中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

探究精神獎

080403

黑白有段

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六 邱自在	楊錦花
小六 林宇凡	林東岳

關鍵詞：分段排列、循環排列、環狀排列

摘要

本研究題目源自科學研習月刊[1]，原題討論將 N節黑白毛毛蟲依顏色分成 P段的種類數，可視為兩相異物的直線分段排列。

我們的研究由直觀而規律整合進而推出通論，第一個突破點為以長條格的切割找到將 n 節分 p 段的方法數。並將這個方法數以二維的思考解決 N 節黑白毛毛蟲分成 P 段的種類數。

並延伸研究為兩相異物環狀分段排列，而有以下發現：

(一) 環狀分段排列受珠數與段數最大公因數 f 影響，而有非循環直線排列與循環直線排列不同的環狀轉換模式。

(二) 非循環直線排列需扣除循環的直線排列再轉換為環狀排列。

(三) 循環直線排列需扣除子循環的直線排列再轉換為環狀排列。

(四) 若 f 質因數的個數大於 2 ，則子循環直線排列數可用文氏圖幫忙分析。

壹、前言

一、研究動機：

學校的數學研究社中，指導老師會介紹給我們許許多多的數學遊戲，黑白毛毛蟲[1]是其中較特別的，題目**摘錄**如下：

> 在一個小島上，生物學家發現了一類身體有黑、白色花紋相間的毛毛蟲，並且經過仔細觀察後，發現毛毛蟲的花紋組成，似乎是有規律的！
>
> 每隻毛毛蟲從頭到尾巴，恰好可以分成四個段落，且這四個段落剛好會是兩段黑色及兩段白色。所以共可分成六種毛毛蟲，分別是：
>
> 黑黑白白、黑白黑白、黑白白黑、白黑黑白、白黑白黑、白白黑黑
>
> 但是相鄰的兩段如果是同色，其實看起來是一整段同樣顏色，例如“黑白白黑”的毛毛蟲，其實只有 3 段顏色，而“白白黑黑”毛毛蟲，只有 2 段顏色。
>
> 延續上述，六種毛毛蟲的顏色段數，分別是 $2,4,3,3,4,2$ 。…

題目中提到用「**顏色來分段**」這種分法，引起我們的興趣，因此我們決定鎖定這個方向作為我們的研究主題，進行科展研究。

二、研究目的

(一) 探討黑、白節數相同，毛毛蟲節數、段數與種類數的關係。

(二) 探討黑、白節數不同，毛毛蟲節數、段數與種類數的關係。

(三) 探討黑、白珠數相同，環狀分段排列珠數、段數與種類數的關係。

(四) 探討黑、白珠數不同，環狀分段排列珠數、段數與種類數的關係。

三、文獻探討

(一) 歷屆科展作品關於環狀排列的討論

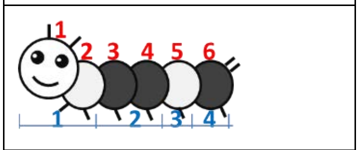
57 屆高中組「閃爍燈之循環性質研究與探討」(林柏均等[2])提到環狀的「循環」性質，但沒有針對環狀排列做計數的探討，引起我們由直線排列深入至環狀排列的探討。

(二) 王世勛(2006)。不盡相異物的環狀排列公式[4]

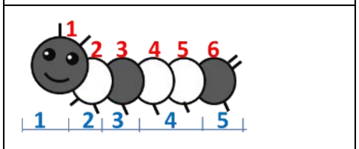
環狀排列數由不同循環節的直線排列轉換成環形排列相異物個數的集合，與我們的研究最多相同的概念，差別在其研究在多個相異物的環狀排列，其**循環節的出現受相異物個數是否有共同因數影響**；而我們的研究鎖定兩相異物「分段」排列，循環節出現受**「兩相異物個數」與「段數」**是否有共同因數影響，而有不同循環排列。

四、名詞與代號定義

節數 $N=6$，段數 $P=4$



節數 $N=6$，段數 $P=5$



(一) **節數**(N)：為了區分原題「全身分的段落」與「顏色區分的段數」，我們把身上從頭到腳分成的環節數；本研究中統一稱「節數」。

(二) **段數**(P)：以顏色區分毛毛蟲的段落數；本研究中統一稱「段數」。

(三) **種類**(K)：顏色排列順序不相同，我們視為不同種的毛毛蟲。

如毛毛蟲身上黑白節數為○○●●與●●○○為不同的 2 種毛毛蟲。

(四) **直線排列**：呈直線方式的排列，本研究中的毛毛蟲屬於直線排列。

(五) **珠數**(n)：指黑珠或白珠的珠數，若黑、白珠數不同，則以 m 和 n 代表黑、白珠數。

(六) **段數**(p)：指黑珠或白珠分隔的段落數，環狀排列段數為偶數，故黑、白段數相同。

(七) **環狀排列**：沿著圓周排列的排列方式，本研究中的黑白珠研究屬於環狀排列。

(八) $\mathbf{gcd}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})=\boldsymbol{f}$：代表 n 和 p 的最大公因數為 f。或簡寫為 $(n,p)=f$。

(九) **循環排列**：指直線排列重複出現相同排列方式的排列。以 8 節分 4 段為例

●●○●●○○○…非循環排列

●●○○●●○○…2 個循環節的循環排列。

(十) **循環節**：循環排列重複出現相同排列的個數。以 6 黑珠 6 白珠做直線排列為例，

●●○○●○●●○○●○　●●○●○○●●○●○○ … 2 個循環節的循環排列。
1　2　1　2
簡稱 2 循環。

●●○○●●○○●●○○　●○○●●○○●●○○● … 3 個循環節的循環排列。
1　2　3　1　2　3
簡稱 3 循環。

(十一)**子循環**：每個循環節的排列中出現循環排列，則稱為該循環節出現「子循環」。

●○●○●○●○●○●○12 珠分成 3 個循環節，每個循環節的 4 珠排列 ●○●○ ，又出現 2 個循環節的循環排列 ●○●○，則稱 ●○●○ 為 ●○●○的**子循環**。則此種出現**子循環**的排列，●○●○●○●○●○●○ 需視為 6 個循環節的循環排列，是 3 個循環節的子循環。

貳、研究過程與方法

一、以圖示和整數分割找出黑、白節數相同毛毛蟲種類數為黑的分段方法數×2 ×白的分段方法數×2 。

二、以長條格的分割解決 n 節分成 p 的種類數，完成黑白節數相同毛毛蟲種類數的一般式。

三、將研究發現推廣至黑、白節數不同毛毛蟲種類數的求法。

四、觀察圖示，整理10珠內黑、白珠數相同，黑、白珠的直線排線與環狀排列的關係，發現10珠內的直線分段排列轉換環狀分段排列一般狀況與特殊狀況。

五、觀察圖示，整理1～20 珠找出特殊狀況的循環直線分段排列的循環節與珠數和段數的最大公因數有關。進而整理出各種狀況的黑白節數相同的環狀分段排列數的一般式。

六、將珠數相同的黑、白珠環狀排列推廣至黑、白珠數不同的環狀分段排列一般式。

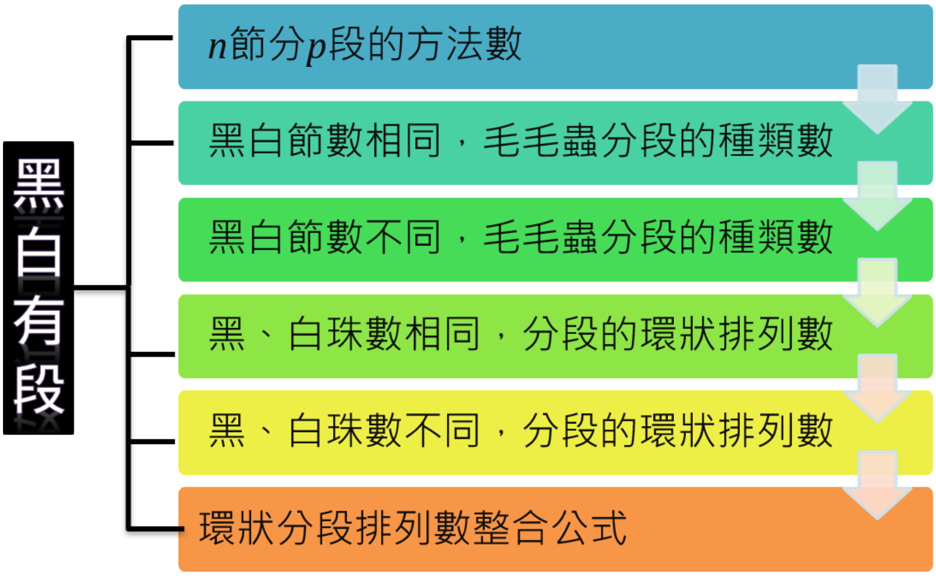


圖 1-1：研究架構圖

參、研究結果

一、毛毛蟲黑、白節數各占一半，毛毛蟲節數、段數與毛毛蟲種類數的關係。

(一) 2 段

1. 黑、白各佔一邊。只會出現 2 種現象。

前半部為黑(●)，後半部為白(○)。	前半部為白(○)，後半部為黑(●)。
● ● …… ● ○ ○ …… ○	○ ○ …… ○ ● ● …… ●

2. 故段數為 2，不管毛毛蟲的身上有幾節，其種類只有 2 種。

(二) 3 段：黑的在 2 端，白的在中間，或白的在 2 端，黑的在中間。

黑的在 2 端，白的在中間。	白的在 2 端，黑的在中間。
● … ● ○ … ○ ● … ●	○ … ○ ● … ● ○ … ○

1. 2 種狀況剛好黑、白位置相反，故我們只要算出以黑為開始的模式思考「種類數」，再將「種類數×2」，即可知道全部毛毛蟲有多少種。
2. 以 8 節毛毛蟲為例：

(1) 黑的佔一半即 $\frac{8}{2}=4$，4 節分頭、尾兩段有 3 種分法，即 $4=1+3=2+2=3+1$。

1−3	2−2	3−1
● ○ ○ ○ ○ ● ● ●	● ● ○ ○ ○ ○ ● ●	● ● ● ○ ○ ○ ○ ●

(2) 故 8 節分 3 段的種類有 $3\times2=6$，6 種毛毛蟲。

3. 毛毛蟲的段數為3，節數多寡影響種類數的因素只有1個，即黑色分為2段的方法數，故種類數＝黑分2段的方法數×2 。

(三) 4段：排列方式為黑白黑白，或白黑白黑。

黑白黑白	白黑白黑
●…●○…○●…●○…○	○…○●…●○…○●…●

1. 計算「黑白黑白」的種類。黑、白各分成2段，故影響的因素黑、白都需考慮。

2. 以8節毛毛蟲為例：黑、白各分2段

(1) 黑、白各佔一半，即$\frac{8}{2}=4$節， 4節分兩段，即$4=1+3=2+2=3+1$，有3種分法。

白＼黑	1−3	2−2	3−1
1−3	●○●●●○○○	●●○●●○○○	●●●○●○○○
2−2	●○○●●●○○	●●○○●●○○	●●●○○●○○
3−1	●○○○●●●○	●●○○○●●○	●●●○○○●○

(2) 故8節4段的種類有$(3\times3)\times2=18$ ，18種毛毛蟲。

3. 毛毛蟲的段數為4 ，則節數與種類數的關係如下：

(1) 毛毛蟲的段數為4時，因黑、白都分為2段，影響因子變為2個。

(2) 種類數＝(黑分2段的方法數)×(白分2段的方法數)×2 。

(四) 5段：排列方式為黑白黑白黑，或白黑白黑白。

黑白黑白黑	白黑白黑白
●…●○…○●…●○…○●…●	○…○●…●○…○●…●○…○

1. 計算「黑白黑白黑」的種類。黑分成3段，白的分2段。

2. 以8節毛毛蟲為例：

(1) 黑、白各佔一半，即$\frac{8}{2}=4$ ， 4節。

(2) 黑4節，分3段有$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$。(3種方法)

(3) 白4節，分2段有3種分法，即$4=1+3=2+2=3+1$。

白＼黑	1−1−2	1−2−1	2−1−1
1−3	●○●○○○●●	●○●●○○○●	●●○●○○○●
2−2	●○○●○○●●	●○○●●○○●	●●○○●○○●
3−1	●○○○●○●●	●○○○●●○●	●●○○○●○●

(4) 故8節分5段的種類有$(3\times3)\times2=18$ ，18種毛毛蟲。

3. 毛毛蟲的段數為5，節數與種類數的關係如下：

(1) 毛毛蟲的段數為5時，影響因子變為2個，黑3段，白2段。

(2) 種類數＝(黑分3段的方法數)×(白分2段的方法數)×2 。

(五) 分段方法數的思考

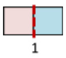
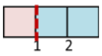
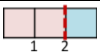
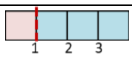
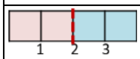
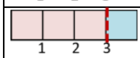
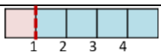
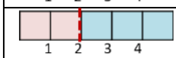
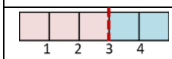
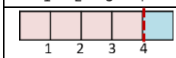
影響黑、白毛毛蟲的種類數取決於黑與白不同節數分段的方法數，分段的方法數除了採用「整數的分割」，一一列出所有的方法外，有沒有快速的方法可直接算出 n 節分成 p 段的方法數，引起我們進一步的思考。

定理1：將 n 節分成 p 段的方法數為 C_{p-1}^{n-1} 。

說明：

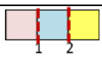
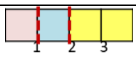
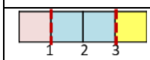
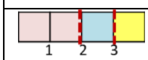
1. 以長條格的分割，思考黑、白分段的方法數。

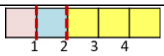
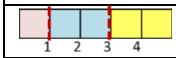
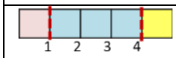
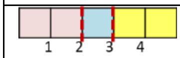
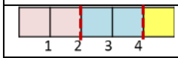
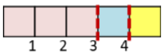
2. 2段：以格數代表節數，選1條間隔線切割，即可將長條格切成2段。

節數	圖示	說明
2		2格，間隔線只有1條。 所以只有1種切割方法，即2＝1+1。
3	 	3格，間隔線有2條。 選「1」即3＝1+2； 選「2」即3＝2+1。有2種分法。
4	  	4格，間隔線有3條。 選「1」即4＝1+3； 選「2」即4＝2+2； 選「3」即4＝3+1。有3種分法。
5	   	5格，間隔線有4條。 選「1」即5＝1+4； 選「2」即5＝2+3； 選「3」即5＝3+2； 選「4」即5＝4+1。有4種分法。

故 n 節分成2段的方法數，可看成從 $n-1$ 條間隔線任取1條切割的方法數，即 C_1^{n-1} 。

3. 3段：任選2條間隔線切割，即可將長條格切成3段。

節數	圖示	說明
3		3格，間隔線只有2條，所以只有1種切割方法。
4	  	4格，間隔線有3條。 選「1」、「2」即4＝1+1+2； 選「1」、「3」即4＝1+2+1； 選「2」、「3」即4＝2+1+1。有3種分法。

5		5格，間隔線有4條。 選「1」、「2」即5＝1+1+3；
		選「1」、「3」即5＝1+2+2；
		選「1」、「4」即5＝1+3+1；
		選「2」、「3」即5＝2+1+2 ；
		選「2」、「4」即5＝2+2+1；
		選「3」、「4」即5＝3+1+1；有6種分法。

故n節分成3段的方法數，可視為從$n-1$條間隔線任選2條切割的方法數，即C_2^{n-1} 。

4. n格長條格有$n-1$條間隔線，每切1刀就會使段數增1，切割成p段只要切$p-1$刀。故將n格分成p段的方法數為從$n-1$條間隔線，任選$p-1$條切割的方法數，即C_{p-1}^{n-1}。
5. 毛毛蟲黑或白n節分p段的方法數可視為將n格長條格切割成p段的方法數$=C_{p-1}^{n-1}$。

(六) 整理黑、白毛毛蟲節數、段數和種類數的關係

定理2：黑、白節數相同的N節毛毛蟲分成P段的種類數為$C_{\lceil \frac{P}{2}\rceil-1}^{\frac{N}{2}-1}\times C_{\lfloor \frac{P}{2}\rfloor-1}^{\frac{N}{2}-1}\times 2$。

說明：

1. 將定理1，n節分p段的方法數$=C_{p-1}^{n-1}$，代入毛毛蟲種類數的計算。
2. 黑、白節數相同，直線排列只要黑、白易位，種類數就翻倍，故我們以「黑為頭」的排列模式去思考分段方法數，再將求得的次數×2即種類數。
3. 毛毛蟲段數$P=2$時，黑、白各佔一端，故種類數只有2種。
4. 毛毛蟲段數$P=3$時，影響因子為頭、尾兩端的節數，故種類數＝黑分2段的方法數×2。節數$=N$，黑、白各佔一半，故黑的節數$=\dfrac{N}{2}$。故種類數$=C_{2-1}^{\frac{N}{2}-1}\times 2=N-2$。
5. 毛毛蟲段數≥4時，影響因子增為2個，黑與白穿插排列，故種類數＝黑分段的方法數×白分段的方法數×2。
   (1) 分段模式為偶數，黑、白段數相同，黑、白段數都等於$\dfrac{P}{2}$段，黑、白節數都等於$\dfrac{N}{2}$節；故種類數$=C_{\frac{P}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1}\times C_{\frac{P}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1}\times 2$。
   (2) 分段模式為奇數，$P\div 2$會出現餘數1，以黑為頭、尾思考，黑比白多1，餘數可加在黑的段數。

① P 為奇數，令黑的段數$=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor+1$，白的段數$=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor$，總段數$=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor+1+\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor=P$，高斯符號[ ]，解決了毛毛蟲段數 P 為奇數的問題。

② 但若 P 為偶數，黑的段數$+$白的段數$=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor+1+\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor=P+1$，總段數多1。(矛盾)

(3) 為了不影響偶數黑、白皆等於$\frac{P}{2}$，高斯天花板$\lceil\ \ \rceil$與高斯地板$\lfloor\ \ \rfloor$解決了奇數段黑、白段數「差 1」的問題；即黑的分段模式$=\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil$，白的分段模式$=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor$。

○…○×…×○…○×…×○…○×…×○…○	○…○×…×○…○×…×○…○×…×
P 為奇數，$\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil+\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor=P$； 例 $P=7$，$\left\lceil \frac{7}{2}\right\rceil+\left\lfloor \frac{7}{2}\right\rfloor=4+3=7$	P 為偶數，$\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil+\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor=P$， 例 $P=6$，$\left\lceil \frac{6}{2}\right\rceil+\left\lfloor \frac{6}{2}\right\rfloor=3+3=6$

6. 故黑、白節數相同，段數≥ 4，N 節黑白毛毛蟲分成 P 段的種類數$=C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}\times 2$。

7. 分別代入 $P=2$ 與 $P=3$ 的特殊狀況，

(1) 以 $P=2$ 代入，$C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lceil \frac{2}{2}\right\rceil-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lfloor \frac{2}{2}\right\rfloor-1}\times 2=C^{\frac{N}{2}-1}_{1-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{1-1}\times 2=1\times 1\times 2=2$。

(2) 以 $P=3$ 代入，$C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lceil \frac{3}{2}\right\rceil-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lfloor \frac{3}{2}\right\rfloor-1}\times 2=C^{\frac{N}{2}-1}_{2-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{1-1}\times 2=(\frac{N}{2}-1)\times 1\times 2=N-2$。

(3) 與前頁(六)3.與(六)4.節推論相符，故 $P=2,3$ 亦適用 N 節分成 P 段的種類數公式。

8. 因此黑、白節數相同的 N 節毛毛蟲分成 P 段的種類數$=C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}\times 2$。

二、如果毛毛蟲黑、白節數不同，黑 m 節、白 n 節毛毛蟲分成 P 段的種類數應做如何修正？

(一) 2段：黑、白各佔一端，故種類數只有 2 種。

(二) 3段：影響因子為頭、尾兩端的節數。

黑的在2端，白的在中間。	白的在2端，黑的在中間。
●…●○…○●…●	○…○●…●○…○

1. 因黑、白節數不同，黑在兩端的種類數與白在兩端種類數不同，故需分開計數。

2. 黑 m 節，分頭尾 2 段方法數$=C^{m-1}_{2-1}$；白 n 節，分頭尾 2 段方法數$=C^{n-1}_{2-1}$。

3. 黑白毛毛蟲分 3 段的種類數$=$黑分兩段的方法數$+$白分兩段的方法數$=C^{m-1}_{2-1}+C^{n-1}_{2-1}$。

(三) **4 段**：排列方式為黑白黑白，或白黑白黑。

黑白黑白	白黑白黑
● … ● ○ … ○ ● … ● ○ … ○	○ … ○ ● … ● ○ … ○ ● … ●

1. 黑白黑白的種類數$=C^{m-1}_{2-1}\times C^{n-1}_{2-1}$；白黑白黑的種類數$=C^{n-1}_{2-1}\times C^{m-1}_{2-1}$。
2. 故毛毛蟲分 4 段的種類數$=C^{m-1}_{2-1}\times C^{n-1}_{2-1}+C^{n-1}_{2-1}\times C^{m-1}_{2-1}=C^{m-1}_{2-1}\times C^{n-1}_{2-1}\times 2$。

(四) **5 段**：排列方式為黑白黑白黑，或白黑白黑白。

黑白黑白黑	白黑白黑白
● … ● ○ … ○ ● … ● ○ … ○ ● … ●	○ … ○ ● … ● ○ … ○ ● … ● ○ … ○

1. 「黑白黑白黑」的種類為黑分成 3 段，白的分 2 段，種類數$=C^{m-1}_{3-1}\times C^{n-1}_{2-1}$；

   「白黑白黑白」的種類為白分成 3 段，黑的分 2 段，種類數$=C^{n-1}_{3-1}\times C^{m-1}_{2-1}$。
2. 故黑 m 節，白 n 節分 5 段的種類數$=C^{m-1}_{3-1}\times C^{n-1}_{2-1}+C^{n-1}_{3-1}\times C^{m-1}_{2-1}$。

(五) 黑 m 節、白 n 節毛毛蟲分成 P 段的種類數。

> **定理 3**：黑 m 節、白 n 節毛毛蟲分成 P 段的種類數為 $C^{m-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{n-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}+C^{n-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{m-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}$。

說明：

1. 由 3 段、4 段、5 段的例子，可看出毛毛蟲的種類數，因段數的奇、偶而有不同的模式。
2. 若段數為偶數，因段數同為 $\frac{P}{2}$ 段，故無論黑在頭，或白在頭，不影響種類數計算，故

   黑、白毛毛蟲種類數$=C^{m-1}_{\frac{P}{2}-1}\times C^{n-1}_{\frac{P}{2}-1}+C^{n-1}_{\frac{P}{2}-1}\times C^{m-1}_{\frac{P}{2}-1}=C^{m-1}_{\frac{P}{2}-1}\times C^{n-1}_{\frac{P}{2}-1}\times 2$。
3. 若段數為奇數，在頭尾兩端的段數多 1 時，則因黑、白節數不同，會影響種類數計

   數，故黑、白毛毛蟲種類數$=C^{m-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{n-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}+C^{n-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{m-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}$。
4. 若段數為偶數，$\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil=\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor=\frac{P}{2}$，故偶數段的黑、白毛毛蟲亦適用奇數種類數算法，

   即種類數$=C^{m-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{n-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}+C^{n-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{m-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}$。
5. 故將黑 m 節、白 n 節毛毛蟲分成 P 段的種類數$=C^{m-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{n-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}+C^{n-1}_{\left\lceil \frac{P}{2}\right\rceil-1}\times C^{m-1}_{\left\lfloor \frac{P}{2}\right\rfloor-1}$。

三、如果將毛毛蟲的問題轉化成黑、白珠子做環狀排列，珠子數、段數與種類數的關係會產生什麼變化？(先以黑、白珠數相同思考)

(一) 環狀排列的種類數計數。

定義1：環狀排列，指黑、白珠子沿著圓周排列，因此不計較珠子排列的實際位置，只考慮相關位置，換句話說，旋轉後結果相同就視為同一種。

說明：

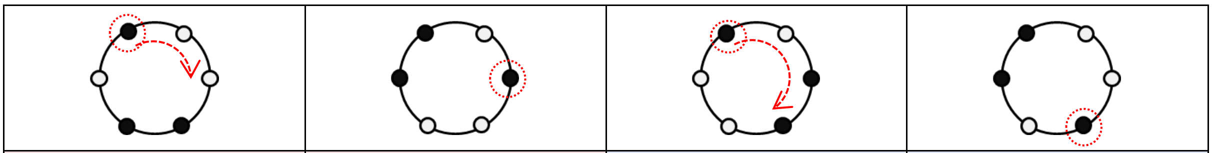


圖2−1　圖2−2　圖2−3　圖2−4

1. 圖2−1當目標珠●從11點鐘位置順時鐘旋轉60°至3點鐘位置，與圖2−2相同。故圖2−1與圖2−2屬於同一種環狀排列。
2. 圖2−3當目標珠●從11點鐘位置順時鐘旋轉180°至5點鐘位置，與圖2−4相同，故圖2−3與圖2−4兩者屬於同一種環狀排列。
3. 故黑、白珠子沿著圓周排列，不計較珠子排列的實際位置，只考慮相關位置，換句話說，旋轉後結果相同就視為同一種環狀排列。
4. 環狀排列沒有頭、尾考量，故計算種類數時，只需考慮直線中黑為頭的排列方式做環狀排列時因旋轉出現的變化即可。

(二) 環狀分段排列的奇、偶數段思考

性質1：環狀分段排列只會出現偶數段。

說明：

1. 圖中「｜」為直線排列轉換為環狀排列的頭、尾交接處(起始位置為11點鐘位置)。

●●●○○○	●●○○○●	●●○●○○	●○●○○●

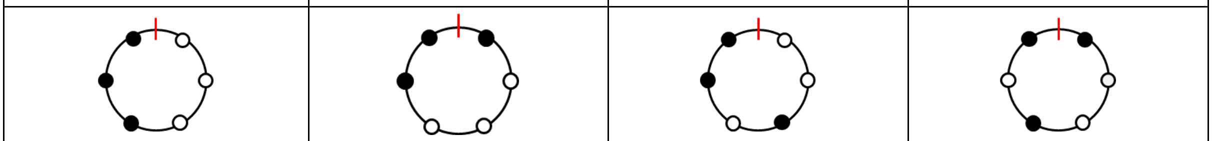


圖2−5　圖2−6　圖2−7　圖2−8

2. 圖2–5：直線為2段，環狀分段排列時，頭尾相接為不同色，故同為2段。

3. 圖2–6：直線為3段，環狀分段排列時，頭尾相接為同色，故環狀排列為2段。

4. 圖2–7：直線為4段，環狀分段排列時，頭尾相接為不同色，故同為4段。

5. 圖2–8：直線為5段，環狀分段排列時，頭尾相接為同色，故環狀排列為4段。

6. 黑、白珠環狀排列因頭尾銜接，所出現的段數只有偶數段，沒有奇數段。

(三) **2段**：黑、白各佔一半，黑、白珠數不論，都只會出現1種環狀排列的連接方式。

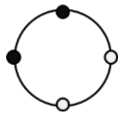
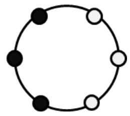
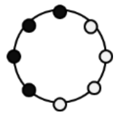
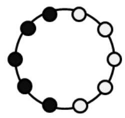
			

圖2–9（4顆)	圖2–10（6顆)	圖2–11(8顆)	圖2–12（10顆)

(四) **4段**：黑、白各分2段

1. 以8珠為例：$\frac{8}{2}=4$，4珠分2段，$4=1+3=2+2=3+1$(3種方式)。

(1) 列出所有分段模式的組合。❶、❷、❸…，①、②、③…分別代表黑、白珠的數量。

白＼黑	1–3	2–2	3–1
1–3	❶-①-❸-③ 圖2–13	❷-①-❷-③ 圖2–16	❸-①-❶-③ 圖2–19
2–2	❶-②-❸-② 圖2–14	❷-②-❷-② 圖2–17	❸-②-❶-② 圖2–20
3–1	❶-③-❸-① 圖2–15	❷-③-❷-① 圖2–18	❸-③-❶-① 圖2–21
底色相同代表同種的環狀排列			

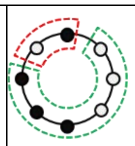
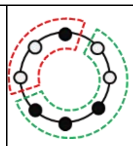
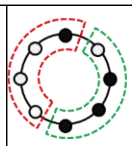
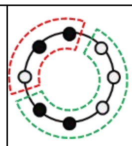
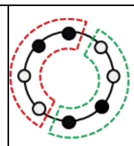
				

圖2–13	圖2–14	圖2–15	圖2–16	圖2–17

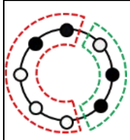
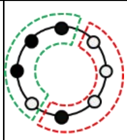
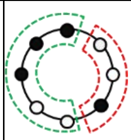
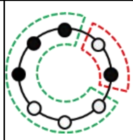

			

圖2–18	圖2–19	圖2–20	圖2–21	

(2) 黑珠1段＋白珠1段視為1組，若2組相同，表示可轉換為同種的環狀排列。

以圖2–13❶-①-❸-③與圖2–21❸-③-❶-①為例，2組黑白連接方式同為「黑1白1」與「黑3白3」。設12點鐘位置為直線轉換環狀的起始點，圖2–13起始點位置的❶順時鐘由12點鐘位置轉到3點鐘，就與圖2–21相同。

這種旋轉後結果相同，就視為同一種環狀排列(定義**1**)。故圖2–13與圖2–21轉換後環狀排列相同。

(3) 8珠分4段有$3\times3=9$，9種直線排列，除了圖2–17，2組黑、白珠連接方式同為2黑2白外，其餘連接方式都兩兩相同，故9種直線排列，可轉換為5種環狀分段排列模式。

2. 10珠：$\frac{10}{2}=5$，5珠分2段， $5=1+4=2+3=3+2=4+1$。

(1) 列出所有分段模式的組合，分析環狀排列是否同種。

(2) 10珠4段有黑白各有4種分段模式，穿插組合成$4\times4=16$種直線分段模式。

白＼黑	1–4	2–3	3–2	4–1
1–4	❶-①-❹-④ 圖2–22	❷-①-❸-④ 圖2–26	❸-①-❷-④ 圖2–29	❹-①-❶-④ 圖2–25
2–3	❶-②-❹-③ 圖2–23	❷-②-❸-③ 圖2–27	❸-②-❷-③ 圖2–28	❹-②-❶-③ 圖2–24
3–2	❶-③-❹-② 圖2–24	❷-③-❸-② 圖2–28	❸-③-❷-② 圖2–27	❹-③-❶-② 圖2–23
4–1	❶-④-❹-① 圖2–25	❷-④-❸-① 圖2–29	❸-④-❷-① 圖2–26	❹-④-❶-① 圖2–22

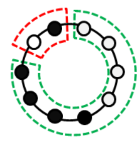


圖2–22

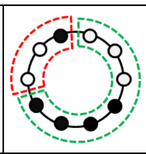


圖2–23

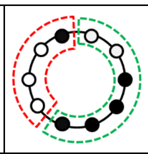


圖2–24

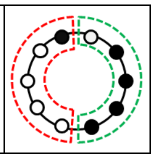


圖2–25

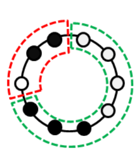


圖2–26

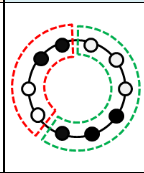


圖2–27

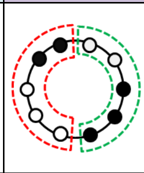


圖2–28

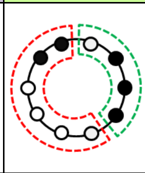


圖2–29

(3) 由8珠分4段說明可知，將黑珠1段＋白珠1段視為1組，若2組相同，表示可轉換為同種的環狀排列。例：❶-①-❹-④與❹-④-❶-①轉換環狀為同種(圖2–22)。

❶-②-❹-③與❹-③-❶-②轉換環狀為同種(圖2–23)。

(4) 故10珠4段，可找到16種連接方式兩兩相同的有8種，故共有$\frac{4\times4}{2}=8$種環狀排列。

(五) **6段：**黑、白各分3段。

1. 8珠：$\frac{8}{2}=4$， 4珠分3段，即$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$。

(1) 列出所有分段模式的組合，分析是否同種。

白＼黑	1–1–2	1–2–1	2–1–1
1–1–2	❶-①-❶-①-❷-②	❶-①-❷-①-❶-②	❷-①-❶-①-❶-②
1–2–1	❶-①-❶-②-❷-①	❶-①-❷-②-❶-①	❷-①-❶-②-❶-①
2–1–1	❶-②-❶-①-❷-①	❶-②-❷-①-❶-①	❷-②-❶-①-❶-①

圖2–30

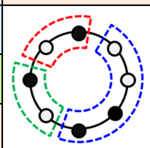


圖2–31

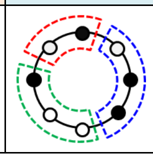
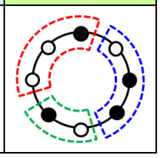


圖2–32



(1) 黑＋白各1段視為1組，每種連接模式有3組，3組排列經同向推移後若為相同的連接方式，就可轉換為同種的環狀排列。

例：❶-①-❶-①-❷-②、❶-①-❷-②-❶-①與❷-②-❶-①-❶-①，這3種黑、白珠連接模式，經同向往前推移後，會發現為相同的連接方式，故轉換環狀排列為同種。

由圖2–30可看出這3種連接方式轉換環形，只在起始點位置不同而已。

(2) 黑、白各有3種分段模式，穿插組合成$3\times3=9$種模式。6段有3組黑、白組合。

故轉換成環狀排列有$\frac{3\times3}{3}=3$種。故8珠6段共有$\frac{3\times3}{3}=3$ 種環狀排列。

2. 10珠：$\frac{10}{2}=5$，5珠分3段，即

$5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+2+1=2+1+2$。

(1) 5珠分3段有6種分段模式，列出所有分段模式的組合，分析是否同種。

白＼黑	1−1−3	1−3−1	3−1−1	1−2−2	2−2−1	2−1−2
1−1−3	❶-①-❶-①-❸-③	❶-①-❸-①-❶-③	❸-①-❶-①-❶-③	❶-①-❷-①-❷-③	❷-①-❷-①-❶-③	❷-①-❶-①-❷-③
1−3−1	❶-①-❶-③-❸-①	❶-①-❸-③-❶-①	❸-①-❶-③-❶-①	❶-①-❷-③-❷-①	❷-①-❷-③-❶-①	❷-①-❶-③-❷-①
3−1−1	❶-③-❶-①-❸-①	❶-③-❸-①-❶-①	❸-③-❶-①-❶-①	❶-③-❷-①-❷-①	❷-③-❷-①-❶-①	❷-③-❶-①-❷-①
1−2−2	❶-①-❶-②-❸-②	❶-①-❸-②-❶-②	❸-①-❶-②-❶-②	❶-①-❷-②-❷-②	❷-①-❷-②-❶-②	❷-①-❶-②-❷-②
2−2−1	❶-②-❶-②-❸-①	❶-②-❸-②-❶-①	❸-②-❶-②-❶-①	❶-②-❷-②-❷-①	❷-②-❷-②-❶-①	❷-②-❶-②-❷-①
2−1−2	❶-②-❶-①-❸-②	❶-②-❸-①-❶-②	❸-②-❶-①-❶-②	❶-②-❷-①-❷-②	❷-②-❷-①-❶-②	❷-②-❶-①-❷-②

(2) 與8珠6段相同，可觀察黑白各1段的3組排列，經同向推移後是否相同，就可知道轉換成環形是否為同種。

(3)黑、白各有6種分段模式，穿插組合成$6\times6=36$種模式。6段有3組黑、白組合，故10珠分6段的環狀排列有$\frac{6\times6}{3}=12$ 種。

3. 黑、白珠分6段有3組黑、白組合，可觀察這3組黑、白組合，經同向推移後是否為相同的連接方式，就可知道轉換成環狀是否為同種。

(六) **8段：**黑、白各分4段。

1. 8珠：$\frac{8}{2}=4$，$4=1+1+1+1$，黑珠＋白珠視為1組，8段有4組。每組皆為1黑1白，故8珠分8段的環狀排列只有1種連接模式。(如圖2−33)

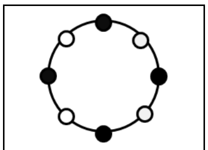


圖2−33

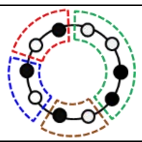
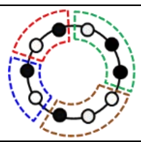
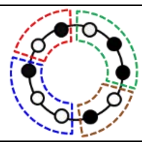
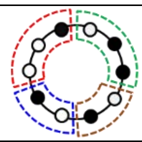
2. 10珠：$\frac{10}{2}=5$，5珠分4段，即$5=1+1+1+2=1+1+2+1=1+2+1+1=2+1+1+1$(4種)

(1) 列出所有分段模式的組合，分析是否同種。

白＼黑	1−1−1−2	1−1−2−1	1−2−1−1	2−1−1−1
1−1−1−2	❶-①-❶-①-❶-①-❷-②	❶-①-❶-①-❷-①-❶-②	❶-①-❷-①-❶-①-❶-②	❷-①-❶-①-❶-①-❶-②
1−1−2−1	❶-①-❶-①-❶-②-❷-①	❶-①-❶-①-❷-②-❶-①	❶-①-❷-①-❶-②-❶-①	❷-①-❶-①-❶-②-❶-①
1−2−1−1	❶-①-❶-②-❶-①-❷-①	❶-①-❶-②-❷-①-❶-①	❶-①-❷-②-❶-①-❶-①	❷-①-❶-②-❶-①-❶-①
2−1−1−1	❶-②-❶-①-❶-①-❷-①	❶-②-❶-①-❷-①-❶-①	❶-②-❷-①-❶-①-❶-①	❷-②-❶-①-❶-①-❶-①

(2) 10珠分8段，黑、白各有4種分段模式，穿插組合成$4\times4=16$種模式。

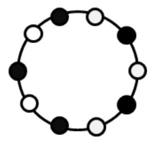
(3) 黑珠＋白珠視為1組，8段有4組黑白組合，4組排列推移後若相同，可視為相同的連接方式，故10珠分8段共有$\dfrac{4\times4}{4}=4$種環狀排列方式。(如圖$2-34$~圖$2-37$所示)

			
圖$2-34$	圖$2-35$	圖$2-36$	圖$2-37$

(七) **10段：**

1. 10珠：$\dfrac{10}{2}=5$，5珠分5段，即$5=1+1+1+1+1$，1種分段方式。
2. 黑＋白珠視為1組，10段有5組，每組都為1黑＋1白，故10珠10段只有1 種環狀排列方式。(如圖$2-38$所示)

圖$2-38$



(八) **整理2~10段環狀分段排列數的發現**

1. 環狀分段排列數，不需考慮黑、白易位會增加排列數，故轉換環狀排列前的直線排列只需考慮因黑、白分段所穿插而成的直線排列。

2. $2n$珠分$2p$段的直線分段排列數$=C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}$。

3. 由2~10段分析的圖示可看出，將黑＋白(黑、白各一段)視為1組，觀察組的推移是否相同，就可得知該種直線排列方式經環狀轉換後是否相同。

4. 在正常的狀況下，有幾組黑白的組合，就會出現幾組轉換後相同的環狀分段排列，故$2n$珠分$2p$段的環狀分段排列數$=C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\dfrac{1}{p}$。

5. 但在8珠4段卻出現了一個例外，8珠4段($n=4$，$p=2$)若代入環狀分段排列數公式$C_{2-1}^{4-1}\times C_{2-1}^{4-1}\times\frac{1}{2}$，會出現無法整除，故無法直接套用我們找到的環狀分段排列數公式。是否將環狀分段排列數公式修正為$\left|C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\dfrac{1}{p}\right|$，就能適用所有$2n$珠分$2p$段的環狀分段排列數，引起我們的疑問，因此在下一節，做了進一步的討論。

四、10珠以內，除了8珠4段以外，其餘的環狀排列都適用$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$，是否修正為 $\left|C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}\right|$，就能適用所有2n珠分2p段的情況？

(一) 比較10珠以內，n和p的關係及是否適用環狀分段公式$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$的情形。

1. 當$p=2$(分2段)或$n=p$(珠數與段數相同)，其環狀排列方式都等於1，故不列入分析。

2. $(n,p)=(3,2)$、$(5,2)$、$(4,3)$、$(5,3)$、$(5,4)$適用環狀分段公式$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

   $(n,p)=(4,2)$不適用環狀分段公式$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

3. 比較兩者的差異，前者(n,p)關係為互質，即$(n,p)=1$；後者為$(n,p)=(4,2)=2\neq1$，(n,p)有公因數。當$(n,p)=1$時，不會出現循環排列，故環狀分段數$=C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

4. 我們依此整理出定理4。

定理4：當$(n,p)=1$，$2n$珠分$2p$段的環狀分段排列數為$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

5. 當$(n,p)\neq1$時，直線的分段模式會出現循環節的分段模式。

   (1) 如$(n,p)=(4,2)=2$，$4=1+3=3+1=2+2$(有3種將4珠分2段的模式)
   $1+3$與$3+1$，2段的組合由不同珠數所組成，故屬於非循環分段模式，所有和非循環分段模式連接而成的直線排列方式都是非循環的直線排列，都會出現p個轉換環狀排列後同種的直線排列，故非循環的直線排列轉換成環狀需$\times\frac{1}{p}$。

   (2) $2+2$，2段的組合由相同元素組成，我們可以把它視為同數組合，也可將它看作2個循環節的分段模式，同數組合只會出現1種直線排列，故轉換成環狀也只有1種。

6. 循環模式的直線排列轉換成環狀模式需另做處理，無法直接套用$C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$公式，應如何修正？我們擴大我們的觀察至20珠。

(二) 整理12珠~20珠分$2p$段，即n = 6~10分 p 段循環排列的環狀轉換模式

1. gcd(n, p) = f ，且 f 為質數

$(6,4)=2$	$6=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}$ $=\boxed{2+1}+\boxed{2+1}$	分段模式為2個循環節的組合。 $6\div2=3$(每個循環節的值)，$4\div2=2$(每個循環節段數) $C_{2-1}^{3-1}=2$，有2種直線分段模式。 轉換成環狀$=C_{2-1}^{3-1}\times C_{2-1}^{3-1}\times\frac{1}{2}$。
$(8,6)=2$	$8=\boxed{1+1+2}+\boxed{1+1+2}$ $=\boxed{1+2+1}+\boxed{1+2+1}$ $=\boxed{2+1+1}+\boxed{2+1+1}$	分段模式為2個循環節的組合。 $8\div2=4$(每循環節的值)，$6\div2=3$(每循環節段數) $C_{3-1}^{4-1}=C_2^3=3$，有3種直線分段模式。 轉換成環狀$=C_{3-1}^{4-1}\times C_{3-1}^{4-1}\times\frac{1}{3}$。
$(9,6)=3$	$9=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+\boxed{1+2}$ $=\boxed{2+1}+\boxed{2+1}+\boxed{2+1}$	分段模式為3個循環節的組合。 $9\div3=3$(每循環節的值)，$6\div3=2$(每循環節段數) $C_{2-1}^{3-1}=C_1^2=2$，有2種直線分段模式。 轉換成環狀$=C_{2-1}^{3-1}\times C_{2-1}^{3-1}\times\frac{1}{2}$。
$(10,4)=2$	$10=\boxed{2+3}+\boxed{2+3}$ $=\boxed{3+2}+\boxed{3+2}$ $=\boxed{1+4}+\boxed{1+4}$ $=\boxed{4+1}+\boxed{4+1}$	分段模式為2個循環節的組合。 $10\div2=5$(每循環節的值)，$4\div2=2$(每循環節段數) $C_{2-1}^{5-1}=C_1^4=4$，有4種直線分段模式。 轉換成環狀$=C_{2-1}^{5-1}\times C_{2-1}^{5-1}\times\frac{1}{2}$。
$(10,6)=2$	$10=\boxed{1+1+3}+\boxed{1+1+3}$ $=\boxed{1+3+1}+\boxed{1+3+1}$ $=\boxed{3+1+1}+\boxed{3+1+1}$ $=\boxed{1+2+2}+\boxed{1+2+2}$ $=\boxed{2+2+1}+\boxed{2+2+1}$ $=\boxed{2+1+2}+\boxed{2+1+2}$	分段模式為2個循環節的組合。 $10\div2=5$(每循環節的值)，$6\div2=3$(每循環節段數) $C_{3-1}^{5-1}=C_2^4=6$，有6種直線分段模式。 轉換成環狀$=C_{3-1}^{5-1}\times C_{3-1}^{5-1}\times\frac{1}{3}$。

(1) $(n,p)=f$ ，f 為質數，故循環分段模式只有「f 循環」一種。

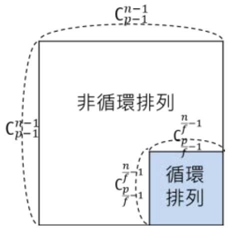
(2) f 為n的因數，f 可等分n為 f 個，故 f 循環每循環節的值為$\frac{n}{f}$；

f 為 p 的因數，p 可等分為 f 個循環節，每循環節為$\frac{p}{f}$段。

(3) 循環的直線分段模式可想成將 $\frac{n}{f}$ 珠分成 $\frac{p}{f}$ 段的方法，故循環的直線分段模式 $=C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}$。

循環的直線排列數 $=C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\times C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}$，會出現 $\frac{p}{f}$ 個轉換環狀排列後同種的直線排列，故轉換成環狀排列數 $=\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}$。

(4) 除循環的直線排列外，其餘的直線的分段模式都是



將 n 珠分成 p 段，即非循環直線分段排列數 $=(C^{n-1}_{p-1})^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2$，

轉換成環狀分段排列數 $=\left\{(C^{n-1}_{p-1})^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}$。依此我們得到定理5。

定理5：$(n,p)=f$ 且 f 為質數，

$2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數為 $\left\{(C^{n-1}_{p-1})^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}+\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}$。

2. $(n,p)=f$，f 為質數，且 $f=p$。

$(n,p)=p$	$(6,2)=2$	$(6,3)=3$	$(8,2)=2$	$(9,3)=3$	$(10,2)=2$	$(10,5)=5$
分段模式	$6=3+3$	$6=2+2+2$	$8=4+4$	$9=3+3+3$	$10=5+5$	$10=2+2+2+2+2$

(1) p 為質數，故只會出現1種循環的分段模式。

例 $(8,2)=2$，會出現2個循環節的分段模式，即 $8=\boxed{4}+\boxed{4}$。

$(9,3)=3$，會出現3個循環節的分段模式，即 $9=\boxed{3}+\boxed{3}+\boxed{3}$。

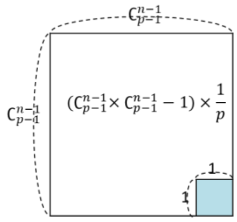
(2) f 是 n 的因數，f 可等分 n 值為 f 個，故 f 循環每循環節的值為 $\frac{n}{f}$；

$f=p$，p 等分為 f 個循環節，每循環節為 $\frac{p}{f}=\frac{p}{p}=1$ 段。

換句話說，f 個循環節中，每個循環節只出現1個 $\frac{n}{f}$，故循環的分段模式為同數組合。

(3) 同數組合的分段模式只有1種直線排列，故轉換成環狀也是1種。

(4) 扣除同數組合的模式後，其餘的「非循環的分段模式」都是將 n 值分成 p 段，轉換成環狀排列為 $(C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}-1)\times\frac{1}{p}$ 。



(5) 故環狀分段排列數為 $(C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}-1)\times\frac{1}{p}+1$ 。依此我們得到定理5.1。

定理5.1： $(n,p)=f$ ， f 為質數，且 $f=p$ ，則

$2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數為 $(C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}-1)\times\frac{1}{p}+1$ 。

(6) 定理5.1為定理5的特例，兩者循環分段模式都只有 f 個循環節，因 $f=p$ ， f 個循環節中，每個循環節只出現1個 $\frac{n}{f}$ ，故循環的分段模式為同數組合。

故 $(n,p)=f$ ， f 為質數，且 $f=p$ ，亦可套用定理5的模式求得環狀分段排列數。

3. $(n,p)=f$ ，f 為合數， f 的因數中只有1個質因數 f_1 。

(1) 在20珠的分段模式只出現在16珠8段（$n=8$ ， $p=4$），故以這個狀況觀察。

(2) $(n,p)=(8,4)=4$ ， 4的因數有1、2、4，因數2和4都會出現循環排列。

① 4個循環節模式	$8=\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}$	$8\div4=2$(每循環節的值)， $4\div4=1$(每循環節的段數) $C_{1-1}^{2-1}\times C_{1-1}^{2-1}=1$，有1種組合模式(直線排列)。 轉換成環狀 $=1$ 。
② 2個循環節模式	$8=\boxed{1+3}+\boxed{1+3}$ $=\boxed{3+1}+\boxed{3+1}$ $=\boxed{2+2}+\boxed{2+2}$	$8\div2=4$ (每循環節的值)， $4\div2=2$(每循環節的段數) $C_{2-1}^{4-1}=3$，有3種直線分段模式。 2是4的因數，其中1種分段模式與4個循環節模式相同，故直線分段排列數需扣除4個循環節模式的直線排列 $=C_{2-1}^{4-1}\times C_{2-1}^{4-1}-1$ 。 轉換成環狀 $=(C_{2-1}^{4-1}\times C_{2-1}^{4-1}-1)\times\frac{1}{2}$ 。

(3) 因數1屬於非循環，非循環需扣除循環的直線排列再進行環狀轉換，因為4循環模式為2循環模式的子循環，故非循環部分的環狀排列 $=(C_{4-1}^{8-1}\times C_{4-1}^{8-1}-C_{2-1}^{4-1}\times C_{2-1}^{4-1})\times\frac{1}{4}$ 。

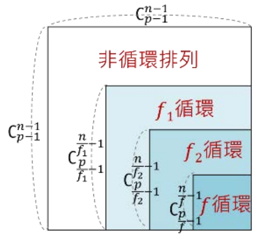
(4) $(n,p)=(8,4)=4$ ，環狀分段排列數 $=\left\{\left(C_{4-1}^{8-1}\right)^2-\left(C_{2-1}^{4-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{4}+\left\{\left(C_{2-1}^{4-1}\right)^2-1\right\}\times\frac{1}{2}+1$ 。

定理6：$(n,p)=f$，f 為合數，f 的因數中只有 1 個質因數 f_1。

則 $2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數為

$$\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_1}{p}$$

$$+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_2}{p}+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\text{。}$$



說明：

1. $(n,p)=f$，f 為合數，f 的因數中只有 1 個質因數 f_1(如圖)。

   f 的因數有 1、f_1、f_2 與 f，故循環排列包括 f 循環，f_1 循環與 f_2 循環的分段模式。

2. f 的因數都等於質因數 f_1 的 k 次方，如圖 f_1 為質數，則 $f_2=(f_1)^2$，$f=(f_1)^3$，

   故 f 循環是 f_2 和 f_1 循環的「子循環」，f_2 循環是 f_1 循環的「子循環」，

   循環排列數需扣除最大子循環再進行環狀分段排列數的轉換。

(1) f 循環的分段模式 $=C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}$，即每循環節的值 $=\dfrac{n}{f}$，每循環節的段數 $=\dfrac{p}{f}$，

直線排列數 $=C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}$，故環狀分段排列數 $=\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\dfrac{f}{p}$。

(2) f_2 循環分段模式 $=C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}$；直線排列數 $=C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}$；$f$ 循環是 f_2 循環的「子循環」，f_2 循環作環狀轉換時，需先扣除 f 循環直線分段排列數再進行環狀轉換。

即 f_2 循環的環狀分段排列數 $=\left\{\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\dfrac{f_2}{p}$。

(3) f_1 循環分段模式 $=C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}$；直線排列數 $=C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}$；$f_2$ 循環是 f_1 循環的最大子循環，f_1 循環作環狀轉換時，需先扣除 f_2 循環直線分段排列數再進行環狀轉換。

即 f_1 循環的環狀分段排列數 $=\left\{\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2\right\}\times\dfrac{f_1}{p}$。

(4) 非循環排列數需扣除循環排列數再進行環狀轉換，因 f 循環與 f_2 循環是 f_1 循環的「子循環」，故非循環直線排列進行環狀轉換時，只需扣除 f_1 循環的直線排列即可。

非循環環狀分段排列數 $=\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2\right\}\times\dfrac{1}{p}$ 。

3. $(n,p)=f$ ，f 為合數，f 的因數中只有 1 個質因數 f_1 。

則 $2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數

＝非循環環狀分段排列數＋ f_1 循環、 f_2 循環和 f 循環環狀分段排列數。

$$=\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_2}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\ 。$$

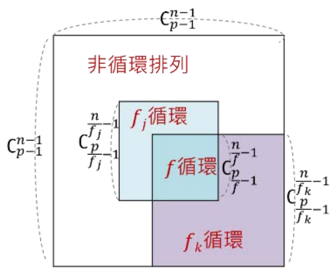
(三) $(n,p)=f$ ，f 的因數中有 2 個質因數 f_j 與 f_k 。

定理 7： $(n,p)=f$ ，$f=f_j\times f_k$ ，且 f_j 與 f_k 為 2 個相異質數。

則 $2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數為

$$\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left[\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}\right)^2+\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right]\right\}\times\frac{1}{p}$$

$$+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_j}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_k}{p}+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\ 。$$



說明：

1. 若 $(n,p)=f$ ，$f=f_j\times f_k$ ，且 f_j 與 f_k 為 2 個相異質數。 f 的因數由大到小依序為 f 、 f_j 、 f_k 和 1。

   以 $n=18$ ， $p=12$ 為例。$(18,12)=6$ ，$6=2\times3$ ，2 與 3 為質數，6 的因數有 6 、3 、2 、1 。

2. 則循環分段模式有 f 個循環節、 f_j 個和 f_k 個循環節模式。每個循環排列的分段模式需注意子循環直線分段排列數的扣除。

   f_j 和 f_k 是 f 的因數，所以 f 循環是 f_j 循環的子循環，也是 f_k 循環的子循環。

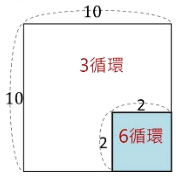
(1) $(18,12)=6$ 的循環分段模式有 6 個循環節、3 個循環節和 2 個循環節模式。

(2) 6 個循環節模式：每循環節的值 $=18\div 6=3$，每個循環節的段數 $=12\div 6=2$。

$$18=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+\boxed{1+2}=\ldots$$

直線分段模式有 $C^{\frac{18}{6}-1}_{\frac{12}{6}-1}=C_1^2=2$ (種)。轉換成環狀 $=2^2\times\dfrac{6}{12}=2$。

(3) 3 個循環節模式：每循環節的值 $=18\div 3=6$，每個循環節的段數 $=12\div 3=4$。

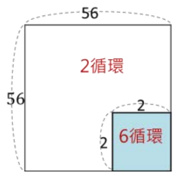


$18=\boxed{1+1+1+3}+\boxed{1+1+1+3}+\boxed{1+1+1+3}=\ldots$ (3 個循環節模式)

$=\boxed{1+2+1+2}+\boxed{1+2+1+2}+\boxed{1+2+1+2}=\ldots$ (子循環 6 個循環節模式)

直線分段模式有 $C^{\frac{18}{3}-1}_{\frac{12}{3}-1}=C_3^5=10$ (種)，6 個循環節是 3 個循環節分段模式的子循環，轉換環形時須先扣除 6 個循環節的直線排列數，故循環排列數 $=(10^2-2^2)\times\dfrac{3}{12}=24$。

(4) 2 個循環節模式：每循環節的值 $=18\div 2=9$，每循環節的段數 $=12\div 2=6$。

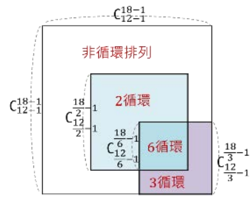


$24=\boxed{1+1+1+1+1+4}+\boxed{1+1+1+1+1+4}=\ldots$ (2 個循環節模式)

$=\boxed{1+2+1+2+1+2}+\boxed{1+2+1+2+1+2}=\ldots$ (子循環 6 個循環節模式)

直線分段模式有 $C^{\frac{18}{2}-1}_{\frac{12}{2}-1}=C_5^8=56$ (種)，6 個循環節是 2 個循環節分段模式的子循環，轉換環形時須先扣除 6 個循環節的直線排列數，故轉換成環狀排 $=(56^2-2^2)\times\dfrac{2}{12}=522$。

3. 非循環排列數需扣除循環排列數再進行環狀轉換，f 的因數有 2 個質因數 f_j 與 f_k，故循環的直線排列數，需扣除 f_j 與 f_k 循環的直線排列數的聯集。



$n=18$，$p=12$ 的直線分段模式為 $C^{18-1}_{12-1}=C^{17}_{11}=12376$。

非循環直線分段排列需扣除 2 循環與 3 循環直線分段排列數的聯集，即{2 循環＋3 循環－6 循環}，再進行環狀轉換。

$$\text{故非循環模式直線排列}=\left\{\left(C^{18-1}_{12-1}\right)^2-\left[\left(C^{\frac{18}{3}-1}_{\frac{12}{3}-1}\right)^2+\left(C^{\frac{18}{2}-1}_{\frac{12}{2}-1}\right)^2-\left(C^{\frac{18}{6}-1}_{\frac{12}{6}-1}\right)^2\right]\right\}\times\frac{1}{12}=12763512$$

4. $(n,p)=f$，$f=f_j\times f_k$，且 f_j 與 f_k 為 2 個相異質因數。

則 $2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數＝「$2n$ 珠分 $2p$ 段直線分段排列－ f_j 與 f_k 直線分段排列的聯集所轉換的環狀排列」的非循環排列，和 f_j、f_k 和 f 循環排列，轉換的環狀分段排列數的和。

5. 故 $2n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數＝

$$=\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left[\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}\right)^2+\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right]\right\}\times\frac{1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_j}{p}$$

$$+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_k}{p}+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\text{ 。}$$

36 珠分 24 段($n=18$ ， $p=12$)環狀排列方法數

$$=\left\{\left(C_{12-1}^{18-1}\right)^2-\left[\left(C_{\frac{12}{3}-1}^{\frac{18}{3}-1}\right)^2+\left(C_{\frac{12}{2}-1}^{\frac{18}{2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{12}{6}-1}^{\frac{18}{6}-1}\right)^2\right]\right\}\times\frac{1}{12}+\left\{\left(C_{\frac{12}{2}-1}^{\frac{18}{2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{12}{6}-1}^{\frac{18}{6}-1}\right)^2\right\}\times\frac{2}{12}$$

$$+\left\{\left(C_{\frac{12}{3}-1}^{\frac{18}{3}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{12}{6}-1}^{\frac{18}{6}-1}\right)^2\right\}\times\frac{3}{12}\left(C_{\frac{12}{6}-1}^{\frac{18}{6}-1}\right)^2\times\frac{6}{12}=12764060\text{ 。}$$

五、黑珠、白珠數目不同(m 個黑珠， n 個白珠)，環狀分段排列數公式應如何修正？

(一) 循環模式直線分段排列的條件

1. 循環模式直線分段排列的條件有 2 ：

   (1) 每循環節黑珠、白珠的值相等。 (2) 每循環節的段數相等。

2. 當黑、白珠等量時， $(n,p)=f$ ，同時滿足了循環模式直線排列的 2 個條件：

   (1) f 為 n 的因數，故 f 能等分 n 為 f 個 $\frac{n}{f}$ ，即每循環節的黑珠＝白珠＝ $\frac{n}{f}$ 。

   (2) f 為 p 的因數，故 f 能等分 p 為 f 個 $\frac{p}{f}$ ，即每循環節黑珠的段數＝白珠的段數＝ $\frac{p}{f}$ 。

3. 由於黑、白珠的環狀分段排列只會出現偶數段，故黑珠的段數＝白珠的段數，換句話說段數不會因黑、白珠珠數不同而改變。

4. 故當黑、白珠不等量時，出現「 f 個循環節」的直線分段模式，需滿足 3 個條件：

   (1) m 個黑珠能等分為 f 個，即每循環節黑珠的值為 $\frac{m}{f}$ 。

   (2) n 個白珠能等分為 f 個，即每循環節白珠的值為 $\frac{n}{f}$ 。

   (3) p 段能等分為 f 個，即每循環節的段數同為 $\frac{p}{f}$ 段。

5. 換句話說 m 、 n 、 p 需同時能被 f 整除，才會出現 f 個循環節的直線排列。

   故當黑、白珠不等量時，循環模式直線分段排列的條件為 $(m,n,p)=f$ $(f\neq 1)$ 。

(二) 黑珠、白珠數目不同，直線分段排列數

1. 環狀分段排列為偶數段(性質1)，分 $2p$ 段的環狀分段排列，黑、白各分 p 段，黑、白珠穿插排列，直線排列數＝(m 個黑珠分 p 段的排列數)×(n 個白珠分 p 段的排列數)。
   故直線分段排列數 $= C_{p-1}^{m-1} \times C_{p-1}^{n-1}$ 。
2. 循環排列受 $(m,n,p)=f$ ， f 性質的影響，而有不同循環節的分段模式。可套用黑、白珠數相同，因 f 值的性質，而產生的不同循環節模式。

(三) 黑珠、白珠數目不同，環狀分段排列數整理如下：

定理 8 ： $(m,n,p)=f$ ， $f=1$ ，則 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為 $C_{p-1}^{m-1} \times C_{p-1}^{n-1} \times \dfrac{1}{p}$ 。

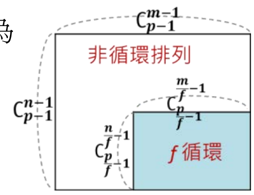
說明：

根據**定理 4** ，當珠數與段數的最大公因數 $f=1$ ，不會出現循環分段模式，

故環狀分段排列數＝直線分段排列數 $\times \dfrac{1}{p}$ 。

定理 8.1 ： $(m,n,p)=f$ ，且 f 為質數，則 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為

$$\left(C_{p-1}^{m-1} \times C_{p-1}^{n-1} - C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1} \times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right) \times \frac{1}{p} + C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1} \times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1} \times \frac{f}{p}\text{ 。}$$



說明：

1. 根據**定理 5** ，當珠數與段數的最大公因數 f 為質數，循環分段模式只會出現 f 個循環節的模式，故環狀分段排列數＝非循環和 f 循環兩者的環狀分段排列數的和。

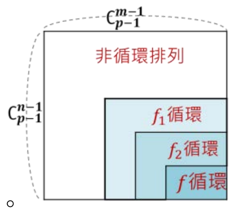
2. 非循環分段排列數需扣除 f 循環直線分段排列數再進行環狀轉換。

定理 8.2 ： $(m,n,p)=f$ ， f 為合數， f 的因數中只有 1 個質因數 f_1 ，

則 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為

$$\left(C_{p-1}^{m-1} \times C_{p-1}^{n-1} - C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1} \times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right) \times \frac{1}{p} + \left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1} \times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1} - C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1} \times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right) \times \frac{f_1}{p}\text{ 。}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1} \times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1} - C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1} \times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right) \times \frac{f_2}{p} + C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1} \times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1} \times \frac{f}{p}\text{ 。}$$

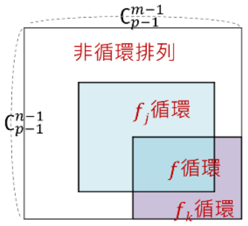


說明：

1. 根據**定理 6**， f 的因數都等於質因數 f_1 的 k 次方，如圖 f_1 為質數，則 $f_2=(f_1)^2$，$f=(f_1)^3$，故 f 循環是 f_2 和 f_1 循環的「子循環」， f_2 循環是 f_1 循環的「子循環」。循環分段排列數需扣除最大子循環再進行環狀分段排列數的轉換。
2. 非循環分段排列數則扣除 f_1 循環的直線分段排列數再進行環狀轉換。

定理 8.3：$(m,n,p)=f$ ， $f=f_j\times f_k$，且 f_j 與 f_k 為 2 個相異質數。

則$(m+n)$珠分 $2p$ 段環狀排列數



$$\left\{C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{m}{f_j}-1}\times C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}+C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{m}{f_k}-1}\times C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\right\}\times\frac{1}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{m}{f_j}-1}\times C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_j}{p}+\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{m}{f_k}-1}\times C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_k}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{。}$$

說明：

根據**定理 7**，當 f 的因數包含 2 個相異質因數 f_j 與 f_k 時，與其他狀況最大的差異在於非循環直線分段排列數需扣除的循環分段直線排列數為「 f_j 與 f_k 循環直線分段排列數的聯集」，再進行環狀分段排列數的轉換。

(四) 黑、白珠數相同是黑珠、白珠數目不同的特例，故黑、白珠數相同環狀分段排列數亦可由黑珠、白珠數目不同的環狀分段排列數公式求得。

肆、討論

一、環狀分段排列公式的整合

(一) 與「不盡相異物的環狀排列公式」[3]同為將不產生子循環的直線排列數轉換為環狀排列，故我們套用該文獻中的定理六公式，整理出推論1。

推論1：$(m,n,p)=f$ ， f 的因數由小到大依序為 $f_1,f_2,\ldots f_k$，不同循環節的直線排列所成的集合依序為 $S_1,S_2,\ldots,S_k$ ，則 $m+n$ 珠分 $2p$ 段的環狀分段排列數為 $\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i\times|S_i|}{p}$ 。

說明：

1. 黑、白珠的環狀分段排列數因珠數(m與n)與段數p的最大公因數f的性質，而有非循環和各種循環分段模式。

2. 每一個f的因數f_i，都對應一種f_i個循環節的分段模式，若$f_i=1$，則分段模式為非循環模式。

3. 每種直線分段排列數的集合$\boldsymbol{S_i}$，進行環狀轉換時，都需將直線排列數$\times\dfrac{f_i}{p}$，即$|\boldsymbol{S_i}|\times\dfrac{f_i}{p}$。

4. 故$m+n$珠分$2p$段的環狀分段排列數可以$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i\times|S_i|}{p}$表示。

5. 以$m=18$，$n=12$，$p=6$ 為例

(1) $(18,12,6)=6$，6的因數由小到大依序為$1,2,3,6$。

(2) $f_i=1$，m直線分段模式為$C_{6-1}^{18-1}=C_5^{17}=6188$；$n$直線分段模式為$C_{6-1}^{12-1}=C_5^{11}=462$。

$f_i=2$，m直線分段模式為$C_{\frac{6}{2}-1}^{\frac{18}{2}-1}=C_2^8=28$；$n$直線分段模式為$C_{\frac{6}{2}-1}^{\frac{12}{2}-1}=C_2^5=10$。

$f_i=3$，m直線分段模式為$C_{\frac{6}{3}-1}^{\frac{18}{3}-1}=C_1^5=5$；$n$直線分段模式為$C_{\frac{6}{3}-1}^{\frac{12}{3}-1}=C_1^3=3$。

$f_i=6$，m直線分段模式為$C_{\frac{6}{6}-1}^{\frac{18}{6}-1}=C_0^2=1$；$n$直線分段模式為$C_{\frac{6}{6}-1}^{\frac{12}{6}-1}=C_0^1=1$。

(3) $f_i=1$，為非循環排列；$|S_1|=6188\times462-(28\times10+5\times3-1)=2858562$；

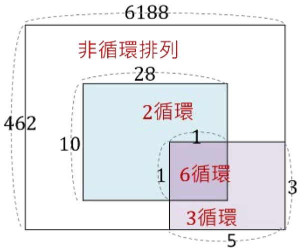
轉換成環狀排列$=2858562\times\dfrac{1}{6}=476427$。

$f_i=2$，為2個循環節模式的排列。$|S_2|=(28\times10-1\times1)=279$；

轉換成環狀排列$=(28\times10-1\times1)\times\dfrac{2}{6}=93$。

$f_i=3$，為3個循環節模式的排列。$|S_3|=(5\times3-1\times1)=14$；

轉換成環狀排列$=(5\times3-1\times1)\times\dfrac{3}{6}=7$。



$f_i=6$，為6個循環節模式的排列。$|S_6|=1\times1=1$；

轉換成環狀排列$=1\times1\times\dfrac{6}{6}=1$。

(4) 環狀排列 $=\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i\times|S_i|}{p}=|S_1|\times\frac{1}{p}+|S_2|\times\frac{2}{p}+|S_3|\times\frac{3}{p}+|S_6|\times\frac{6}{p}$

$=\frac{1\times 2858562}{6}+\frac{2\times 279}{6}+\frac{3\times 14}{6}+\frac{6\times 1}{6}=476528$ 。

二、與「不盡相異物的環狀排列公式」的差異[3]

(一) 文獻討論 k 類物品，每類依序有 $x_1,x_2,...,x_k$ 個， $(x_1,x_2,...,x_k)=d$ ，最大公因數 d 值決定不同循環節個數的循環排列。最大公因數的產生為 k 類物品的不同個數。

(二) 本作品最大公因數「 f 」的產生除了不同物品的相異個數(m 與 n)，還加入與物品不同性質的「段數 p 」這個元素。

(三) 將段數 p 與相異物 m 、 n ，兩種不同性質的元素取其最大公因數，解決了環狀分段排列數最關鍵的循環數列的發現，是我們的創舉，也是本研究最值得自豪的地方。

伍、結論

一、黑白毛毛蟲的種類數是以顏色區隔做段落數的依據，計數毛毛蟲的種類數，所以第一個要解決的就是找到「n 節分 p 段」的方法數。

我們以長條格從間隔線做切割的思考，順利找到了 n 節分 p 段的方法數為 C_{p-1}^{n-1} 。

二、黑白毛毛蟲的段落因黑白相間的顏色變化而產生，故方法數的計數可將「n 節分 p 段的方法數」以二維的思考求得分段的種類數。

三、黑白毛毛蟲受黑白節數多寡與段數奇、偶的影響，而有不同的分段種類數。

(一) 我們提出了高斯天花板 $\lceil\ \rceil$ 和高斯地板 $\lfloor\ \rfloor$ 解決段數奇、偶的差異。

(二) m 節黑色和 n 節白色所組成的毛毛蟲，種類數為 $C_{\lceil\frac{p}{2}\rceil-1}^{m-1}\times C_{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}^{n-1}+C_{\lceil\frac{p}{2}\rceil-1}^{n-1}\times C_{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}^{m-1}$ 。

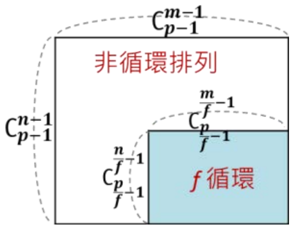
(三) $m+n$ 節毛毛蟲分段的種類數公式亦適用黑、白節數相同毛毛蟲的種類數。

四、*m* 個黑珠，*n* 個白珠，分成 $2p$ 段的環狀排列，因黑珠、白珠的「珠數」與「段數」的公因數，而有不同循環節個數的循環排列。

(一) 若 $(m,n,p)=f$ ， $f=1$，不會出現循環分段模式，故 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為 $C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\dfrac{1}{p}$ 。

(二) 若 $(m,n,p)=f$ ，且 f 為質數，會出現 f 循環模式，非循環模式需先扣除循環模式的直線排列再進行轉換，故 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為

$$\left(C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{1}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{ 。}$$

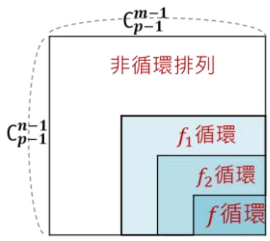


(三) 若 $(m,n,p)=f$ ， f 為合數， f 的因數中只有 1 個質因數 f_1

則 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為

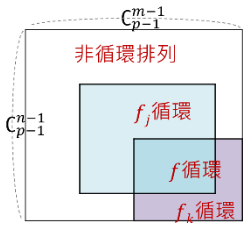
$$\left(C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)\times\frac{1}{p}+\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}-C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)\times\frac{f_1}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_2}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{ 。}$$



(四) $(m,n,p)=f$ ， $f=f_j\times f_k$ ，且 f_j 與 f_k 為 2 個相異質數。

則 $(m+n)$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為



$$\left\{C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{m}{f_j}-1}\times C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}+C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{m}{f_k}-1}\times C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\right\}\times\frac{1}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{m}{f_j}-1}\times C_{\frac{p}{f_j}-1}^{\frac{n}{f_j}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_j}{p}+\left(C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{m}{f_k}-1}\times C_{\frac{p}{f_k}-1}^{\frac{n}{f_k}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_k}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{ 。}$$

(五) f 的質因數個數增加時，文氏圖 (*Venn diagram*) 可幫助我們釐清「非循環的直線分段排列數」與每個「循環的直線分段排列數」該扣除的直線分段排列數。

(六) 環狀分段排列的整合

$(m,n,p)=f$ ， f 的因數由小到大依序為 $f_1,f_2,\ldots f_k$ ，不同循環節的直線分段排列集合依序為 $S_1,S_2,\ldots,S_k$ ，則 $m+n$ 珠分 $2p$ 段環狀排列數為 $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{f_i\times|S_i|}{p}$ 。

(七) 黑、白珠數不同的環狀分段排列數公式亦適用黑、白珠數相同的環狀分段排列數。

陸、未來展望

一、多色的直線分段排列與環狀分段排列

(一) 目前我們的研究止於毛毛蟲顏色為黑、白 2 色的研究，但我們曾對增加毛毛蟲的顏色為 3 色加以探討。我們發現：

1. 3 色的直線分段排列，無法直接套用 2 色的直線分段排列。

   (1) 2 色的直線分段排列數＝(黑分段的方法數)×(白分段的方法數)× 2 。

   (2) 3 色的直線分段排列數(第 3 色為紅色為例)

   ≠(黑分段的方法數)×(白分段的方法數) ×(紅分段的方法數)× 3 。

2. 以分 6 段為例，兩色是黑、白相間，6 為偶數，故黑的段數＝白的段數＝3；顏色排列只會出現黑、白易位，故只要將(黑分 3 段的方法數)×(白分 3 段的方法數)× 2 ，就可以得到種類數，顏色排列只要簡單的「× 2 」就解決。

3. 若顏色增為 3 色，3 色分 6 段。

   6＝3+2+1＝3+1+2＝2+1+3＝2+3+1＝1+3+2＝1+2+3＝2+2+2 ，就有 7 種顏色分段排列模式。

   6＝3+2+1，3 色分段模式的意思是「黑的分 3 段，白的分 2 段，紅的1段」，我們先需找出黑3段，白 2 段，紅1段的顏色排列有幾種方式。

4. 我們以樹狀圖找出黑3段，白 2 段，紅1段有 10 種。

   (1) 黑、白、紅易位，又有 6 種變化，即

   黑3、白2、紅1，黑3、白1、紅2，

   白3、黑2、紅1，白3、紅1、黑2，

   紅3、黑2、白1，紅3、白1、黑2 共 6 種。

   (2) 每種顏色變化都有10種顏色排列模式，

   故顏色排列模式有 60 種，每種顏色分段模式，

   再依節數分 3 段、2 段、1段去求種類數。

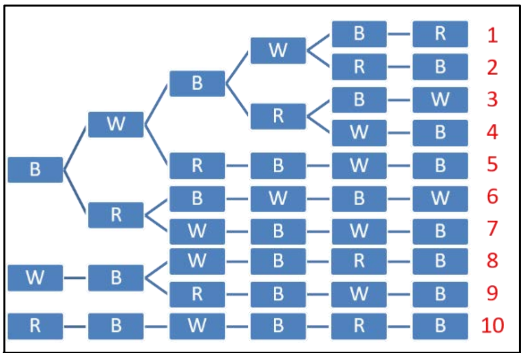


圖 4-1：黑 3 段，白 2 段，紅 1 段
顏色排列樹狀圖

(3) 以黑、白、紅節數相同的15節毛毛蟲為例，$6=3+2+1$顏色分段模式，每種顏色分段模式有因節數的分段模式又有$C_{3-1}^{5-1}\times C_{2-1}^{5-1}\times C_{1-1}^{5-1}=24$變化，

故種類數＝$\left(C_{3-1}^{5-1}\times C_{2-1}^{5-1}\times C_{1-1}^{5-1}\right)\times 60=1440$。

(4) $6=2+2+2$用樹狀圖畫出共有30種黑、白、紅的顏色排列模式，加上節數分段的變化，種類數$=\left(C_{2-1}^{5-1}\times C_{2-1}^{5-1}\times C_{2-1}^{5-1}\right)\times 30=1920$。

(5) 故黑、白、紅節數相同的15節毛毛蟲分6段的種類數$=1440+1920=3360$。

(二) 若增加毛毛蟲的顏色為3色以上要先解決顏色的分段排列，再解決節數的分段排列。

我們受限於時間和目前的能力，卡關在顏色的變化需以樹狀圖一一畫出，無法整理出一個具體而簡單的公式來解決，相信突破了這點，3色以上的直線分段排列與環狀排列，應可以2色的研究為基礎繼續深入探討。

(三) 所以多色的直線分段排列與環狀分段排列，應該是個有趣而迷人的問題，值得深入探討。

柒、參考資料

[1] 游森棚(2021)。森棚教官的數學題－黑白毛毛蟲。科學研習期刊第60卷第3期。

[2] 林柏均、曾愷威、潘祈睿(2017)。閃爍燈之循環性質研究與探討。全國中小學第57屆科展高中組數學科作品。取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/050409.pdf

[3] 王世勛、李陽明(2006)。不盡相異物的環狀排列。科學教育月刊第292,29-38。

【評語】080403

探討兩種相異物排列的組合問題，以節數、段數與種類的探討為主軸，由相同節數直線排列，到相異節數直線排列，再到環狀排列。作者循序漸進，觀察少量例子之後找出計算模式，進而修正為一般式，再整合出環狀分段排列數的公式。作者以巧妙的圖示清晰呈現想法與做法，輔以例子具體說明，條理井然，論證嚴謹，深富研究精神。

作品簡報

黑白有段

數學科　國小組

研究動機

題目源自森棚教官的數學題 - 黑白毛毛蟲

每隻毛毛蟲從頭到尾巴，恰好可以分成兩段黑色及兩段白色。

但是相鄰的兩段如果是同色，其實看起來是一整段同樣顏色，例如“黑白白黑”的毛毛蟲，其實只有3段顏色，而“白白黑黑”毛毛蟲，只有2段顏色。

題目中提到用「**顏色來分段**」這種分法，引起我們的興趣，因此我們決定鎖定這個方向作為我們的研究主題，進行科展研究。...

研究過程

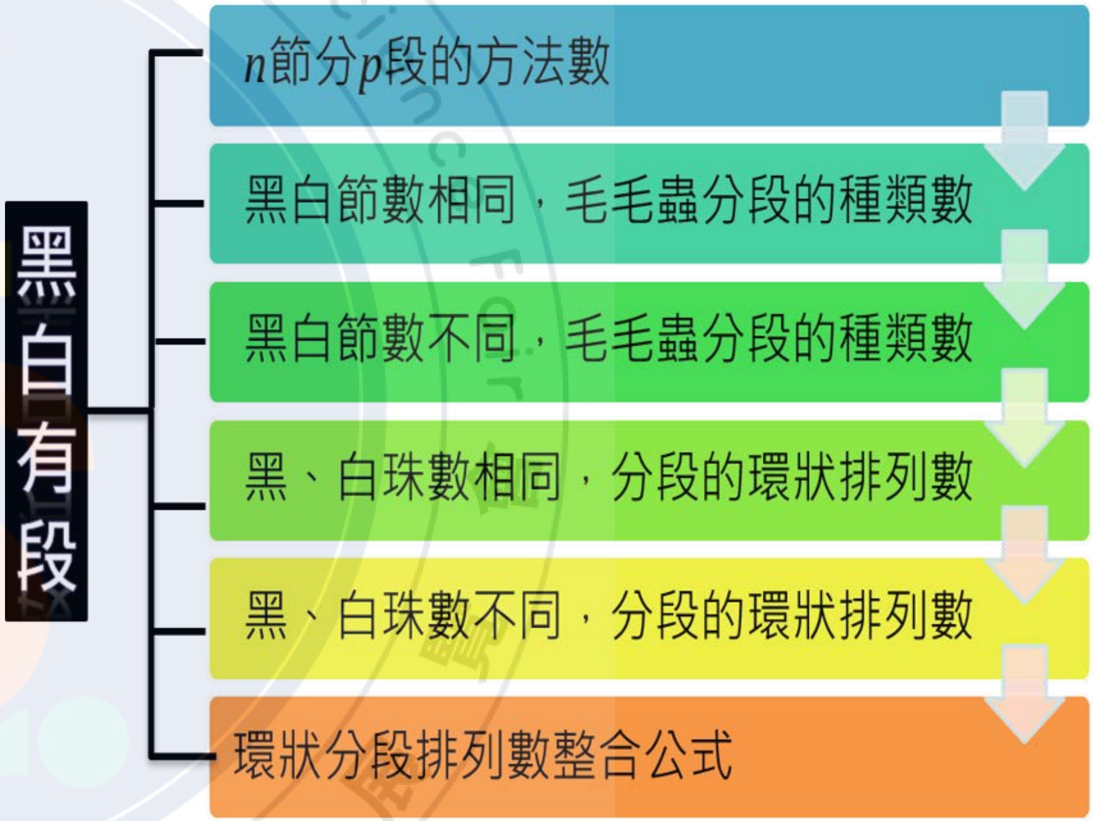


圖1：研究架構圖

名詞定義

1. **節數(N)**：毛毛蟲身上從頭到腳分成的環節數。

2. **段數(P)**：以顏色區分毛毛蟲的段落數(同色相鄰為同段)。

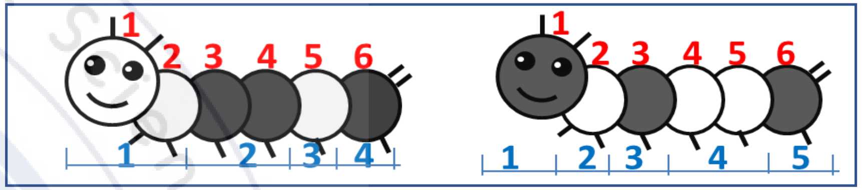


圖2：毛毛蟲段數與節數

3. **循環排列**：直線排列方式出現循環式相同的排列。以8珠分4段為例

●●○●●○○○...非循環排列

●●○○●●○○...2個循環節排列，簡稱2循環。

4. **子循環**：16珠分8段，若排列方式為

●●○○●●○○●●○○●●○○ 依排列方式，可分成2個循環節排列，

但每個循環節●●○○●●○○中出現循環排列●●○○，那我們就需把

●●○○●●○○●●○○●●○○的黑、白珠排列視為4個循環節模式。

我們稱4循環的分段模式是 2 循環的子循環。

研究結果

以長條格分割思考n節分p段的方法數

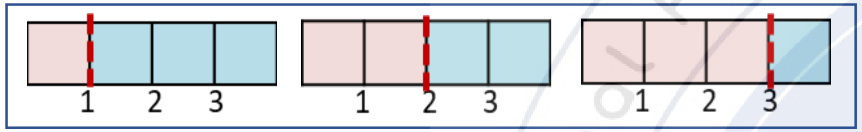


圖3：4格切2段

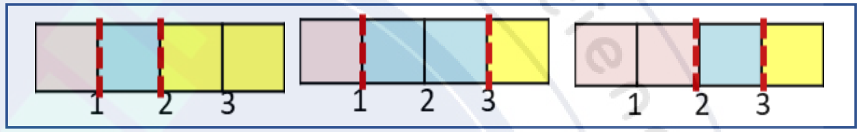


圖4：4格切3段

定理 1 n節分p段的方法數為 C^{n-1}_{p-1}

黑、白節數相同的N節毛毛蟲分成P段的種類

表1-1：黑3段白2段 (黑在頭、尾)

白 / 黑	1-2	2-1
1-1-1	●○●○○●	●○○●○●

表1-2：黑2段白3段(白在頭、尾)

黑 / 白	1-2	2-1
1-1-1	○●○●●○	○●●○●○

定理 2 黑、白節數相同的N節毛毛蟲分P段的種類數為2倍的$C^{\frac{N}{2}-1}_{\lceil\frac{P}{2}\rceil-1}\times C^{\frac{N}{2}-1}_{\lfloor\frac{P}{2}\rfloor-1}$。

1. 黑、白毛毛蟲，黑與白穿插排列，故種類數=黑分段的方法數×白分段的方法數× 2。
2. 偶數段黑、白各$\frac{P}{2}$段，奇數段以黑在兩端思考，即黑為$\lceil\frac{P}{2}\rceil$段，白為$\lfloor\frac{P}{2}\rfloor$段。

以高斯天花板$\lceil\quad\rceil$與高斯地板$\lfloor\quad\rfloor$解決奇、偶段數的差異

表3：段數奇、偶與高斯符號

○ … ○ × … × ○ … ○ × … × ○ … ○ × … × ○ … ○	○ … ○ × … × ○ … ○ × … × ○ … ○ × … × ○ … ○ × … ×
P為奇數，$\left\lceil \frac{P}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{P}{2} \right\rfloor = P$。 例$P=7$，$\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 4+3=7$。	P為偶數，$\left\lceil \frac{P}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{P}{2} \right\rfloor = P$。 例$P=6$，$\left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3+3=6$。

黑白節數不同，毛毛蟲分P段的種類數

表4-1：黑4節白3節分5段(黑在頭、尾)

白＼黑	1-1-2	1-2-1	2-1-1
1-2	●○●○○●●	●○●●○○●	●●○●○○●
2-1	●○○●○●●	●○○●●○●	●●○○●○●

表4-2：黑4節白3節分5段(白在頭、尾)

白＼黑	1-3	2-2	3-1
1-1-1	○●○●●●○	○●●○●●○	○●●●○●○

定理 3 **黑m節、白n節毛毛蟲分P段的種類數為 $C^{m-1}_{\lceil \frac{P}{2}\rceil -1}\times C^{n-1}_{\lfloor \frac{P}{2}\rfloor -1}+C^{n-1}_{\lceil \frac{P}{2}\rceil -1}\times C^{m-1}_{\lfloor \frac{P}{2}\rfloor -1}$**

(一) 毛毛蟲種類數，若段數為奇數，無法如節數相同毛毛蟲，以黑在頭的模式×2求得總類數。

(二) 總類數=黑在頭尾的種類數+白在頭尾的種類數= $C^{m-1}_{\lceil \frac{P}{2}\rceil -1}\times C^{n-1}_{\lfloor \frac{P}{2}\rfloor -1}+C^{n-1}_{\lceil \frac{P}{2}\rceil -1}\times C^{m-1}_{\lfloor \frac{P}{2}\rfloor -1}$ 。

$2n$珠分$2p$段的環狀分段排列數

性質 1 環狀分段排列只會出現偶數段。

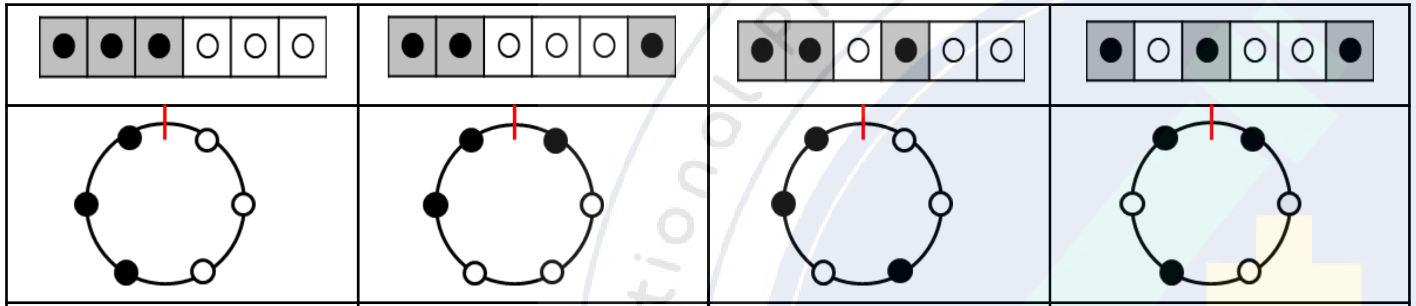
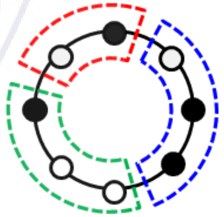
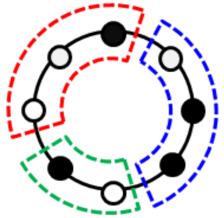


圖5	圖6	圖7	圖8

圖6：直線為3段，頭、尾同色，
故轉換為環狀段數由3轉為2。
圖8 ：直線為5段，頭、尾同色，
故轉換為環狀段數由5轉為4。
故環狀分段排列只會出現偶數段。

定理 4 當$(n,p)=1$，$2n$珠分$2p$段的環狀排列數為 $C_{p-1}^{n-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

表5：8珠分6段直線排列與環狀排列(黑、白各4珠)

白 黑	1-1-2	1-2-1	2-1-1	圖 9	圖 10	圖 11
1-1-2	❶-①-❶-①-❷-②	❶-①-❷-①-❶-②	❷-①-❶-①-❶-②			
1-2-1	❶-①-❶-②-❷-①	❶-①-❷-②-❶-①	❷-①-❶-②-❶-①			
2-1-1	❶-②-❶-①-❷-①	❶-②-❷-①-❶-①	❷-②-❶-①-❶-①			

1. 每一種直線排列由3組(黑＋白)的段落組成，3組(黑＋白)段落，經過推移可產生3種直線排列。
2. 3種直線排列若轉換成環狀排列，屬於同種。故環狀排列數=直線排列數÷3 $=\frac{3\times3}{3}=3$。

定理 5　當$(n,p)=f$，f為質數；$2n$珠分$2p$段的環狀排列數為

$$\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\text{。}$$

1.以$(6,4)=2$為例，6和4都能被2整除，故會出現2個循環節的分段模式。
即$6=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}=\boxed{2+1}+\boxed{2+1}$；每個循環節的值$=6\div2=3$，
每個循環節有$4\div2=2$段。故循環的分段模式$=C_{2-1}^{3-1}=2$。

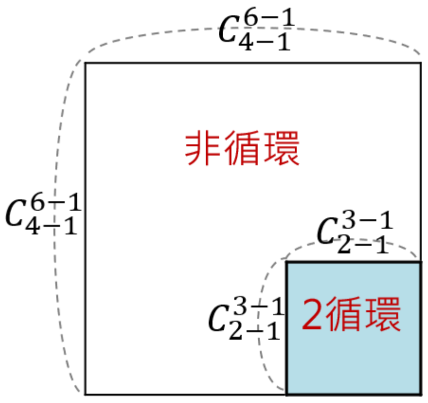


圖 16：$n=6$，$p=4$

2. $(n,p)=f$，f為質數，會出現一種f個循環節的循環分段模式。

3. f是n和p的因數，f可等分n和p，即每循環節的值為$n\div f=\frac{n}{f}$；每循環節有$p\div f=\frac{p}{f}$段，
循環的直線分段模式可想成將$\frac{n}{f}$珠分成$\frac{p}{f}$段段的方法，即分段模式為$C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}$。

4. f循環的直線排列數為$C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}$，會出現$\frac{p}{f}$個轉換環狀排列後為同種
的直線排列，故轉換成環狀排列數為$C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}$。

5. 非循環排列需扣除循環排列的直線數再進行環狀轉換。

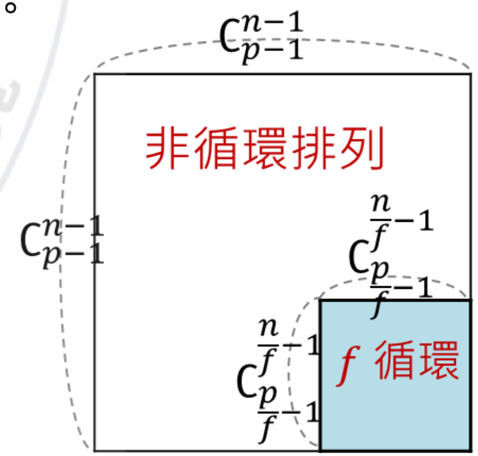


圖 17：f 為質數

定理 6 當$(n,p)=f$，f為合數，f的因數中只有1個質因數，則$2n$珠分$2p$段的環狀排列數為

$$\left\{\left(C_{p-1}^{n-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2\right\}\times\frac{1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_1}{p}+\left\{\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)^2-\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_2}{p}$$
$$+\left(C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}\text{。}$$

1. $(n,p)=f$，f為合數，f的因數中只有1個質因數f_1，
   則每個循環的分段模式都是f_1的k次方。
2. 每種循環的直線排列，都是另一個循環排列的子循環。
3. 轉換成環狀排列數前直線排列數可直接扣除最大的子循環再進行環狀排列數的轉換。

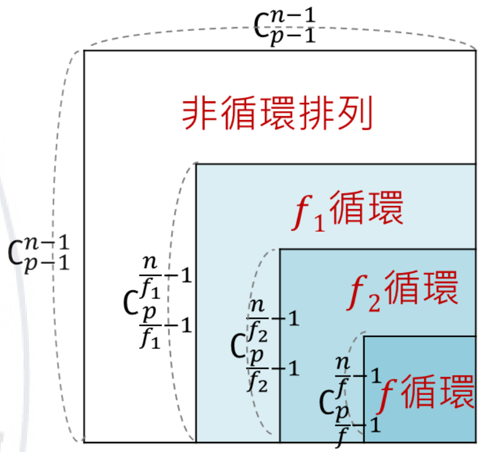


圖 20：f 只有1質因數

4. 以(16,8)=8為例，分段模式有非循環和2、4、8個循環節分段模式。
   分段模式包括16=1+1+1+1+1+1+1+9=… (非循環)
   $=\boxed{1+1+1+5}+\boxed{1+1+1+5}=$…(2個循環節)
   $=\boxed{1+3}+\boxed{1+3}+\boxed{1+3}+\boxed{1+3}=$…(4個循環)
   $=\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2}$。(8個循環節分段模式)

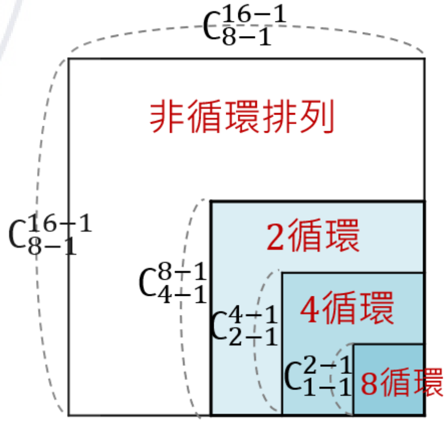


圖 21：$n=16$，$p=8$

定理 7 當$(n,p)=f$，f為合數，f的因數中有2個質因數，則$2n$珠分$2p$段的環狀排列數為

$$\left\{\left(C^{n-1}_{p-1}\right)^2-\left[\left(C^{\frac{n}{f_j}-1}_{\frac{p}{f_j}-1}\right)^2+\left(C^{\frac{n}{f_k}-1}_{\frac{p}{f_k}-1}\right)^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\right]\right\}\times\frac{1}{p}+\left\{\left(C^{\frac{n}{f_j}-1}_{\frac{p}{f_j}-1}\right)^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_j}{p}$$

$$+\left\{\left(C^{\frac{n}{f_k}-1}_{\frac{p}{f_k}-1}\right)^2-\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\right\}\times\frac{f_k}{p}+\left(C^{\frac{n}{f}-1}_{\frac{p}{f}-1}\right)^2\times\frac{f}{p}。$$

1. $(n,p)=f$，f有f_j、f_k，2個質因數。轉換成環狀排列，直線排列數的扣除較複雜。
2. 非循環排列需扣除2質因數直線排列數的聯集。
3. f_j與f_k循環節模式，都需扣除子循環f循環的直線排列再轉換為環狀。

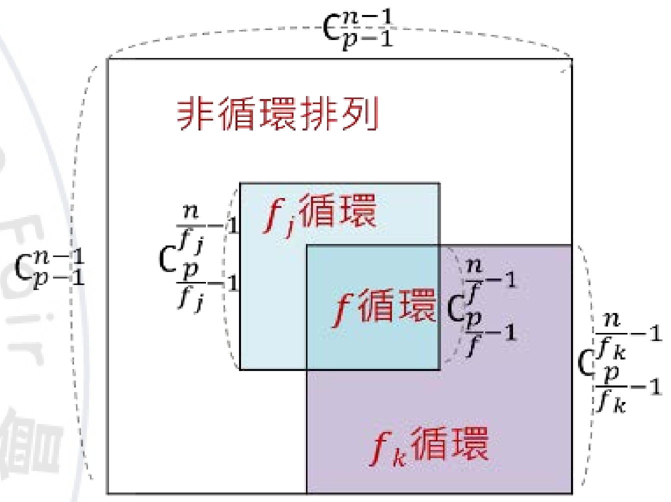


圖 22：f 有2個質因數

黑、白珠數不同的環狀分段排列數

(一) 當黑、白珠不等量時，出現「f個循環節」的分段模式則需滿足3個條件：

(1) m個黑珠能等分為$\frac{m}{f}$個。(2)n個白珠能等分為$\frac{n}{f}$個。(3)p段能等分為$\frac{p}{f}$個。

(二) 故**當黑、白珠不等量時，循環模式的直線分段排列條件為$(m,n,p)=f$**。

定理 8 系列　m個黑珠n個白珠，分$2p$段的環狀分段排列數

1. 若$(m,n,p)=1$，則環狀分段排列數為$C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}\times\frac{1}{p}$。

2. 若$(m,n,p)=f$，且f為質數，則環狀分段排列數為

$$\left(C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{1}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{。}$$

3. 若$(m,n,p)=f$，f為合數，且f的因數只有1個質因數，則環狀分段排列數為

$$\left(C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}\right)\times\frac{1}{p}+\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}-C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}\right)\times\frac{f_2}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_1}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{。}$$

4. 若$(m,n,p)=f$，f為合數，且f有2個質因數，則環狀分段排列數為

$$\left\{C_{p-1}^{m-1}\times C_{p-1}^{n-1}-\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}+C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\right\}\times\frac{1}{p}$$

$$+\left(C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{m}{f_2}-1}\times C_{\frac{p}{f_2}-1}^{\frac{n}{f_2}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_2}{p}+\left(C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{m}{f_1}-1}\times C_{\frac{p}{f_1}-1}^{\frac{n}{f_1}-1}-C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\right)\times\frac{f_1}{p}+C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{m}{f}-1}\times C_{\frac{p}{f}-1}^{\frac{n}{f}-1}\times\frac{f}{p}\text{。}$$

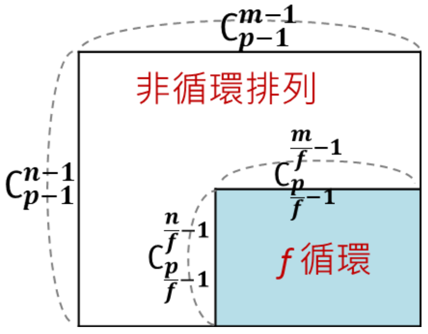


圖 23：F為質因數

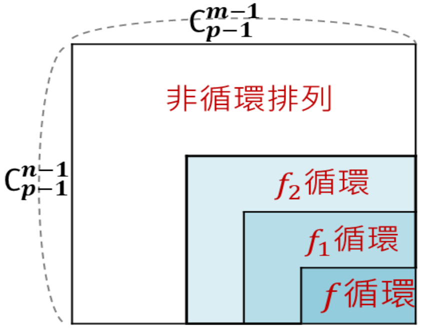


圖 24：1質因數

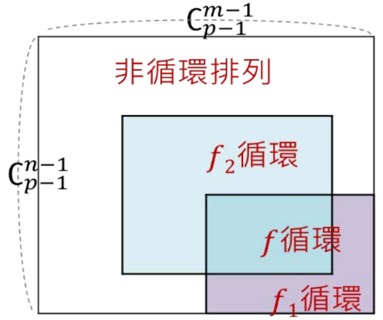


圖 25：2質因數

環狀分段排列數公式整合

若將非循環模式視為「1」個循環節模式，則環狀分段排列數由$f_1, f_2, \ldots f_k$個分段模式的直線排列數集合所轉換而成。

推論 1 $(m, n, p) = f$，f的因數由小到大依序為$f_1, f_2, \ldots f_k$，不同循環直線排列所成的集合，依序為$S_1, S_2, \ldots, S_k$，則$m+n$珠分$2p$段的環狀排列數為$\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i \times |S_i|}{p}$。

結 論

一、長條格切割思考，幫助我們順利找到將n節分p段的方法數。

二、N節毛毛蟲分P段的種類數 $= C^{m-1}_{\lceil \frac{P}{2} \rceil - 1} \times C^{n-1}_{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor - 1} + C^{n-1}_{\lceil \frac{P}{2} \rceil - 1} \times C^{m-1}_{\lfloor \frac{P}{2} \rfloor - 1}$。

三、$\gcd(m, n, p) = f$，f 的值決定循環節個數的循環排列。

四、文氏圖可幫助我們釐清「非循環」與「循環」直線分段排列數該扣除的子循環直線分段排列數。

五、gcd(珠數、段數) $= f$，f的因數由小到大依序為$f_1, f_2, \ldots, f_k$，不同循環節排列所成的集合依序為$S_1, S_2, \ldots, S_k$，則環狀分段排列數為$\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i \times |S_i|}{p}$。

未來展望

多色的直線分段排列與環狀分段排列

(一) 3色以上的直線分段排列，無法直接套用2色的方法求種類數。以單純的節數相同狀況為例，種類數=(黑分段方法數)× (白分段方法數)×**2**，「 **×2**」就是處理黑、白易位的顏色變化。

(二) 以3色分6段為例，就會出現6=3+2+1 =2+2+2，就有7種顏色排列模式。所謂的6=3+2+1 ，是指分成6段的顏色是由黑3、白2、紅1段或黑3、白1、紅2段、…，等6種顏色組合，每種顏色組合又因顏色排列順序不同，又有10種變化。

(三) 處理好顏色的變化，才能進入節數分段模式的處理，我們卡關在顏色的變化需以樹狀圖一一畫出，相信突破了這點，3色以上的直線分段排列與環狀排列，應是值得繼續深入探討的好題材。

參考資料

[1] 游森棚(2021) 。森棚教官的數學題 - 黑白毛毛蟲。科學研習月刊第60卷第3期。

[2] 林柏均等(2018)。閃爍燈之循環性質研究與探討。第57屆全國科展高中組。

[3] 王世勛、李陽明(2006) 。不盡相異物的環狀排列。科學教育月刊292,29-38。