中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080404

移線升 G

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 余長學	陳志平
小六 莊清羽	陳呈旻
小五 葉洺綸	
小五 沈盈妤	

關鍵詞：斜率、組合、整數分割

摘要

一、本研究探討在直線上等距離 n 個信號發射臺，任兩個發射臺所發出的信號不被其他發射臺擋住的規則。

二、以 m_i 表示相鄰兩個發射臺的斜率，若任兩個發射臺所發出的信號不被其他發射臺擋住，則必符合 $m_i \le m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i = 0$，其中 $i \in N$，$m_i \in Z$。

三、當發射臺的個數 n=2k 時，m_k 可分為-1、0、1 三種；當發射臺的個數 n=2k+1 時，m_k 與 m_{k+1} 的和分為-2、-1、0、1、2 五種，可利用整數分割的遞迴關係推算出發射臺信號不被其他發射臺擋住情形的個數，其中 $k \in N$，$k \ge 2$。

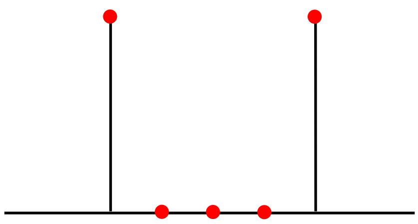
四、依照發射臺共線的情形，推論出直線信號數量的公式，並利用整數分割計算出不同發射臺個數的共線類型。

壹、研究動機

因為老師在教室內的手機收訊不佳，常常接不到家長的電話，於是向學校提出申請希望能夠改善。中華電信廠商特別到學校勘查，發現學校內有許多通訊死角，建議在校門口加裝天線(強波器)，向學校內部發射信號，最佳的裝設位置在警衛室上方風車的底座，如圖一，學校為了裝設位置的高低而大傷腦筋，太高覺得不太好看，太低又會擔心天線發送出來的信號被警衛室的屋頂所遮擋而影響收訊，老師因此提出這個問題讓我們找出解答做為施工的參考。

另外在科學研習雙月刊中，森棚教官的數學題有一個「信號發射臺」的有趣問題[1]，內容與我們在學校遇到的天線裝設問題有關聯性：一直線上已經有兩個發射臺，高度都是四單位，兩發射臺基座的地面距離為四單位，如圖二。
信號的發射和接收都由發射臺頂端處理。電信公司想要在兩發射臺之間，等距再增設三個發射臺。因為信號是直線傳送，因此希望增設後，任兩發射臺的信號都仍然可以直線傳達而不會被擋住。增設的三個發射臺高度可以不同，但是需為整數單位，一共有幾種增設的方法？

圖一



圖二

這兩個問題都可以經由兩點之間的斜率來獲得解決，不過延伸的問題卻引發我們研究的興趣，任意 n 個發射臺會有多少增設的方法呢？可以畫出幾條的發射信號？在一連串的好奇提問中展開了我們「移」線「升 G」的研究，題目的含意是想藉由「移」動天「線」的位置來改善手機的收訊品質，並且將原有的 4G 信號，提「升」為 5「G」信號。

貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有三：

一、在風車底座上找出最佳的天線裝設高度。

二、找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的規則。

三、找出計算信號直線數量的公式。

參、研究器材

紙、筆、動態幾何系統 the geometer's sketchpad、計算機、Microsoft Excel 軟體、白線、頂點珠、架構棒。

肆、研究過程

一、專用符號定義

(一)I_i：以 I_i 表示由左至右數第 i 個信號發射臺，其中 $i\in N$。有 n 個發射臺，$1\leq i\leq n$。如：I_1 表示左邊第 1 個信號發射臺，I_n 表示最後 1 個信號發射臺。

(二)m_i：以 m_i 表示 I_i 與 I_{i+1} 之間的斜率，其中 $i\in N$。n 個發射臺，$1\leq i\leq n-1$。如：m_1 表示 I_1 與 I_2 之間的斜率，m_{n-1} 表示 I_{n-1} 與 I_n 之間的斜率。

(三)$(m_i,j)_a$：以 $(m_i,j)_a$ 表示由 m_i 開始連續 j 個斜率相加，其和為 a 的組合，且必須符合 $m_i\leq m_{i+1}$ 及 $|m_i|\leq|a|$，其中 i、$j\in N$，$a\in Z$。如：$(m_1,3)_{-4}$ 為 $m_1+m_2+m_3=-4$ 的所有組合，即 $(m_1,3)_{-4}$：(-4,0,0)、(-3,-1,0)、(-2,-2,0)、(-2,-1,-1)。

(四)$Q_i(j)$：以 $Q_i(j)$ 表示將 j 分割成 i 個整數的方法數，且分割時數字可重複但須符合遞增的原則，分割成的數不得為 0 且其絕對值須小於等於 $|j|$，其中 $i\in N$，$j\in Z$，定義 $Q_1(0)=1$。如：$Q_2(-4)=2$，分別為(-3，-1)和(-2，-2)。

(五)$P_n(j)$：以 $P_n(j)$ 表示符合要求下，n 個斜率其和為 j 的組合數，且定義 $P_n(0)=1$，其中 $n\in N$，$j\in Z$。$P_n(j)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(j)$。以 $(m_1,3)_{-4}$ 為例，$(m_1,3)_{-4}$：(-4,0,0)、(-3,-1,0)、(-2,-2,0)、(-2,-1,-1)，其組合數為 $P_3(-4)=Q_1(-4)+Q_2(-4)+Q_3(-4)=1+2+1=4$。

二、文獻探討

我們參閱歷屆的全國科展作品並在網路上以關鍵字進行搜尋，並無類似的研究可供參考。在研究過程中，我們發現可以利用整數分割協助我們找出讓每個發射臺之間都可以互相連成直線的組數。

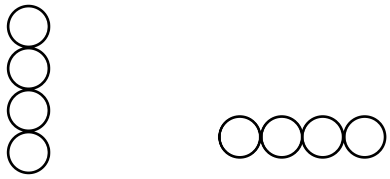
在陳泓嘉(2020)[2]研究中，以硬幣排列來證明正整數的分割遞迴關係，簡述如下，另外因應本研究的需要，需進行負整數的分割，其方式與正整數相同。使用到的遞迴關係有三，說明如下：

$Q_j(j)=Q_1(j)=1$

$Q_j(1)=Q_j(2)=\cdots=Q_j(j-1)=0$，其中 $j\geq 2$

$Q_j(n)=Q_{j-1}(n-1)+Q_j(n-j)$，其中 $j\geq 2$

(一)將正整數 j 排成 j 列僅有一種，如圖三，與將正整數 j 排成 1 列的情形一樣多，故 $Q_j(j)=Q_1(j)=1$。

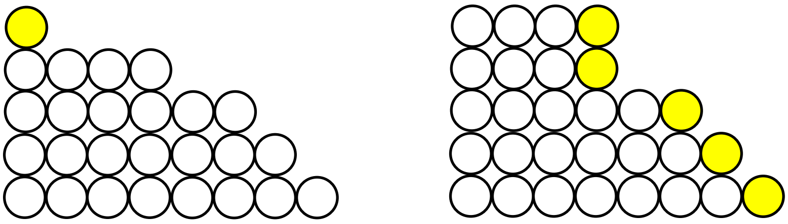


將 j 排成 j 列　　　將 j 排成 1 列

圖三

(二)小於 j 的正整數無法被排成 j 列，故 $Q_j(1)=Q_j(2)=\cdots=Q_j(j-1)=0$，其中 $j\geq 2$。

(三)n 個硬幣排成 j 列，排法有 $Q_j(n)$種，將各種排列分為兩種類型，分別為最上方第 j 列只有 1 個硬幣及最上方第 j 列大於 1 個硬幣，如圖四



最上方第 j 列只有 1 個硬幣　　　最上方第 j 列大於 1 個硬幣

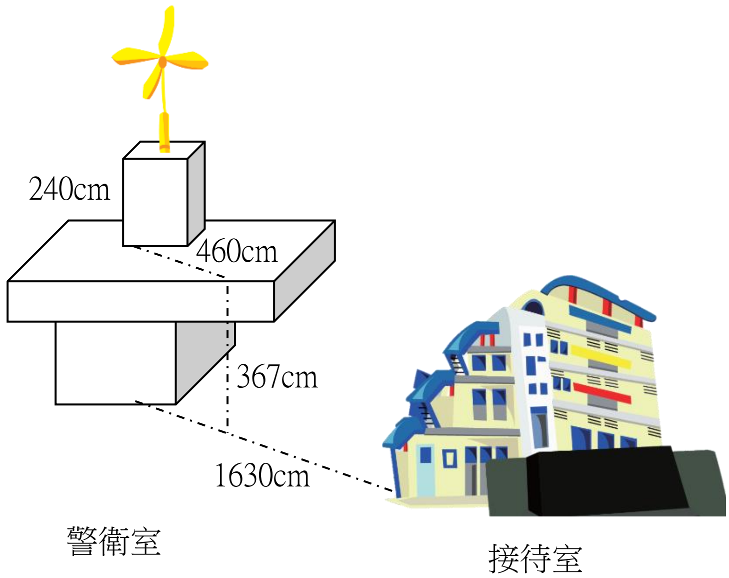
圖四

取走最上方的 1 個硬幣或每一列取走 1 個硬幣並不會影響原有排列數。最上方第 j 列只有 1 個硬幣，取走這個硬幣，剩下 n-1 個分成 j-1 列，排列有 $Q_{j-1}(n-1)$。最上方第 j 列大於 1 個硬幣，每列各取走 1 個硬幣，共取走 j 個硬幣，剩下 n-j 個硬幣分成 j 列，排法有 $Q_j(n-j)$，故 $Q_j(n)=Q_{j-1}(n-1)+Q_j(n-j)$。

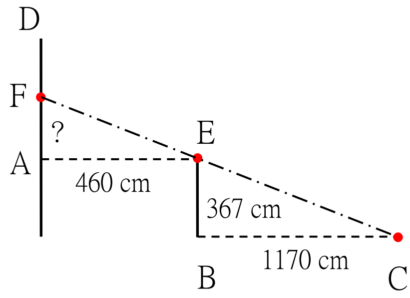
三、在風車底座上找出最佳的天線裝設高度

(一)我們發現離警衛室最近的建築物是接待室，若傳到接待室的信號不會被警衛室屋頂擋住，較遠的教室自然也不會被擋住，於是我們測量出警衛室相關的長度以及警衛室與接待室的距離。先設定天線裝設在風車底座靠右側處，故所有的測量皆從該處為基準。測量結果如圖五，風車底座的高度為 240cm，警衛室屋頂上緣到地面的高度為 367cm，風車底座至左前方接待室水平距離為 1630cm，風車底座與接待室連成一線，在此連線上由風車底座至屋頂平台邊緣長度為 460cm。

(二)將圖五簡化成圖六，風車底座高 240cm，以 $\overline{AD}$ 表示，而天線可以設置在風車底座上的任意高度，假設天線設置的位置為 F，我們以接待室門口的地板當作天線所發射信號的接收處，以 C 表示；中間可能被警衛室的屋頂阻隔，屋頂的高以 $\overline{BE}$ 表示，其高度為 367cm；由上可知，$\overline{AE}=460$cm，$\overline{BC}=1630-460=1170$cm，$\overline{BE}=367$cm。



圖五



圖六

∵ $\overline{AF}$ 、$\overline{BE}$ 為鉛垂線，且 $\overline{AE}$ 、$\overline{BC}$ 為水平線

∴ $\angle FAE = \angle EBC = 90^\circ$，且 $\overline{AF} // \overline{BE}$

∵ $\overline{AF} // \overline{BE}$，∴ $\angle AFE = \angle BEC$(同位角)

∵ $\angle FAE = \angle EBC$，$\angle AFE = \angle BEC$

∴ $\triangle AEF \sim \triangle BCE$

可知 $\overline{AF} : \overline{AE} = \overline{BE} : \overline{BC}$

$\overline{AF} : 460 = 367 : 1170$

$\overline{AF} = 460 \times 367 \div 1170$

$\overline{AF} \fallingdotseq 144$

故天線最低的裝設位置為在風車底座上，距離警衛室屋頂上緣約 144 公分的位置。我們將算出來的結果告知中華電信的人員，並完成架設，如圖七。

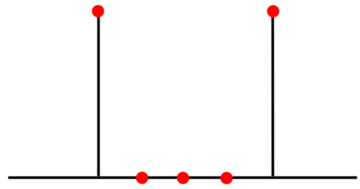
中華電信人員進行施工　　天線裝設的位置

圖七

四、找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的規則

在科學研習雙月刊中提到一個題目，一直線上已經有兩個發射臺，高度都是四單位，兩發射臺基座的地面距離為四單位，如圖八。

信號的發射和接收都由發射臺頂端處理。電信公司想要在兩發射臺之間，等距再增設三個發射臺。因為信號是直線傳送，因此希望增設後，任兩發射臺的信號都仍然可以直線傳達而不會被擋住。增設的三個發射臺高度可以不同，但是需為整數單位，一共有幾種增設的方法？



圖八

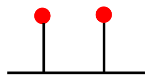
我們先將問題簡化成不同數量的發射臺，並且依照原題意讓發射臺的最高高度等於兩側發射臺的距離。

將發射臺分為偶數個與奇數個進行討論。

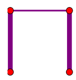
發射臺為偶數個：

(一)2 個發射臺，如圖九

發射臺的高度為 1 單位，只有一種情形，如圖十。



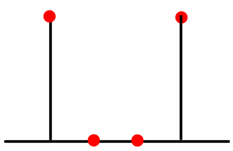
圖九



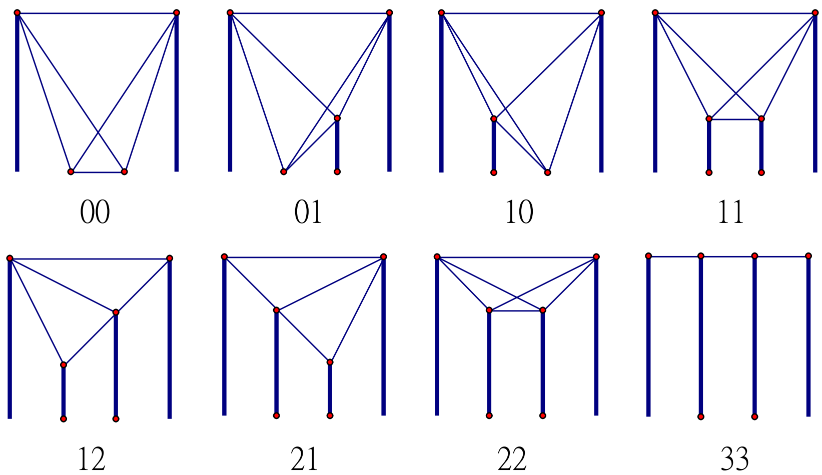
圖十

(二)4 個發射臺，如圖十一

中間可增設 2 個發射臺，高度分別為 0、1、2、3 個單位四種，共有 4^2=16 種的增設組合，我們利用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體將所有的圖形畫出來，為了方便表示，我們以增設發射臺的高度作為該圖形的代號。其中有 8 種可以讓所有直線信號不被阻擋，如圖十二。

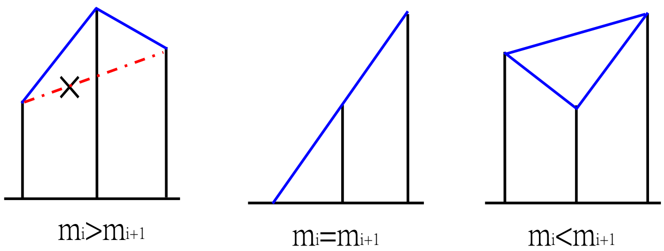


圖十一



圖十二

我們計算相鄰的兩個發射臺的斜率，連續三個發射臺會有兩組相鄰發射臺的斜率，分別以 m_i 和 m_{i+1} 表示，其中 $i\in N$，彼此之間會有三個可能，分別是 $m_i>m_{i+1}$、$m_i=m_{i+1}$ 以及 $m_i<m_{i+1}$，如圖十三



圖十三

當 $m_i>m_{i+1}$ 時中間的發射臺因為過高，將會阻擋左右兩側直線信號的發送，故只有所有相鄰發射臺斜率右邊的大於等於左邊的，才可以讓信號直線傳達而不會被擋住，我們運用 Microsoft Excel 軟體的公式，找出所有 $m_i\leq m_{i+1}$ 的組合，則為可以增設發射臺的情形，如表一。

發射臺 1 高度	發射臺 2 高度	發射臺 3 高度	發射臺 4 高度	2-1 斜率 m_1	3-2 斜率 m_2	4-3 斜率 m_3	是否可以增設
3	0	0	3	-3	0	3	O
3	0	1	3	-3	1	2	O
3	0	2	3	-3	2	1	X
3	0	3	3	-3	3	0	X
3	1	0	3	-2	-1	3	O
3	1	1	3	-2	0	2	O
3	1	2	3	-2	1	1	O
3	1	3	3	-2	2	0	X
3	2	0	3	-1	-2	3	X
3	2	1	3	-1	-1	2	O
3	2	2	3	-1	0	1	O
3	2	3	3	-1	1	0	X
3	3	0	3	0	-3	3	X
3	3	1	3	0	-2	2	X
3	3	2	3	0	-1	1	X
3	3	3	3	0	0	0	O

表一

16 個組合中共有 8 種可以順利讓發射臺的信號發射到其他每一個發射臺，與我們利用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體繪製出來的結果相同。

我們發現幾個特性：

1.4 個發射臺中每兩個相鄰發射臺有 1 組斜率，共會有 3 組斜率，由左到右分別以 m_1、m_2、m_3 表示。

2.因為最左右兩側的發射臺一樣高，故這 3 組的斜率和為 0。

3.所有可以增設的發射臺，各組可能的斜率有：m_1=-3、-2、-1、0；m_2=-1、0、1；m_3=0、1、2、3，以 m_2 為中心具有左右對稱的形式。

4.信號不會被發射臺擋住則相鄰發射臺斜率必須右邊的大於等於左邊的，即 $m_i \le m_{i+1}$。

利用這四個特性也可以推論出增設方法數，以中間斜率 m_2 的值可以分為三種情形，即 m_2=-1、0、1，因為 $m_1+m_2+m_3=0$，故：

1.當 $m_2=0$

m_1=-3、-2、-1、0，其相對應 m_3=3、2、1、0，有 4 種情形。

2.當 $m_2=-1$

m_1=-2、-1，其相對應 m_3=3、2，有 2 種情形。

3.當 $m_2=1$

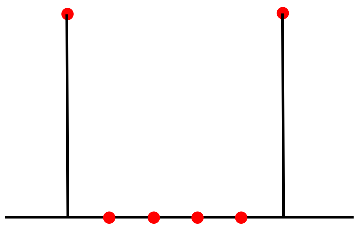
m_1=-3、-2，其相對應 m_3=2、1，有 2 種情形。

故 4 個發射臺共有 4+2+2=8 種的增設方法數，推論出來的結果與利用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體繪製出來的結果以及使用 Microsoft Excel 軟體計算結果皆相同。

另外發現 $m_2=-1$ 與當 $m_2=1$ 的圖形相互對稱。

(三)6 個發射臺，如圖十四

中間可增設 4 個發射臺，高度分別為 0、1、2、3、4、5 個單位六種，共有 6^4=1296 種的增設組合。



圖十四

我們運用 Microsoft Excel 軟體的公式，找出所有 $m_i \le m_{i+1}$ 的組合，則為可以增設發射臺的情形，1296 個組合中共有 54 種可以順利讓發射臺的信號發射到其他每一個發射臺。

6 個發射臺中每兩個相鄰發射臺有 1 組斜率，共會有 5 組斜率，由左到右分別以 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5 表示。各組可能的斜率有：$-5 \le m_1 \le 0$；$-2 \le m_2 \le 1$；m_3=-1、0、1；$-1 \le m_4 \le 2$；$0 \le m_5 \le 5$，以 m_3 為中心具有左右對稱的形式。

以中間斜率 m_3 的值可以分為三種情形，即 m_3=-1、0、1，因為 $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=0$，故：

1.當 $m_3=0$

m_1+m_2=-5、-4、-3、-2、-1、0，其相對應 m_4+m_5=5、4、3、2、1、0

我們以 $(m_i,j)_a$ 表示由 m_i 開始連續 j 個斜率相加，其和為 a 的組合，其中 i、j∈N，a∈Z。我們將符合的組合列出來。並利用 $Q_i(j)$ 和 $P_n(j)$ 來計算符合的個數。

$(m_1,2)_{-5}$：(-5,0)、(-4,-1)、(-3,-2)；$P_2(-5)=Q_1(-5)+Q_2(-5)=1+2=3$

$(m_4,2)_5$：(0,5)、(1,4)、(2,3)；$P_2(5)=Q_1(5)+Q_2(5)=1+2=3$

有 $P_2(-5)\times P_2(5)=3\times 3=9$ 種。

$(m_1,2)_{-4}$：(-4,0)、(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)=Q_1(-4)+Q_2(-4)=1+2=3$

$(m_4,2)_4$：(0,4)、(1,3)、(2,2)；$P_2(4)=Q_1(4)+Q_2(4)=1+2=3$

有 $P_2(-4)\times P_2(4)=3\times 3=9$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$：(-3,0)、(-2,-1)；$P_2(-3)=Q_1(-3)+Q_2(-3)=1+1=2$

$(m_4,2)_3$：(0,3)、(1,2)；$P_2(3)=Q_1(3)+Q_2(3)=1+1=2$

有 $P_2(-3)\times P_2(3)=2\times 2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$：(-2,0)、(-1,-1)；$P_2(-2)=Q_1(-2)+Q_2(-2)=1+1=2$

$(m_4,2)_2$：(0,2)、(1,1)；$P_2(2)=Q_1(2)+Q_2(2)=1+1=2$

有 $P_2(-2)\times P_2(2)=2\times 2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-1}$：(-1,0)；$P_2(-1)=Q_1(-1)=1$

$(m_4,2)_1$：(0,1)；$P_2(1)=Q_1(1)=1$

有 $P_2(-1)\times P_2(1)=1\times 1=1$ 種。

$(m_1,2)_0$：(0,0)；$P_2(0)=Q_1(0)=1$

$(m_4,2)_0$：(0,0)；$P_2(0)=Q_1(0)=1$

有 $P_2(0)\times P_2(0)=1\times 1=1$ 種。

故 $m_3=0$ 且 $m_1+m_2=-5$、-4、-3、-2、-1、0，其相對應 $m_4+m_5=5$、4、3、2、1、0 有 9+9+4+4+1+1=28 種。

2.當 $m_3=-1$

$m_1+m_2=-4$、-3、-2，其相對應 $m_4+m_5=5$、4、3

$m_3=-1$，m_1 與 m_2 都必須小於等於-1，故 m_1+m_2 的組合必不包含其中一數為 0 的情形，我們把 $P_2(j)$的右上角加上-1，以 $P_2(j)^{-1}$ 表示組合數因有-1 的限制，m_1 與 m_2 不得為 0，故 $P_2(j)^{-1}=Q_2(j)$，如：$P_2(-4)^{-1}=Q_2(-4)=2$，其證明請參閱討論一。

$m_3=-1$，m_4 與 m_5 都可能為-1，但 m_4+m_5 受到斜率和最大值為 5 的限制，我們把 $P_2(j)$的右下角加上-1，以 $P_2(j)_{-1}$ 表示組合中 m_4 與 m_5 可以為-1，在左上角加上 5，以 ${}^5P_2(j)_{-1}$ 表示組合中其和受到斜率最大值為 5 的限制而影響組合數，若組合數沒有受影響，則不予以標示。

如： ${}^5P_2(5)_{-1}=Q_1(5)+Q_2(5)=1+2=3$；$P_2(4)_{-1}=Q_1(5)+Q_1(4)+Q_2(4)=1+1+2=4$

$(m_1,2)_{-4}$ 其分割不為 0：(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)^{-1}=Q_2(-4)=2$

$(m_4,2)_5$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 5 限制：(0,5)、(1,4)、(2,3)；

${}^5P_2(5)_{-1}=Q_1(5)+Q_2(5)=1+2=3$

有 $P_2(-4)^{-1}\times {}^5P_2(5)_{-1}=2\times 3=6$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$ 其分割不為 0：(-2,-1)；$P_2(-3)^{-1}=Q_2(-3)=1$

$(m_4,2)_4$ 其分割包含-1：(-1,5)、(0,4)、(1,3)、(2,2)；$P_2(4)_{-1}=Q_1(5)+Q_1(4)+Q_2(4)=1+1+2=4$，

有 $P_2(-3)^{-1}\times P_2(4)_{-1}=1\times 4=4$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$ 其分割不為 0：(-1,-1)；$P_2(-2)^{-1}=Q_2(-2)=1$

$(m_4,2)_3$ 其分割包含-1：(-1,4)、(0,3)、(1,2)；$P_2(3)_{-1}=Q_1(4)+Q_1(3)+Q_2(3)=1+1+1=3$

有 $P_2(-2)^{-1}\times P_2(3)_{-1}=1\times 3=3$ 種。

故 $m_3=-1$ 且 $m_1+m_2=-4$、-3、-2，其相對應 $m_4+m_5=5$、4、3 有 6+4+3=13 種。

3.當 $m_3=1$

∵$m_3=1$ 與 $m_3=-1$ 圖形相對稱

∴兩種斜率的圖形會一樣多，也是 13 種。

故 6 個發射臺共有 28+13+13=54 種的增設方法數，推論出來的結果與使用 Microsoft Excel 軟體計算結果相同。

(四)一般化：

一直線上已經有兩個發射臺，高度都是 n-1 個單位，兩發射臺基座的地面距離為 n-1 個單位，兩發射臺之間等距離再增設 n-2 個發射臺。增設的發射臺高度可以不同，但需為 j 單位，其中 j=0、1、2、…、n-1

假設 n 個發射臺，從左到右分別以 I_1、I_2…、I_n 來表示。令 m_i 表示相鄰 I_i 和 I_{i+1} 之間的斜率，其中 i=1、2、…、n-1。

中間可增設(n-2)個發射臺，高度分別為 0~(n-1)個單位共 n 種，故共有 n^{n-2} 種的增設組合。

性質一：

若 n=2k 為發射臺數，其中 k∈N，且 k≥2，則

$-(n-1)\le m_1\le 0$

$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若 $2\le i\le k$

$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若 $k\le i\le n-2$

$0\le m_{n-1}\le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

其證明如下：

1.證明 $-(n-1)\le m_1\le 0$；$0\le m_{n-1}\le n-1$

∵I_1 和 I_n 的高度固定為 n-1，且 I_2 和 I_{n-1} 的高度範圍為 0~n-1

∴$-(n-1)\le m_1\le 0$；$0\le m_{n-1}\le n-1$。

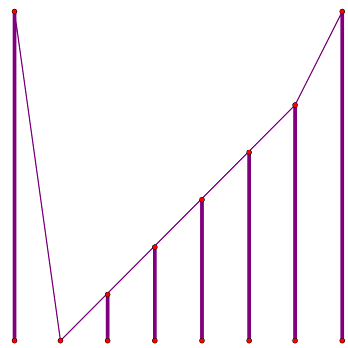
2.證明 $m_k=-1$、0、1

令 $m_1=-(n-1)$，∵$m_i\le m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

可為 $m_2=m_3=\cdots=m_{n-2}=1$，$m_{n-1}=2$，如圖十五

使得 $m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}=n-2-2+1=n-3$

$m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}+m_{n-1}=n-3+2=n-1$



圖十五

$m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=-(n-1)+n-1=\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

可得 $m_k=1$

令 $m_{n-1}=(n-1)$，$\because m_i\leq m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

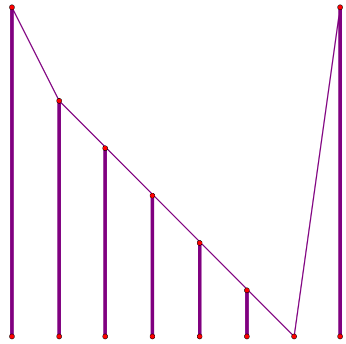
可為 $m_2=m_3=\cdots=m_{n-2}=-1$，$m_1=-2$，如圖十六

使得 $m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}=[(n-2)-2+1]\times(-1)=-n+3$

$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}=-n+3-2=-n+1=-(n-1)$

$m_1+m_2+\cdots+m_{n-2}+m_{n-1}=-(n-1)+n-1=\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

可得 $m_k=-1$



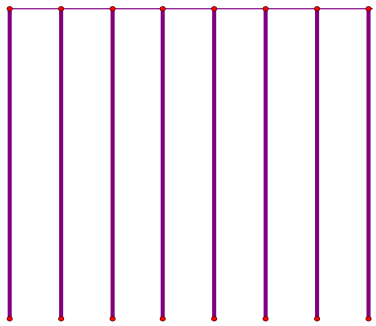
圖十六

令 $m_1=m_{n-1}=0$

$\because m_i\leq m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

必為 $m_1=m_2=\cdots=m_{n-1}=0$，如圖十七

可得 $m_k=0$



圖十七

假設 $2\leq m_k$

$\because m_i\leq m_{i+1}$

$\therefore 2\leq m_k\leq m_{k+1}$，

令 $m_k=m_{k+1}=\cdots=m_{n-1}=2$

則 $m_k+m_{k+1}+\cdots+m_{n-1}=2(n-1-k+1)=2n-2k=4k-2k=2k=n$，發射臺高度為 0~(n-1)，正斜率和最大為(n-1)，但 $m_k+m_{k+1}+\cdots+m_{n-1}=n(\rightarrow\leftarrow)$

故得證 $m_k<2$

同理可證 $-2<m_k$，故 $-2<m_k<2$，且 $m_k\in Z$

可得 $m_k=-1$、0、1

3.證明 $-1\leq m_i\leq\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若 $k\leq i\leq n-2$，[ ] 為高斯取底符號

$\because m_k=-1$、0、1，且 $m_i\leq m_{i+1}$

$\therefore -1\leq m_k\leq m_{k+1}\leq m_{k+2}\leq\cdots\leq m_{n-2}$

$\because \sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$ 且 $m_i\leq m_{i+1}$

$\therefore$ 要使得 m_i 最大，其中 $k\leq i\leq n-2$，

則所有的 m_i~m_{n-1} 要平均分配 n-1，從 m_i~m_{n-1} 共有(n-1-i+1)=n-i 個斜率，

故 $m_i=\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，其中 $k\leq i\leq n-2$，且 [ ] 為高斯取底符號。

同理可證，$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\leq m_i\leq 1$，若 $2\leq i\leq k$，[ ] 為高斯取底符號

由以上可得：

$-(n-1) \le m_1 \le 0$

$-\lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor \le m_i \le 1$，若 $2 \le i \le k$

$-1 \le m_i \le \lfloor \frac{n-1}{n-i} \rfloor$，若 $k \le i \le n-2$

$0 \le m_{n-1} \le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

性質一得證

4.求出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數

將 m_k 分為-1、0、1 三種情形，利用 $m_i \le m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i = 0$ 來推算出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數。

陳泓嘉(2020)[2]以圖形分層遞降的方式來探討整數分割數，研究中發現將 j 個硬幣「遞減」排成 i 列，則排法有 $Q_i(j)$種，並找出遞迴關係如下。

$Q_j(j)=Q_1(j)=1$

$Q_j(1)=Q_j(2)=\cdots=Q_j(j-1)=0$，其中 $j \ge 2$

$Q_j(n)= Q_{j-1}(n-1)+Q_j(n-j)$，其中 $j \ge 2$

列出其部分整數分割數，如表二

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q_1(j)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2(j)$		1	1	2	2	3	3	4	4	5
$Q_3(j)$			1	1	2	3	4	5	7	8
$Q_4(j)$				1	1	2	3	5	6	9
$Q_5(j)$					1	1	2	3	5	7
$Q_6(j)$						1	1	2	3	5
$Q_7(j)$							1	1	2	3
$Q_8(j)$								1	1	2
$Q_9(j)$									1	1
$Q_{10}(j)$										1

表二

我們發現以圖形分層遞降的方式來探討整數分割數 $Q_i(j)$可運用於本研究斜率和的組合數。

(1)當 $m_k=0$

為符合 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$，故 $(m_1,k-1)_{-(n-1)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-1}$、$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-2}\cdots(m_1,k-1)_0$ 與$(m_{k+1},k-1)_0$ 各組的和皆為 0

$(m_1,k-1)_{-(n-1)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-1}$的個數為 $P_{k-1}(-(n-1))=P_{k-1}(n-1)=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-1)$

有 $P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)$種

$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-2}$的個數為 $P_{k-1}(-(n-2))=P_{k-1}(n-2)=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-2)$

有 $P_{k-1}(-(n-2))\times P_{k-1}(n-2)$種

……

$(m_1,k-1)_0$ 與$(m_{k+1},k-1)_0$ 的個數為 $P_{k-1}(0)=P_{k-1}(0)=1$

有 $P_{k-1}(0)\times P_{k-1}(0)=1$

$m_k=0$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-2))\times P_{k-1}(n-2)+\cdots+P_{k-1}(0)\times P_{k-1}(0)$種。

(2)當 $m_k=-1$

為符合 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$，故 $(m_1,k-1)_{-(n-2)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-1}$、$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$與$(m_{k+1},k-1)_{n-2}\cdots$

$(m_1,k-1)_{-(k-1)}$與$(m_{k+1},k-1)_k$ 各組的和皆為 1

$m_k=-1$，$m_1\sim m_{k-1}$ 都必須小於等於-1，故 $m_1+m_2+\cdots+m_{k-1}$ 的組合必不包含其中一數為 0 的情形，我們把 $P_{k-1}(j)$的右上角加上-1，以 $P_{k-1}(j)^{-1}$ 表示組合數因有-1 的限制，$m_1\sim m_{k-1}$ 都不得為 0，故 $P_{k-1}(j)^{-1}=P_{k-1}(j)-P_{k-2}(j)=Q_{k-1}(j)$，其證明請參閱討論一。

$m_k=-1$，m_{k+1}、$m_{k+2}\cdots m_{n-1}$ 都可能為-1，但 $m_{k+1}+m_{k+2}+\cdots+m_{n-1}$ 受到斜率最大值為 n-1 的限制，我們把 $P_{k-1}(j)$的右下角加上-1，以 $P_{k-1}(j)_{-1}$ 表示組合中 m_{k+1}、$m_{k+2}\cdots m_{n-1}$ 都可以為-1，在左上角加上 n-1，以 ${}^{n-1}P_{k-1}(j)_{-1}$ 表示組合中其和受到斜率最大值為 n-1 的限制而影響組合數，若組合數沒有受影響，則不予以標示。

$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-2))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-1}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

${}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-1)$

有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-3))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-2}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

$${}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+\cdots+Q_{k-2}(n-1)+$$
$$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+\cdots+Q_{k-1}(n-2)$$

有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(n-4)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-4))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-4))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-3}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的的個數為

${}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+\cdots+Q_{k-3}(n-1)+$

$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+\cdots+Q_{k-2}(n-2)+$

$Q_1(n-3)+Q_2(n-3)+Q_3(n-3)+\cdots+Q_{k-1}(n-3)$

有 $P_{k-1}(-(n-4))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}$ 種

……

$(m_1,k-1)_{-(k+1)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k+1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k+1))$

$(m_{k+1},k-1)_{k+2}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

${}^{n-1}P_{k-1}(k+2)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+$

$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+$

$\cdots+$

$Q_1(k+2)+Q_2(k+2)+Q_3(k+2)+\cdots+Q_{k-1}(k+2)$

有 $P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+2)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-k}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-k)^{-1}=Q_{k-1}(-k)$

$(m_{k+1},k-1)_{k+1}$ 其分割包含-1 的個數為

$P_{k-1}(k+1)_{-1}=Q_1(n-1)+$

$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+$

$\cdots+$

$Q_1(k+1)+Q_2(k+1)+Q_3(k+1)+\cdots+Q_{k-1}(k+1)$

有 $P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(k-1)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k-1))=1$

$(m_{k+1},k-1)_k$ 其分割包含-1 的個數為 $P_{k-1}(k)_{-1}=Q_1(n-2)+$

$Q_1(n-3)+Q_2(n-3)+$

$\cdots+$

$Q_1(k)+Q_2(k)+Q_3(k)+\cdots+Q_{k-1}(k)$

有 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)_{-1}=1\times P_{k-1}(k)_{-1}=P_{k-1}(k)_{-1}$ 種

$m_k=-1$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}+\cdots+P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+2)_{-1}+P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)_{-1}$ 種。

(3)當 $m_k=1$ 會與 $m_k=-1$ 相對稱，故其組合也有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}+\cdots+P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+2)_{-1}+P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)_{-1}$ 種。

利用上述推論所得的公式計算出 n=4~12 個發射臺，可以讓任 2 個發射臺間的信號不被阻擋的增設數，如表三，其計算過程請參閱附件一。

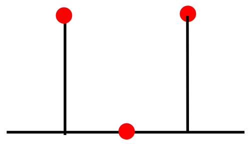
k	n=2k	m_k=-1 組合數	m_k=0 組合數	m_k=1 組合數	發射臺增設數
2	4	2	4	2	8
3	6	13	28	13	54
4	8	64	169	64	297
5	10	264	827	264	1355
6	12	926	3480	926	5332

表三

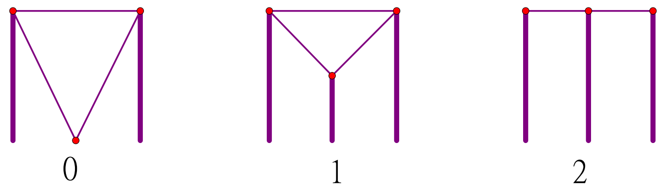
發射臺為奇數個：

(一)3 個發射臺，如圖十八

中間可增設 1 個發射臺，增設高度有 0、1、2 個單位三種，而這 3 種都可以順利傳送信號，如圖十九



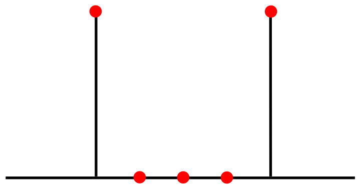
圖十八



圖十九

(二)5 個發射臺，如圖二十

中間可增設 3 個發射臺，高度分別為 0、1、2、3、4 個單位五種，共有 5^3=125 種的增設組合，我們利用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體將所有的圖形畫出來，其中有 23 種可以讓所有直線信號不被阻擋。



圖二十

我們運用 Microsoft Excel 軟體的公式，找出所有 $m_i \leq m_{i+1}$ 的組合，即為可以增設發射臺的情形，整理出所有可以增設的情形如表四，共 23 組。

序號	發射臺 1 高度	發射臺 2 高度	發射臺 3 高度	發射臺 4 高度	發射臺 5 高度	2-1 斜率 m_1	3-2 斜率 m_2	4-3 斜率 m_3	5-4 斜率 m_4
1	4	0	0	0	4	-4	0	0	4
2	4	0	0	1	4	-4	0	1	3
3	4	0	0	2	4	-4	0	2	2
4	4	0	1	2	4	-4	1	1	2
5	4	1	0	0	4	-3	-1	0	4
6	4	1	0	1	4	-3	-1	1	3
7	4	1	0	2	4	-3	-1	2	2
8	4	1	1	1	4	-3	0	0	3
9	4	1	1	2	4	-3	0	1	2
10	4	1	2	3	4	-3	1	1	1
11	4	2	0	0	4	-2	-2	0	4
12	4	2	0	1	4	-2	-2	1	3
13	4	2	0	2	4	-2	-2	2	2
14	4	2	1	0	4	-2	-1	-1	4
15	4	2	1	1	4	-2	-1	0	3
16	4	2	1	2	4	-2	-1	1	2
17	4	2	2	2	4	-2	0	0	2
18	4	2	2	3	4	-2	0	1	1
19	4	3	2	1	4	-1	-1	-1	3
20	4	3	2	2	4	-1	-1	0	2
21	4	3	2	3	4	-1	-1	1	1
22	4	3	3	3	4	-1	0	0	1
23	4	4	4	4	4	0	0	0	0

表四

我們發現可以增設的發射臺，各組可能的斜率有：$-4 \leq m_1 \leq 0$；m_2=-2、-1、0、1；m_3=-1、0、1、2；$0 \leq m_4 \leq 4$，具有左右對稱的形式。

利用以下的特性

1.5 個發射臺中每兩個相鄰發射臺有 1 組斜率，共會有 4 組斜率。

2.因為最左右兩側的發射臺一樣高，故這 4 組的斜率和為 0。

3.信號不會被發射臺擋住則相鄰發射臺斜率右邊的必須大於等於左邊的，即 $m_i \leq m_{i+1}$。

可以推論出增設方法數：

以中間兩組的斜率和(m_2+m_3)來區分，可分為 7 種，因為 $m_1+m_2+m_3+m_4=0$，故：

1.當 $m_2+m_3=-3$

無可增設情形。

2.當 $m_2+m_3=-2$

$m_2=-2$，$m_3=0$ 則 $m_1=-2$，$m_4=4$，有 1 種情形。

$m_2=-1$，$m_3=-1$ 則 $m_1=-2$、-1，其相對應 $m_4=4$、3，有 2 種情形。

3.當 $m_2+m_3=-1$

$m_2=-2$，$m_3=1$ 則 $m_1=-2$，$m_4=3$，有 1 種情形。

$m_2=-1$，$m_3=0$ 則 $m_1=-3$、-2、-1，其相對應 $m_4=4$、3、2，有 3 種情形。

4.當 $m_2+m_3=0$

$m_2=-2$，$m_3=2$ 則 $m_1=-2$，$m_4=2$，有 1 種情形。

$m_2=-1$，$m_3=1$ 則 $m_1=-3$、-2、-1，其相對應 $m_4=3$、2、1，有 3 種情形。

$m_2=0$，$m_3=0$ 則 $m_1=-4$、-3、-2、-1、0，其相對應 $m_4=4$、3、2、1、0，有 5 種情形。

5.當 $m_2+m_3=1$

$m_2=-1$，$m_3=2$ 則 $m_1=-3$，$m_4=2$，有 1 種情形。

$m_2=0$，$m_3=1$ 則 $m_1=-4$、-3、-2，其相對應 $m_4=3$、2、1，有 3 種情形。

6.當 $m_2+m_3=2$

$m_2=0$，$m_3=2$ 則 $m_1=-4$，$m_4=2$，有 1 種情形。

$m_2=1$，$m_3=1$ 則 $m_1=-4$、-3，其相對應 $m_4=2$、1，有 2 種情形。

7.當 $m_2+m_3=3$

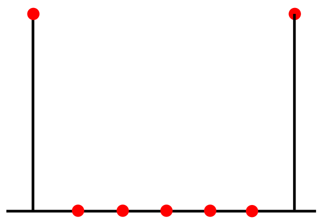
無可增設情形。

故 5 個發射臺共有 1+2+1+3+1+3+5+1+3+1+2=23 種的增設方法數，推論出來的結果與利用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體繪製出來的結果以及使用 Microsoft Excel 軟體計算結果皆相同。

另外發現 $m_2+m_3=-2$ 與 $m_2+m_3=2$；$m_2+m_3=-1$ 與 $m_2+m_3=1$ 的圖形分別相互對稱。

(三)7 個發射臺，如圖二十一

中間可增設 5 個發射臺，高度分別為 0、1、2、3、4、5、6 個單位七種，共有 7^5=16807 種的增設組合，我們運用 Microsoft Excel 軟體的公式，找出所有 $m_i \leq m_{i+1}$ 的組合，即為可以增設發射臺的情形，16807 個組合中共有 137 種可以順利讓發射臺的信號發射到其他每一個發射臺。



圖二十一

7 個發射臺中每兩個相鄰發射臺有 1 組斜率，共會有 6 組斜率，由左到右分別以 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5、m_6表示。各組可能的斜率有：$-6≤m_1≤0$；$-3≤m_2≤1$；$m_3=-2$、-1、0、1；$m_4=-1$、0、1、2；$-1≤m_5≤3$；$0≤m_6≤6$，以 m_3 與 m_4 中間為中心具有左右對稱的形式。

推論增設方法數：

以中間兩組的斜率和(m_3+m_4)來區分，可分為 7 種：

1.當 $m_3+m_4=-3$

無可增設情形。

2.當 $m_3+m_4=-2$

當 $m_3=-2$，$m_4=0$

$m_3=-2$，m_1 與 m_2 都必須小於等於-2，故 m_1+m_2 的組合必不包含其中一數為 0 或-1 的情形，我們把 $P_2(j)$的右上角加上-2，以 $P_2(j)^{-2}$ 表示組合數因有-2 的限制，m_1 與 m_2 不得為 0 或-1，如 $P_2(-4)^{-2}$ 表示將$(m_1,2)_{-4}$：(4,0)、(-3,-1)、(-2,-2)中的(4,0)與(-3,-1)扣除，只有(-2,-2)一組，故 $P_2(-4)^{-2}=1$，請參閱第 21 頁當 $m_k=-2$，$m_{k+1}=0$ 說明。

$(m_1,2)_{-4}$ 其分割不為 0、-1：(-2,-2)；$P_2(-4)^{-2}=1$

$(m_5,2)_6$：(0,6)、(1,5)、(2,4)、(3,3)；$P_2(6)=Q_1(6)+Q_2(6)=1+3=4$

有 $P_2(-4)^{-2}×P_2(6)=1×4=4$ 種。

當 $m_3=-1$，$m_4=-1$

$(m_1,2)_{-4}$ 其分割不為 0：(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)^{-1}=Q_2(-4)=2$

$(m_5,2)_6$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 6 限制：(0,6)、(1,5)、(2,4)、(3,3)；${}^{6}P_2(6)_{-1}=Q_1(6)+Q_2(6)=1+3=4$

有 $P_2(-4)^{-1}×{}^{6}P_2(6)_{-1}=2×4=8$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$ 其分割不為 0：(-2,-1)；$P_2(-3)^{-1}=Q_2(-3)=1$

$(m_5,2)_5$ 其分割包含-1：(-1,6)、(0,5)、(1,4)、(2,3)；$P_2(5)_{-1}=Q_1(6)+Q_1(5)+Q_2(5)=1+1+2=4$

有 $P_2(-3)^{-1}×P_2(5)_{-1}=1×4=4$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$ 其分割不為 0：(-1,-1)；$P_2(-2)^{-1}=Q_2(-2)=1$

$(m_5,2)_4$ 其分割包含-1：(-1,5)、(0,4)、(1,3)、(2,2)；$P_2(4)_{-1}=Q_1(5)+Q_1(4)+Q_2(4)=1+1+2=4$

有 $P_2(-2)^{-1}×P_2(4)_{-1}=1×4=4$ 種。

故 $m_3+m_4=-2$ 共有 4+8+4+4=20 種。

3.當 $m_3+m_4=-1$

當 $m_3=-2$，$m_4=1$

$m_4=1$，m_5 與 m_6 都必須大於等於 1，故 m_5+m_6 的組合必不包含其中一數為 0 的情形，我們把 $P_2(j)$的右上角加上 1，以 $P_2(j)^1$ 表示組合數因有 1 的限制，m_5 與 m_6 不得為 0，故 $P_2(j)^1=Q_2(j)$，如：$P_2(5)^1=Q_2(5)=2$，其證明請參閱討論一。

$(m_1,2)_{-4}$ 其分割不為 0、-1：(-2,-2)；$P_2(-4)^{-2}=1$

$(m_5,2)_5$ 其分割不為 0：(1,4)、(2,3)；$P_2(5)^1=Q_2(5)=2$

有 $P_2(-4)^{-2}×P_2(5)^1=1×2=2$ 種。

當 $m_3=-1$，$m_4=0$

$(m_1,2)_{-5}$其分割不為 0：(-4,-1)、(-3,-2)；$P_2(-5)^{-1}=Q_2(-5)=2$

$(m_5,2)_6$：(0,6)、(1,5)、(2,4)、(3,3)；$P_2(6)=Q_1(6)+Q_2(6)=1+3=4$

有 $P_2(-5)^{-1}\times P_2(6)=2\times 4=8$ 種。

$(m_1,2)_{-4}$其分割不為 0：(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)^{-1}=Q_2(-4)=2$

$(m_5,2)_5$：(0,5)、(1,4)、(2,3)；$P_2(5)=Q_1(5)+Q_2(5)=1+2=3$

有 $P_2(-4)^{-1}\times P_2(5)=2\times 3=6$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$其分割不為 0：(-2,-1)；$P_2(-3)^{-1}=Q_2(-3)=1$

$(m_5,2)_4$：(0,4)、(1,3)、(2,2)；$P_2(4)=Q_1(4)+Q_2(4)=1+2=3$

有 $P_2(-3)^{-1}\times P_2(4)=1\times 3=3$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$其分割不為 0：(-1,-1)；$P_2(-2)^{-1}=Q_2(-2)=1$

$(m_5,2)_3$：(0,3)、(1,2)；$P_2(3)=Q_1(3)+Q_2(3)=1+1=2$

有 $P_2(-2)^{-1}\times P_2(3)=1\times 2=2$ 種。

故 $m_3+m_4=-1$ 共有 2+8+6+3+2=21 種。

4.當 $m_3+m_4=0$

當 $m_3=-2$，$m_4=2$

$m_4=2$，m_5與 m_6都必須大於等於 2，故 m_5+m_6的組合必不包含其中一數為 0 或 1 的情形，我們把 $P_2(j)$的右上角加上 2，以 $P_2(j)^2$表示組合數因有 2 的限制，m_5與 m_6不得為 0 或 1，其中 $P_2(4)^2$表示將$(m_1,2)_4$：(0,4)、(1,3)、(2,2)中的(0,4)與(1,3)扣除，只有(2,2)一組，故 $P_2(4)^2=1$，請參閱第 24 頁當 $m_k=-2$，$m_{k+1}=2$ 說明。

$(m_1,2)_{-4}$其分割不為 0、-1：(-2,-2)；$P_2(-4)^{-2}=1$

$(m_5,2)_4$其分割不為 0、1：(2,2)；$P_2(4)^2=1$

有 $P_2(-4)^{-2}\times P_2(4)^2=1\times 1=1$ 種。

當 $m_3=-1$，$m_4=1$

$(m_1,2)_{-5}$其分割不為 0：(-4,-1)、(-3,-2)；$P_2(-5)^{-1}=Q_2(-5)=2$

$(m_5,2)_5$其分割不為 0：(1,4)、(2,3)；$P_2(5)^1=Q_2(5)=2$

有 $P_2(-5)^{-1}\times P_2(5)^1=2\times 2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-4}$其分割不為 0：(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)^{-1}=Q_2(-4)=2$

$(m_5,2)_4$其分割不為 0：(1,3)、(2,2)；$P_2(4)^1=Q_2(4)=2$

有 $P_2(-4)^{-1}\times P_2(4)^1=2\times 2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$其分割不為 0：(-2,-1)；$P_2(-3)^{-1}=Q_2(-3)=1$

$(m_5,2)_3$其分割不為 0：(1,2)；$P_2(3)^1=Q_2(3)=1$

有 $P_2(-3)^{-1}\times P_2(3)^1=1\times 1=1$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$其分割不為 0：(-1,-1)；$P_2(-2)^{-1}=Q_2(-2)=1$

$(m_5,2)_2$其分割不為 0：(1,1)；$P_2(2)^1=Q_2(2)=1$

有 $P_2(-2)^{-1}\times P_2(2)^1=1\times 1=1$ 種。

當 $m_3=0$，$m_4=0$

$(m_1,2)_{-6}$：(-6,0)、(-5,-1)、(-4,-2)、(-3,-3)；$P_2(-6)=Q_1(-6)+Q_2(-6)=1+3=4$

$(m_5,2)_6$：(0,6)、(1,5)、(2,4)、(3,3)；$P_2(6)=Q_1(6)+Q_2(6)=1+3=4$

有 $P_2(-6)\times P_2(6)=4\times4=16$ 種。

$(m_1,2)_{-5}$：(-5,0)、(-4,-1)、(-3,-2)；$P_2(-5)=Q_1(-5)+Q_2(-5)=1+2=3$

$(m_5,2)_5$：(0,5)、(1,4)、(2,3)；$P_2(5)=Q_1(5)+Q_2(5)=1+2=3$

有 $P_2(-5)\times P_2(5)=3\times3=9$ 種。

$(m_1,2)_{-4}$：(-4,0)、(-3,-1)、(-2,-2)；$P_2(-4)=Q_1(-4)+Q_2(-4)=1+2=3$

$(m_5,2)_4$：(0,4)、(1,3)、(2,2)；$P_2(4)=Q_1(4)+Q_2(4)=1+2=3$

有 $P_2(-4)\times P_2(4)=3\times3=9$ 種。

$(m_1,2)_{-3}$：(-3,0)、(-2,-1)；$P_2(-3)=Q_1(-3)+Q_2(-3)=1+1=2$

$(m_5,2)_3$：(0,3)、(1,2)；$P_2(3)=Q_1(3)+Q_2(3)=1+1=2$

有 $P_2(-3)\times P_2(3)=2\times2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-2}$：(-2,0)、(-1,-1)；$P_2(-2)=Q_1(-2)+Q_2(-2)=1+1=2$

$(m_5,2)_2$：(0,2)、(1,1)；$P_2(2)=Q_1(2)+Q_2(2)=1+1=2$

有 $P_2(-2)\times P_2(2)=2\times2=4$ 種。

$(m_1,2)_{-1}$：(-1,0)；$P_2(-1)=Q_1(-1)=1$

$(m_5,2)_1$：(0,1)；$P_2(1)=Q_1(1)=1$

有 $P_2(-1)\times P_2(1)=1\times1=1$ 種。

$(m_1,2)_0$：(0,0)；$P_2(0)=Q_1(0)=1$

$(m_5,2)_0$：(0,0)；$P_2(0)=Q_1(0)=1$

有 $P_2(0)\times P_2(0)=1\times1=1$ 種。

故 $m_3+m_4=0$ 共有 1+4+4+1+1+16+9+9+4+4+1+1=55 種。

5.$m_3+m_4=1$ 會與 $m_3+m_4=-1$ 圖形相對稱，故也有 21 種。

6.$m_3+m_4=2$ 會與 $m_3+m_4=-2$ 圖形相對稱，故也有 20 種。

7.當 $m_3+m_4=3$

無可增設情形。

故 7 個發射臺共有 20+21+55+21+20=137 種的增設方法數，推論出來的結果與使用 Microsoft Excel 軟體計算結果相同。

(四)一般化：

性質二：

若 $n=2k+1$ 為發射臺數，其中 $k\in N$，且 $k\geq2$，則

$-(n-1)\leq m_1\leq 0$

$-\left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor \leq m_i\leq 1$，若 $2\leq i\leq k$

$-1\leq m_i\leq \left\lfloor \frac{n-1}{n-i} \right\rfloor$，若 $k+1\leq i\leq n-2$

$0\leq m_{n-1}\leq n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

其證明如下：

1.證明$-(n-1)\leq m_1\leq 0$；$0\leq m_{n-1}\leq n-1$

∵I_1和I_n的高度固定為 n-1，且I_2和I_{n-1}的高度範圍為 0~n-1

∴$-(n-1)\leq m_1\leq 0$；$0\leq m_{n-1}\leq n-1$

2.證明 m_k=-2、-1、0、1

令 $m_1=-(n-1)$，∵$m_i\leq m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

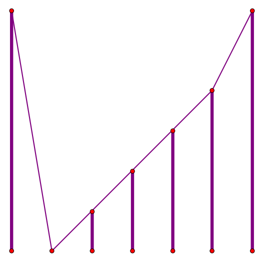
可為 $m_2=m_3=\cdots=m_{n-2}=1$，$m_{n-1}=2$，如圖二十二，

使得 $m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}=n-2-2+1=n-3$，

$m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}+m_{n-1}=n-3+2=n-1$；

$m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=-(n-1)+n-1=\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

可得 $m_k=1$



圖二十二

令 $m_{n-1}=(n-1)$，∵$m_i\leq m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

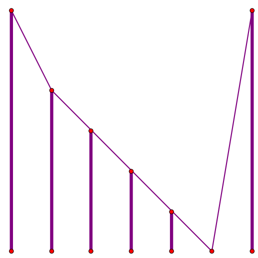
可為 $m_2=m_3=\cdots=m_{n-2}=-1$，$m_1=-2$，如圖二十三，

使得 $m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}=$〔$(n-2)-2+1$〕$\times(-1)=-n+3$，

$m_2+m_3+\cdots+m_{n-2}+m_{n-1}=-n+3-2=-n+1$；

$m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=-(n-1)+n-1=\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

可得 $m_k=-1$



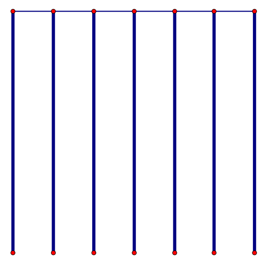
圖二十三

令 $m_1=m_{n-1}=0$

∵$m_i\leq m_{i+1}$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$

必為 $m_1=m_2=\cdots=m_{n-1}=0$，如圖二十四，

可得 $m_k=0$



圖二十四

假設 $2\leq m_k$

∵$m_i\leq m_{i+1}$

∴$2\leq m_k\leq m_{k+1}$，

令 $m_k=m_{k+1}=\cdots=m_{n-1}=2$

則 $m_k+m_{k+1}+\cdots+m_{n-1}=2(n-1-k+1)=2n-2k=4k+2-2k=2k+2=n+1$，發射臺高度為 0~(n-1)，正斜率和最大為(n-1)，但 $m_k+m_{k+1}+\cdots+m_{n-1}=n+1$(→←)

故得證 $m_k<2$

∵$\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$ 且 $m_i\leq m_{i+1}$

∴要使得 m_k 最小，則 m_1、m_2、⋯、m_k 要平均分配-(n-1)，

$m_k=-$〔$\frac{n-1}{k}$〕$=-$〔$\frac{2k+1-1}{k}$〕$=-2$，其中〔 〕為高斯取底符號。

由以上可得 m_k=-2、-1、0、1。

3.證明$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k+1\le i\le n-2$，〔 〕為高斯取底符號，

要使得m_{k+1}最小，則m_1、m_2、⋯、m_{k+1}要平均分配$-(n-1)$，

$m_{k+1}=-\left[\frac{n-1}{k+1}\right]=-\left[\frac{2k+1-1}{k+1}\right]=-\left[\frac{2k}{k+1}\right]=-1$，其中〔 〕為高斯取底符號。

$\therefore -1\le m_{k+1}\le m_{k+2}\le m_{k+2}\le\cdots\le m_{n-2}$

$\because \sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$ 且 $m_i\le m_{i+1}$

∴要使得m_i最大，其中$k+1\le i\le n-2$，

則所有的m_i~m_{n-1}要平均分配$n-1$，從m_i~m_{n-1}共有$(n-1-i+1)=n-i$個斜率，

故$m_i=\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，其中$k+1\le i\le n-2$，且〔 〕為高斯取底符號。

同理可證，$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若$2\le i\le k$，〔 〕為高斯取底符號

$\because -1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k+1\le i\le n-2$

令$i=k+1$，可得$-1\le m_{k+1}\le\left[\frac{n-1}{n-k-1}\right]\Rightarrow -1\le m_{k+1}\le\left[\frac{2k}{k}\right]\Rightarrow -1\le m_{k+1}\le 2$

故$m_{k+1}=-1$、0、1、2

與$m_k=-2$、-1、0、1相對稱。

由以上可得

$-(n-1)\le m_1\le 0$

$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若$2\le i\le k$

$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k+1\le i\le n-2$

$0\le m_{n-1}\le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

性質二得證

4.求出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數

∵$m_k=-2$、-1、0、1，$m_{k+1}=-1$、0、1、2，故可將m_k與m_{k+1}的和分為-3、-2、-1、0、1、2、3七種情形，利用$m_i\le m_{i+1}$且$\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$來推算出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數。

由上可知

$-(n-1)\le m_1\le 0$

$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若$2\le i\le k$

$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k+1\le i\le n-2$

$0\le m_{n-1}\le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

以中間兩組的斜率和(m_k+m_{k+1})來區分，可分為 7 種：

(1)當 $m_k+m_{k+1}=-3$

∵$m_k=-2$、-1、0、1，$m_{k+1}=-1$、0、1、2

∴$m_k+m_{k+1}=-3$ 必為 $m_k=-2$，$m_{k+1}=-1$

∵$m_i \leq m_{i+1}$ 且 $m_k=-2$，

∴$m_{k-1} \leq m_k \leq -2$

令 $m_1=m_2=\cdots=m_k=-2$，則 $\sum_{i=1}^{k+1} m_i = k\times(-2)+(-1)=-2k-1=-(2k+1)$

發射臺高度為 $0\sim(n-1)$，負斜率和最小為 $-(n-1)=-((2k+1)-1)=-2k$，

但 $\sum_{i=1}^{k+1} m_i = -(2k+1)$ $(\rightarrow\leftarrow)$

故 $m_k+m_{k+1}=-3$ 無可增設情形。

同理可證 $m_k+m_{k+1}=3$ 無可增設情形

故 m_k 與 m_{k+1} 的和僅有-2、-1、0、1、2 等五種情形。

(2)當 $m_k+m_{k+1}=-2$

當 $m_k=-2$，$m_{k+1}=0$

$m_k=-2$，$m_1\sim m_{k-1}$ 都必須小於等於-2，故 $m_1+m_2+\cdots+m_{k-1}$ 的組合必不包含其中一數為 0 或-1 的情形，我們把 $P_{k-1}(j)$的右上角加上-2，以 $P_{k-1}(j)^{-2}$ 表示組合數因有-2 的限制，m_1、m_2、…、m_{k-1} 皆不得為 0 或-1。

為符合 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i = 0$，故$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$與$(m_{k+2},k-1)_{n-1}$的和為 2，

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}=(m_1,k-1)_{-(2k+1-3)}=(m_1,k-1)_{-(2k-2)}$，$-(2k-2)\div(k-1)=-2(k-1)\div(k-1)=-2$，

故將 $-(2k-2)$ 分為 $k-1$ 個數，且 $m_1\sim m_{k-1}$ 都必須小於等於-2，只能分成 $m_1=m_2=\cdots=m_{k-1}=-2$

即 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}=P_{k-1}(-(2k-2))^{-2}=P_{k-1}(-2(k-1))^{-2}=1$

故只有$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$與$(m_{k+2},k-1)_{n-1}$此一種組合。

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$其分割不為 0、-1 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}=1$

$(m_{k+2},k-1)_{n-1}$的個數為 $P_{k-1}(n-1)=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-1)$

有 $1\times P_{k-1}(n-1)=P_{k-1}(n-1)$種。

當 $m_k=-1$，$m_{k+1}=-1$

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-3))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-1}$其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

${}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-1)$

有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(n-4)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-4))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-4))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-2}$其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

${}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+\cdots+Q_{k-2}(n-1)+$

$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+\cdots+Q_{k-1}(n-2)$

有 $P_{k-1}(-(n-4))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(n-5)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-5))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-5))$

$(m_{k+1},k-1)_{n-3}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

$${}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+\cdots+Q_{k-3}(n-1)+$$
$$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+\cdots+Q_{k-2}(n-2)+$$
$$Q_1(n-3)+Q_2(n-3)+Q_3(n-3)+\cdots+Q_{k-1}(n-3)$$

有 $P_{k-1}(-(n-5))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}$ 種

……

$(m_1,k-1)_{-(k+1)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k+1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k+1))$

$(m_{k+1},k-1)_{k+3}$ 其分割包含-1，但受斜率最大值為 n-1 限制的個數為

$${}^{n-1}P_{k-1}(k+3)_{-1}=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+$$
$$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+$$
$$\cdots+$$
$$Q_1(k+3)+Q_2(k+3)+Q_3(k+3)+\cdots+Q_{k-1}(k+3)$$

有 $P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+3)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-k}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-k)^{-1}=Q_{k-1}(-k)$

$(m_{k+1},k-1)_{k+2}$ 的個數為 $P_{k-1}(k+2)_{-1}=Q_1(n-1)+$

$$Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+$$
$$\cdots+$$
$$Q_1(k+2)+Q_2(k+2)+Q_3(k+2)+\cdots+Q_{k-1}(k+2)$$

有 $P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+2)_{-1}$ 種

$(m_1,k-1)_{-(k-1)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k-1))$

$(m_{k+1},k-1)_{k+1}$ 的個數為 $P_{k-1}(k+1)_{-1}=Q_1(n-2)+$

$$Q_1(n-3)+Q_2(n-3)+$$
$$\cdots+$$
$$Q_1(k+1)+Q_2(k+1)+Q_3(k+1)+\cdots+Q_{k-1}(k+1)$$

有 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}$ 種

$m_k=-1$，$m_{k+1}=-1$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}+P_{k-1}(-(n-4))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}+P_{k-1}(-(n-5))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}+\cdots+P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+3)_{-1}+P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+2)_{-1}$ 種。

故 $m_k+m_{k+1}=-2$ 有 $m_k=-2$，$m_{k+1}=0$ 與 $m_k=-1$，$m_{k+1}=-1$ 兩種情形，共有 $P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}+P_{k-1}(-(n-4))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}+P_{k-1}(-(n-5))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}+\cdots+P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+3)_{-1}+P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+2)_{-1}+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}$ 種。

(3)當 $m_k+m_{k+1}=-1$

當 $m_k=-2$，$m_{k+1}=1$

$m_k=-2$，$m_1\sim m_{k-1}$ 都必須小於等於-2，故 $m_1+m_2+\cdots+m_{k-1}$ 的組合必不包含其中一數為-1 的情形，為符合 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$，故$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$與$(m_{k+2},k-1)_{n-2}$的和為 1，

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}=(m_1,k-1)_{-(2k+1-3)}=(m_1,k-1)_{-(2k-2)}$，$-(2k-2)\div(k-1)=-2(k-1)\div(k-1)=-2$，

故將 $-(2k-2)$ 分為 $k-1$ 個數，且 $m_1\sim m_{k-1}$ 都必須小於等於 -2，只能分成 $m_1=m_2=\cdots=m_{k-1}=-2$

即 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}=P_{k-1}(-(2k-2))^{-2}=P_{k-1}(-2(k-1))^{-2}=1$

故只有 $(m_1,k-1)_{-(n-3)}$ 與 $(m_{k+2},k-1)_{n-2}$ 此一種組合。

$m_{k+1}=1$，$m_{k+2}\sim m_{n-1}$ 都必須大於等於 1，故 $m_{k+2}+m_{k+3}+\cdots+m_{n-1}$ 的組合必不包含其中一數為 0 的情形，我們把 $P_{k-1}(j)$ 的右上角加上 1，以 $P_{k-1}(j)^1$ 表示組合數因有 1 的限制，$m_{k+2}\sim m_{n-1}$ 都不得為 0，故 $P_{k-1}(j)^1=P_{k-1}(j)-P_{k-2}(j)=Q_{k-1}(j)$，其證明請參閱討論一。

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$ 其分割不為 0、-1 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}=1$

$(m_{k+2},k-1)_{n-2}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(n-2)^1=Q_{k-1}(n-2)$

有 $1\times P_{k-1}(n-2)^1$ 種

當 $m_k=-1$，$m_{k+1}=0$

$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-2))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-1}$ 的個數為 $P_{k-1}(n-1)=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)+\cdots+Q_{k-1}(n-1)$

有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-1)$ 種

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-3))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-2}$ 的個數為 $P_{k-1}(n-2)=Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+\cdots+Q_{k-1}(n-2)$

有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)$ 種

…

$(m_1,k-1)_{-(k-1)}$ 其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k-1))$

$(m_{k+2},k-1)_k$ 的個數為 $P_{k-1}(k)=Q_1(k)+Q_2(k)+Q_3(k)+\cdots+Q_{k-1}(k)$

有 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)$ 種

$m_k=-1$，$m_{k+1}=0$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)+\cdots+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)$ 種。

故 $m_k+m_{k+1}=-1$ 有 $m_k=-2$，$m_{k+1}=1$ 與 $m_k=-1$，$m_{k+1}=0$ 兩種情形，共有 $P_{k-1}(n-2)^1+P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)+\cdots+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)$ 種。

(4)當 $m_k+m_{k+1}=0$

當 $m_k=-2$，$m_{k+1}=2$

$m_{k+1}=2$，$m_{k+2}\sim m_{n-1}$ 都必須大於等於 2，故 $m_{k+2}+m_{k+3}+\cdots+m_{n-1}$ 的組合必不包含其中一數為 0 或 1 的情形，我們把 $P_{k-1}(j)$ 的右上角加上 2，以 $P_{k-1}(j)^2$ 表示組合數因有 2 的限制，m_{k+2}、m_{k+3}、…、m_{n-1} 皆不得為 0 或 1。

為符合 $\sum_{i=1}^{n-1} m_i=0$，故 $(m_1,k-1)_{-(n-3)}$ 與 $(m_{k+2},k-1)_{n-3}$ 的和為 0，

$(m_{k+2},k-1)_{n-3}=(m_{k+2},k-1)_{2k+1-3}=(m_1,k-1)_{2k-2}$，$(2k-2)\div(k-1)=2(k-1)\div(k-1)=2$，

故將 $2(k-1)$ 分為 $k-1$ 個數，且 $m_{k+2}\sim m_{n-1}$ 都必須大於等於 2，只能分成 $m_{k+2}=m_{k+3}=\cdots=m_{n-1}=2$

即 $P_{k-1}(n-3)^2=P_{k-1}(2k-2)^2=P_{k-1}(2(k-1))^2=1$

故只有$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$與$(m_{k+2},k-1)_{n-3}$此一種組合。

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$其分割不為 0、-1 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}=1$

$(m_{k+2},k-1)_{n-3}$其分割不為 0、1 的個數為 $P_{k-1}(n-3)^{2}=1$

有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}\times P_{k-1}(n-3)^{2}=1$ 種。

$m_k=-2$，$m_{k+1}=2$ 組合有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}\times P_{k-1}(n-3)^{2}$

當 $m_k=-1$，$m_{k+1}=1$

$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-2))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-2}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(n-2)^{1}=Q_{k-1}(n-2)$

有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)^{1}$ 種。

$(m_1,k-1)_{-(n-3)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}=Q_{k-1}(-(n-3))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-3}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(n-3)^{1}=Q_{k-1}(n-3)$

有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-3)^{1}$ 種。

…

$(m_1,k-1)_{-(k-1)}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}=Q_{k-1}(-(k-1))=1$

$(m_{k+2},k-1)_{k-1}$其分割不為 0 的個數為 $P_{k-1}(k-1)^{1}=Q_{k-1}(k-1)=1$

有 $P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k-1)^{1}=1$ 種。

$m_k=-1$，$m_{k+1}=1$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)^{1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-3)^{1}+\cdots+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k-1)^{1}$ 種。

當 $m_k=0$，$m_{k+1}=0$

$(m_1,k-1)_{-(n-1)}$的個數為 $P_{k-1}(-(n-1))=Q_1(-(n-1))+Q_2(-(n-1))+Q_3(-(n-1))+\cdots+Q_{k-1}(-(n-1))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-1}$的個數為 $P_{k-1}(n-1)=Q_1(n-1)+Q_2(n-1)+Q_3(n-1)\cdots Q_{k-1}(n-1)$

有 $P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)$種。

$(m_1,k-1)_{-(n-2)}$的個數為 $P_{k-1}(-(n-2))=Q_1(-(n-2))+Q_2(-(n-2))+Q_3(-(n-2))+\cdots+Q_{k-1}(-(n-2))$

$(m_{k+2},k-1)_{n-2}$的個數為 $P_{k-1}(n-2)=Q_1(n-2)+Q_2(n-2)+Q_3(n-2)+\cdots+Q_{k-1}(n-2)$

有 $P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)$種。

…

$(m1,k-1)_0$的個數為 $P_{k-1}(0)=Q_1(0)=1$

$(m_{k+2},k-1)_0$的個數為 $P_{k-1}(0)=Q_1(0)=1$

有 $P_{k-1}(0)\times P_{k-1}(0)=1$ 種。

$m_k=0$，$m_{k+1}=0$ 其組合共有 $P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)+\cdots+P_{k-1}(0)\times P_{k-1}(0)$種

故 $m_k+m_{k+1}=0$ 有 $m_k=-2$，$m_{k+1}=2$、$m_k=-1$，$m_{k+1}=1$ 與 $m_k=0$，$m_{k+1}=0$ 三種情形，共有 $P_{k-1}(-(n-3))^{-2}\times P_{k-1}(n-3)^{2}+P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)^{1}+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-3)^{1}+\cdots+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k-1)^{1}+P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-1))\times P_{k-1}(n-1)+\cdots+P_{k-1}(0)\times P_{k-1}(0)$種。

(5)$m_k+m_{k+1}=1$ 會與 $m_k+m_{k+1}=-1$ 圖形相對稱，故也有共有 $1\times P_{k-1}(n-2)^{1}+P_{k-1}(-(n-2))^{-1}\times P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times P_{k-1}(n-2)+\cdots+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k)$種。

(6)$m_k+m_{k+1}=2$ 會與 $m_k+m_{k+1}=-2$ 圖形相對稱，故也有 $P_{k-1}(n-1)+P_{k-1}(-(n-3))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-1)_{-1}+P_{k-1}(-(n-4))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-2)_{-1}+P_{k-1}(-(n-5))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(n-3)_{-1}+\cdots+P_{k-1}(-(k+1))^{-1}\times{}^{n-1}P_{k-1}(k+3)_{-1}+P_{k-1}(-k)^{-1}\times P_{k-1}(k+2)_{-1}+P_{k-1}(-(k-1))^{-1}\times P_{k-1}(k+1)_{-1}$種。

利用上述推論所得的公式計算出 n=5~11 個發射臺，可以讓任 2 個發射臺間的信號不被阻擋的增設數，如表五，其計算過程請參閱附件二。

k	n=2k+1	$m_k+m_{k+1}=-2$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=-1$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=0$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=1$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=2$ 組合數	發射臺增設數
2	5	3	4	9	4	3	23
3	7	20	21	55	21	20	137
4	9	88	91	301	88	91	659
5	11	350	316	1433	350	316	2765

表五

五、找出計算信號直線數量的公式

任意 n 個發射臺可視為平面上 n 個點，每兩個點可以連成一條信號直線，n 個發射臺的信號直線數可分為無共線，1 組共線及 2 組以上共線 3 種：

(一)無共線

任意 n 個發射臺可視為 n 個任三點不共線的點，每兩個點可以連成一條信號直線，共有 $C_2^n=\frac{n!}{(n-2)!2!}$條的直線。

(二)1 組共線

共線的點之間只能產生一條的直線，若有 m 點共線，其中 m≥3，其減少的直線數為 C_2^m-1。故 n 個發射臺，其中有 m 個相鄰的發射臺產生的斜率相同，其產生的信號直線數為 $C_2^n-(C_2^m-1)=C_2^n-C_2^m+1$ 條。

(三)2 組以上共線

找出 3 個點以上共線的情形，利用 $C_2^n-(C_2^m-1)$公式，計算出所有信號直線數。

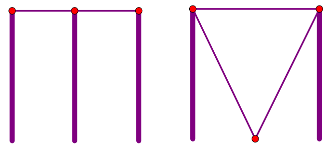
利用所求得的公式計算出已經用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體畫出來的發射臺，驗證是否正確。

(一)3 個發射臺

無共線： $C_2^3=3$

3 點共線： $C_2^3-C_2^3+1=1$

3 個發射臺信號直線有 1、3 條，如圖二十五。



3 點共線，1 條　　無共線，3 條

圖二十五

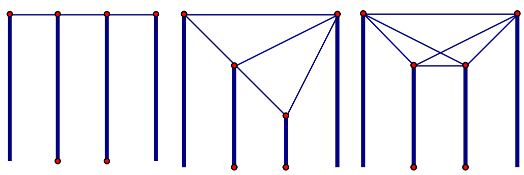
(二)4 個發射臺

無共線： $C_2^4=6$

3 點共線： $C_2^4-C_2^3+1=4$

4 點共線： $C_2^4-C_2^4+1=1$

4 個發射臺信號直線有 1、4、6 條，如圖二十六。



4 點共線，1 條　　3 點共線，4 條　　無共線，6 條

圖二十六

(三)5 個發射臺

無共線：$C_2^5=10$

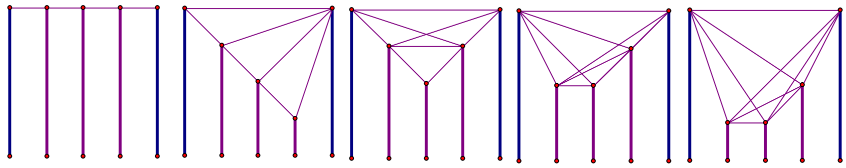
3 點共線：$C_2^5-C_2^3+1=8$

4 點共線：$C_2^5-C_2^4+1=5$

5 點共線：$C_2^5-C_2^5+1=1$

2 組 3 點共線：$C_2^5-C_2^3+1-C_2^3+1=6$

5 個發射臺信號直線有 1、5、6、8、10 條，如圖二十七。



5 點共線，1 條　4 點共線，5 條　2 組 3 點共線，6 條　3 點共線，8 條　無共線，10 條

圖二十七

(四)6 個發射臺

無共線：$C_2^6=15$

3 點共線：$C_2^6-C_2^3+1=13$

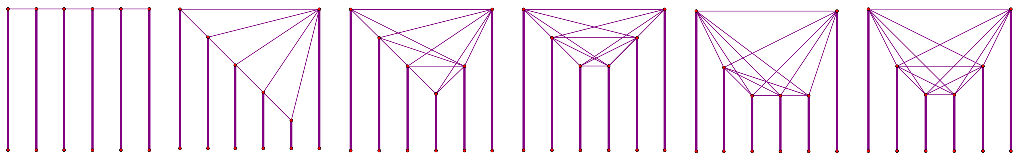
4 點共線：$C_2^6-C_2^4+1=10$

5 點共線：$C_2^6-C_2^5+1=6$

6 點共線：$C_2^6-C_2^6+1=1$

2 組 3 點共線：$C_2^6-C_2^3+1-C_2^3+1=11$

6 個發射臺信號直線有 1、6、10、11、13、15 條，如圖二十八。



6 點共線，1 條　5 點共線，6 條　4 點共線，10 條　2 組 3 點共線，11 條　3 點共線，13 條　無共線，15 條

圖二十八

(五)7 個發射臺

無共線：$C_2^7=21$

3 點共線：$C_2^7-C_2^3+1=19$

4 點共線：$C_2^7-C_2^4+1=16$

5 點共線：$C_2^7-C_2^5+1=12$

6 點共線：$C_2^7-C_2^6+1=7$

7 點共線：$C_2^7-C_2^7+1=1$

2 組 3 點共線：$C_2^7-C_2^3+1-C_2^3+1=17$

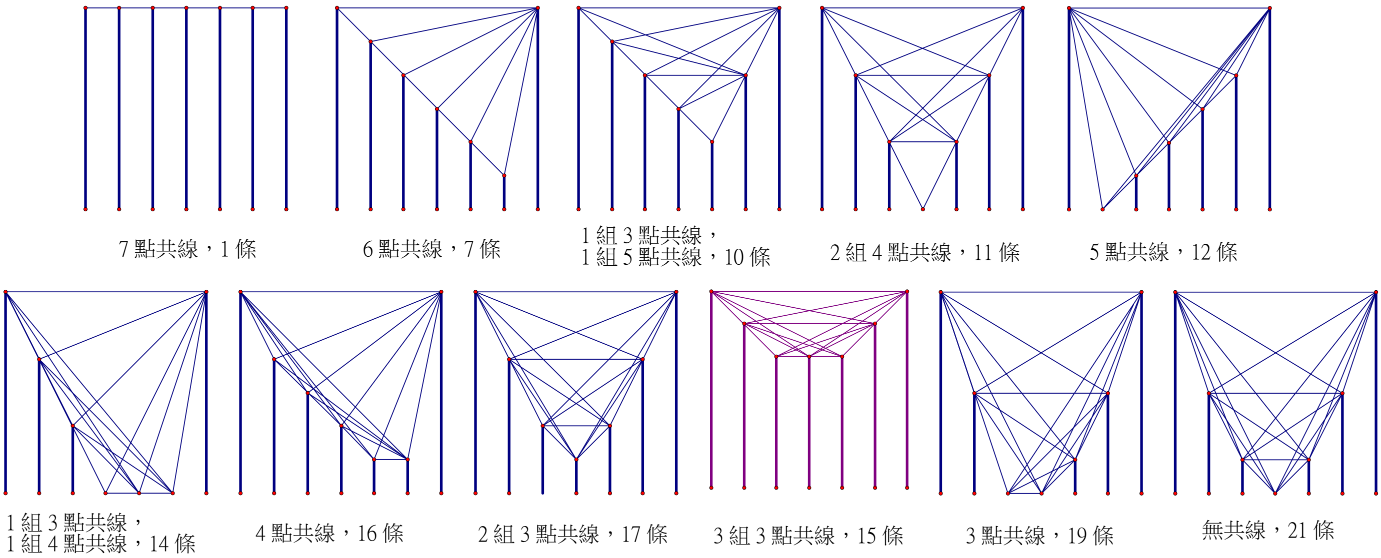
3 組 3 點共線：$C_2^7-C_2^3+1-C_2^3+1-C_2^3+1=15$

2 組 4 點共線：$C_2^7-C_2^4+1-C_2^4+1=11$

1 組 3 點共線，1 組 4 點共線：$C_2^7-C_2^3+1-C_2^4+1=14$

1 組 3 點共線，1 組 5 點共線：$C_2^7-C_2^3+1-C_2^5+1=10$

6 個發射臺信號直線有 1、7、10、11、12、14、16、17、19、21 條，如圖二十九。



圖二十九

伍、研究結果

一、已在風車底座上找出最佳的天線裝設高度，將算出來的結果告知中華電信的人員，並完成天線架設，學校老師表示手機收訊狀況良好。

二、將發射臺數量分為 $n=2k$ 和 $n=2k+1$ 個兩種，$k\in N$，$k\geq 2$

當 $n=2k$

將 m_k 分為-1、0、1 三種情形，推算出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數。

當 $n=2k+1$

將 m_k 與 m_{k+1} 的和分為-2、-1、0、1、2 五種情形，推算出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數。

三、n 個發射臺的信號直線數可分為無共線，1 組共線及 2 組以上共線 3 種：

(一)無共線共有 $C_2^n=\frac{n!}{(n-2)!2!}$ 條的直線。

(二)1 組共線共有 $C_2^n-(C_2^m-1)=C_2^n-C_2^m+1$ 條的直線。

(三)2 組以上共線需利用 $C_2^n-(C_2^m-1)$ 公式，計算出所有信號直線數。

陸、討論

一、證明 $P_{k-1}(j)^1=P_{k-1}(j)-P_{k-2}(j)=Q_{k-1}(j)$

$P_n(j)$表示 n 個斜率其和為 j 的組合數，其中 $n\in N$，$j\in Z$。且 $P_n(j)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(j)$。

$P_n(j)^1$ 表示 n 個斜率其和為 j 的組合數，但其中各個斜率皆大於等於 1，即不為 0。

而 $Q_i(j)$表示將 j 分割成 i 個整數的方法數，且分割時數字可重複但須符合遞增的原則，分割成的數不得為 0 且其絕對值須小於等於 $|j|$，其中 $i\in N$，$j\in Z$。由上可知 $Q_i(j)$ 不包含為 0 的情形。故 $P_n(j)^1=Q_n(j)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(j)-\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(j)=P_n(j)-P_{n-1}(j)$，

令 $n=k-1$，得 $P_{k-1}(j)^1=Q_{k-1}(j)=P_{k-1}(j)-P_{k-2}(j)$，得證。

同理可證 $P_{k-1}(j)^{-1}=P_{k-1}(j)-P_{k-2}(j)=Q_{k-1}(j)$

二、以整數分割找出發射臺共線的情形

雖然已證明可以利用C_2^n-(C_2^m-1)的公式，來計算所有信號直線的數量，但無法確定各發射臺的共線情形，我們發現可以利用整數分割來進行確認。

n 個發射臺有 n-1 個斜率，將 n-1 進行整數分割，分成的數皆為 1 表示每組斜率都不同，則無共線；分成的數字包含 2 表示有 2 個斜率相同，即為 3 點共線，分成數字包含 3 表示有 3 個斜率相同，即為 4 點共線；…以此類推，$P_{n-1}(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(n-1)$為斜率分類可能的種類數，

如：$P_5(5)=Q_1(5)+Q_2(5)+Q_3(5)+Q_4(5)+Q_5(5)=1+2+2+1+1=7$，代表 6 個發射臺可能有 7 種共線的種類，其代表意義如下：

$Q_1(5)=1\Rightarrow(5)$：6 點共線。

$Q_2(5)=2\Rightarrow(1,4)$：5 點共線、(2,3)：1 組 3 點共線，1 組 4 點共線。

$Q_3(5)=2\Rightarrow(1,1,3)$：4 點共線、(1,2,2)：2 組 3 點共線。

$Q_4(5)=1\Rightarrow(1,1,1,2)$：3 點共線。

$Q_5(5)=1\Rightarrow(1,1,1,1,1)$：無共線。

這些斜率必須符合$\sum_{i=1}^{n-1}m_i=0$且 $m_i\in Z$，其中(2,3)這一組，設其斜率分別為 m_a 及 m_b，則 $2m_a+3m_b=0$，求出最小整數解為 $m_a=-3$，$m_b=2$，∵n=6，故最大正斜率和為 5，但此解的正斜率和為 6，故(2,3)：1 組 3 點共線，1 組 4 點共線的組合不存在。

以整數分割找出發射臺共線方法如下：

(一)以 $P_{n-1}(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(n-1)$將斜率分類找出可能的種類數。

(二)列出所有可能的整數分割情形。

(三)將整數分割的結果列成恆等式$\sum_{j=1}^{k}a_j\times m_j=0$，其中 m_j 為斜率，共分為 k 組不同的斜率，斜率 m_j 有 a_j 個，代入 m_j 必須符合正負斜率和絕對值皆小於發射臺數，且 a_j、$k\in N$，$m_j\in Z$，該組即為正確的共線情形。

將已繪製出圖形的結果計算如下：

(一)n=3，有 2 個斜率

$P_2(2)=Q_1(2)+Q_2(2)=1+1=2$。

$Q_1(2)=1\Rightarrow(2)$：3 點共線。

$Q_2(2)=1\Rightarrow(1,1)$：無共線。

(二)n=4，有 3 個斜率

$P_3(3)=Q_1(3)+Q_2(3)+Q_3(3)=1+1+1=3$

$Q_1(3)=1\Rightarrow(3)$：4 點共線。

$Q_2(3)=1\Rightarrow(1,2)$：3 點共線。

$Q_3(3)=1\Rightarrow(1,1,1)$：無共線。

(三)n=5，有 4 個斜率

$P_4(4)=Q_1(4)+Q_2(4)+Q_3(4)+Q_4(4)=1+2+1+1=5$

$Q_1(4)=1\Rightarrow(4)$：5 點共線。

$Q_2(4)=1\Rightarrow(1,3)$：4 點共線；(2,2)：2 組 3 點共線。

$Q_3(4)=1\Rightarrow(1,1,2)$：3 點共線。

$Q_4(4)=1\Rightarrow(1,1,1,1)$：無共線。

(四)n=6，有 5 個斜率

$P_5(5)=Q_1(5)+Q_2(5)+Q_3(5)+Q_4(5)+Q_5(5)=1+2+2+1+1=7$

$Q_1(5)=1\Rightarrow(5)$：6 點共線。

$Q_2(5)=2\Rightarrow(1,4)$：5 點共線、(2,3)：1 組 3 點共線，1 組 4 點共線。

$Q_3(5)=2\Rightarrow(1,1,3)$：4 點共線、(1,2,2)：2 組 3 點共線。

$Q_4(5)=1\Rightarrow(1,1,1,2)$：3 點共線。

$Q_5(5)=1\Rightarrow(1,1,1,1,1)$：無共線。

其中(2,3)這一組，$\sum_{j=1}^{k} a_j \times m_j=0$，k=2，則 $2m_1+3m_2=0$，求出最小整數解為 $m_1=-3$，$m_2=2$，正負斜率和絕對值大於 5，此組合不存在，故 6 個發射臺有 6 種共線情形。

(五)n=7，有 6 個斜率

$P_6(6)=Q_1(6)+Q_2(6)+Q_3(6)+Q_4(6)+Q_5(6)+Q_6(6)=1+3+3+2+1+1=11$

$Q_1(6)=1\Rightarrow(6)$：7 點共線。

$Q_2(6)=3\Rightarrow(1,5)$：6 點共線、(2,4)：1 組 3 點共線，1 組 5 點共線、(3,3)：2 組 3 點共線。

$Q_3(6)=3\Rightarrow(1,1,4)$：5 點共線、(1,2,3)：1 組 3 點共線，1 組 4 點共線、(2,2,2)：3 組 3 點共線。

$Q_4(6)=2\Rightarrow(1,1,1,3)$：4 點共線、(1,1,2,2)：2 組 3 點共線。

$Q_5(6)=1\Rightarrow(1,1,1,1,2)$：3 點共線。

$Q_6(6)=1\Rightarrow(1,1,1,1,1,1)$：無共線。

(六)n=8，有 7 個斜率

$P_7(7)=Q_1(7)+Q_2(7)+Q_3(7)+Q_4(7)+Q_5(7)+Q_6(7)+Q_7(7)=1+3+4+3+2+1+1=15$

$Q_1(7)=1\Rightarrow(7)$：8 點共線。

$Q_2(7)=3\Rightarrow(1,6)$：7 點共線、(2,5)：1 組 3 點共線，1 組 6 點共線、(3,4)：1 組 4 點共，1 組 5 點共線。

$Q_3(7)=4\Rightarrow(1,1,5)$：6 點共線、(1,2,4)：1 組 3 點共線，1 組 5 點共線、(1,3,3)：2 組 4 點共線、(2,2,3)：2 組 3 點共線，1 組 4 點共線。

$Q_4(7)=3\Rightarrow(1,1,1,4)$：5 點共線、(1,1,2,3)：1 組 3 點共線，1 組 4 點共線、(1,2,2,2)：3 組 3 點共線。

$Q_5(7)=2\Rightarrow(1,1,1,1,3)$：4 點共線、(1,1,1,2,2)：2 組 3 點共線。

$Q_6(7)=1\Rightarrow(1,1,1,1,1,2)$：3 點共線。

$Q_7(7)=1\Rightarrow(1,1,1,1,1,1,1)$：無共線。

其中(2,5)這一組，$\sum_{j=1}^{k} a_j \times m_j=0$，k=2，則 $2m_1+5m_2=0$，求出最小整數解為 $m_1=-5$，$m_2=2$，及(3,4)這一組，$\sum_{j=1}^{k} a_j \times m_j=0$，k=2，則 $3m_1+4m_2=0$，求出最小整數解為 $m_1=-4$，$m_2=3$，正負斜率和絕對值皆大於 7，此兩組組合不存在，故 8 個發射臺有 13 種共線情形。

柒、結論

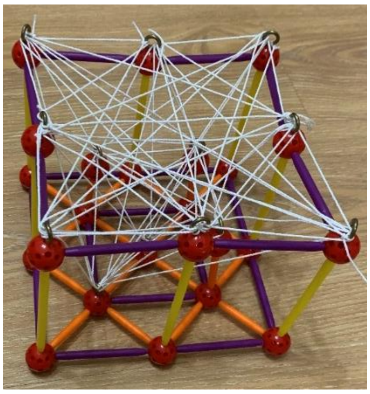
一、這次的研究中，我們從生活中遇到的問題出發，順利找出解答後，再以科學研習雙月刊中的數學題來進行研究，改變發射臺的個數，找出一般式。最後也發現可以運用整數分割來找出發射臺共線的情形。

二、在研究過程中我們發現找尋答案方法有很多種，為了找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數，我們分別使用 the geometer's sketchpad 動態幾何軟體繪製出圖形、利用 Microsoft Excel 軟體找出正確解答以及推論的方式，各方法間可以彼此驗證結果的正確性。

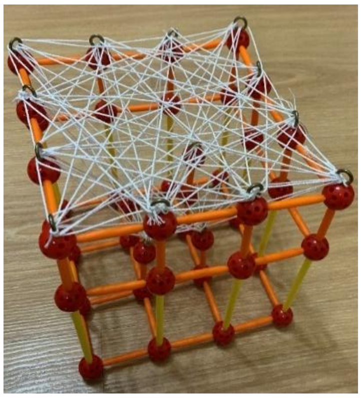
三、在研究中我們發現耐心與細心非常重要，發射臺的數量愈多，斜率的組數也愈多，必須利用整數分割才能找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的個數。

四、未來發展方向：

目前我們找出平面上任意 n 個發射臺之間都可以互相連成直線的規則，但若將平面延伸到立體，在正方形的邊上架設固定高度的發射臺，正方形內部則為增設的發射臺，如圖三十，正方形上每個發射臺之間都可以互相連成直線的規則為何？又可以連成幾條信號直線呢？將是未來可以研究的方向。



3×3 正方形發射臺模型



4×4 正方形發射臺模型

圖三十

捌、參考資料

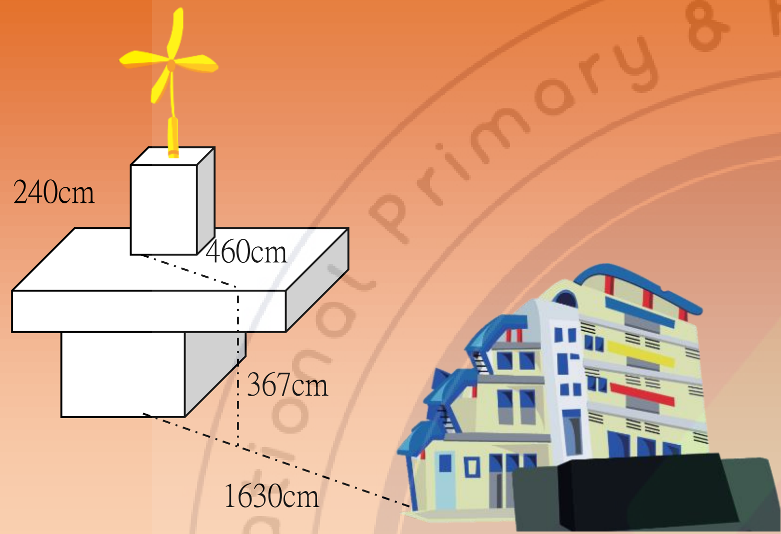
一、游森棚（2020）．信號發射臺．*科學研習雙月刊*，*59*(5)。

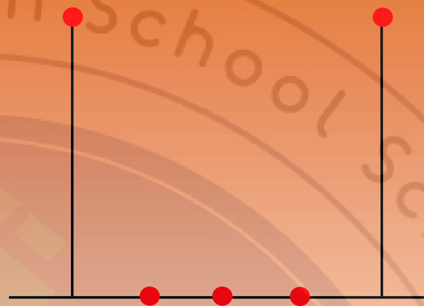
二、陳泓嘉（2020）．*以圖形分層遞降方式探討整數分割方法數*．中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。

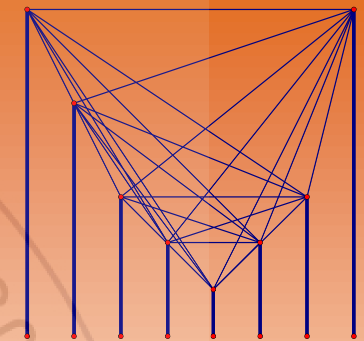
【評語】080404

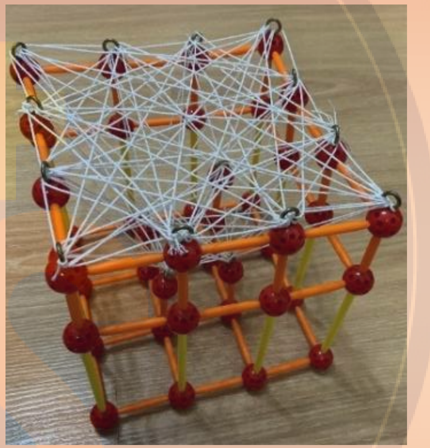
1. 該作品從生活中遇到的問題出發，討論發射台訊號發射的可行性，經轉換為幾何圖形後，依由整數分割的方式求解，頗具趣味性。
2. 作者結合資訊科技，運用 geometer's sketchpad 動態幾何軟體將所有圖形畫出，有利於對問題進行分析與探究，很值得鼓勵。
3. 作者將各種可能的情況條列的非常清楚，並仔細討論解的個數，是一個很完整的作品。

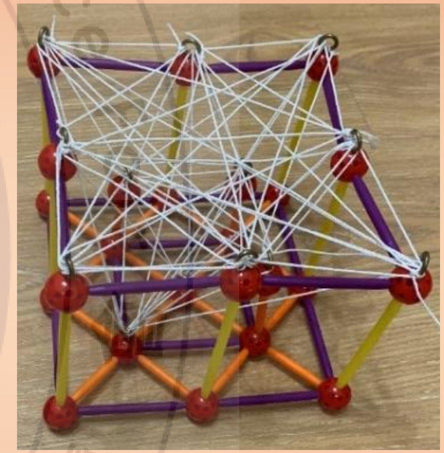
作品簡報











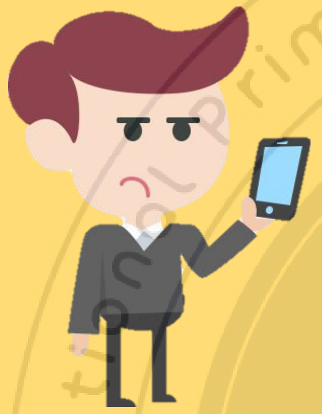
科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：

移線升

研究動機



訊號
不佳

研究目的

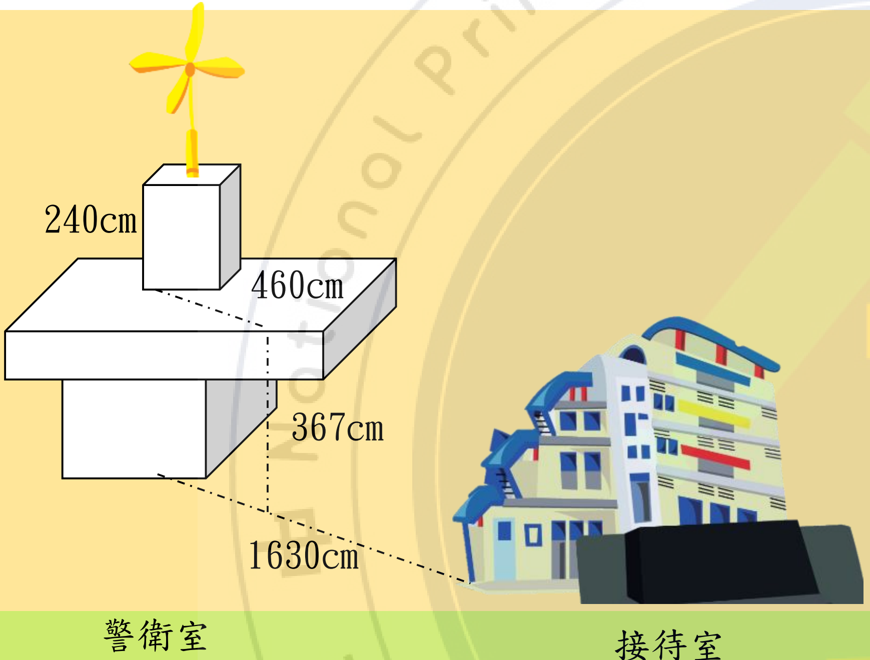
一、在風車底座上找出最佳的天線裝設高度。

二、找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的規則。

三、找出計算信號直線數量的公式。

研究過程

一、在風車底座上找出最佳的天線裝設高度。



$\because \overline{AF}$、$\overline{BE}$ 為鉛垂線，且 $\overline{AE}$、$\overline{BC}$ 為水平線

$\therefore \angle FAE = \angle EBC = 90°$，且 $\overline{AF} // \overline{BE}$

$\because \overline{AF} // \overline{BE}$，$\therefore \angle AFE = \angle BEC$(同位角)

$\because \angle FAE = \angle EBC$，$\angle AFE = \angle BEC$

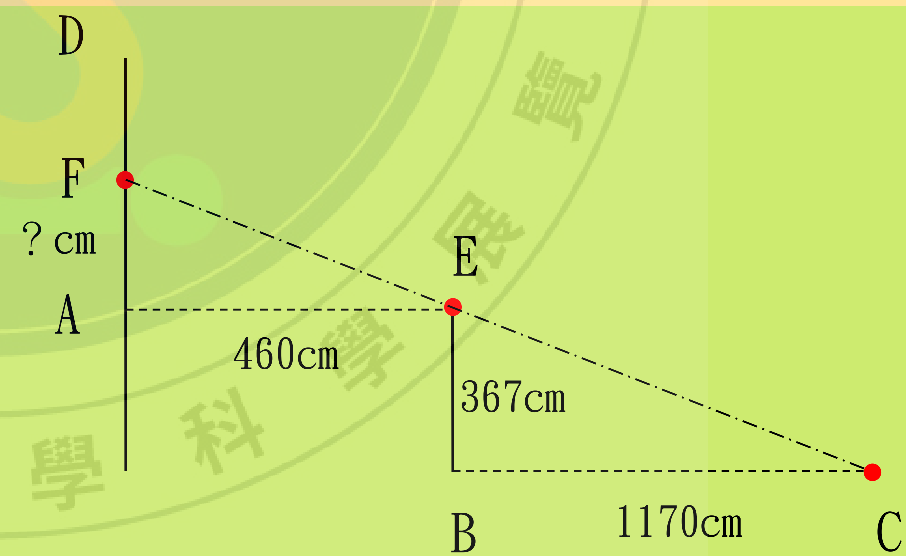
$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BCE$

可知 $\overline{AF} : \overline{AE} = \overline{BE} : \overline{BC}$

$\overline{AF} : 460 = 367 : 1170$

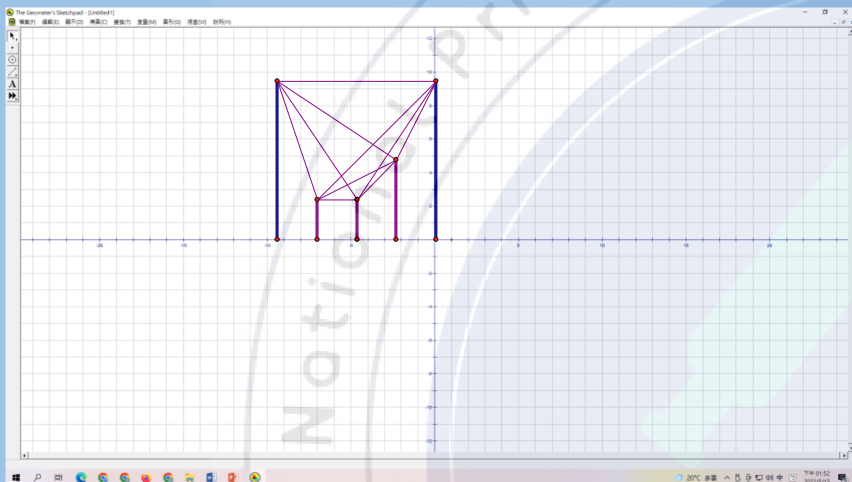
$\overline{AF} = 460 \times 367 \div 1170$

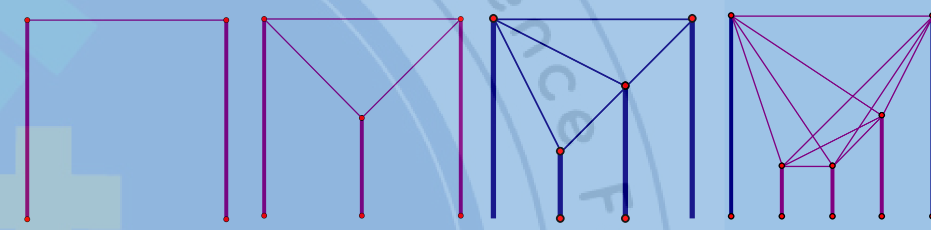
$\overline{AF} \fallingdotseq 144$



二、找出每個發射臺之間都可以互相連成直線的規則。

the geometer's sketchpad 動態幾何軟體





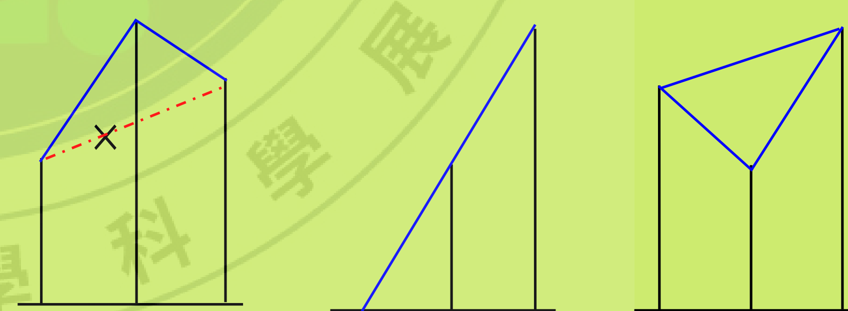
n=2 n=3 n=4 n=5

規則一

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i = 0$$

規則二

$$m_i \leq m_{i+1}$$



$m_i > m_{i+1}$ $m_i = m_{i+1}$ $m_i < m_{i+1}$

發射臺1高度	發射臺2高度	發射臺3高度	發射臺4高度	2-1斜率m_1	3-2斜率m_2	4-3斜率m_3	是否可以增設
3	0	0	3	-3	0	3	0
3	0	1	3	-3	1	2	0
3	0	2	3	-3	2	1	X
3	0	3	3	-3	3	0	X
3	1	0	3	-2	-1	3	0
3	1	1	3	-2	0	2	0
3	1	2	3	-2	1	1	0
3	1	3	3	-2	2	0	X
3	2	0	3	-1	-2	3	X
3	2	1	3	-1	-1	2	0
3	2	2	3	-1	0	1	0
3	2	3	3	-1	1	0	X
3	3	0	3	0	-3	3	X
3	3	1	3	0	-2	2	X
3	3	2	3	0	-1	1	X
3	3	3	3	0	0	0	0

專用符號定義

- I_i：以I_i表示由左至右數第i個信號發射臺，其中$i\in N$。有n個發射臺，$1\le i\le n$。如：I_1表示左邊第1個信號發射臺，I_n表示最後1個信號發射臺。
- m_i：以m_i表示I_i與I_{i+1}之間的斜率，其中$i\in N$。n個發射臺，$1\le i\le n-1$。如：m_1表示I_1與I_2之間的斜率，m_{n-1}表示I_{n-1}與I_n之間的斜率。
- $(m_i, j)_a$：以$(m_i, j)_a$表示由m_i開始連續j個斜率相加，其和為a的組合，且必須符合$m_i\le m_{i+1}$及$|m_i|\le|a|$，其中i、$j\in N$，$a\in Z$。如：$(m_1, 3)_{-4}$為$m_1+m_2+m_3=-4$的所有組合，即$(m_1, 3)_{-4}$：$(-4, 0, 0)$、$(-3, -1, 0)$、$(-2, -2, 0)$、$(-2, -1, -1)$。
- $Q_i(j)$：以$Q_i(j)$表示將j分割成i個整數的方法數，且分割時數字可重複但須符合遞增的原則，分割成的數不得為0且其絕對值須小於等於$|j|$，其中$i\in N$，$j\in Z$，定義$Q_1(0)=1$。如：$Q_2(-4)=2$，分別為$(-3，-1)$和$(-2，-2)$。
- $P_n(j)$：以$P_n(j)$表示符合要求下，n個斜率其和為j的組合數，且定義$P_n(0)=1$，其中$n\in N$，$j\in Z$。$P_n(j)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(j)$

一般化：

一直線上已經有兩個發射臺，高度都是n-1個單位，兩發射臺基座的地面距離為n-1個單位，兩發射臺之間等距離再增設n-2個發射臺。增設的發射臺高度可以不同，但必須整數，最高高度為n-1。

性質一

若$n=2k$為發射臺數，其中$k\in N$則

$-(n-1)\le m_1\le 0$

$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若$2\le i\le k$

$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k\le i\le n-2$

$0\le m_{n-1}\le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

性質二

若$n=2k+1$為發射臺數，其中$k\in N$，則

$-(n-1)\le m_1\le 0$

$-\left[\frac{n-1}{i}\right]\le m_i\le 1$，若$2\le i\le k$

$-1\le m_i\le\left[\frac{n-1}{n-i}\right]$，若$k+1\le i\le n-2$

$0\le m_{n-1}\le n-1$

其中〔 〕為高斯取底符號。

若$n=2k$為發射臺數，其中$k\in N$

$m_k=-1$、0、1

若$n=2k+1$為發射臺數，其中$k\in N$

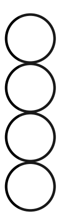
$m_k+m_{k+1}=$ -3、-2、-1、0、1、2、3

整數分割的遞迴關係：

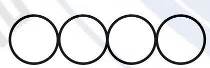
$Q_j(j)=Q_1(j)=1$

$Q_j(1)=Q_j(2)=\cdots=Q_j(j-1)=0$，其中$j\geq 2$

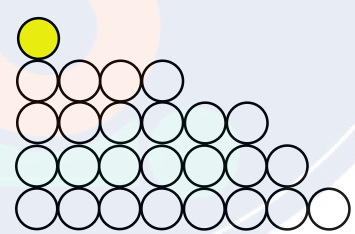
$Q_j(n)=Q_j(n-j)+Q_{j-1}(n-1)$，其中$j\geq 2$



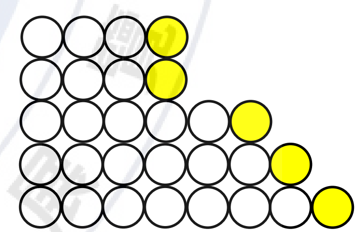
將j排成j列



將j排成1列



最上方第j列只有1個硬幣



最上方第j列大於1個硬幣

$Q_j(j)=Q_1(j)=1$

$Q_j(n)=Q_{j-1}(n-1)+Q_j(n-j)$

利用推論所得的公式，可以計算出任2個發射臺間的信號不被阻擋的增設數

偶數個發射臺，n=2k

k	n=2k	$m_k=-1$組合數	$m_k=0$組合數	$m_k=1$組合數	發射臺增設數
2	4	2	4	2	8
3	6	13	28	13	54
4	8	64	169	64	297
5	10	264	827	264	1355
6	12	926	3480	926	5332

奇數個發射臺，n=2k+1

k	n=2k+1	$m_k+m_{k+1}=-2$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=-1$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=0$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=1$ 組合數	$m_k+m_{k+1}=2$ 組合數	發射臺增設數
2	5	3	4	9	4	3	23
3	7	20	21	55	21	20	137
4	9	88	91	301	88	91	659
5	11	350	316	1433	350	316	2765

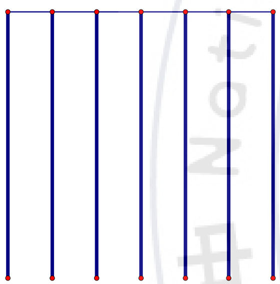
三、找出計算信號直線數量的公式。

無共線：

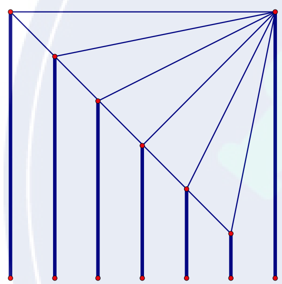
任意n個發射臺可視為n個任三點不共線的點，每兩個點可以連成一條信號直線，共有 $C_2^n = \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$ 條的直線。

有共線：

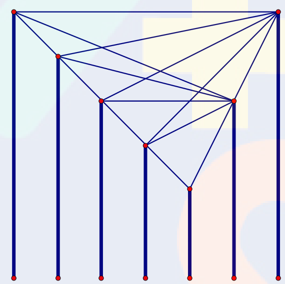
共線的點之間只能產生一條的直線，若有m點共線，其中m≥3，利用 $C_2^n - (C_2^m - 1) = C_2^n - C_2^m + 1$ 來計算有幾條直線。



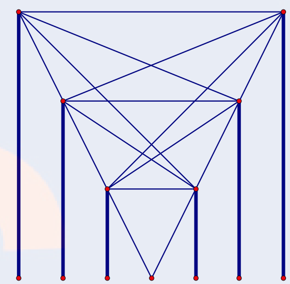
7點共線，
1條



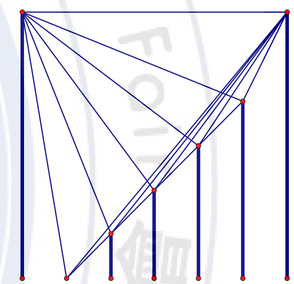
6點共線，
7條



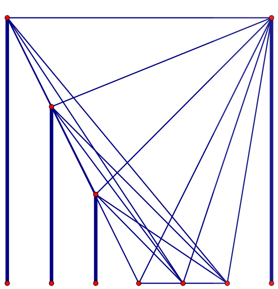
1組3點共線，
1組5點共線，
10條



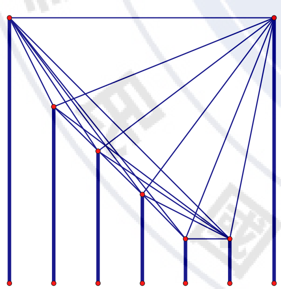
2組4點共線，
11條



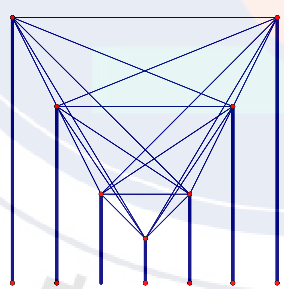
5點共線，
12條



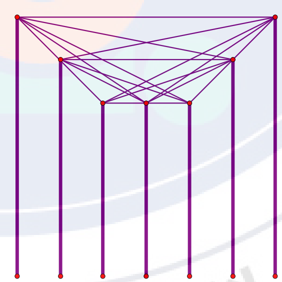
1組3點共線，
1組4點共線，
14條



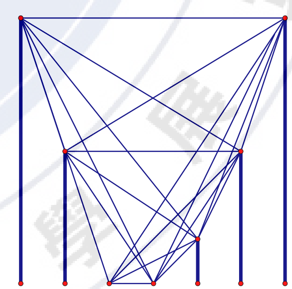
4點共線，
16條



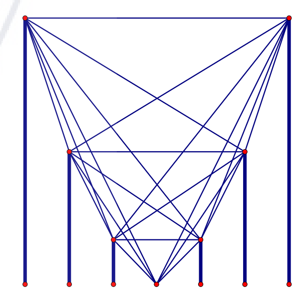
2組3點共線，
17條



3組3點共線，
15條



3點共線，
19條



無共線，
21條

以整數分割找出發射臺共線方法：

(一)以$P_{n-1}(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(n-1)$將斜率分類找出可能的種類數。

(二)列出所有可能的整數分割情形。

(三)將整數分割的結果列成恆等式$\sum_{j=1}^{k}a_j\times m_j=0$，其中$m_j$為斜率，共分為k組不同的斜率，斜率$m_j$有$a_j$個，代入$m_j$必須符合正負斜率和絕對值皆小於發射臺數，且$a_j$、$k\in N$，$m_j\in Z$，該組即為正確的共線情形。

如：n=6，有5個斜率

$P_5(5)=Q_1(5)+Q_2(5)+Q_3(5)+Q_4(5)+Q_5(5)=1+2+2+1+1=7$

$Q_1(5)=1$ $\Rightarrow$ (5)：6點共線。

$Q_2(5)=2$ $\Rightarrow$ (1, 4)：5點共線、(2, 3)：1組3點共線，1組4點共線。

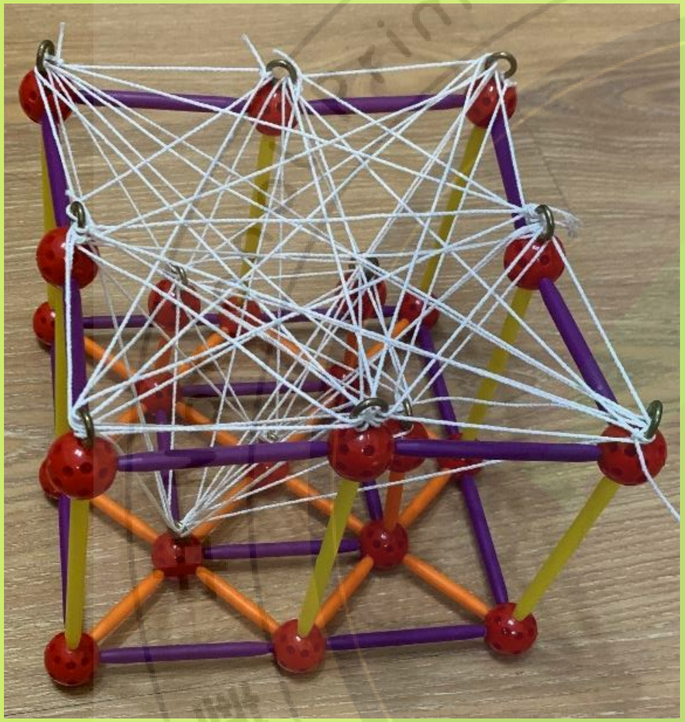
$Q_3(5)=2$ $\Rightarrow$ (1, 1, 3)：4點共線、(1, 2, 2)：2組3點共線。

$Q_4(5)=1$ $\Rightarrow$ (1, 1, 1, 2)：3點共線。

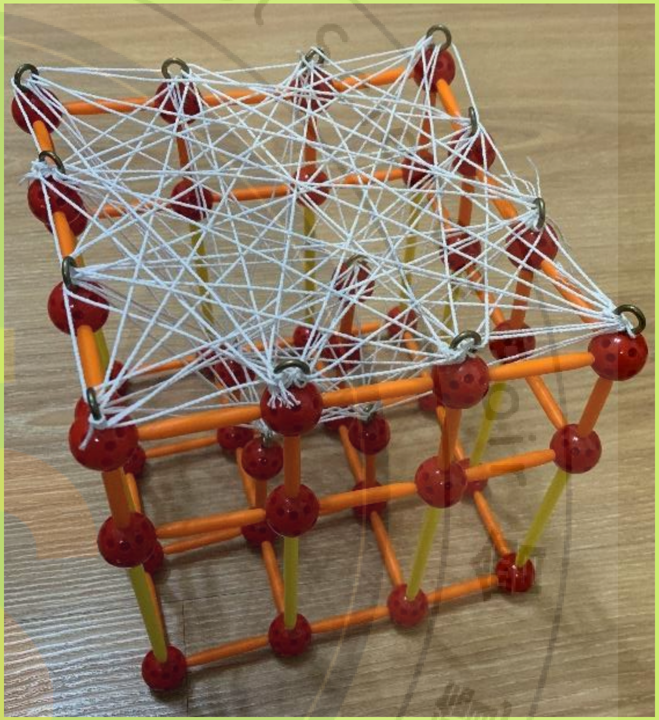
$Q_5(5)=1$ $\Rightarrow$ (1, 1, 1, 1, 1)：無共線。

其中(2, 3)這一組，$\sum_{j=1}^{k}a_j\times m_j=0$，k=2，則$2m_1+3m_2=0$，求出最小整數解為$m_1=-3$，$m_2=2$，正負斜率和絕對值大於5，此組合不存在，故6個發射臺有6種共線情形。

未來可以研究的方向



3×3正方形發射臺模型



4×4正方形發射臺模型

參考資料

一、游森棚（2020）・信號發射臺・*科學研習雙月刊，59*（5）。

二、陳泓嘉（2020）・*以圖形分層遞降方式探討整數分割方法數*・中華民國第60屆中小學科學展覽會作品說明書。