $S_k^n = S_{k-2}^{n-2} + S_{k-1}^{n-1} + E_1^n$ 成立。

有了引理 2，我們就可以利用數學歸納法，得到以下定理：

定理 2. 對於任意正整數 n ，其最遠距離的最小值 M_n 必滿足以下關係：

$$M_n = \begin{cases} \frac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \frac{F_n}{2} + 1 & ,n = 6k + 3 \quad (k \text{ 為非負整數}) \\ \frac{F_n + 1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

說明：首先，我們可以利用圖 7 來說明計算的原理

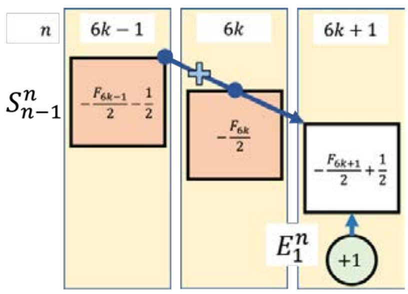

圖 7：定理 2 證明示意圖

上圖 7 中，每個方塊代表在 n 值不同時的 S_{n-1}^n 或 S_n^n 、圓圈代表 E_1^n，而箭頭起點與節點代表先前性質所求得的公式： $S_k^n = S_{k-2}^{n-2} + S_{k-1}^{n-1} + E_1^n$ 等號左式的部份，箭

頭終點的位置代表公式中等號右式的部份。方塊著色的部份為在這個 n 值的 M_n 。依此原則，我們可以將關係式以圖 8 表示。

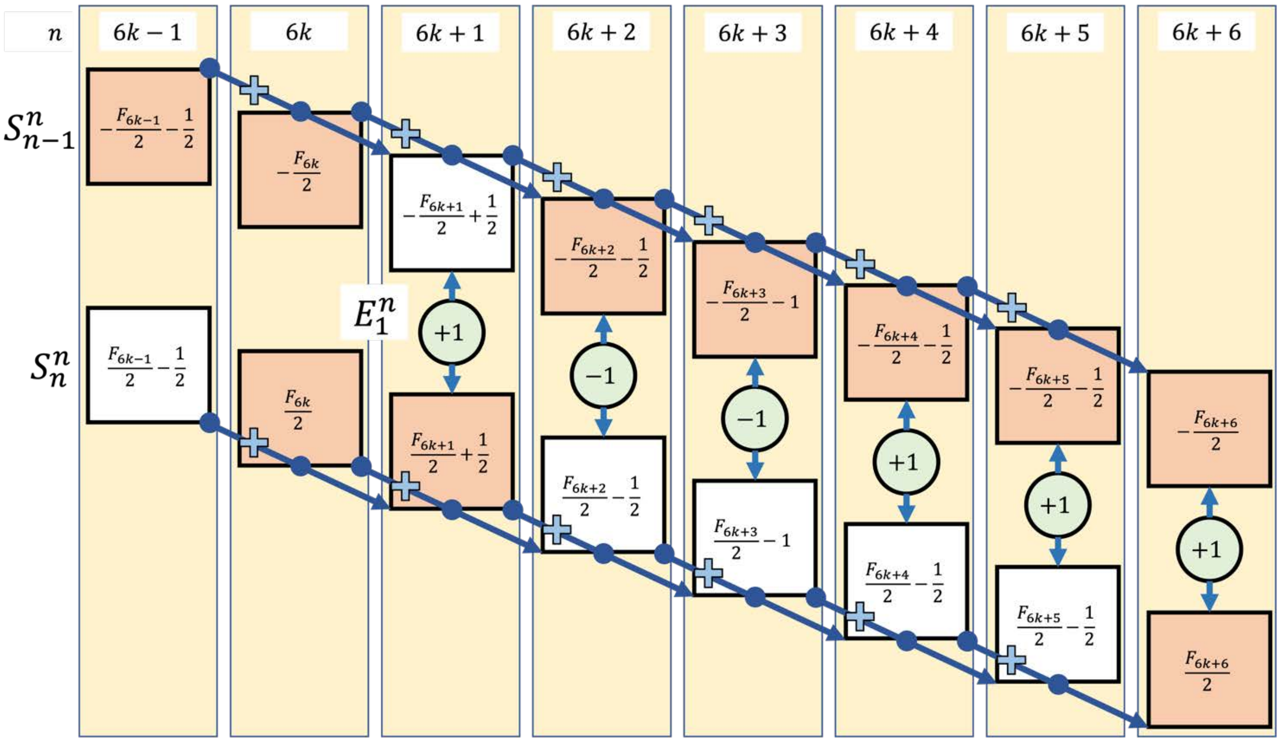

圖 8：定理 2 證明圖

詳細的推導流程如下：

1. 根據我們先前的計算，我們已經驗證 $n=1$ 到 12 的結果為真，且 M_n 發生在 S_{n-1}^{n} 或 S_{n}^{n} ，其中：

   在 $n=11$ 時 $S_{10}^{11}=-45=-\frac{F_{11}}{2}-\frac{1}{2}$、$S_{11}^{11}=44=\frac{F_{11}}{2}-\frac{1}{2}$，$M_{11}=|S_{10}^{11}|=\frac{F_{11}}{2}+\frac{1}{2}$

   在 $n=12$ 時 $S_{11}^{12}=-72=-\frac{F_{12}}{2}$、$S_{12}^{12}=72=\frac{F_{12}}{2}$，$M_{12}=|S_{12}^{12}|=\frac{F_{12}}{2}$

   又在 $n=2$ 到 12 中，考慮數列 $(S_1^n,S_2^n,\cdots,S_n^n)$ ： S_{n-1}^{n} 為負，為其中的最小值（負最多）；S_n^n 為正，為最大值。所以和的最大（最小）值只會發生在這兩個地方，以下討論時討論這兩處即可。

2. 當 $n=6k+1$ 時：$E_1^{6k+1}=1$，

$$S_{6k}^{6k+1}=S_{6k-2}^{6k-1}+S_{6k-1}^{6k}+E_1^{6k+1}=\left(-\frac{F_{6k-1}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{F_{6k}}{2}\right)+1$$

$$=-\frac{F_{6k-1}+F_{6k}}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$S_{6k+1}^{6k+1}=S_{6k-1}^{6k-1}+S_{6k}^{6k}+E_1^{6k+1}=\left(\frac{F_{6k-1}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{F_{6k}}{2}\right)+1=\frac{F_{6k-1}+F_{6k}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}$$

得 $M_{6k+1}=\left|S_{6k+1}^{6k+1}\right|=\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}$ 成立。

3. 當 $n=6k+2$ 時：$E_1^{6k+2}=-1$，

$$S_{6k+1}^{6k+2}=S_{6k-1}^{6k}+S_{6k}^{6k+1}+E_1^{6k+2}=\left(-\frac{F_{6k}}{2}\right)+\left(-\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=-\frac{F_{6k}+F_{6k+1}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$S_{6k+2}^{6k+2}=S_{6k}^{6k}+S_{6k+1}^{6k+1}+E_1^{6k+2}=\left(\frac{F_{6k}}{2}\right)+\left(\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)-1=\frac{F_{6k}+F_{6k+1}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}$$

得 $M_{6k+2}=\left|S_{6k+1}^{6k+2}\right|=\frac{F_{6k+2}}{2}+\frac{1}{2}$ 成立。

4. 當 $n=6k+3$ 時：$E_1^{6k+3}=-1$，

$$S_{6k+2}^{6k+3}=S_{6k}^{6k+1}+S_{6k+1}^{6k+2}+E_1^{6k+3}=\left(-\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=-\frac{F_{6k+1}+F_{6k+2}}{2}-1=-\frac{F_{6k+3}}{2}-1$$

$$S_{6k+3}^{6k+3}=S_{6k+1}^{6k+1}+S_{6k+2}^{6k+2}+E_1^{6k+3}=\left(\frac{F_{6k+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=\frac{F_{6k+1}+F_{6k+2}}{2}-1=\frac{F_{6k+3}}{2}-1$$

得 $M_{6k+3}=\left|S_{6k+2}^{6k+3}\right|=\frac{F_{6k+3}}{2}+1$ 成立。

5. 當 $n=6k+4$ 時：$E_1^{6k+4}=1$，

$$S_{6k+3}^{6k+4}=S_{6k+1}^{6k+2}+S_{6k+2}^{6k+3}+E_1^{6k+4}=\left(-\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{F_{6k+3}}{2}-1\right)+1$$

$$=-\frac{F_{6k+2}+F_{6k+3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$S_{6k+4}^{6k+4}=S_{6k+2}^{6k+2}+S_{6k+3}^{6k+3}+E_1^{6k+4}=\left(\frac{F_{6k+2}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{F_{6k+3}}{2}-1\right)+1$$

$$=\frac{F_{6k+2}+F_{6k+3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}$$

得 $M_{6k+4}=\left|S_{6k+3}^{6k+4}\right|=\frac{F_{6k+4}}{2}+\frac{1}{2}$ 成立。

6. 當 $n=6k+5$ 時：$E_1^{6k+5}=1$，

$$S_{6k+4}^{6k+5}=S_{6k+2}^{6k+3}+S_{6k+3}^{6k+4}+E_1^{6k+5}=\left(-\frac{F_{6k+3}}{2}-1\right)+\left(-\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$=-\frac{F_{6k+3}+F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{F_{6k+5}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$S_{6k+5}^{6k+5}=S_{6k+3}^{6k+3}+S_{6k+4}^{6k+4}+E_1^{6k+5}=\left(\frac{F_{6k+3}}{2}-1\right)+\left(\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$=\frac{F_{6k+3}+F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{F_{6k+5}}{2}-\frac{1}{2}$$

得 $M_{6k+5}=\left|S_{6k+4}^{6k+5}\right|=\frac{F_{6k+5}}{2}+\frac{1}{2}$ 成立。

7. 當 $n=6k+6$ 時：$E_1^{6k+6}=1$，

$$S_{6k+5}^{6k+6}=S_{6k+3}^{6k+4}+S_{6k+4}^{6k+5}+E_1^{6k+6}=\left(-\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{F_{6k+5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$=-\frac{F_{6k+4}+F_{6k+5}}{2}=-\frac{F_{6k+6}}{2}$$

$$S_{6k+6}^{6k+6}=S_{6k+4}^{6k+4}+S_{6k+5}^{6k+5}+E_1^{6k+6}=\left(\frac{F_{6k+4}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{F_{6k+5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{F_{6k+4}+F_{6k+5}}{2}$$

$$=\frac{F_{6k+6}}{2}$$

得 $M_{6k+6}=\left|S_{6k+6}^{6k+6}\right|=\frac{F_{6k+6}}{2}$ 成立。

由上述說明，我們可得在一個循環下的結果皆與我們所推測的相同。並以此類推，可知在所有情形下， M_n 的下限皆能發生，即定理 2 必成立。

三、找出所有移動方法與總數 W_n ，並推測其規律

先前在尋找最遠距離最小值時，我們除了利用樹狀圖列出所有可能的移動方式，並利用 Python 驗證並整理出所有可行的走法。接下來，我們想找尋移動方法與總數的規律。

因為費氏數列是由前兩項之和來計算出後面的項。當我們個別將不同的總步數 n 時的走法列出來以後，猜測不同步數的走法之間應該也有相互關係，所以我們將其對照，觀察是否存在關係。我們有以下結論：

結論 3.（不同步數的可行走法關係） 對照前後的走法，其發展的關係如下：

1. 後項的走法，通常是將前項的最前面添加一步。(如圖 9)
2. 因為前兩項都是走一單位，若添加的步伐方向與先前的相反，就可以再將前兩步互換，再得出新的走法。(如圖 10)
3. 大部份的走法都可以延伸出下一項，但只有當 $n=6k+3$ 時出現不能延伸的走法。

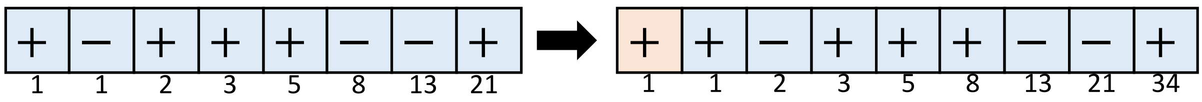

圖 9：走法延伸關係示意圖一

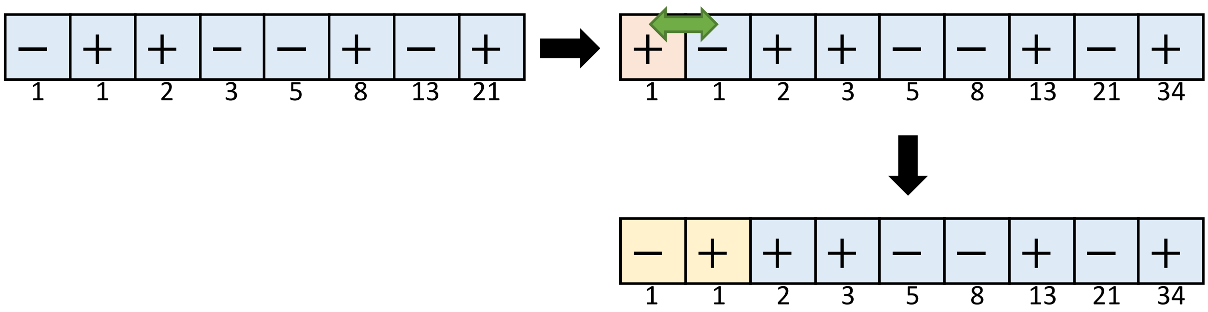

圖 10：走法延伸關係示意圖二

我們利用結論 3 的關係，畫出樹狀圖來觀察步數延伸的情形，部份截取如下圖 11：

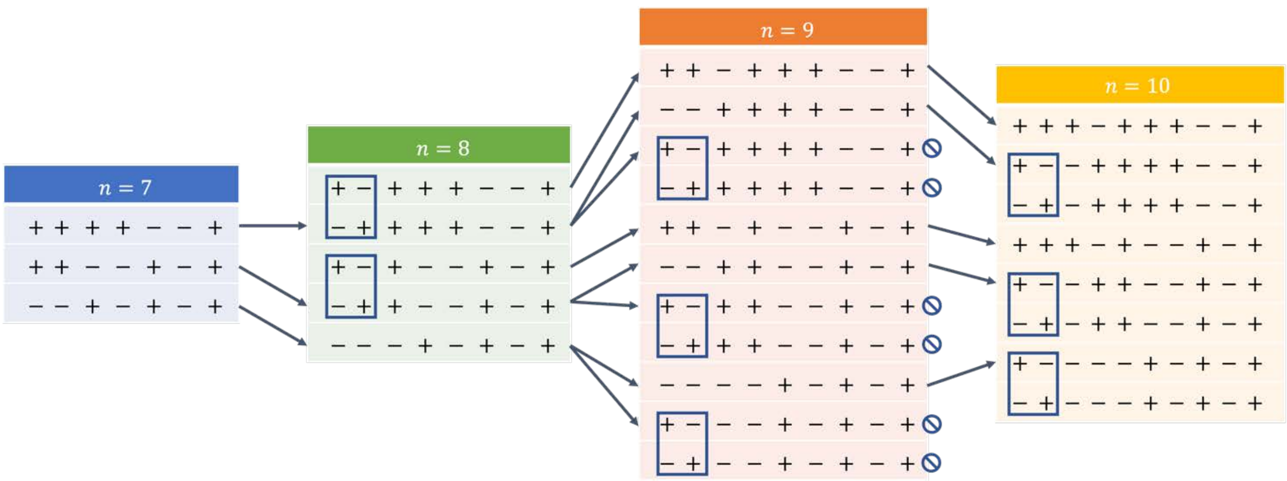

圖 11：滿足條件的移動方法延伸關係略圖

四、方法數 W_n 的探討

先前我們找出 $1 \le n \le 22$ 時的所有情形，並將步數 n 與方法數 W_n 的關係整理成表格如表 10。

表 10：總步數與方法數的關係

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
W_n	1	1	3	2	2	3	3	5	11	8	8
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
W_n	11	11	19	41	30	30	41	41	71	153	112

由表 10 的觀察，我們發現有結論 4 所述的性質。

結論 4. 根據 W_n 在 $n=1\sim22$ 中的變化，有以下規律：

1. 除了前 3 項以外，依著色區塊所示以分割成 6 個數一組， W_n 有著相同的規律。
2. 若 k 為正整數，表 11 列出 W_n 前後項的規律。圖 12 為此關係的略圖。
3. 一般而言， W_n 的數量是遞增的。但 W_{6k+3} 為特例，比前後項都來得多。
4. 將 W_n 所出現的數字由小到大排列得：$1,1,2,3,5,8,11,19,30,41,71,112,153,\cdots$ ，即為半費氏數列 f_m 的所有項。

表 11：方法數的關係式

$W_{6k-2}=W_{6k-4}+W_{6k-5}$	$W_{6k-1}=W_{6k-2}$	$W_{6k}=W_{6k-2}+W_{6k-5}$
$W_{6k+1}=W_{6k}$	$W_{6k+2}=W_{6k}+W_{6k-2}$	$W_{6k+3}=W_{6k+2}+2W_{6k}$

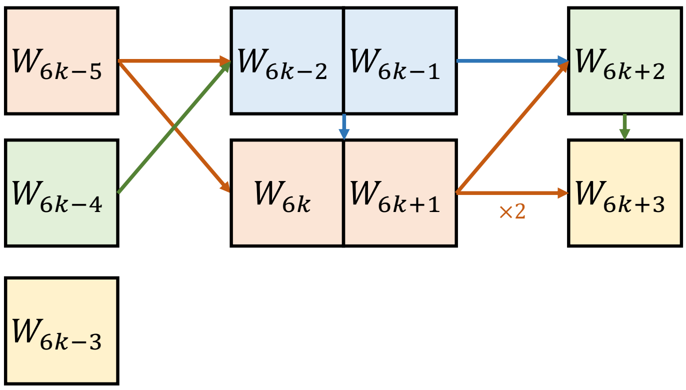

圖 12：方法數關係圖

根據結論 4 的第 4 點， W_n 可以使用半費氏數列 f_m 來表示。所以我們將 W_n 及 f_m 兩者的關係列表如表 12。

表 12：方法數與半費氏數的關係表

W_n	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
f_m	$f_1=f_2$	$f_1=f_2$	f_4	f_3	f_3	f_4	f_4	f_5	f_7
W_n	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}
f_m	f_6	f_6	f_7	f_7	f_8	f_{10}	f_9	f_9	f_{10}

由表 12，我們得到以下的定理。

定理 3. 符合最遠距離最小值的走法數 W_n 與半費氏數 f_m 滿足以下關係：

$$W_n=\begin{cases} f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & ,n\neq 6k+3 \\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} & ,n=6k+3 \end{cases}\quad（[\ \ ] 為高斯符號）$$

說明：根據表格的對應關係，我們發現有以下兩點規律：

1. 除了當 $n=6k+3$ 以外，其餘的項m值皆為n值的一半（無條件捨去）再加1。
2. 當 $n=6k+3$ 時，m值皆為n值的一半（無條件捨去）再加 3。

所以由以上兩點，我們可就以利用高斯符號整理出如定理 3 之關係式。

六、歸納行走方法的規律

在結論 3 中，我們知道行走的方法有前後關係。接著在定理 3 中我們發現方法數的規律性。接下來，我們想知道走法延伸有沒有更明確的模式或規律，來說明方法數的規律性是成立的。在經過比對之後，我們有以下結論。

結論 5. 走法延伸有規律性，有兩種模式並可以由圖 13 所示的兩種樹狀圖展示。

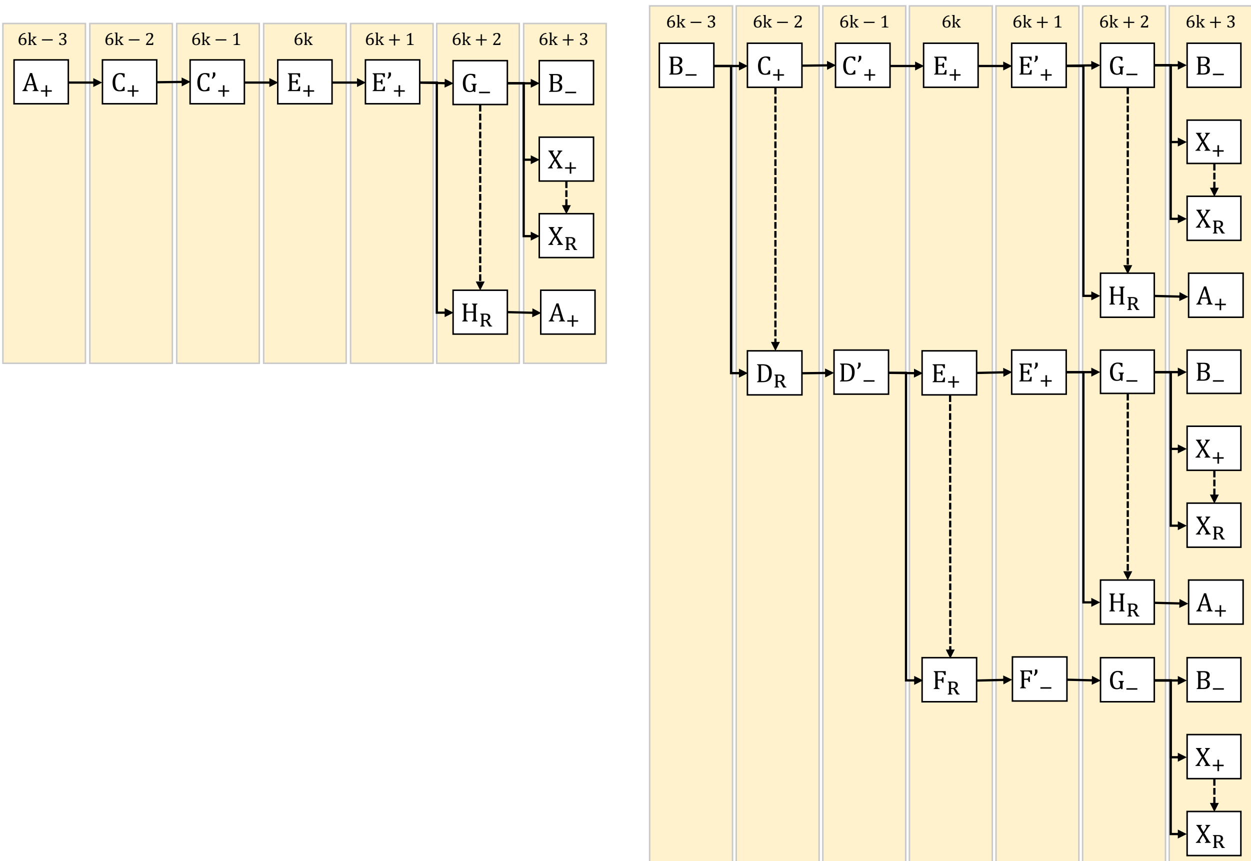

圖 13：兩種走法延伸模式的樹狀圖

圖 13 中代號解釋：

1. AB、CD、EF、GH 各組為相同步數，不同分類，兩者的差異為最前面那步（第一步）不同。
2. B'、C'、D'、E'、F' 為重覆前項的第一步而成。
3. 代號的右下角為「+」代表新的第一步為向右、右下角為「−」表第一步向左、右下角為「R」表示因虛箭頭起點那項的前兩步為不同方向，故將其對調而成為新的走法（如「+ −」變成「− +」)。
4. X 項為「無法繼續延伸的項」，也就是 $n = 6k + 3$ 時多出來的項。
5. 原問題的第一項是以「F'_+」起始，為圖中「F'_-」的位置，往後的延伸如兩圖所示。

圖 14 為樹狀圖中的部份分支舉例。

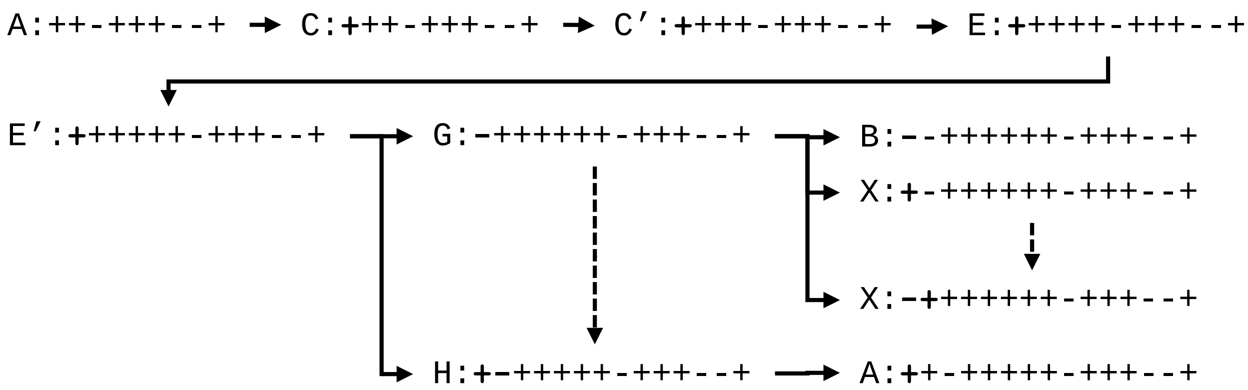

圖 14：走法延伸範例節錄

在確定延伸的關係以後，我們就分別將所有走法依圖 12 進行分類，如表 13。接著我們想歸納出不同類型的走法數有什麼相互的關係。我們先做出以下定義：

定義 3. 假設 A_n 代表總共走 n 步時，裡面為 A 類的數量，其餘以此類推。以表 13 為例，我們定義 $A_{15} = 8$ 、$C_{16} = 19$ 等。

我們由定義 3 將其樹狀圖的關係式列出，得到表 14 的關係式。接下來，我們應該可以從走法的關係式裡，驗證方法數中存在規律性，也就是結論 4 中表 11 提到的關係式成立的理由。

表 13：走法分類表節錄

n	W_n	分類		
11	8	C': 5	D': 3	
12	11	E: 8	F: 3	
13	11	E': 8	F': 3	
14	19	G: 11	H: 8	
15	41	A: 8	B: 11	X: 22
16	30	C: 19	D: 11	
17	30	C': 19	D': 11	
18	41	E: 30	F: 11	
19	41	E': 30	F': 11	
20	71	G: 41	H: 30	
21	153	A: 30	B: 41	X: 82

表 14：由延伸樹狀圖改寫關係式

	關係式	
1.	$C_{6k-2} = A_{6k-3} + B_{6k-3}$	$D_{6k-2} = B_{6k-3}$
2.	$C'_{6k-1} = C_{6k-2}$	$D'_{6k-1} = D_{6k-2}$
3.	$E_{6k} = C'_{6k-1} + D'_{6k-1}$	$F_{6k} = D'_{6k-1}$
4.	$E'_{6k+1} = E_{6k}$	$F'_{6k+1} = F_{6k}$
5.	$G_{6k+2} = E'_{6k+1} + F'_{6k+1}$	$H_{6k+2} = E'_{6k+1}$
6.	$A_{6k+3} = H_{6k+2}$	$B_{6k+3} = G_{6k+2}$
	$X_{6k+3} = 2G_{6k+2}$	

驗證結論 4 中表 11 所述的關係式方法如下：

1. $W_{6k-2} = C_{6k-2} + D_{6k-2} = A_{6k-3} + 2B_{6k-3}$

   $= (H_{6k-4} + G_{6k-4}) + G_{6k-4}$

   $= (H_{6k-4} + G_{6k-4}) + (E'_{6k-5} + F'_{6k-5})$

   $= W_{6k-4} + W_{6k-5}$

2. $W_{6k-1} = C'_{6k-1} + D'_{6k-1} = C_{6k-2} + D_{6k-2} = W_{6k-2}$

3. $W_{6k} = E_{6k} + F_{6k} = C_{6k-2} + 2D_{6k-2} = W_{6k-2} + B_{6k-3}$

   $= W_{6k-2} + G_{6k-4}$

   $= W_{6k-2} + W_{6k-5}$

4. $W_{6k+1} = E'_{6k+1} + F'_{6k+1} = E_{6k} + F_{6k} = W_{6k}$

5. $W_{6k+2} = G_{6k+2} + H_{6k+2} = 2E_{6k} + F_{6k}$

   $= E_{6k} + W_{6k} = C_{6k-2} + D_{6k-2} + W_{6k}$

   $= W_{6k} + W_{6k-2}$

6. $W_{6k+3} = A_{6k+3} + B_{6k+3} + 2X_{6k+3} = (G_{6k+2} + H_{6k+2}) + 2G_{6k+2}$

   $= W_{6k+2} + 2(E_{6k} + F_{6k})$

   $= W_{6k+2} + 2W_{6k}$

肆、討論

一、移動方法由費氏數列改變為其它起始值不同的遞迴數列，其最遠距離的最小值與方法數的探討。

除了費氏數列，我們想要了解同一個問題在起始值不同的遞迴數列中，是不是有類似的性質。所以在本次討論中，我們使用了三種不同的數列：

1. 起始值為 (2,1) 的盧卡斯數列
2. 起始值為 (1,3) 的類盧卡斯數列
3. 起始值為 (1,2) 的類費氏數列

以下分別針對不同的數列進行討論。

（一） 起始值為 (2,1) 的盧卡斯數列

我們使用樹狀圖計算前 22 項的結果並用 Python 驗證後，得到的結果如表 15（R_n 表示盧卡斯數的第 n 個數）

表 15：以盧卡斯數行走時最遠距離最小值與方法數關係表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
M_n	2	2	2	2	4	6	10	15	24	38	62
W_n	1	1	1	1	2	2	5	3	3	5	8
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
R_n	199	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349	15127	24476
M_n	100	162	261	422	682	1104	1786	2890	4675	7564	12238
W_n	8	19	11	11	19	30	30	71	41	41	71

我們分成以下幾點進行討論：

1. 最遠距離最小值（M_n）：除了 $n = 2$ 以外，我們找到 M_n 與 R_n 有以下關係：

$$M_n = \begin{cases} \frac{R_n}{2}+1 & ,n = 6k+1 \\ \frac{R_n}{2} & ,n = 6k+4 \\ \frac{R_n+1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

與使用費氏數列所得到的結果類似。而 $n = 2$ 不合是因為由定義得 $R_2 < R_1$ ，所以最遠距離會受到 R_1 的影響而產生不同的結果。且在使用盧卡斯數列時 M_n 的變

化和費氏數列相同，皆與該數除以 4 的餘數有關。在盧卡斯數列中，各項除以 4 的餘數為 (2,1,3,0,3,3) 六數一循環。與費氏數列比較，在 R_n 與 F_m 餘數相同時，M_n 會有相同的結論。例如在除 6 餘 1 項的盧卡斯數除以 4 皆餘 2。得到的 M_n 和使用費氏數列相同為該數除以 2 再加 1 。

2. 符合條件的走法數（W_n）：將走法數 W_n 由小到大排列，得到 $1,2,3,5,8,11,19,\cdots$ 。這個數列亦為先前所提到的半費氏數列，而其數列排列的模式也和費氏數時類似：在該數除以 4 餘 1 （盧卡斯數的 $6k+1$ 項與費氏數的 $6k+3$ 項）時，方法數比前後項都來得多，其它項都是呈現遞增的情形。將此處的方法數與半費氏數進行對照會得到表 16 的結果。

表 16：以盧卡斯數列行走時，方法數與半費氏數的關係

W_n	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
f_m	$f_1=f_2$	$f_1=f_2$	$f_1=f_2$	$f_1=f_2$	f_3	f_3	f_5	f_4	f_4
W_n	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}
f_m	f_5	f_6	f_6	f_8	f_7	f_7	f_8	f_9	f_9

根據表 16 的結果，我們可以得到 n 與 W_n 的關係式如表 17。

表 17：以盧卡斯數行走時，方法數與半費氏數關係一般式

n 除以 6 的餘數	1	3	5	0,2,4
W_n	$f_{\frac{n+3}{2}}$	$f_{\frac{n-1}{2}}$	$f_{\frac{n+1}{2}}$	$f_{\frac{n}{2}}$

3. 關於走法上的規律：我們將符合條件的步數列出來以後發現，以盧卡斯數列行走時，延伸的關係不僅是和前項有關。依照步數的不同，其參照的前項也不同。不過仍為六個一循環且也多數是也是在最前面添加步數，總步數除以 6 為相同餘數的延伸方法是相同的。列舉如下（設 k 為非負整數）：

(1) 當總步數 $n=6k+1$ 時，其走法為取總步數為 $n-2$ 時的走法，並在最前面添加 $(+,-)$ 或 $(+,+)$ 而成。而有些走法延伸後會在最前面產生 $(+,+,-)$ 的形式，此時可以再改寫成 $(-,-,+)$ 又會產生新的一種走法。如圖 15，以 $n=7$ 為例，其是由 $n=5$ 的走法延伸而成。

(2) 當總步數 $n = 6k + 2$ 時，其走法為取總步數為 $n' = 6k$ 時的走法，並在最前面添加 $(+, -)$ 而成。而有些走法延伸後會在最前面產生 $(+, -, +, -)$ 的形式，此時可以再改寫成 $(-, +, -, +)$ 又會產生新的一種走法。如圖 16，以 $n = 8$ 為例，其是由 $n = 6$ 的走法延伸而成。

(3) 當總步數 $n = 6k + 3$ 時，其走法為取總步數為 $n' = 6k$ 時的走法，並在最前面添加 $(-, +, +)$ 而成。而有些走法延伸後會在與原走法組成 $(+, +, -)$ 的形式，此時可以再改寫成 $(-, -, +)$ 又會產生新的一種走法。如圖 16，以 $n = 9$ 為例，其是由 $n = 6$ 的走法延伸而成。

(4) 當總步數 $n = 6k + 4$ 時，其走法為取總步數為 $n' = 6k$ 時的走法，並在最前面添加 $(+, +, +, -)$ 或 $(+, -, -, +)$ 而成。而有些走法延伸後會在與原走法組成 $(+, +, -)$ 的形式，此時可以再改寫成 $(-, -, +)$ 又會產生新的一種走法。如圖 16，以 $n = 10$ 為例，其是由 $n = 6$ 的走法延伸而成。

(5) 當總步數 $n = 6k + 5$ 時，其走法為取總步數為 $n' = n - 1$ 時的走法，並在最前面添加 $(+)$ 而成。而有些走法延伸後會在與原走法組成 $(-, -, +)$ 的形式，此時可以再改寫成 $(+, +, -)$ 又會產生新的一種走法。如圖 16，以 $n = 11$ 為例，其是由 $n = 10$ 的走法延伸而成。

(6) 當總步數 $n = 6k$ 時，其走法為取總步數為 $n' = n - 1$ 時的走法，並在最前面添加 $(+)$ 而成。如圖 16，以 $n = 12$ 為例，其是由 $n = 11$ 的走法延伸而成。

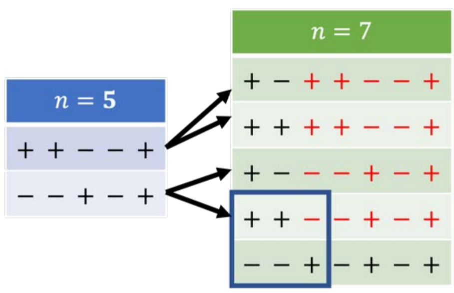

圖 15：以盧卡斯數行走時，$n = 5$ 與 $n = 7$ 的延伸關係圖

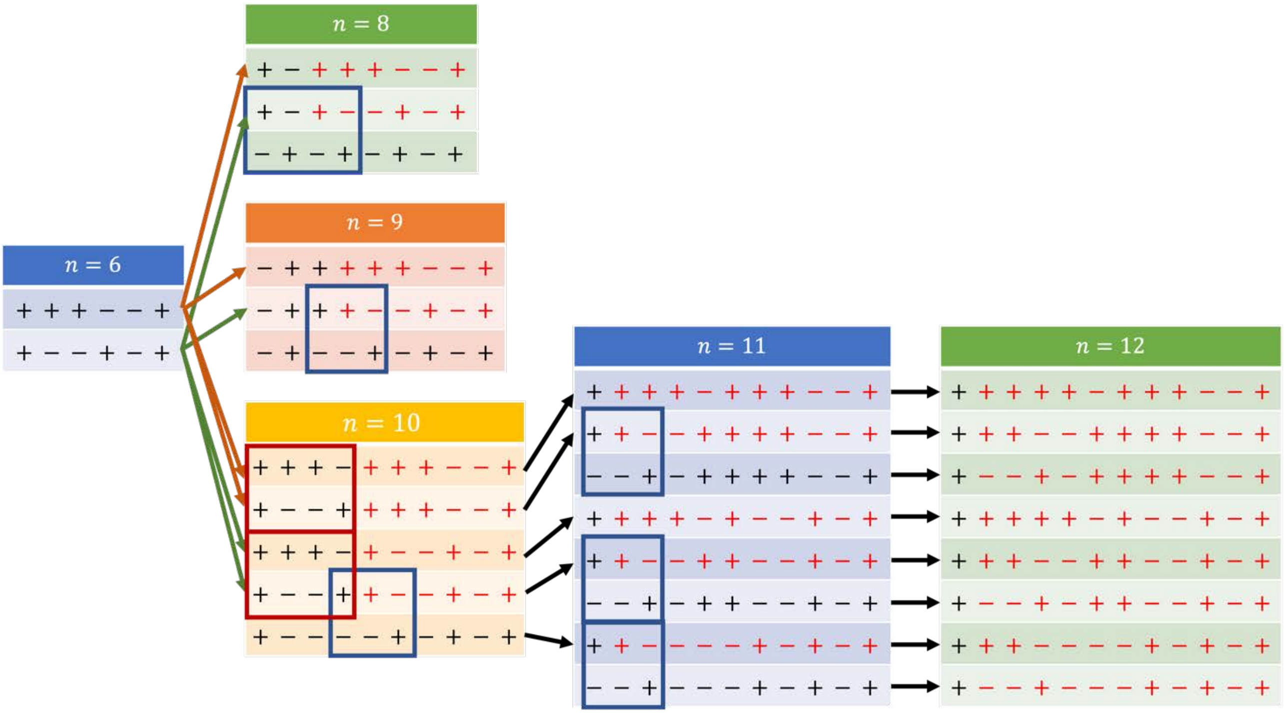

圖 16：以盧卡斯數行走時，$n=6\sim 12$ 的延伸關係圖

（二） 起始值為 (1,3) 的類盧卡斯數列

有鑑於盧卡斯數的首兩項非遞增，且前四項有多的加法組合。所以我們再嘗試把盧卡斯數列的第一項移除，再觀察規律性。此時可視為起始值為 (1,3) 的類費氏數列（暫稱類盧卡斯數列）。經過計算後，得到的結果如表 18。（我們以 R'_n 表示類盧卡斯數列的第 n 項）

表 18：以類盧卡斯數行走時最遠距離最小值與方法數關係表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R'_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
M_n	1	2	2	**5**	6	10	15	24	38	**63**	100
W_n	1	1	1	1	1	2	3	3	3	3	3
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
R'_n	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349	15127	24476	39603
M_n	162	261	422	682	**1105**	1786	2890	4675	7564	12238	**19803**
W_n	8	11	11	11	11	11	30	41	41	41	41

同樣的，我們可以看到在 M_n 及 W_n 中有特定的規律，分別討論如下：

1. 最遠距離最小值（M_n）：我們找到的關係式如下

$$M_n=\begin{cases}\frac{R'_n}{2}+1 & ,n=6k\\ \frac{R'_n}{2} & ,n=6k+3\\ \frac{R'_n+3}{2} & ,n=6k+4\\ \frac{R'_n+1}{2} & ,\text{其它}\end{cases}$$

和前面的討論相同 R'_n 除以 4 的餘數為 (1,3,0,3,3,2) 六數一循環，當 n 除以 6 餘 1 時，R'_n 除以 4 餘 2 ，此時 $M_n = \frac{R'_n}{2} + 1$，其它與 F_m 除以 4 同餘的項皆有相同的結論。唯當 n 除以 6 餘 4 時， $M_n = \frac{R'_n+3}{2}$ ，與先前的情形皆不同。

2. 符合條件的走法數（W_n）：同盧卡斯數列與費氏數列，W_n 為半費氏數列中的特定項目，且為六個一組的規律，同樣將其對照表列出得到表 19。

表 19：以類盧卡斯數列行走時，方法數與半費氏數的關係

W_n	$W_1 \sim W_5$	W_6	$W_7 \sim W_{11}$	W_{12}	$W_{13} \sim W_{17}$	W_{18}	$W_{19} \sim W_{22}$
f_m	f_1	f_3	f_4	f_6	f_7	f_9	f_{10}

得到 W_n 與 f_m 的關係式如下（[ ] 為高斯符號，k 為正整數）：

$$W_n = \begin{cases} f_{3[\frac{n}{6}]+1} & ,n \neq 6k \\ f_{\frac{n}{2}} & ,n = 6k \end{cases}$$

3. 關於走法上的規律：和以盧卡斯數列的行走模式類似。其走法的延伸也是六個一循環。詳情如下（設 k 為非負整數）：

(1) 當總步數 $n = 6k + 1$ 時，其為總步數 $n' = n - 1$ 步的最前面再添加一步 $(+)$ 而成，若添加的那步可和原有的走法組成 $(+,+,-)$，還可再改成 $(-,-,+)$ 而成為新的走法。如圖 18，以 $n = 13$ 為例，其為 $n' = 12$ 延伸而成。

(2) 當總步數 $n = 6k + 2$ 到 $6k + 5$ 時，都是在總步數 $n' = n - 1$ 的最前面添加一步而成，若 n 為奇數，則添加的那步為 $(+)$，反之為 $(-)$ 。如圖 17，以 $n = 11$ 為例，是 $n' = 10$ 的最前面添加一步 $(+)$ 而成。

(3) 當總步數 $n = 6k$ 時，其為總步數 $n' = n - 5$ 步的最前面再添加 $(+,+,+,-,-)$ 或 $(+,-,-,+,-)$ 而成，若添加的部份可和原有的走法組成 $(-,-,+)$，還可再改成 $(+,+,-)$ 而成為新的走法。如圖 18，以 $n = 12$ 為例，其是由 $n = 7$ 延伸而成。

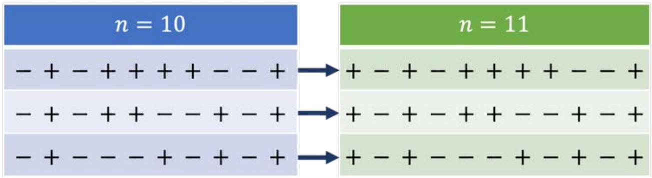

圖 17：以類盧卡斯數列行走時，$n = 10$ 與 $n = 11$ 的延伸關係圖

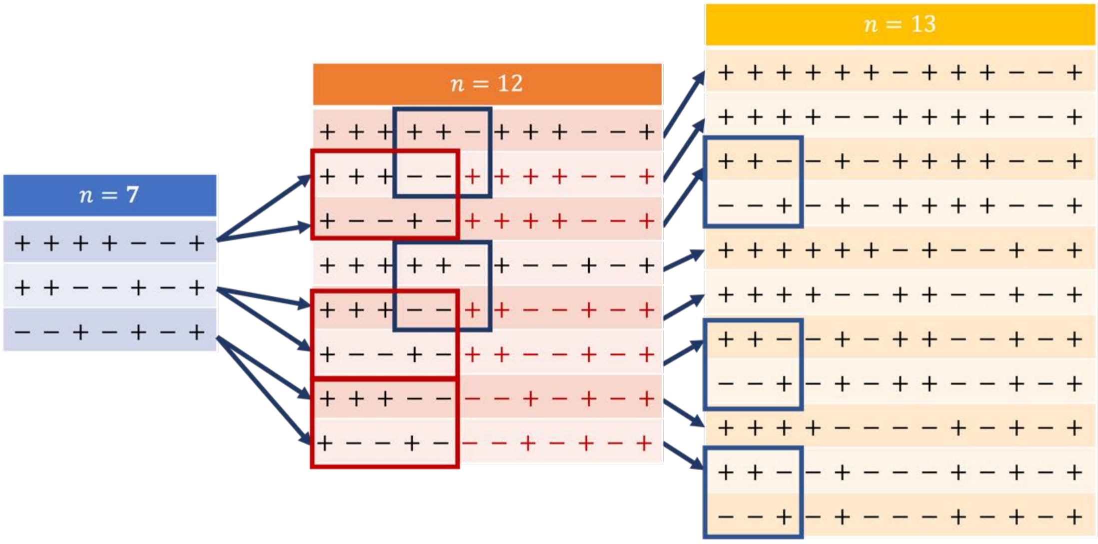

圖 18：以類盧卡斯數列行走時，$n = 12$ 與 $n = 13$ 的延伸關係圖

（三） 起始值為 (1,2) 的類費氏數列

在比較盧卡斯數列與起始值為 (1,3) 的類盧卡斯數列後，我們想進一步了解當費氏數列起始項只有一個 1 時會有什麼樣的變化，而此數列即為以 (1,2) 為起始值的類費氏數列。經過計算後，得到如表 20 的結果（我們以 F'_n 表示此類費氏數的第 n 項）

表 20：以類費氏數列行走時最遠距離最小值與方法數關係表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F'_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
M_n	1	1	2	3	5	7	11	17	28	45	73
W_n	1	1	1	1	3	2	3	3	3	3	11
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
F'_n	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657
M_n	117	189	305	494	799	1293	2091	3383	5473	8856	14329
W_n	8	11	11	11	11	41	30	41	41	41	41

由上表 20 中，也會有與前項類似的規律，討論如下：

1. 最遠距離最小值（M_n）：在數列 F'_n 中，除以 4 的餘數為 (1,2,3,1,0,1) 六數一循環。經觀察，我們推論其關係式如下

$$M_n = \begin{cases} \frac{F'_n}{2} & ,n = 6k+2 \\ \frac{F'_n}{2}+1 & ,n = 6k+5 \\ \frac{F'_n+1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

但此時出現了與先前不同的情形：當 F'_n 除以 4 餘 0 時（此時 $n = 6k+2$），$M_n = \frac{F'_n}{2} + 1$、而當 F'_n 除以 4 餘 3 時，$M_n = \frac{F'_n}{2}$ 。此結論恰與先前討論的所有數列相反，可能是因為少了一個 1 導致數列和的奇偶性質改變。

2. 符合條件的走法數（W_n）：同前所列的相關數列，W_n 為半費氏數列中的特定項目，且為六個一組的規律，將其對照表列出得到表 21。

表 21：以類費氏數列行走時，方法數與半費氏數的關係

W_n	W_1~W_4	W_5	W_6	W_7~W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}~W_{16}	W_{17}	W_{18}	W_{19}~W_{22}
f_m	f_1	f_4	f_3	f_4	f_7	f_6	f_7	f_{10}	f_9	f_{10}

我們可以得到 W_n 與 f_m 的關係式如下（[ ] 為高斯符號，k 為正整數）：

$$W_n = \begin{cases} f_{\frac{n}{2}} & ,n = 6k \\ f_{3[\frac{n}{6}]+4} & ,n = 6k+5 \\ f_{3[\frac{n}{6}]+1} & ,\text{其它} \end{cases}$$

3. 關於走法上的規律：類費氏數一樣為六項一循環。詳情如下（設 k 為非負整數）
   (1) 當總步數 $n = 6k+1$ 時，其為總步數 $n' = n-1$ 步的最前面再添加一步 $(+)$ 而成，若添加的那步可和原有的走法組成 $(+,+,-)$，還可再改成 $(-,-,+)$ 而成為新的走法。如圖 20，以 $n = 13$ 為例，其為 $n' = 12$ 延伸而成。
   (2) 當總步數 $n = 6k+2$ 到 $6k+4$ 時，都是在總步數 $n' = n-1$ 的最前面添加一步而成，若 n 為奇數，則添加的那步為 $(+)$，反之為 $(-)$ 。如圖 19，以 $n = 10$ 為例，是 $n' = 9$ 的最前面添加一步 $(-)$ 而成。
   (3) 當總步數 $n = 6k+5$ 時，其為總步數 $n' = n-4$ 步的最前面再添加 $(+,+,-,-)$ 、 $(-,-,+,-)$ 或 $(+,-,+,-)$ 而成，若添加的部份可和原有的走法組成 $(-,-,+)$，還可再改成 $(+,+,-)$ 而成為新的走法。如圖 20，以 $n = 11$ 為例，其是由 $n' = 7$ 延伸而成。

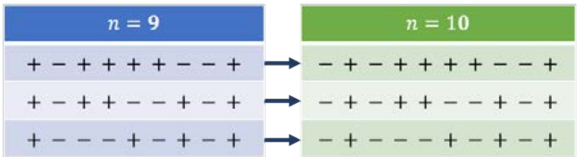

圖 19：以類費氏數列行走時，$n = 9$ 與 $n = 10$ 的延伸關係圖

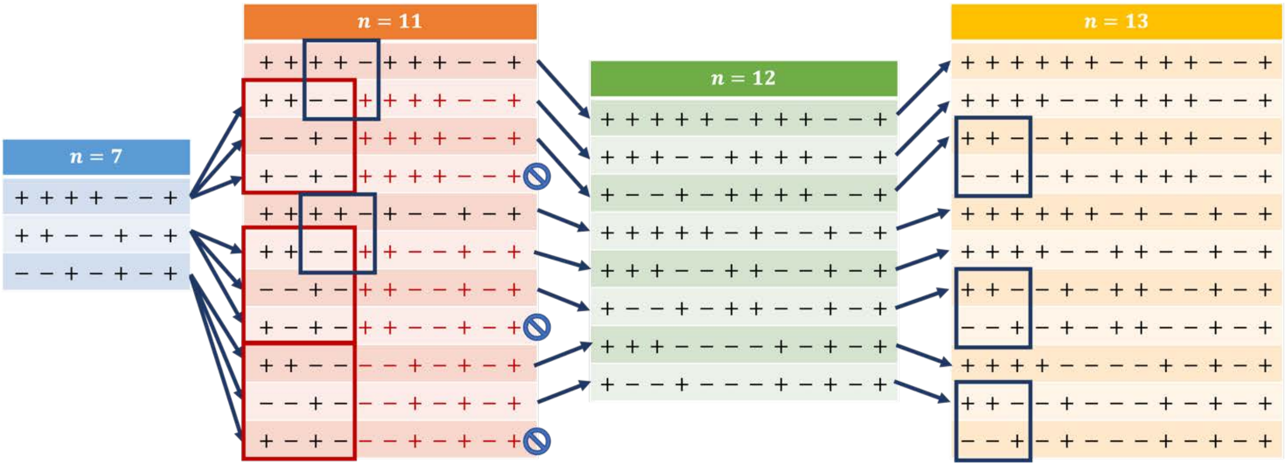

圖 20：以類費氏數列行走時，$n = 11 \sim 13$ 的延伸關係圖

伍、結論

一、以費氏數走n步時，最遠距離的最小值 M_n 和費氏數列的一半有關。且

$$M_n = \begin{cases} \frac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \frac{F_n}{2} + 1 & ,n = 6k + 3 \quad （k \text{ 為非負整數}） \\ \frac{F_n + 1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

二、以費氏數走n步時，滿足最遠距離的最小值時，走法數W_n與半費氏數列f_m有關，且

$$W_n = \begin{cases} f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & ,n \neq 6k + 3 \\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} & ,n = 6k + 3 \end{cases}$$

三、由後至前以（$+,-,-,+,+,+$）循環方式行走，其離家最遠距離必為最小值。

四、最遠距離最小值的可行走法前後項有規律性，可由前項的走法最前面再加一步。或是將前兩步對調而成。並可分類成兩種形式由樹狀圖展示。

五、其它類似費氏數列的性質與差異下表 22（k 為非負整數）

【評語】080405

1. 該作品探討在數線上以費氏遞迴數列作正向或負向移動ｎ步後，離原點距離最遠的最小值與方法數。作者先找出前幾項的所有可行走法與最小值，觀察及猜測可能的關係式，再利用數學歸納法完成證明，探討過程堪稱完整。

2. 作品前半段討論費氏數列行走方式堪稱完整，可讀性高；美中不足之處是在推廣至其他數列走法時，沒有做更詳細的陳述。

3. 能將複雜的問題以遞迴方法處理，顯見老師指導之用心。

作品簡報

國小組 數學科

費氏漫步

一、簡介

「森棚教官的數學題 – 散步的費波納契」

在數線上以費氏數列作正向或負向的移動，走 n 步的期間內距離最遠時的最小值 M_n 為何？又滿足條件的方法數 W_n是多少？

二、文獻探討

表1：文獻資料與本作品的異同

	費先生散步遇到威先生	本作品
一般化問題求數據	列出前10項的結果，並推到前16項	計算前22項的所有可行走法，**並用Python驗證數據正確性**。
最遠距離最小值推論	找到最遠距離最小值的關係式。	找到最遠距離最小值的關係式與規律，**並證明其成立**。
方法數推論	使用費氏表示法的方法數求得方法數。	**找到方法數的規律性與半費氏數的關係**。依規律性畫出樹狀圖**驗證方法數的規律**。
延伸討論	比較不同的三種費氏表示法關係，並與威氏遊戲做連結	探討在行走方法為盧卡斯數與其它起始值不同的類費氏數，最遠距離的最小值與方法數的關係。

三、研究架構

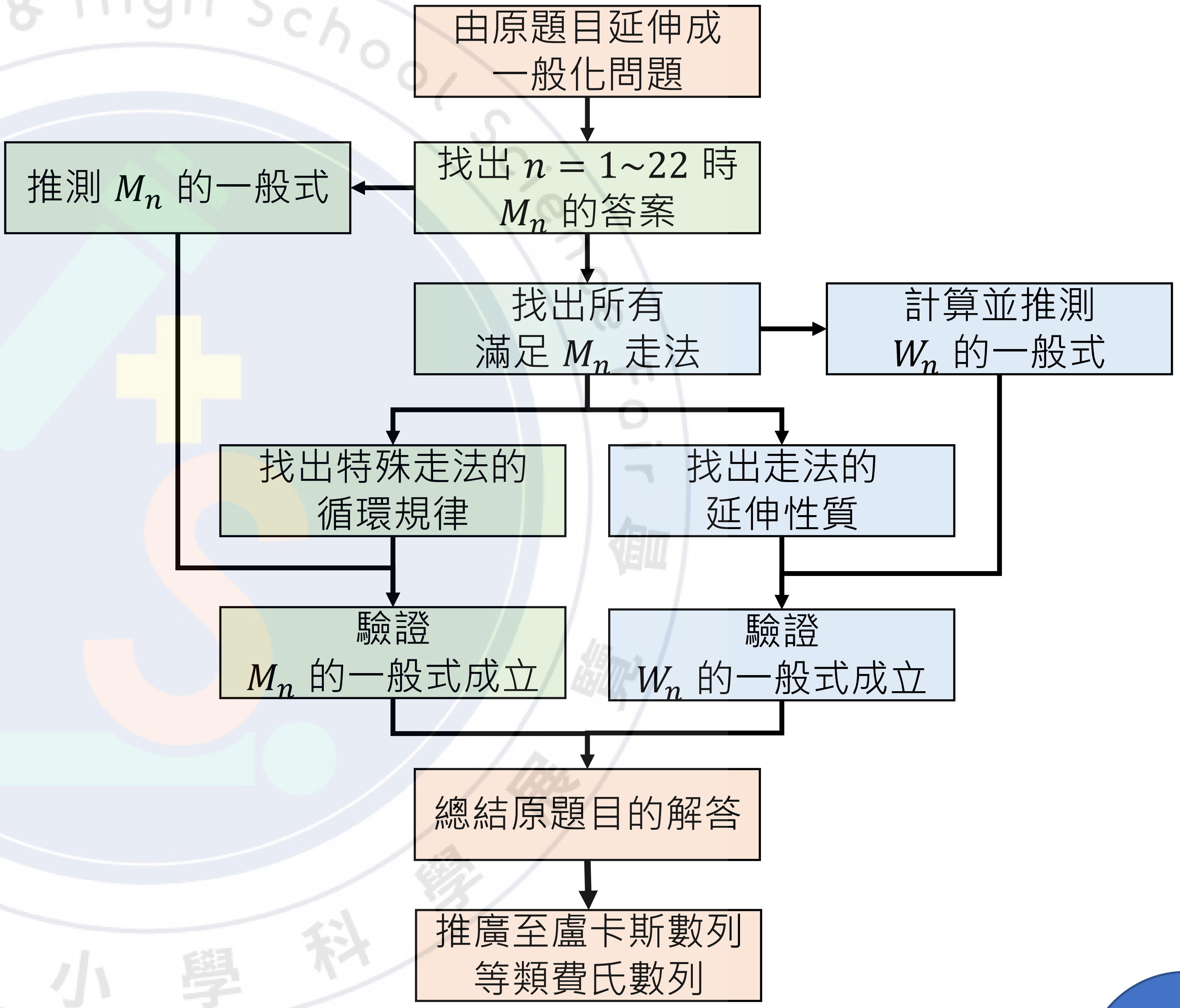

圖1：研究大綱樹狀圖

四、研究過程與方法1：找出最遠距離最小值 M_n

表2：利用窮舉法求得的結果

n	走法						走完該步後的落腳坐標						最遠距離
	1	1	2	3	5	8	1	1	2	3	5	8	
1	+						1						1
2	−	+					−1	0					1
3	−	+	+				−1	0	2				2
	+	−	+				1	0	2				2
	−	−	+				−1	−2	0				2
4	−	+	−	+			−1	0	−2	1			2
	+	−	−	+			1	0	−2	1			2
5	+	+	−	−	+		1	2	0	−3	2		3
	−	−	+	−	+		−1	−2	0	−3	2		3
6	+	+	+	−	−	+	1	2	4	1	−4	4	4
	+	−	−	+	−	+	1	0	−2	1	−4	4	4
	−	+	−	+	−	+	−1	0	−2	1	−4	4	4

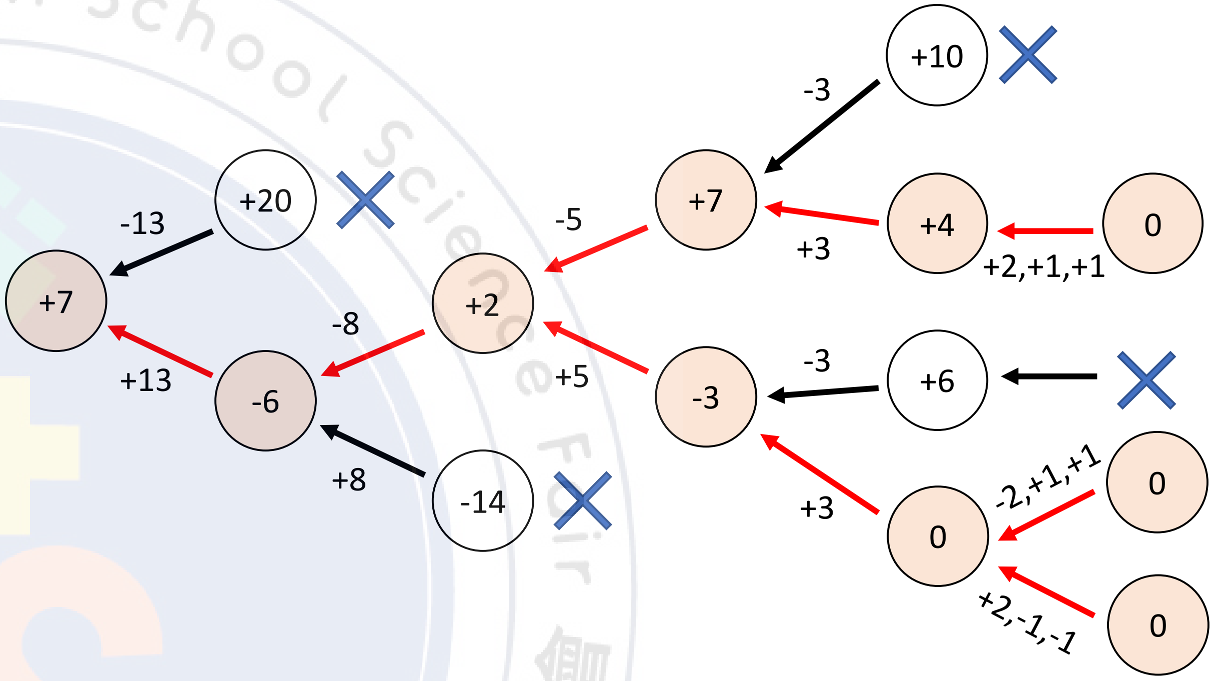

圖2：$n=7$ 時的倒推樹狀圖

表3：以費氏步行走時，F_n 與 M_n 的關係

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
M_n	1	1	2	2	3	4	7	11	18	28	45
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
F_n	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711
M_n	72	117	189	306	494	799	1292	2091	3383	5474	8856

結論1

當 $1 \le n \le 22$ 時，最遠距離的最小值 M_n 與費氏數列 F_n 的關係式為

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \dfrac{F_n}{2} + 1 & ,n = 6k+3 \quad (\,k \text{ 為非負整數}\,) \\ \dfrac{F_{n+1}}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

定理1

最遠距離的最小值 M_n 與費氏數列 F_n 的關係式：$M_n \geq \begin{cases} \frac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \frac{F_n}{2}+1 & ,n = 6k+3 \\ \frac{F_n+1}{2} & ,其它 \end{cases}$ （ k 為非負整數 ）

n為奇數或6的倍數

$\frac{F_n}{2}$ 為偶數
或
F_n 為奇數

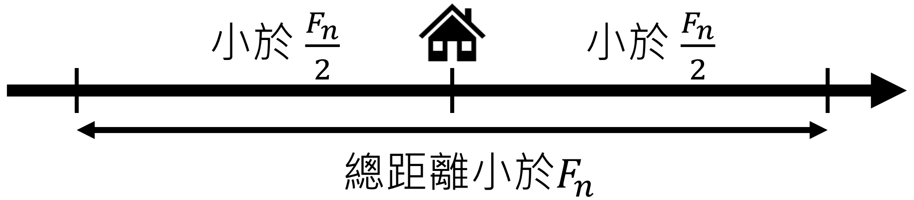

圖3：最後一步長與最遠距離的關係

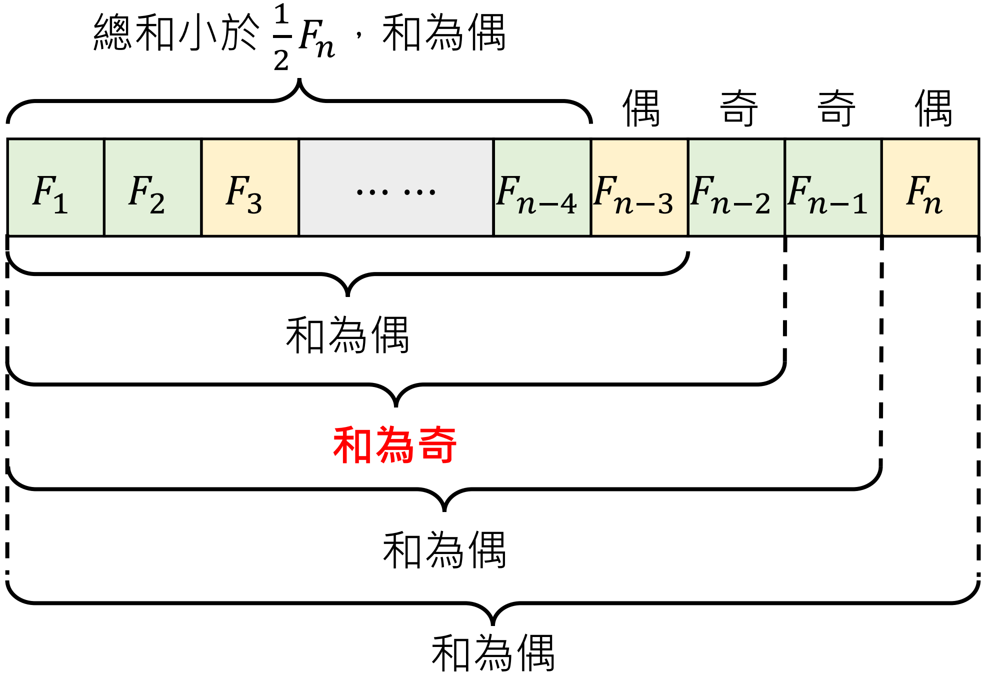

圖4：費氏數列和的奇偶性質

n除以6餘3

$\frac{F_n}{2}$ 為奇數

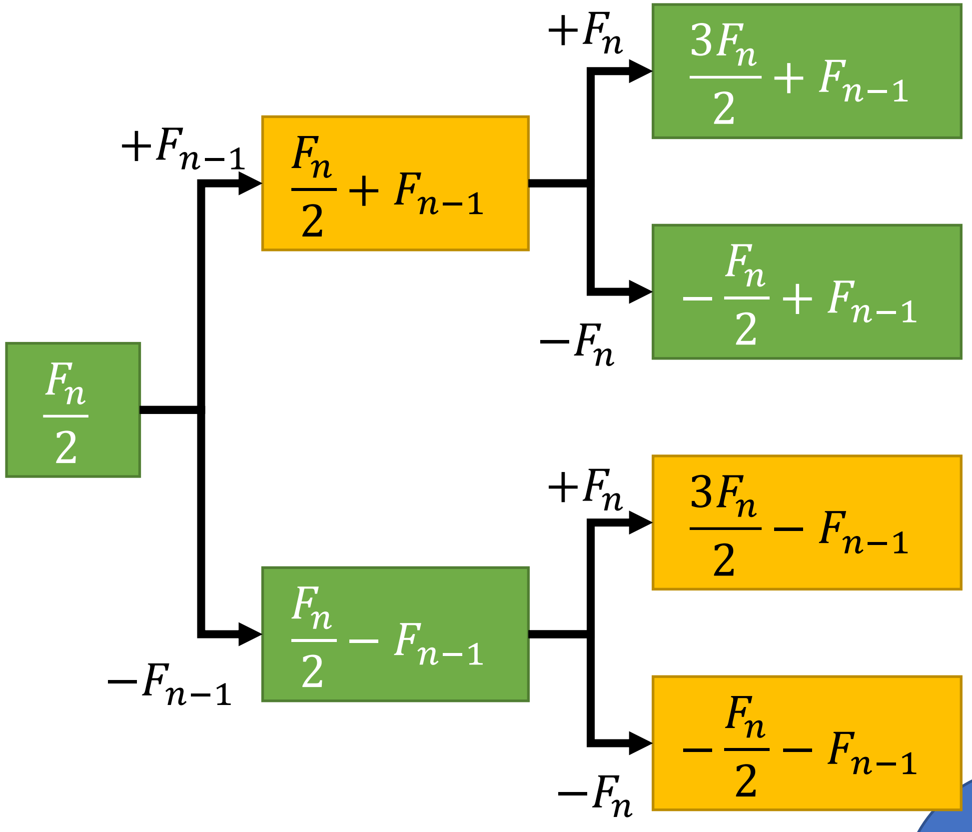

圖5：最後兩步的落腳座標比較

定理2 最遠距離的最小值 M_n 與費氏數列 F_n 的關係式：$M_n = \begin{cases} \frac{F_n}{2} & ,n = 6k \\ \frac{F_n}{2}+1 & ,n = 6k+3 \\ \frac{F_n+1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$ （ k 為非負整數 ）

規律 由後往前 $(+,-,-,+,+,+)$ 最遠距必最小

定義

表4：E_k^n 與 F_n 的關係

$n-k$ 除以 6 的餘數	0	1	2	3	4	5
E_k^n	F_k	$-F_k$	$-F_k$	F_k	F_k	F_k

$$S_k^n = E_1^n + E_2^n + \cdots + E_k^n$$

引理 $S_k^n = S_{k-2}^{n-2} + S_{k-1}^{n-1} + E_1^n$

證明

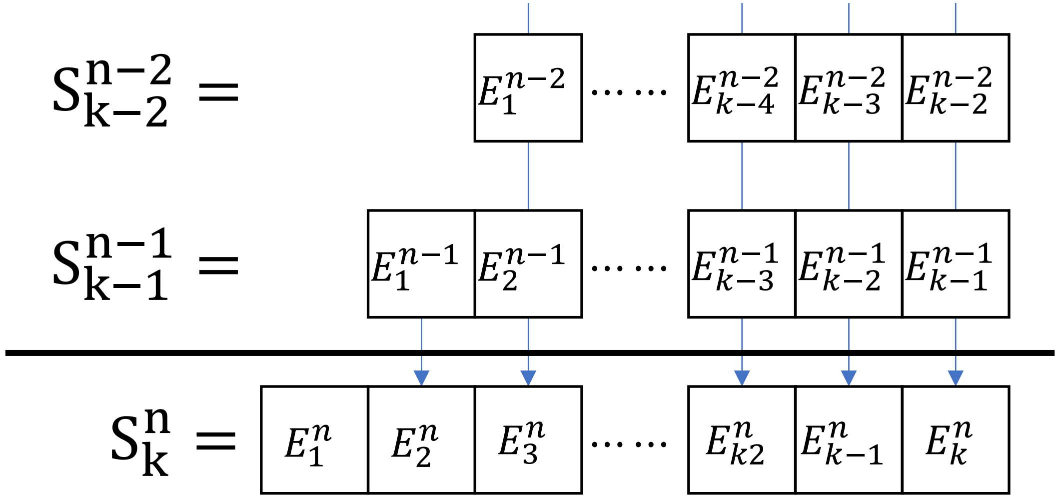

圖6：引理證明圖例

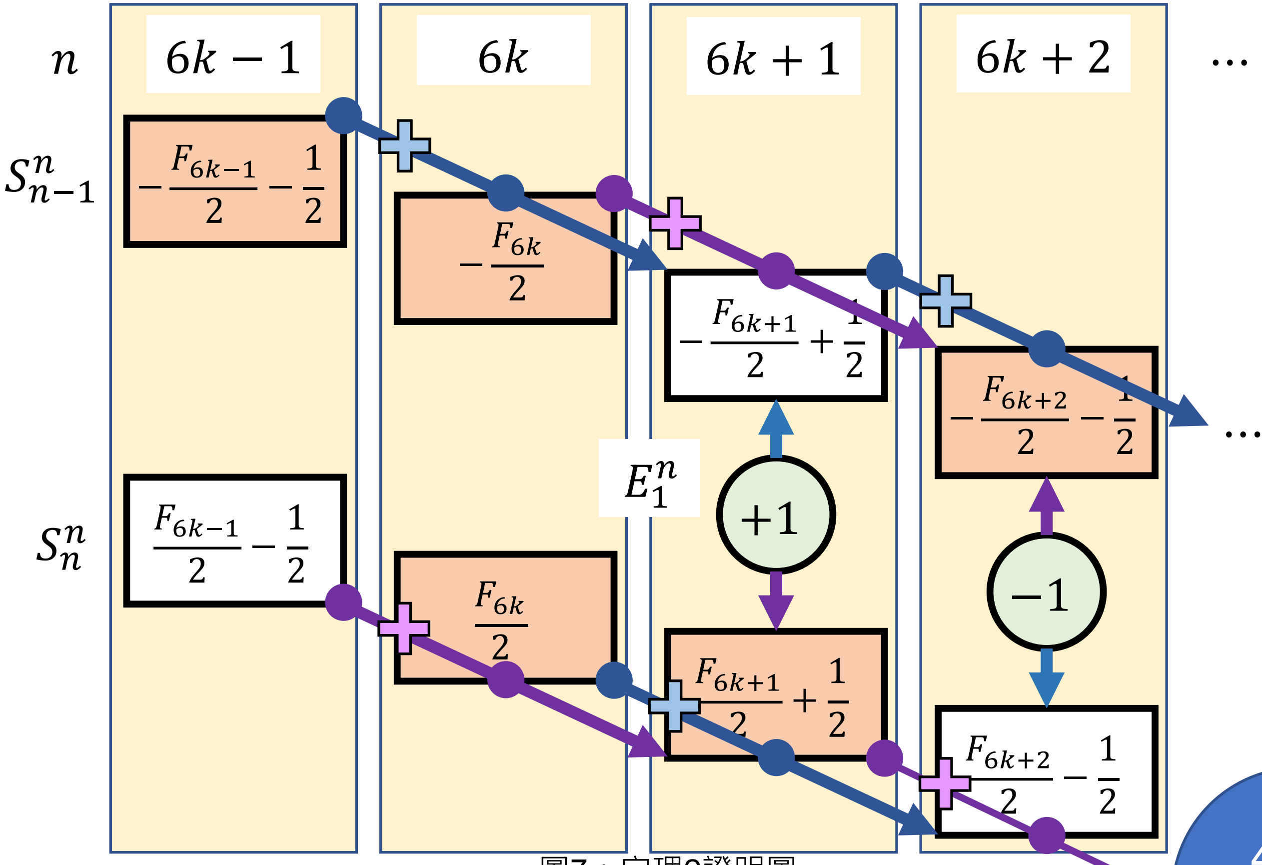

圖7：定理2證明圖

五、研究過程與方法2：找出方法數 W_n

規律

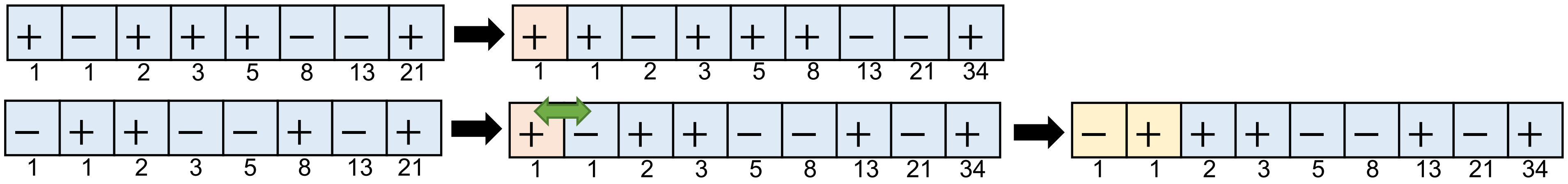

圖8：走法延伸示意圖

延伸

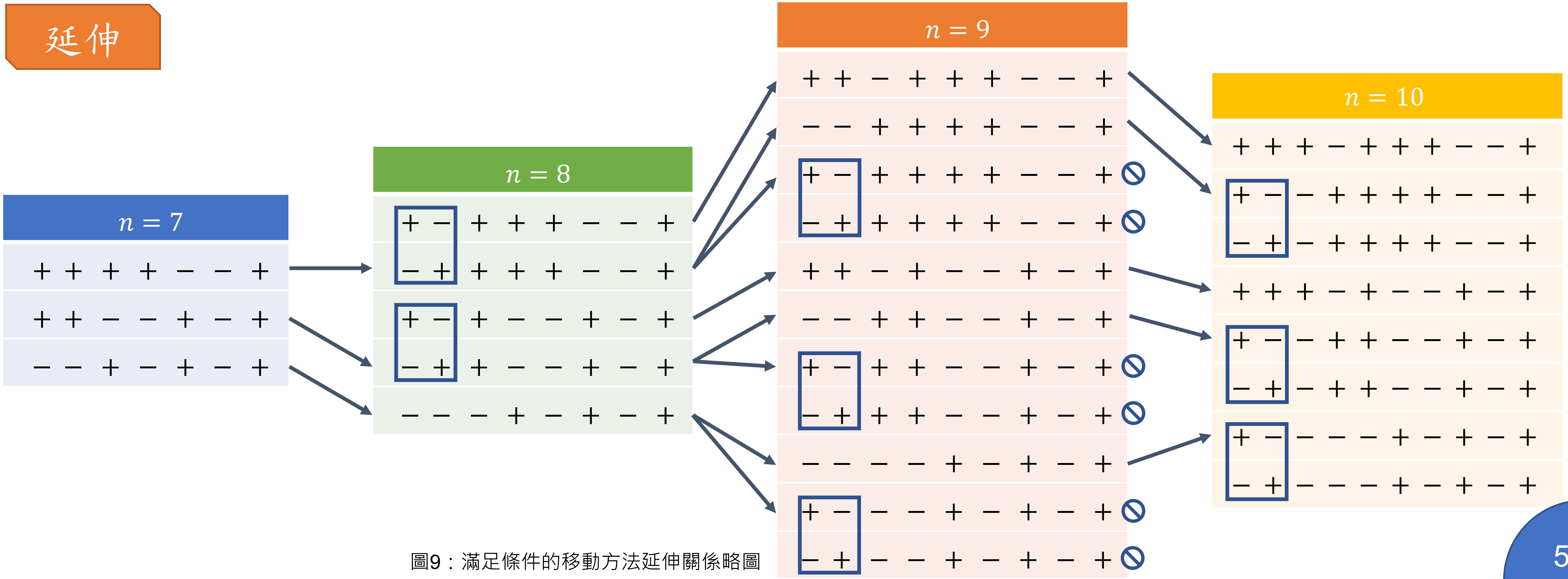

圖9：滿足條件的移動方法延伸關係略圖

W_n

表5：總步數與方法數關係表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
W_n	1	1	3	2	2	3	3	5	11	8	8	11	11	19	41	30	30	41	41	71	153	112

規律

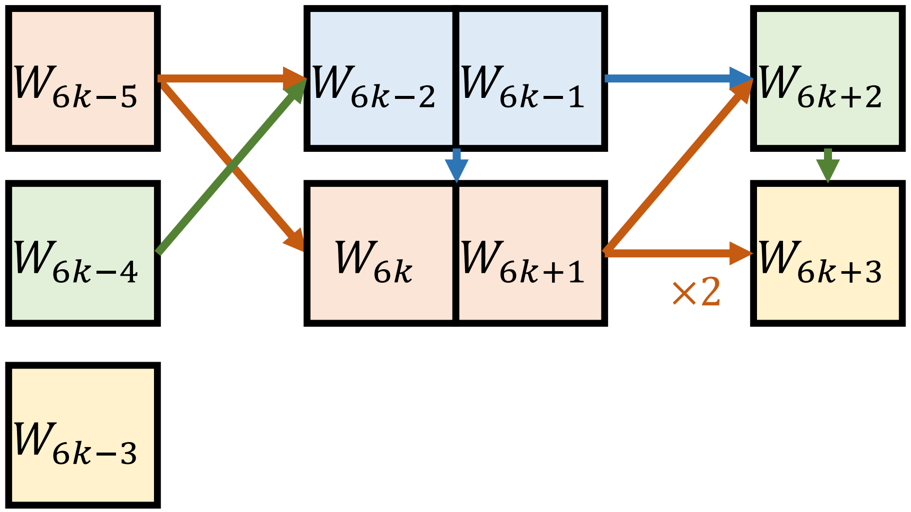

圖10：方法數關係圖

對應關係

f_m：第 m 項的半費氏數列

表6：方法數與半費氏數關係表

W_n	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
f_m	f_1	f_1	f_4	f_3	f_3	f_4	f_4	f_5	f_7
W_n	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}
f_m	f_6	f_6	f_7	f_7	f_8	f_{10}	f_9	f_9	f_{10}

定理3

符合最遠距離最小值的走法數 W_n 與半費氏數 f_m 滿足 $W_n = \begin{cases} f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & ,n \neq 6k+3 \\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} & ,n = 6k+3 \end{cases}$ （[ ] 為高斯記號）

樹狀圖

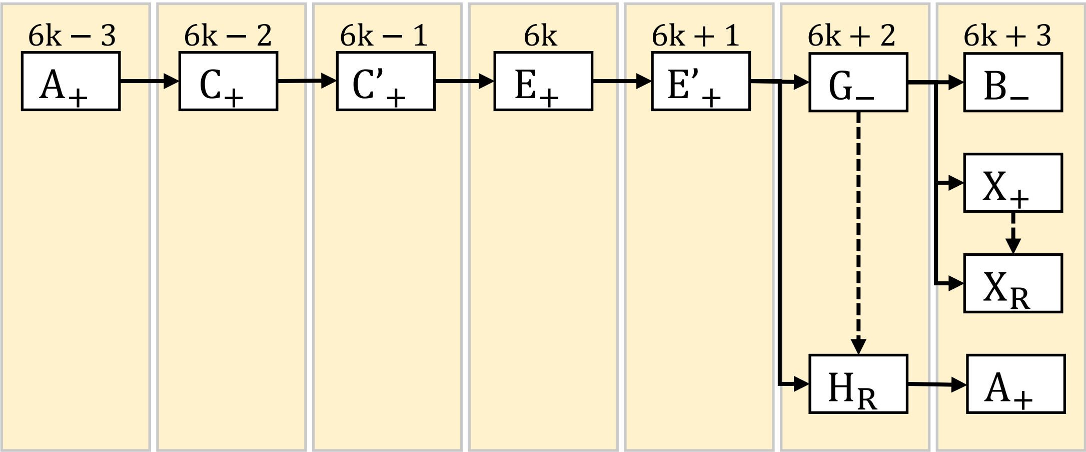

圖11-1：兩種走法延伸樹狀圖(1)

關係式

表7：延伸樹狀圖改寫成關係式

	關係式	
1.	$C_{6k-2} = A_{6k-3} + B_{6k-3}$	$D_{6k-2} = B_{6k-3}$
2.	$C'_{6k-1} = C_{6k-2}$	$D'_{6k-1} = D_{6k-2}$
3.	$E_{6k} = C'_{6k-1} + D'_{6k-1}$	$F_{6k} = D'_{6k-1}$
4.	$E'_{6k+1} = E_{6k}$	$F'_{6k+1} = F_{6k}$
5.	$G_{6k+2} = E'_{6k+1} + F'_{6k+1}$	$H_{6k+2} = E'_{6k+1}$
6.	$A_{6k+3} = H_{6k+2}$	$B_{6k+3} = G_{6k+2}$
	$X_{6k+3} = 2G_{6k+2}$	

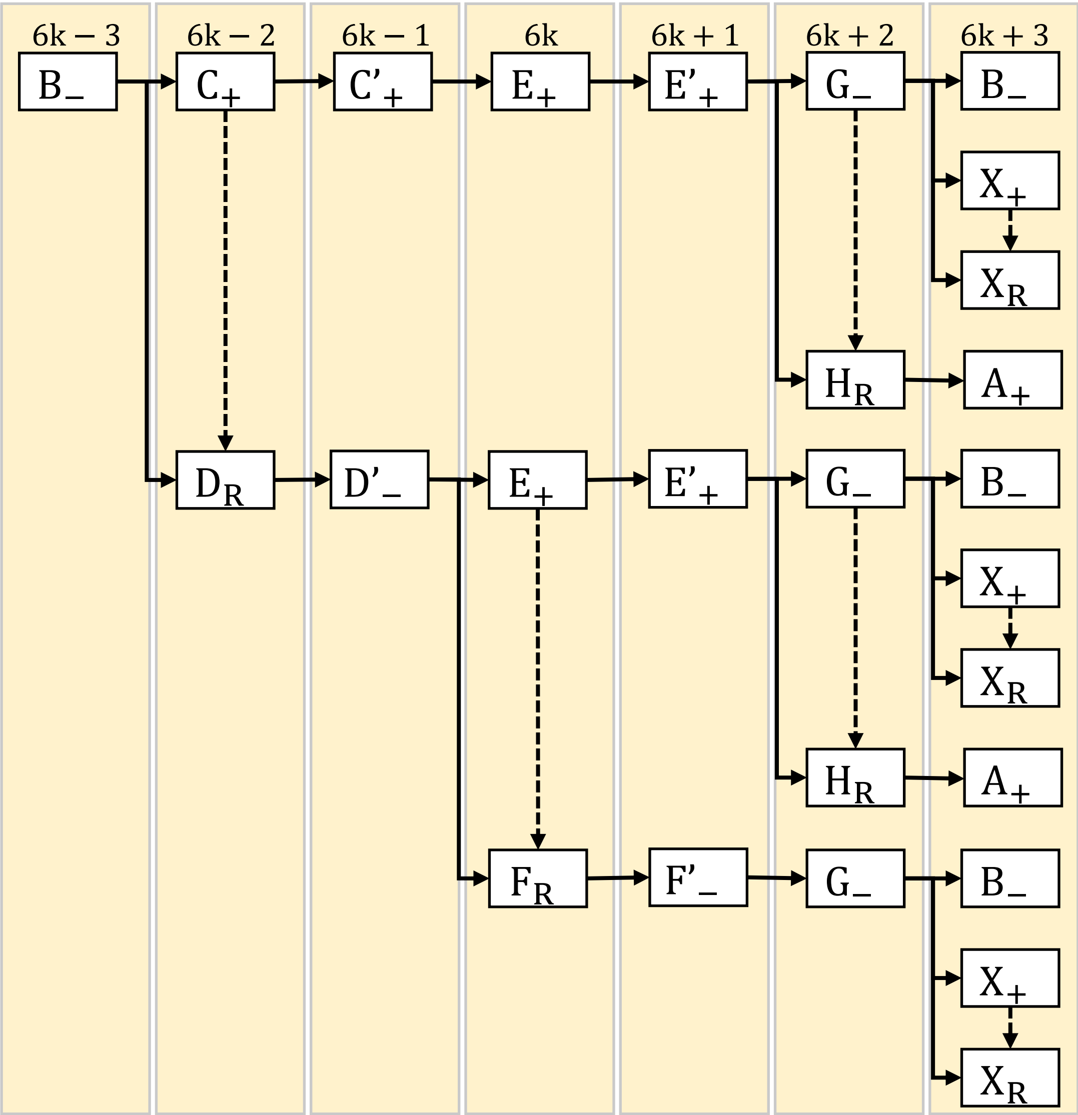

圖11-2：兩種走法延伸樹狀圖(2)

六、討論：$R_1 = 2, R_2 = 1$ 的盧卡斯數列 R_n

結果

表8：以盧卡斯數行走時最遠距離最小值與方法數關係表節略

n	1	2	8	9	10	11	12	13
R_n	2	1	29	47	76	123	199	322
M_n	2	2	15	24	38	62	100	162
W_n	1	1	3	3	5	8	8	19

關係式

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{R_n}{2} + 1 & , n = 6k+1 \\ \dfrac{R_n}{2} & , n = 6k+4 \\ \dfrac{R_n + 1}{2} & ,\text{其它} \end{cases}$$

$$W_n = \begin{cases} f_{\frac{n+3}{2}} & , n = 6k+1 \\ f_{\frac{n-1}{2}} & , n = 6k+3 \\ f_{\frac{n+1}{2}} & , n = 6k+5 \\ f_{\frac{n}{2}} & ,\text{其它} \end{cases}$$

延伸關係

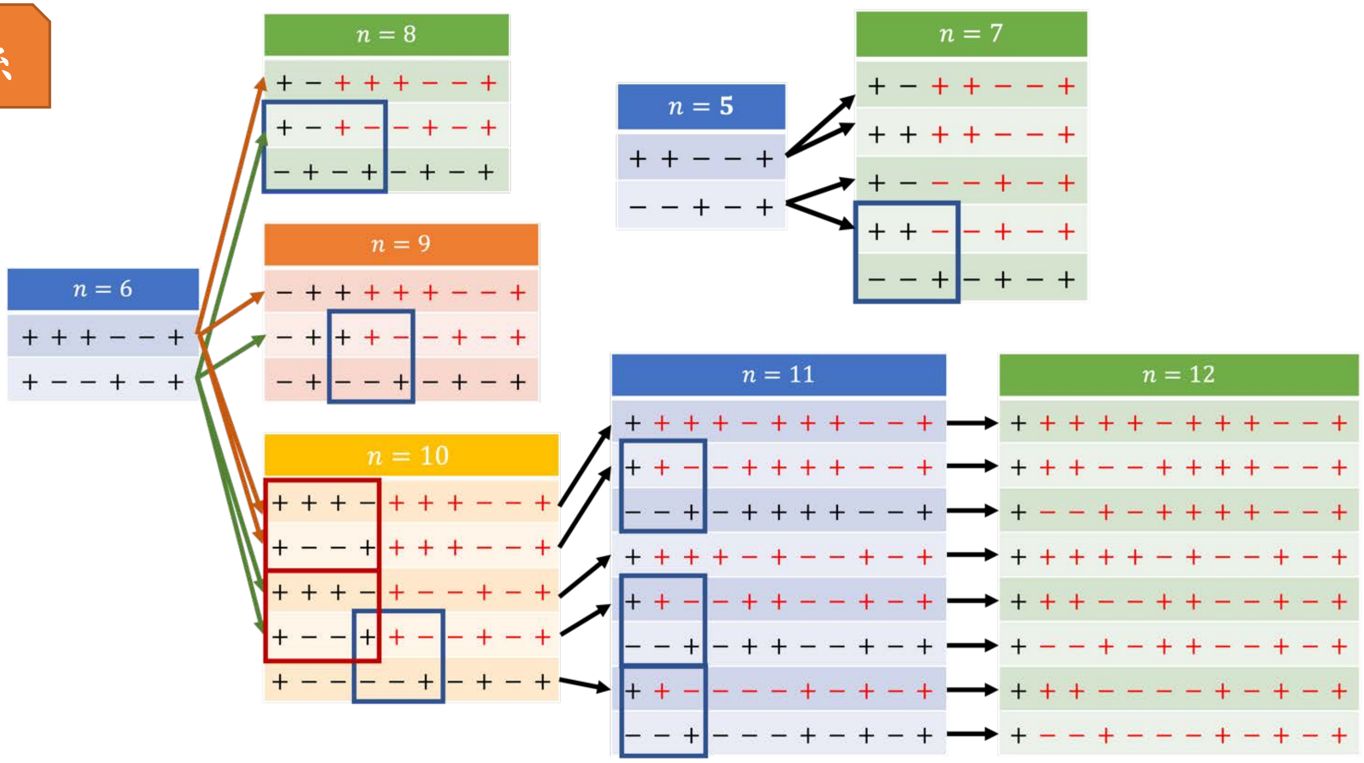

圖12：以盧卡斯數列行走時延伸樹狀圖

七、討論：$R'_1 = 1, R'_2 = 3$ 的類盧卡斯數列 R'_n

結果

表9：以類盧卡斯數行走時最遠距離最小值與方法數關係表節略

n	7	8	9	10	11	12	13	14
R'_n	29	47	76	123	199	322	521	843
M_n	15	24	38	**63**	100	162	261	422
W_n	3	3	3	3	3	8	11	11

關係式

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{R'_n}{2} + 1 & , n = 6k \\ \dfrac{R'_n}{2} & , n = 6k+3 \\ \dfrac{R'_n + 3}{2} & , n = 6k+4 \\ \dfrac{R'_n + 1}{2} & , \text{其它} \end{cases}$$

$$W_n = \begin{cases} f_{3\left[\frac{n}{6}\right]+1} & , n \neq 6k \\ f_{\frac{n}{2}} & , n = 6k \end{cases}$$

延伸關係

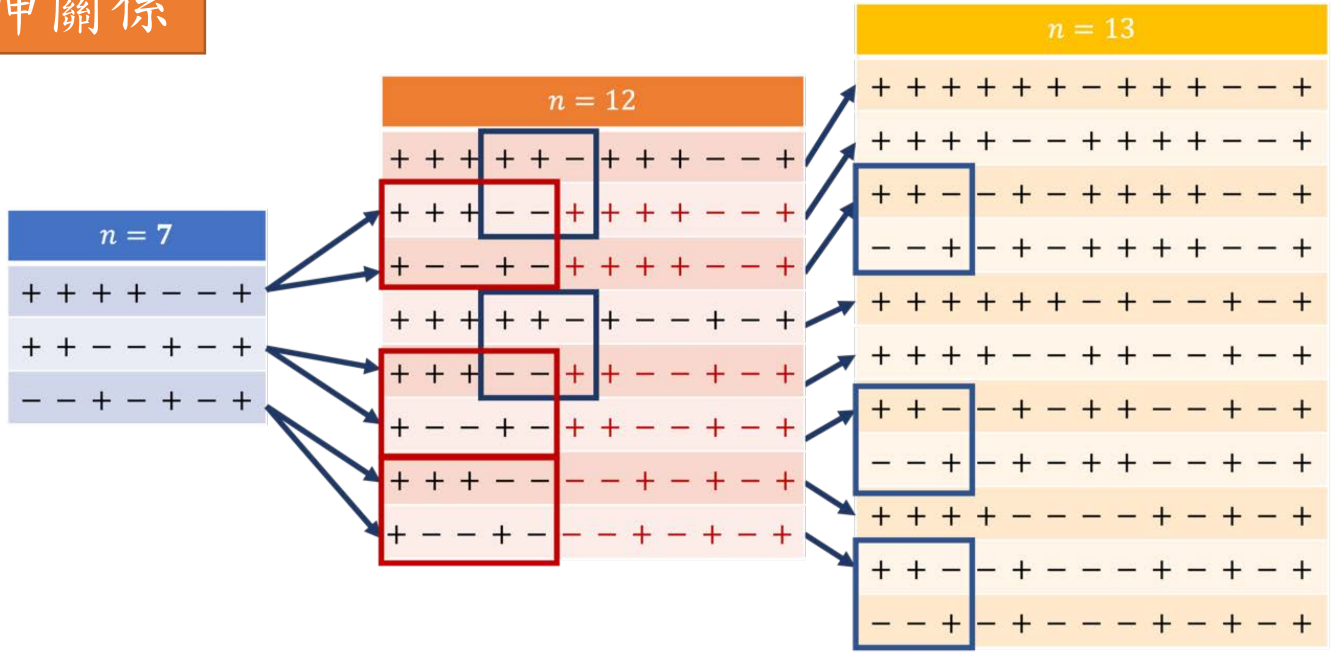

圖13：以類盧卡斯數列行走時延伸樹狀圖

八、討論：$F'_1=1, F'_2=2$ 的類費氏數列 F'_n

結果

表10：以類費氏數行走時最遠距離最小值與方法數關係表節略

n	7	8	9	10	11	12	13	14
F'_n	21	34	55	89	144	233	377	610
M_n	11	17	28	45	73	117	189	305
W_n	3	3	3	3	11	8	11	11

關係式

$$M_n=\begin{cases}\dfrac{F'_n}{2} & ,n=6k+2\\ \dfrac{F'_n}{2}+1 & ,n=6k+5\\ \dfrac{F'_n+1}{2} & ,\text{其它}\end{cases}$$

$$W_n=\begin{cases}f_{\frac{n}{2}} & ,n=6k\\ f_{3\lceil\frac{n}{6}\rceil+4} & ,n=6k+5\\ f_{3\lceil\frac{n}{6}\rceil+1} & ,\text{其它}\end{cases}$$

延伸關係

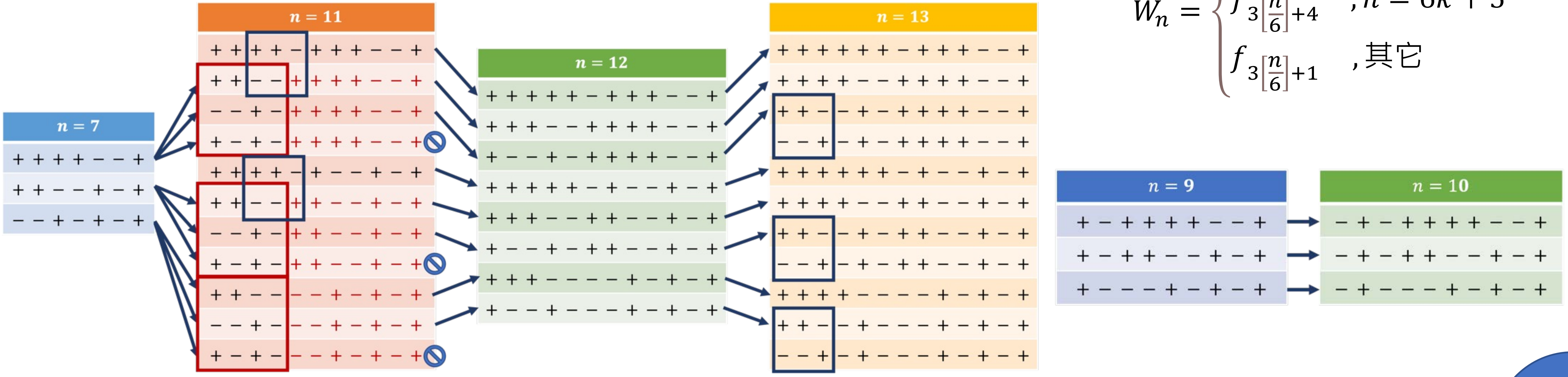

圖14：以類費氏斯數列行走時延伸樹狀圖

九、結論

一、以費氏數走n步時 $M_n=\begin{cases}\frac{F_n}{2} & ,n=6k\\ \frac{F_n}{2}+1 & ,n=6k+3\\ \frac{F_n+1}{2} & ,\text{其它}\end{cases}$、$W_n=\begin{cases}f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & ,n\neq 6k+3\\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+3} & ,n=6k+3\end{cases}$（$k$ 為非負整數）

二、由後至前以 $(+,-,-,+,+,+)$ 循環方式行走，其離家最遠距離必為最小值。

三、最遠距離最小值的可行走法前後項有規律性，可由前項的走法最前面再加一步。或是將前兩步對調而成。並可分類成兩種形式由樹狀圖展示。

四、其它類似費氏數列的性質與差異如下表11

表11：以各種類費氏數列行走時延伸規律差異

起始項	走法延伸規律
費氏數列 F_n ：(1,1)	六組一循環的延伸性質，皆為前項加一步或前二步相反組成新的走法。
盧卡斯數列 R_n ：(2,1)	六組一循環的延伸性質，依 n 除以 6 的餘數不同有不同的延伸方法。
類盧卡斯數列 R'_n ：(1,3)	六組一循環的延伸性質，除$n=6k$ 時，為從 $n-5$ 步延伸。其餘皆為從前項延伸而成。
類費氏數列 F'_n ：(1,2)	六組一循環的延伸性質，除 $n=6k+5$ 時，為從 $n-4$ 步延伸。其餘皆為從前項延伸。

十、參考資料

- SloaneJ. A.N. (2022年三月). A245308 - OEIS. 擷取自 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®)
- 游森棚. (2020年一月). 森棚教官的數學題 - 散步的費波納契. 科學研習期刊.
- 龍埔國民小學. (2022年四月). 複審海報. 擷取自 新北市中小學科學展覽資源網