中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080402

課稅小鎮—稅額最大值走法之最佳解探討

學校名稱：臺北市中山區吉林國民小學

作者：	指導老師：
小六 江恩碩	倪慧喜
小五 梁惟媗	周鈞儀
小六 張宏羽	
小五 周譽佳	

關鍵詞：稅額、最大值、轉折點

摘要

從一個網路小遊戲出發，應用我們學習過的四則運算將題目加以改編。依據其課稅方式，找出不同大小的矩形城鎮、不同的進入與離開地點，稅額最大值之最佳解。首先，我們觀察並歸納行走路徑與稅額關係，提出九大性質並加以說明理由。接著，依據路徑與稅額關係之性質找出最大稅額走法之最佳解。我們將路徑分為三階段，分段求取特定位置稅額之規律，有效降低尋求規律的複雜度。我們也比較了正方形、長方形城鎮、順向、逆向行走之稅額規律差異並分析其原因。最後針對該研究提出未來發展的方向與建議。

壹、 前言

一、研究動機

有一次，我們在「遊戲學校」的網站上看到一個有趣的問題。題目是說：

背包客進入一個方格棋盤狀的小鎮時，根據小鎮的規定每移動一格均需課稅。如圖 1-2，背包客從 A 處進入，B 處離開。移動方式可以上下左右四個方向移動，但路線不得重複經過。起始從 0 元開始計算。其課稅的方式如下(如圖 1-1)：

- ◆ 向右移動一格，現有稅額增加 2 元；
- ◆ 向上移動一格，現有稅額乘以 2；
- ◆ 向左移動一格，現有稅額減少 2 元；
- ◆ 向下移動一格，現有稅額除以 2。

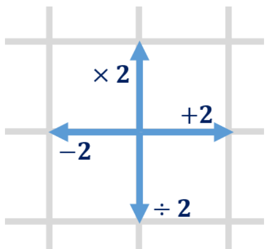


圖 1-1

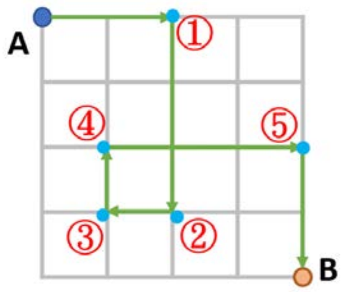


圖 1-2

以圖 1-2 為例：背包客從 A 進入後，先向右移動兩格經過位置①，稅金增加為 4 元；接下來向下移動三格經過位置②，稅金變成$4 \div 2 \div 2 \div 2 = 0.5$；再往左移動一格經過位置③，稅金變成-1.5；往上移動一格經過位置④，稅金變成-3；向右移動三格經過位置⑤，稅金變為 3 元，最後向下移動兩格抵達 B 時，稅金剩下 0.75 元。

這遊戲我們覺得很有趣，也跟我們學過的四則運算有關。試玩了一陣子之後，心想：

(一) 怎樣的走法可以收到最大的稅金？

(二) 從「A 往 B 移動」與「從 B 往 A 移動」是否有不同的最大值？

(三) 課到的稅金與移動的方式是否均有其規律性？

想到這裡就覺得問題相當有挑戰性，因此，就在好奇心的驅使之下，想以這個問題當作今年的科展的題目。

二、研究目的

(一)、在$n \times n$的正方形城鎮中，探討行走路徑與課稅額的關係

(二)、在$n \times n$的正方形城鎮中，從 **A** 到 **B** 順向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

(三)、在$n \times m$的長方形城鎮中，從 **A** 到 **B** 順向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

(四)、在$n \times m$的長方形城鎮中，從 **B** 到 **A** 逆向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

貳、研究設備與器材

方格紙、電腦、計算機

參、研究過程與方法

一、研究架構圖

二、名詞解釋與符號定義

(一) 在$n \times m$的城鎮棋盤格中，共有 n 列、m 行。其中 n 與 m，是指城鎮大小的<u>線條數</u>。如圖 3-1，城鎮大小為12×15。

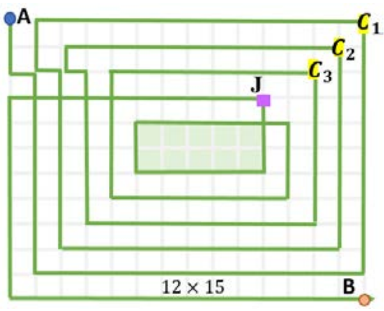


圖 3-1

(二) **順向行走**：從 **A 藍色**點處進入，從 **B 橘紅**色點離開的走法。

(三) **逆向行走**：從 **B 橘紅**色點進入，從 **A 藍色**點離開的走法。

(四) **中心圈**：在行走路徑中，若依稅額最大值走法，隨著逆時針螺旋狀且由外而內到最內圈圍成的正方形或長方形區域稱為中心圈。如圖 3-1 中綠色網底部分。

(五) **右外轉折點**：在中心圈右上方的行走路徑中，其方向為向上，接著再向左的轉折處稱為右外轉折點，其位置以 C 表示。

(六) $\boldsymbol{S_{n\times m}}$、$\boldsymbol{RS_{n\times m}}$：分別為經過計算後所得順向行走與逆向行走至終點的稅額最大值。

(七) $\boldsymbol{S_{n\times m}(K)}$、$\boldsymbol{RS_{n\times m}(K)}$：分別為<u>依稅額最大值走法</u>，順向由 A 到位置 K 或逆向由 B 到位置 K 的稅額。

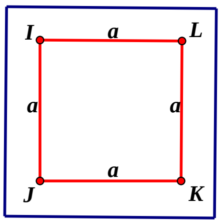
肆、研究結果

研究一：在$\boldsymbol{n \times n}$的正方形城鎮中，探討行走路徑與課稅額的關係

一開始，我們實際試走，發現背包客的課稅額若要為最大值時，與其行走路徑有一定的關係。以下為我們發現並歸納出的一些性質：

性質一：在行走路徑中，若逆時針方向繞圈，則稅額會增加；反之，若順時針繞圈，則稅額會減少。

理由：假設行走到城鎮中位置 I(不一定為起點 A)的稅額為 W。接下來繞行一圈回到位置 I：



1.<u>逆時針</u>繞圈時，所經過的運算為除以 a、加 a、乘以 a、減 a。

則最後的稅額為$(\mathrm{W} \div 2^a + 2a) \times 2^a - 2a = W + 2a(2^a - 1) > W$。

2.<u>順時針</u>繞圈時，所經過的運算為加 a、除以 a、減 a、乘以 a。

則最後的稅額為$((\mathrm{W}+2a)\div 2^a-2a)\times 2^a=W+2a(1-2^a)<W$。

由 1.、2.知：逆時針方向繞圈的稅額會增加；順時針方向繞圈的稅額會減少。

舉例：以7×7的城鎮為例，從起點出發，

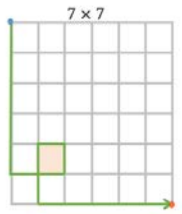
逆時針繞一圈回到起點，稅額為$(0\div 2^6+2\times 6)\times 2^6-2\times 6=756$，

順時針繞一圈回到起點，稅額為$(2\times 6\div 2^6-2\times 6)\times 2^6=-756$。

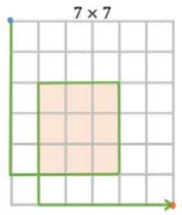
性質二：在行走路徑中，若逆時針方向繞的圈越大，則增加的稅額也越大。

理由：由***性質一***知：若從位置 J 出發，在逆時針方向繞圈時，最後稅額為$((\mathrm{W}+2a)\times 2^a-2a)\div 2^a=W+2a(1-\frac{1}{2^a})$。因 a 越大稅額越大，即繞圈越大，增加的稅額也越大。

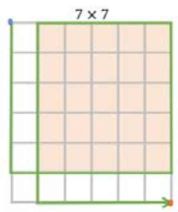
舉例：我們以7×7的城鎮為例，走法均為從起點 A 逆時針方向繞圈至終點 B。



$S_{7\times 7}=11.5$



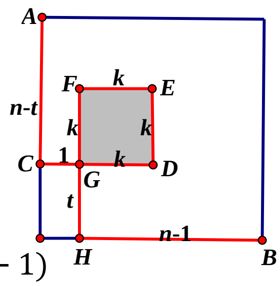
$S_{7\times 7}=13.625$



$S_{7\times 7}=15.84375$

性質三：在逆時針行走路徑中，若繞圈的位置越靠左下方，其稅額越大。

理由：



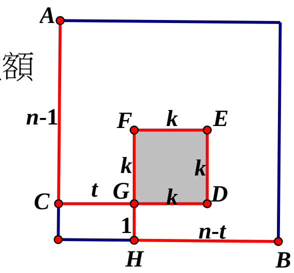
1. <u>繞圈位置下方優於上方</u>

設$\overline{CG}=1$，$\overline{GH}=t$，且繞圈大小為邊長 k 的正方形，則 A→B 的稅額

$$\mathrm{S}=((2(1+\mathrm{k})\times 2^k-2k)\div 2^{k+t}+2(n-1)=\frac{2^k+(2^k-1)k}{2^{k+t-1}}+2(n-1)$$

因為 t 越小，則 S 越大，所以繞圈位置下方優於上方。

2. <u>繞圈位置左方優於右方</u>



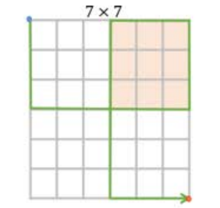
設$\overline{CG}=t$，$\overline{GH}=1$，且繞圈大小為邊長 k 的正方形，則 A→B 的稅額

$$\mathrm{S}=((2(\mathrm{t}+\mathrm{k})\times 2^k-2k)\div 2^{k+1}+2(n-t)=2n-t-\frac{k}{2^k}$$

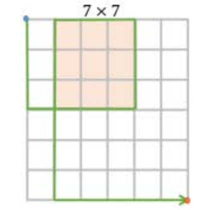
因為 t 越小，則 S 越大，所以繞圈位置左方優於右方。

由 1.、2.知：繞圈的位置越靠左下方，其稅額越大。

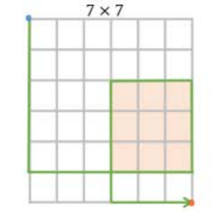
舉例：以7×7的城鎮，逆時針方向繞4×4大小的圈。



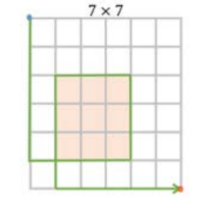
$S_{7\times7} = 7.40625$



$S_{7\times7} = 10.90625$



$S_{7\times7} = 11.625$



$S_{7\times7} = 13.625$

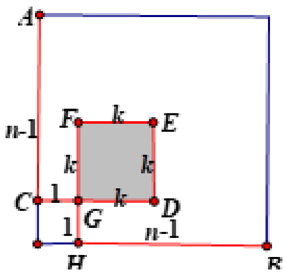
性質四：在順向行走逆時針繞圈路徑中，若繞圈後回到最左側(第一行)，之後再向下行走時，則稅額會增加。

理由：設圖(a)、圖(b)中 A→B 的稅額分別為S_1、S_2　因為

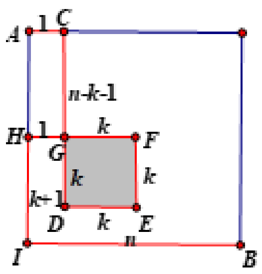
$$S_1 = \left((2(1+k)\times 2^k - 2k) \div 2^{k+1} + 2(n-1)\right) = \left(2n + k - \frac{k}{2^k}\right) - 1$$

$$S_2 = \left((2 \div 2^{n-1} + 2k)\times 2^k - 2(k+1)\right) \div 2^{k+1} + 2n = \left(2n + k - \frac{k}{2^k}\right) - \frac{2^{n-k-1}-1}{2^{n-1}} > S_1$$

所以 繞圈後的路徑回到最左側(第一行)，之後再向下行走的稅額會增加。

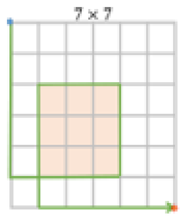


圖(a)

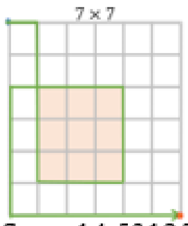


圖(b)

舉例：以7×7的城鎮為例，逆時針方向繞4×4大小的圈。



$S_{7\times7}$=13.625

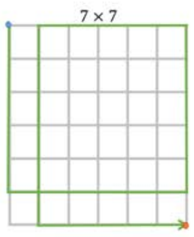


$S_{7\times7}$=14.53125

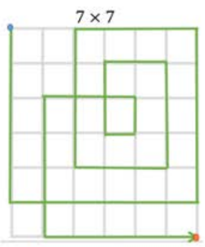
性質五：在逆時針行走路徑中，若繞的圈數越多，則稅額增加越多。

理由：由***性質***一知：逆時針方向繞行一圈稅額會增加，因此，當城鎮範圍擴大時，繞行圈數越多，可以獲得較大的稅額。

舉例：以7×7的城鎮為例。



$S_{7\times7}$=15.84375



$S_{7\times7}$=17.125

性質六：在逆時針行走路徑中，若螺旋式繞行的圈數一定時，則由外而內繞行的稅額較由內而外繞行的稅額大。

理由：在逆向走法中，我們觀察，當$n=9$時，設由內而外繞行的稅額為S_1；由外而內繞行的

稅額為S_2，則

$$S_1=(-10\times 2^4+2\times 2^5-4\times 2^3+6\times 2^6-8\times 2^2+10\times 2^7-12\times 2^1+14\times 2^8)-14$$

$$S_2=(-16\times 2^1+14\times 2^8-12\times 2^2+10\times 2^7-8\times 2^3+6\times 2^6-4\times 2^4+2\times 2^5)-8$$

因為　$S_2-S_1=6\times 2^4-4(2^1+2^2+2^3)+6=46>0$　　所以　$S_2>S_1$

即　由外而內繞行的稅額較由內而外繞行的稅額大。

因此，在逆向走法，當 n 為奇數時，設由內而外繞行稅額為S_1；由外而內繞行稅額為S_2，則

$$S_1=(-(n+1)\times 2^{\frac{n-1}{2}}+2\times 2^{\frac{n+1}{2}}-4\times 2^{\frac{n-3}{2}}+6\times 2^{\frac{n+3}{2}}+\cdots+2(n-2)\times 2^{n-1})-2(n-2)$$

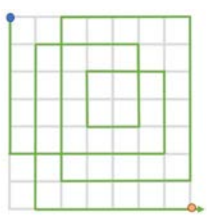
$$S_2=(-2(n-1)\times 2^1+2(n-2)\times 2^{n-1}-2(n-3)\times 2^2+2(n-4)\times 2^{n-2}+\cdots 2\times 2^{\frac{n+1}{2}})-(n-1)$$

因為　$S_2-S_1=(n-3)\times 2^{\frac{n-1}{2}}-4\left(2^1+2^2+\cdots+2^{\frac{n-3}{2}}\right)+(n-3)$

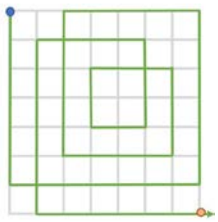
$$=(n-7)\times 2^{\frac{n-1}{2}}+n+5>0\quad(n\geq 5)$$

所以$S_2>S_1$，即由外而內繞行較由內而外繞行的稅額大。同理，n 為偶數及順向行走亦同。

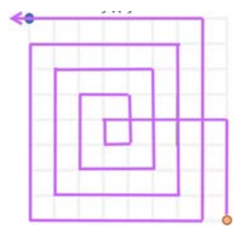
舉例：以8×8 城鎮順向行走、9×9 城鎮逆向行走為例



$S_{8\times 8}=20.125$



$S_{8\times 8}=21.1484375$



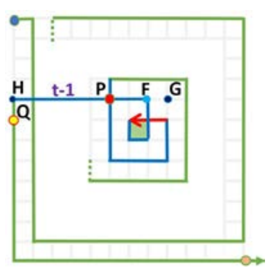
$RS_{9\times 9}=5050$

$RS_{9\times 9}=5096$

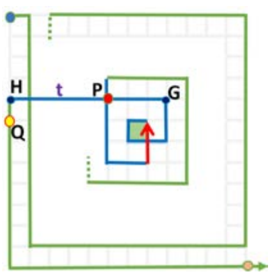
性質七：在逆時針行走路徑中，若繞圈進入中心圈的方向為向左進入，則稅額較大。

理由：在進入中心圈的方向，我們分為以下四種情形：

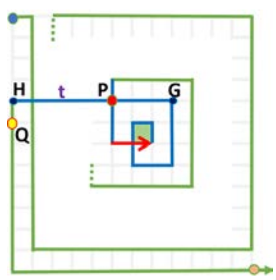
情形 1：
向左進入中心圈



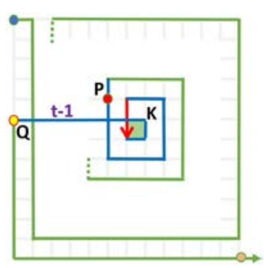
情形 2：
向上進入中心圈



情形 3：
向右進入中心圈



情形 4：
向下進入中心圈



1. 在$n\times n$的城鎮中，當n為奇數時，發現四種情形只在位置 P 到 Q 的路徑是不同(藍色路徑)，

其餘路徑皆相同。因此我們只要計算四種情形在位置 P 到 Q 的稅額，即了解之間的關係。

2. 假設在位置 P(設稅額為 W)到位置 Q 的路徑下，其稅額為分別為S_1、S_2、S_3、S_4，並令$\overline{GH}=t(\geq 5)$，$\overline{KQ}=\overline{FH}=t-1$，則：

【情形 1】$S_1=\left(\left(\left(\left(\left(\frac{W}{8}+6\right)\times 4-4\right)\div 2+2\right)\times 4-2(t-1)\right)\div 2=\frac{W}{2}-t+25$

【情形 2】$S_2=\left(\left(\left(\left(\left(\frac{W}{8}+4\right)\times 4-2\right)\div 2+4\right)\times 4-2t\right)\div 2=\frac{W}{2}-t+22<S_1$

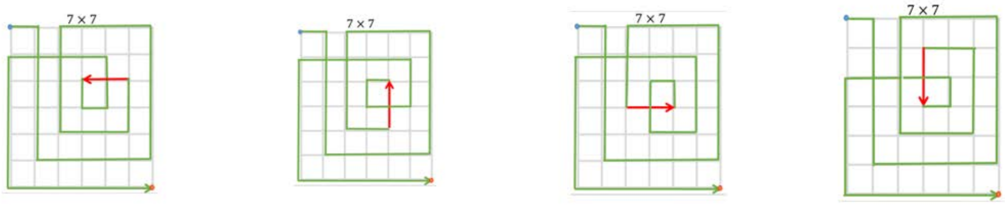
【情形 3】$S_3=\left(\left(\left(\left(\left(\frac{W}{4}+4\right)\times 2-2\right)\div 4+4\right)\times 8-2t\right)\div 2=\frac{W}{2}-t+22<S_1$

【情形 4】$S_4=\left(\left(\left(\frac{W}{8}+6\right)\times 8-4\right)\div 4+2\right)\times 2-2(t-1)=\frac{W}{2}-2t+28<S_1$

由以上四種情形知：當**繞圈<u>進入中心圈的方向為向左進入</u>**，則稅額較大。同理n為偶數亦同

舉例：

向左進入中心圈　向上進入中心圈　向右進入中心圈　向下進入中心圈



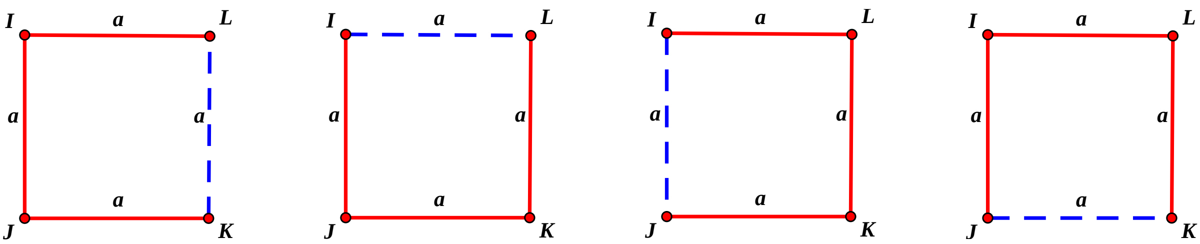
$S_{7\times 7}=18.15625$　$S_{7\times 7}=17.96275$　$S_{7\times 7}=17.96275$　$S_{7\times 7}=18.03125$

> ***性質八：*** 在逆時針行走路徑中，在同一行(列)的兩位置中，若以ㄇ字型(及其對稱型)繞行，其稅額比直線行走時大。

理由： 假設在位置 L 的稅額為 W，則直線行走，即 $L\rightarrow K$ 的稅額$S_1=\frac{W}{2^a}$

而ㄇ字型繞行，即 $L\rightarrow I\rightarrow J\rightarrow K$ 的稅額$S_2=\frac{W-2a}{2^a}+2a=\frac{W}{2^a}+2a(1-\frac{1}{2^a})>S_1$

即　ㄇ字型繞行，其稅額比直線行走時大。　同理，其對稱型亦同。



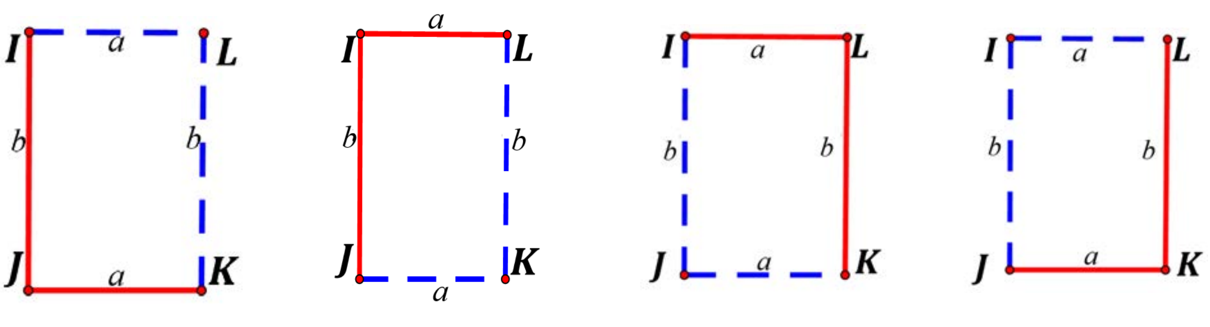
性質九：在長方形的行走路徑中，若從一頂點行走至對角頂點，則逆時針方向的稅額較順時針方向的稅額大。

理由：若為 $I \to K$，假設在位置 I 的稅額為 W，則

順時針行走，即 $I \to L \to K$ 的稅額$S_1 = \frac{W+2a}{2^b} = \frac{W}{2^b} + \frac{2a}{2^b}$

逆時針行走，即 $I \to J \to K$ 的稅額$S_2 = \frac{W}{2^b} + 2a > S_1$

即逆時針方向的稅額較順時針方向的稅額大。　同理，其對稱型亦同。

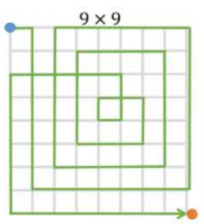


$I \to K$　　$L \to J$　　$K \to I$　　$J \to L$

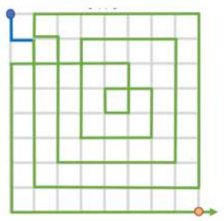
發現

在*性質九*中，當$W = 0$，且 a固定時，若b越大，則$S_2 - S_1$越大(兩路徑之稅額差距越大)。即順向走法中，起步先向下行走越多格後再向右一格，其稅額會越大。

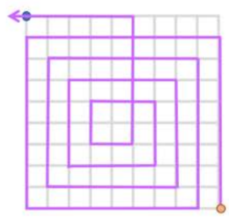
舉例： 9×9順向行走(性質九)與10×10逆向行走(性質八)的城鎮。



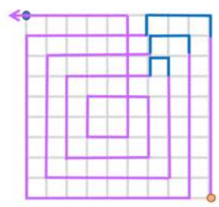
$S_{9\times9}$=26



$S_{9\times9}$=26.0078125



$RS_{10\times10}$=12266



$RS_{10\times10}$=12288

研究二、在$n \times n$的正方形城鎮中，從 A 到 B 順向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

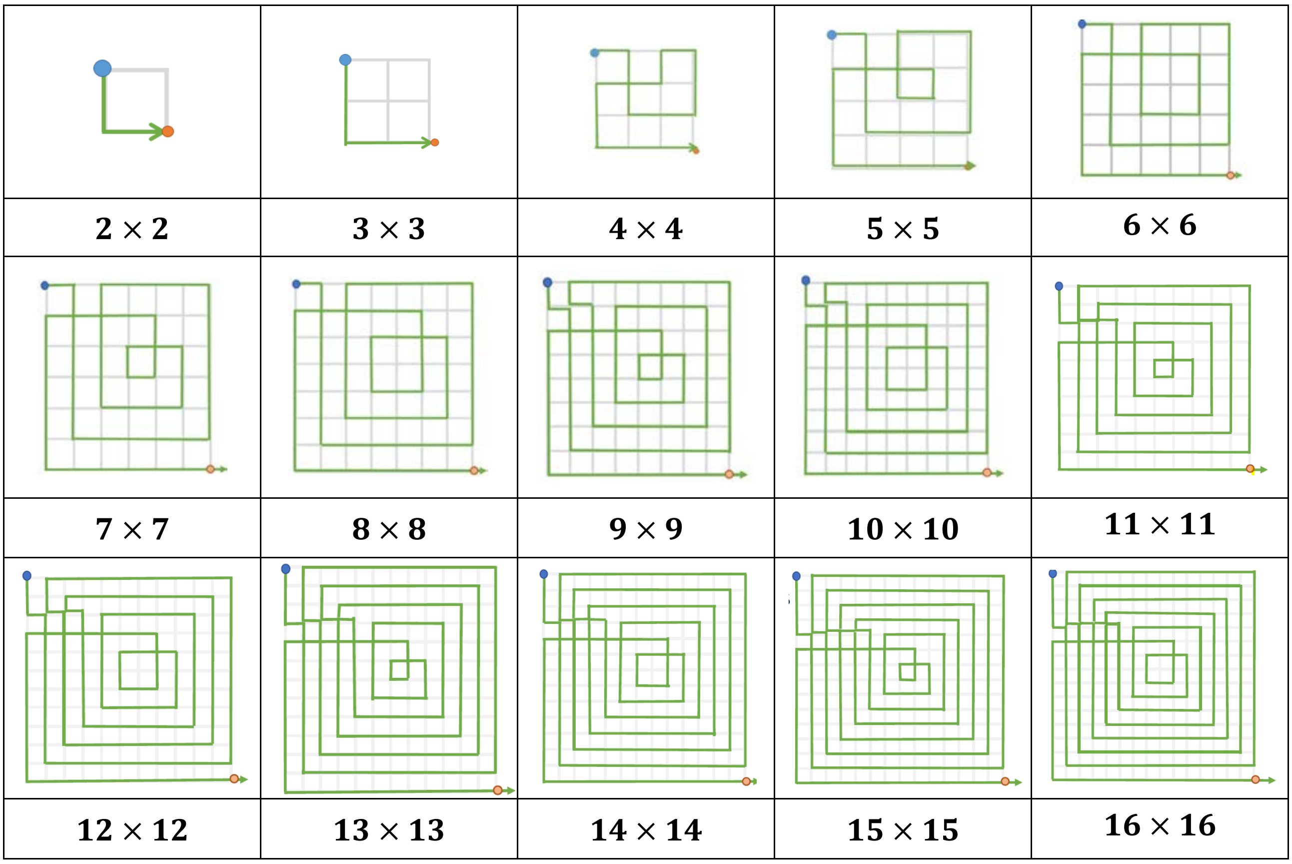
我們應用**研究一**的性質找出稅額最大值及行走路徑的最佳解，整理成表 4-1、4-2。

表 4-1 $n = 2 \sim 16$稅額最大值

n × n	2 × 2	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6
$S_{n\times n}$	2	4	7	10.625	14.375

n × n	7 × 7	8 × 8	9 × 9	10 × 10	11 × 11
$S_{n\times n}$	18.40625	22.046875	26.0078125	30.0078125	33.978515625
n × n	12 × 12	13 × 13	14 ×14	15 ×15	16 ×16
$S_{n\times n}$	37.990234375	41.97998046875	45.990234375	49.9864501953125	53.9932861328125

表 4-2　$n = 2\sim16$稅額最大值之行走路徑



順向路徑之名詞定義

為了方便描述與說明，因此，一開始我們先定義$\boxed{\text{順向行走路徑中}}$使用到的名詞以及特定位置：

1. **右外轉折點**：在中心圈右上方的行走路徑中，其方向為向上，接著再向左的轉折處稱為**右外轉折點**，以 C 表示。如圖 4-1 中黃底標示的位置C_1、C_2、C_3… 。
2. **中心圈轉折點**：經過最後一個右外轉折點後，路徑由**位置 I** 向左進入中心圈。之後離開中心圈後的第一個轉折處稱為中心圈轉折點，以 **J** 標示。如圖 4-1 的紫色方塊處。

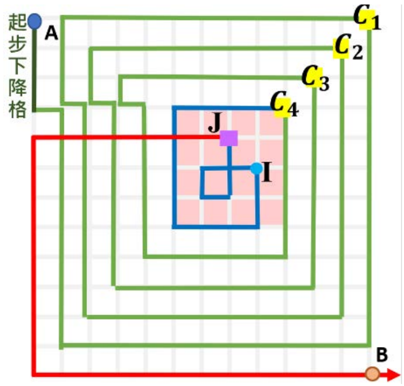


圖 4-1

3. **中心圈外框**：行經最後一個右外轉折點後，繼續往中心圈繞行之路徑所形成的範圍，如圖 4-1 粉紅網底部分。

仔細觀察稅額計算與行走路徑，我們將分為三個階段來討論稅額最大值。

第一階段：起點至最後一個右外轉折點，也就是 A→C_p(p 為右外轉折點的數量)，圖 4-1 中綠色路徑所標示。

第二階段：最後一個轉折點至中心轉折點，也就是C_p→I→J，圖 4-1 中藍色路徑所標示。

第三階段：中心圈轉折點至終點，也就是 J→B，圖 4-1 中紅色路徑所標示。

第一階段　起點 A 開始 → 最後一個右外轉折點 C_p

行走路徑規律

我們尋求從起點出發到最後一個右外轉折點的稅額，首先要先尋求起步下降的格數（如圖 4-1 左上角深綠色路段），設為 d，以及右外轉折點的數量，設為 p。我們依據不同邊長數的正方形列表整理 d、值。

表 4-3　$n = 2$~16行走路徑之起步下降格數與右外轉折點數量

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
d	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
p	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

由表 4-3 中，我們歸納出**規律 2-1、2-2**。

規律 2-1：在$n \times n$城鎮中順向行走，若依稅額最大值走法，設起始下降格數為 d，則

當 n 為奇數時，$d = (n-7) \div 2$，；當 n 為偶數時，$d = (n-8) \div 2$ ，$n \geq 7$

規律 2-2：在$n \times n$城鎮中順向行走，設右外轉折點共有 p 個，若依稅額最大值走法，則

當 n 為奇數時，$p = (n-5) \div 2$，；當 n 為偶數時，$p = (n-6) \div 2$ ，$n \geq 7$

右外轉折點 C_k 之稅額

1. 我們尋求位置C_1第一個右外轉折點也就是$S_{n\times n}$（C_1）的稅額公式。

一開始，我們列出 n=7～12 時，位置C_1第一個右外轉折點的稅額

n 為奇數	n 為偶數
$S_{9\times9}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{6}} + 2 \times \mathbf{7}) \times 2^{\mathbf{7}}$	$S_{10\times10}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{7}} + 2 \times \mathbf{8}) \times 2^{\mathbf{8}}$
$S_{11\times11}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{7}} + 2 \times \mathbf{9}) \times 2^{\mathbf{9}}$	$S_{12\times12}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{8}} + 2 \times \mathbf{10}) \times 2^{\mathbf{10}}$
$S_{13\times13}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{8}} + 2 \times \mathbf{11}) \times 2^{\mathbf{11}}$	$S_{14\times14}(C_1) = (2 \div 2^{\mathbf{9}} + 2 \times \mathbf{12}) \times 2^{\mathbf{12}}$

由以上各式，我們歸納出：

(1) 當 n 為奇數時，

$$S_{n\times n}(C_1)=\left(2\div 2^{\frac{n+3}{2}}+2\times(n-2)\right)\times 2^{n-2}=2^{\frac{n-5}{2}}+(n-2)\times 2^{n-1}\text{-------}<A1>$$

(2) 當n為偶數時，

$$S_{n\times n}(C_1)=\left(2\div 2^{\frac{n+4}{2}}+2\times(n-2)\right)\times 2^{n-2}=2^{\frac{n-6}{2}}+(n-2)\times 2^{n-1}\text{-------}<B1>$$

2. 接著用$<A1>$、$<B1>$繼續推導出位置C_2、C_3、C_4右外轉折點的稅額。

(1) 當 n 為奇數

$$S_{n\times n}(C_2)=\left\{\left((A1-2\times(n-2))\div 2^{\frac{n-7}{2}}+2\right)\div 2^{\frac{n+1}{2}}+2\times(n-4)\right\}\times 2^{n-4}$$

$$=2\times 2^{\frac{n-7}{2}}+(3n-8)\times 2^{n-3}-(n-2)\text{---------------}<A2>$$

$$S_{n\times n}(C_3)=\left[\left((A2-2\times(n-4))\div 2^{\frac{n-9}{2}}+2\right)\div 2^{\frac{n-1}{2}}+2\times(n-6)\right]\times 2^{n-6}$$

$$=3\times 2^{\frac{n-9}{2}}+(7n-22)\times 2^{n-5}-\frac{3n-10}{2}\text{-----------------}<A3>$$

$$S_{n\times n}(C_4)=\left[\left((A3-2\times(n-6))\div 2^{\frac{n-11}{2}}+2\right)\div 2^{\frac{n-3}{2}}+2\times(n-8)\right]\times 2^{n-8}$$

$$=4\times 2^{\frac{n-11}{2}}+(15n-52)\times 2^{n-7}-\frac{7n-34}{2^2}\text{---------------}<A4>$$

(2) 當 n 為偶數

$$S_{n\times n}(C_2)=\left\{\left[[B1-2\times(n-2)]\div 2^{\frac{n-8}{2}}+2\right]\div 2^{\frac{n+2}{2}}+2\times(n-4)\right\}\times 2^{n-4}$$

$$=2\times 2^{\frac{n-8}{2}}+(3n-8)\times 2^{n-3}-(n-2)\text{----------------}<B2>$$

$$S_{n\times n}(C_3)=\left[\left((B2-2\times(n-4))\div 2^{\frac{n-10}{2}}+2\right)\div 2^{\frac{n}{2}}+2\times(n-6)\right]\times 2^{n-6}$$

$$=3\times 2^{\frac{n-10}{2}}+(7n-22)\times 2^{n-5}-\frac{3n-10}{2}\text{----------------}<B3>$$

$$S_{n\times n}(C_4)=\left[\left((B3-2\times(n-6))\div 2^{\frac{n-12}{2}}+2\right)\div 2^{\frac{n-4}{2}}+2\times(n-8)\right]\times 2^{n-8}$$

$$=4\times 2^{\frac{n-12}{2}}+(15n-52)\times 2^{n-7}-\frac{7n-34}{2^2}\text{-------------}<B4>$$

我們將 A1、A2、A3、A4 及 B1、B2、B3、B4 各式整理成表 4-4，並為了方便觀察規

律，我們分成①、②、③三部份來表示。

表 4-4　正方形城鎮$n \times n$右外轉折點稅額規律

	①		+ ②	− ③
	n 為奇數	**n 為偶數**		
$S_{n\times n}(C_1)$	$2^{\frac{n-5}{2}}$	$2^{\frac{n-6}{2}}$	$(n-2)\times 2^{n-1}$	
$S_{n\times n}(C_2)$	$2\times 2^{\frac{n-7}{2}}$	$2\times 2^{\frac{n-8}{2}}$	$(3n-8)\times 2^{n-3}$	$\frac{n-2}{2^0}$
$S_{n\times n}(C_3)$	$3\times 2^{\frac{n-9}{2}}$	$3\times 2^{\frac{n-10}{2}}$	$(7n-22)\times 2^{n-5}$	$\frac{3n-10}{2^1}$
$S_{n\times n}(C_4)$	$4\times 2^{\frac{n-11}{2}}$	$4\times 2^{\frac{n-12}{2}}$	$(15n-52)\times 2^{n-7}$	$\frac{7n-34}{2^2}$

接下來我們來看各部分的規律。

第①部分的規律

很明顯，第 k 個右外轉折點，當 k 為奇數，$S_{n\times n}(C_k)$ 之①為$k\times 2^{\frac{n-(2k+3)}{2}}$；

當 k 為偶數，$S_{n\times n}(C_k)$ 之①為$k\times 2^{\frac{n-(2k+4)}{2}}$。

第②部分的規律

因為 $S_{n\times n}(C_1)$ 之②為 $(n-2)\times 2^{n-1} = [(2^1-1)n-2]\times 2^{n-1}$

$S_{n\times n}(C_2)$之 ②為 $(3n-8)\times 2^{n-3} = [(2^2-1)n-8]\times 2^{n-3}$

$S_{n\times n}(C_3)$ 之②為 $(7n-22)\times 2^{n-5} = [(2^3-1)n-22]\times 2^{n-5}$

$S_{n\times n}(C_4)$ 之②為 $(15n-52)\times 2^{n-7} = [(2^4-1)n-52]\times 2^{n-7}$

所以 第 k 個右外轉折點，$S_{n\times n}(C_k)$ 之②為 $\left[(2^k-1)n-t\right]\times 2^{n-(2k-1)}$

其中，t 的規律，我們再將數字進行分解：

$S_{n\times n}(C_1)$， $t=2=2^3-6$；　　$S_{n\times n}(C_3)$， $t=22=2^5-10$；

$S_{n\times n}(C_2)$， $t=8=2^4-8$；　　$S_{n\times n}(C_4)$， $t=52=2^6-12$

所以 第 k 個右外轉折點 $S_{n\times n}(C_k)$，其 $t=2^{k+2}-2\times(k+2)$

第③部分的規律

$S_{n\times n}(C_2)$ 之③ 為 $(n-2)=\frac{(2^1-1)n-2}{2^0}$

$$S_{n\times n}(C_3)\text{之③為}\ \frac{3n-10}{2^1}=\frac{(2^2-1)n-10}{2^1}$$

$$S_{n\times n}(C_4)\text{之③為}\ \frac{7n-34}{2^2}=\frac{(2^3-1)n-34}{2^2}$$

所以 第 k 個右外轉折點，$S_{n\times n}(C_k)$之③為$\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}$，$k\geq 2$

其中，u 的規律，我們再將數字進行分解

$S_{n\times n}(C_2)$，$\mathrm{u}=2=2^2\times 2-2^3+2$；

$S_{n\times n}(C_3)$，$\mathrm{u}=10=2^3\times 3-2^4+2$；

$S_{n\times n}(C_4)$，$\mathrm{u}=34=2^4\times 4-2^5+2$

所以 第 k 個右外轉折點 $S_{n\times n}(C_k)$，其 $u=2^k\times k-2^{k+1}+2$

由以上右外轉折點稅額的規律推導中，我們可以得出*結論二-1*。

結論二-1：在 $n\times n$ 城鎮順向行走中，若依稅額最大值走法，右外轉折點之稅額規律

當 n 為奇數時，$S_{n\times n}(C_k)$

$$=k\times 2^{\frac{n-(2k+3)}{2}}+[(2^k-1)n-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}\quad ,2\leq k\leq\frac{n-5}{2}$$

當 n 為偶數時，$S_{n\times n}(C_k)$

$$=k\times 2^{\frac{n-(2k+4)}{2}}+[(2^k-1)n-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}\quad ,2\leq k\leq\frac{n-6}{2}$$

其中，$t=2^{k+2}-2\times(k+2)$　　$u=2^k\times k-2^{k+1}+2$

第二階段 最後一個右外轉折點C_p → 中心圈轉折點 J

行走路徑規律

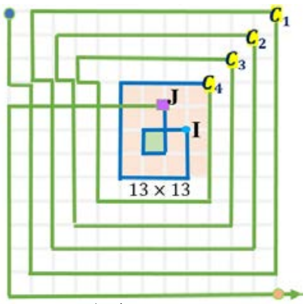


圖 4-2

在正方形城鎮中，當 n 為奇數時，行走路徑形成的中心圈大小為 2×2，中心圈外框為5×5的正方形（圖 4-2 粉紅網底區域）；當 n 為偶數時，行走路徑形成的中心圈為3×3，中心圈外框為6×6的正方形（圖 4-3 粉紅網底區域）。

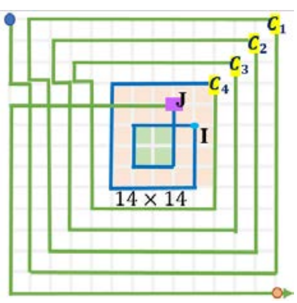


圖 4-3

在行走中，我們也發現，不同的中心圈大小，位置 J 與 I 的稅額呈現特定關係：當中心圈為2×2時，

$$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\left(\frac{\boldsymbol{S_{n\times n}(I)}-2\times 2}{2}+2\right)\times 4=2\times\boldsymbol{S_{n\times n}(I)}$$

當中心圈為3×3時，

$$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\left(\frac{\boldsymbol{S_{n\times n}(I)}-2\times3}{2^2}+2\times2\right)\times2^3=2\times\boldsymbol{S_{n\times n}(I)}+20$$

規律 2-3　在$n\times n$ 城鎮中順向行走，若依稅額最大值走法，經過最後一個右外轉折點後

當 n 為奇數，會形成2×2 的中心圈；5×5正方形的中心圈外框

當 n 為偶數，會形成3×3 的中心圈；6×6正方形的中心圈外框

規律 2-4　在$n\times n$ 城鎮中順向行走，若依稅額最大值走法，$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}$與$\boldsymbol{S_{n\times n}(I)}$之關係

當 n 為奇數，$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)=2\times S_{n\times n}(I)}$； **當** n 為偶數，$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)=2\times S_{n\times n}(I)+20}$

中心圈轉折點 J 之稅額

應用***規律 2-2***，我們找出右外轉折點的數量；***規律 2-3***、***2-4***、得知最後一個右外轉折點到中心圈轉折點的行走規律。因此，我們可以得出中心圈轉折點之稅額公式。

1. 當 n 為奇數時

$$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\left[\left(S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)-2\times4\right)\div2^4+2\times3\right]\times2^3=\frac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)}{2}+44$$

2. 當 n 為偶數時

$$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\left[\left(S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)-2\times5\right)\div2^5+2\times4\right]\times2^4+20=\frac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)}{2}+143$$

結論二-2： 在$n\times n$ 城鎮中順向行走，若依稅額最大值走法，中心圈轉折點之稅額規律

當 n 為奇數，$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\frac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)}{2}+44$；當 n 為偶數，$\boldsymbol{S_{n\times n}(J)}=\frac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)}{2}+143$

第三階段　　中心圈轉折點 J → 終點 B

行走路徑規律

第三階段的行走方式為從中心圈轉折點 J 往左走到底，之後往下到底再往右抵達終點，如圖 4-4 紅色路徑。往左移動與往下移動的格數從圖中可以發現，與右外轉折點的數量也有關聯，於是我們得出**規律 2-5**、**2-6**。

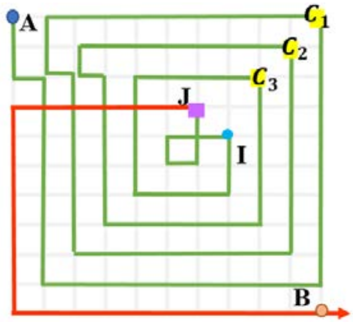


圖 4-4

規律 2-5：在$n\times n$ 城鎮中順向行走，稅額最大值之走法，中心圈轉折點往左移動規律

當 n 為奇數時，往左移動$\frac{n+1}{2}$格；當n為偶數，往左移動$\frac{n+2}{2}$格。

規律 2-6：中心圈轉折點往左移動到底後往下移動格數，

當 n 為奇數時，往下移動$\frac{n+3}{2}$格；當n為偶數，往下移動$\frac{n+4}{2}$格

終點 B 之稅額

因此，我們可以根據***規律 2-5、2-6*** 推導得到***結論二-3***。

結論二-3： 在$n \times n$的正方形城鎮中，若依稅額最大值走法，終點 B 之稅額規律

當 n 為奇數時，$S_{n\times n} = \left[S_{n\times n}(J) - 2 \times \frac{n+1}{2}\right] \div 2^{\frac{n+3}{2}} + 2 \times (n-1)$，$n \geq 7$

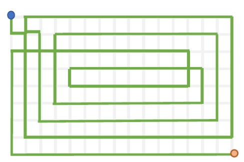
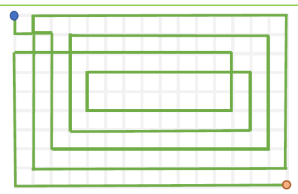
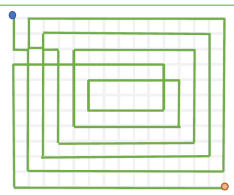
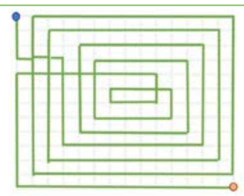
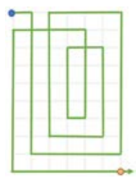
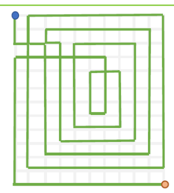
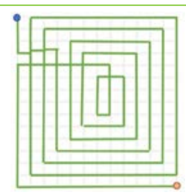
當 n 為偶數時，$S_{n\times n} = \left[S_{n\times n}(J) - 2 \times \frac{n+2}{2}\right] \div 2^{\frac{n+4}{2}} + 2 \times (n-1)$，$n \geq 8$

研究三：在$n \times m$的長方形城鎮中，從 A 到 B 順向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

接著我們思考，若城鎮改成長方形時，走法及稅額規律是否會產生變化。

探討長方形城鎮時，因為橫向走法是關係到加減 2；而縱向走法是關係到乘除 2。因此，橫向延伸與縱向延伸的長方形我們分開探討，是否對稅額最大值有不同的影響。

應用研究一所發現的行走性質，在長方形城鎮中，我們發現走法與正方形相似，同樣需要逆時針繞大圈、繞多圈、由外而內螺旋繞圈、向左進入中心圈、維持逆時針走法等。在路徑中，我們發現同樣有右外轉折點、中心圈轉折點。**與正方形城鎮唯一的不同點是，行經最後一個右外轉折點後，中心圈與中心圈外框，皆從正方形轉變為長方形**。

			
9×16	10×16	12×15	13×15
			
16×8	10×7	13×11	15×12

我們選出幾個不同類型的長方形城鎮分析走法。發現：長方形城鎮的**短邊**，會直接影響路徑中的起步下降格數、轉折點數量、中心圈，以及中心圈外框。

例如：1. 9×16為例，右外轉折點數量與中心圈走法與9×9相似，僅做了橫向延伸，中心圈從2×2變化成2×9。同理，10×16同10×10、12×15同12×12，以此類推。

2. 16×8 為例，右外轉折點數量與中心圈走法與 8×8相似，僅做了縱向延伸，以及中心圈從3×3變化成11×3。同理，10×7同7×7、13×11同11×11、15×12同12×12。

因此，在$n \times m$的城鎮中，若是橫向延伸，即$n \leq m$，則走法、下降格數、轉折點數、中心圈部分，都與$n \times n$相同；若是縱向延伸，即$m < n$，則與$m \times m$相同。

長方形的規律尋求，我們同正方形一樣，分為三階段進行。

第一階段　起點 A → 最後一個右外轉折點 C_p

行走路徑規律

從前面的走法探討我們得知，長方形城鎮中，起步之下降格數與右外轉折點數量都與短邊長有關。因此，我們得到**規律 3-1、3-2**。

規律 3-1：在$n \times m$的城鎮中，設$\alpha = min\{m,n\}$，設起步下降格數為 d，若依稅額最大值走法，則　當α 為奇數時，$d = (\alpha - 7) \div 2$，$\alpha \geq 7$，當α 為偶數時，$d = (\alpha - 8) \div 2$，$\alpha \geq 8$

規律 3-2：在$n \times m$的城鎮中，設$\alpha = min\{m,n\}$，設右外轉折點數量為 p，若依稅額最大值走法，則當α 為奇數時，$p = (\alpha - 5) \div 2$，$\alpha \geq 7$，當α 為偶數時，$p = (\alpha - 6) \div 2$，$\alpha \geq 8$

右外轉折點C_k之稅額

我們先尋求位置C_1第一個右外轉折點也就是$S_{n \times m}$（C_1）的稅額公式。

一開始，我們列出$n = 7 \sim 13$、$m = 10 \sim 14$時，位置C_1第一個右外轉折點的稅額

	(n，m)=(奇，偶)	(n，m)=(偶，奇)
$n < m$	$S_{9 \times 10}(C_1) = 2^2 + (10 - 2) \times 2^8$	$S_{10 \times 11}(C_1) = 2^2 + (11 - 2) \times 2^9$
	$S_{9 \times 12}(C_1) = 2^2 + (12 - 2) \times 2^8$	$S_{10 \times 13}(C_1) = 2^2 + (13 - 2) \times 2^9$
	(n，m)=(奇，奇)	(n，m)=(偶，偶)
	$S_{9 \times 11}(C_1) = 2^2 + (11 - 2) \times 2^8$	$S_{10 \times 12}(C_1) = 2^2 + (12 - 2) \times 2^9$

	$S_{9\times13}(C_1)=2^2+(13-2)\times2^8$	$S_{10\times14}(C_1)=2^2+(14-2)\times2^9$
	(n，m)=(奇，偶)	(n，m)=(偶，奇)
$m<n$	$S_{11\times10}(C_1)=2^2+(10-2)\times2^{10}$	$S_{10\times9}(C_1)=2^2+(9-2)\times2^9$
	$S_{13\times10}(C_1)=2^2+(10-2)\times2^{12}$	$S_{12\times9}(C_1)=2^2+(9-2)\times2^{11}$
	(n，m)=(偶，偶)	(n，m)=(奇，奇)
	$S_{12\times10}(C_1)=2^2+(10-2)\times2^{11}$	$S_{11\times9}(C_1)=2^2+(9-2)\times2^{10}$
	$S_{14\times10}(C_1)=2^2+(10-2)\times2^{13}$	$S_{13\times9}(C_1)=2^2+(9-2)\times2^{12}$

由以上各式，我們歸納出：

1. 當$n<m$時，n為奇數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{n-5}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

n為偶數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{n-6}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

2. 當$m<n$時，m為奇數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{m-5}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

m為偶數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{m-6}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

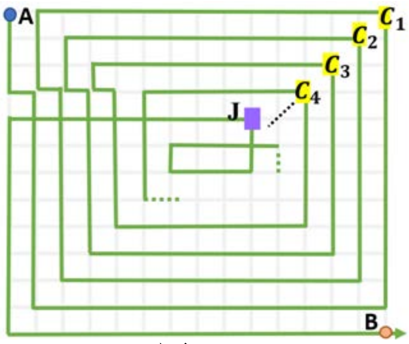


圖 4-5

為了方便描述與說明，我們假設$\alpha=min\{m,n\}$，則：

1. 第一個右外轉折點，也就是$S_{n\times m}(C_1)$之規律。

(1) 當α為奇數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{\alpha-5}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

(2) 當α為偶數，$S_{n\times m}(C_1)=2^{\frac{\alpha-6}{2}}+(m-2)\times2^{n-1}$

同樣的，透過$S_{n\times m}(C_1)$繼續推導$S_{n\times m}(C_2)$、$S_{n\times m}(C_3)$、$S_{n\times m}(C_4)$的規律

2. 第二個右外轉折點，也就是$S_{n\times m}(C_2)$之規律。

(1) 當α為奇數，$S_{n\times m}(C_2)=2\times2^{\frac{\alpha-7}{2}}+(3m-8)\times2^{n-3}-(m-2)$

(2) 當α為偶數，$S_{n\times m}(C_2)=2\times2^{\frac{\alpha-8}{2}}+(3m-8)\times2^{n-3}-(m-2)$

3. 第三個右外轉折點，也就是$S_{n\times m}(C_3)$之規律。

(1) 當α為奇數，$S_{n\times m}(C_3)=3\times2^{\frac{\alpha-9}{2}}+(7m-22)\times2^{n-5}-\frac{3m-10}{2}$

(2) 當α為偶數，$S_{n\times m}(C_3)=3\times 2^{\frac{\alpha-10}{2}}+(7m-22)\times 2^{n-5}-\frac{3m-10}{2}$

4. 第四個右外轉折點，也就是$S_{n\times m}(C_4)$之規律。

(1) 當α為奇數，$S_{n\times m}(C_4)=4\times 2^{\frac{\alpha-11}{2}}+(15m-52)\times 2^{n-7}-\frac{7m-34}{2^2}$

(2) 當α為偶數，$S_{n\times m}(C_4)=4\times 2^{\frac{\alpha-12}{2}}+(15m-52)\times 2^{n-7}-\frac{7m-34}{2^2}$

從以上推導，我們整理成表 4-5，發現與正方形的表 4-4 相似。

表 4-5 長方形城鎮$n\times m$右外轉折點規律

	1		+ 2	− 3
	n 為奇數	n 為偶數		
$S_{n\times m}(C_1)$	$2^{\frac{\alpha-5}{2}}$	$2^{\frac{\alpha-6}{2}}$	$(m-2)\times 2^{n-1}$	
$S_{n\times m}(C_2)$	$2\times 2^{\frac{\alpha-7}{2}}$	$2\times 2^{\frac{\alpha-8}{2}}$	$(3m-8)\times 2^{n-3}$	$\frac{m-2}{2^0}$
$S_{n\times m}(C_3)$	$3\times 2^{\frac{\alpha-9}{2}}$	$3\times 2^{\frac{\alpha-10}{2}}$	$(7m-22)\times 2^{n-5}$	$\frac{3m-10}{2^1}$
$S_{n\times m}(C_4)$	$4\times 2^{\frac{\alpha-11}{2}}$	$4\times 2^{\frac{\alpha-12}{2}}$	$(15m-52)\times 2^{n-7}$	$\frac{7m-34}{2^2}$

我們再歸納，第 k 個右外轉折點時$S_{n\times m}(C_k)$之規律。

結論三-1：在$\mathrm{n}\times\mathrm{m}$城鎮中順向行走，設$\alpha=\min\{m,n\}$，若依稅額最大值走法至第 k 個右外轉折點，則：

當α 為奇數時，

$$S_{n\times m}(C_k)=k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+3)}{2}}+[(2^k-1)m-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}\text{，}2\le k\le\frac{\alpha-5}{2}$$

當α 為偶數時，

$$S_{n\times m}(C_k)=k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+4)}{2}}+[(2^k-1)m-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}\text{，}2\le k\le\frac{\alpha-6}{2}$$

其中 $t=2^{k+2}-2\times(k+2)$ $\quad u=2^k\times k-2^{k+1}+2$

發現

在*結論三-1* 中，當$n=m$ 時，即為在正方形城鎮第 k 個右外轉折點的稅額規律，其結果

與*結論二-1* 相同。

第二階段　最後一個右外轉折點C_p →中心圈轉折點 J

行走路徑規律

長方形走法中，與正方形最大的不同在於，逆時針向內繞行形成的中心圈以及中心圈外框均產生變化。而這個變化也將影響最後一個右外轉折點與中心圈轉折點稅額的關係。因此，在長方形時，我們需要仔細探討中心圈與中心圈外框的長寬規律。

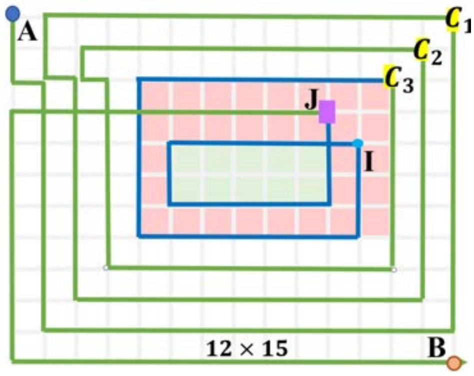


圖 4-6

在實際走的過程中發現，中心圈變化的規律首先要看在$n \times m$時，n與m的大小關係。例如：

在9×16中，中心圈為$2 \times (2+16-9) = 2 \times 9$，中心圈外框為為$5 \times 12$，

12×15中，中心圈為$3 \times (3+15-12) = 3 \times 6$，中心圈外框為$6 \times 9$。

10×7中，中心圈為$(2+10-7) \times 2 = 5 \times 2$，中心圈外框為$8 \times 5$。

15×12中，中心圈為$(3+15-12) \times 3 = 6 \times 3$，中心圈外框為$9 \times 6$。

因此，根據以上的分析，我們可以歸納出**規律 3-3**

規律 3-3： 在$n \times m$的城鎮中，若依稅額最大值走法，經過最後一個右外轉折點後，

1. 當$n \le m$，n為奇數，中心圈為$2 \times (2+m-n)$，中心圈外框為$5 \times (5+m-n)$。
   n為偶數，中心圈為$3 \times (3+m-n)$，中心圈外框為$6 \times (6+m-n)$。
2. 當$m < n$，m為奇數，中心圈為$(2+n-m) \times 2$，中心圈外框為$(5+n-m) \times 5$。
   m為偶數，中心圈為$(3+n-m) \times 3$，中心圈外框為$(6+n-m) \times 6$。

中心圈轉折點 J 之稅額

在$n \times n$的正方形城鎮中，若固定 n 的奇偶性，則中心圈是固定的(2×2、3×3)，所以不管 n 多大，第二階段稅額的改變方式也同樣是固定的；但在$n \times m$的長方形中，由於$n \neq m$，即使 n、m 的奇偶性固定，由*規律 3-3* 知，其中心圈與中心圈外框也是變動的，造成此階段稅額的改變方式與不同的 n、m 有關。以下為至中心圈轉折點稅額$S_{n \times m}$(J)的推導：

1. 當$n \le m$且n為奇數時，

$$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\left\{\left[\left[\left[\left(S_{n\times m}(C_{\frac{n-5}{2}})-2\times(m-n+4)\right)\div 2^4+2\times(m-n+3)\right]\times 2^2\right]-2(\mathrm{m}-\mathrm{n}+2)\right]\div 2+2(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)\right\}\times 2^2=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)}{2}+(m-n)\times 19+44$$

2. 當$n \le m$且n為偶數時，

$$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\left\{\left[\left[\left[\left(S_{n\times m}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)-2\times(m-n+5)\right)\div 2^5+2\times(m-n+4)\right]\times 2^3\right]-2(\mathrm{m}-\mathrm{n}+3)\right]\div 2^2+2(\mathrm{m}-\mathrm{n}+2)\right\}\times 2^3=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)}{2}+(m-n)\times 43+143$$

3. 當m < n 且 m 為奇數時，

$$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\left\{\left\{\left[\left[\left(S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-5}{2}}\right)-2\times 4\right)\div 2^{n-m+4}+2\times 3\right]\times 2^{n-m+3}\right]-2\times 2\right\}\div 2^{n-m+1}+2\right\}\times 2^{n-m+2}=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-5}{2}}\right)}{2}+7\times 2^{n-m+3}-12$$

4. 當$m < n$且m為偶數時，

$$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\left\{\left[\left[\left[\left(S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-6}{2}}\right)-2\times 5\right)\div 2^{n-m+5}+2\times 4\right]\times 2^{n-m+4}\right]-2\times 3\right]\div 2^{n-m+2}+2\times 2\right\}\times 2^{n-m+3}=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-6}{2}}\right)}{2}+5\times 2^{n-m+5}-17$$

因此，我們可以得到*結論三-2*

結論三-2：在 $n\times m$ 的城鎮中順向行走，若依稅額最大值走法，則

1. 當$n \le m$且n為奇數時，$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)}{2}+(m-n)\times 19+44$

2. 當$n \le m$且n為偶數時，$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)}{2}+(m-n)\times 43+143$

3. 當$m < n$且m為奇數時，$S_{n\times m}(\mathrm{J})=\frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-5}{2}}\right)}{2}+7\times 2^{n-m+3}-12$

4. 當$m < n$且m為偶數時，$S_{n\times m}(\mathrm{J}) = \frac{S_{n\times m}\left(C_{\frac{m-6}{2}}\right)}{2} + 5 \times 2^{n-m+5} - 17$

第三階段　中心圈轉折點 J → 終點 B

行走路徑規律

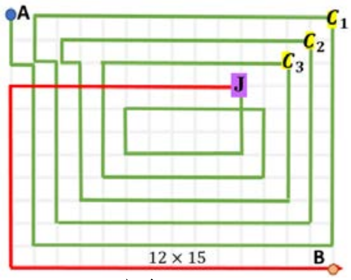


圖 4-7

第三階段從中心圈轉折點往左到底、往下到底後往右抵達終點。移動規律與正方形城鎮相同，可以以轉折點數量來尋求。

規律 3-4：在$n \times m$的城鎮中，設$\alpha = min\{m, n\}$，從中心轉折點到終點的移動規律

當α為奇數時，往右移動 $\frac{2m-\alpha+1}{2}$ 格；當α為偶數，往右移動 $\frac{2m-\alpha+2}{2}$ 格。

規律 3-5：在$n \times m$的城鎮中，設$\alpha = min\{m, n\}$，中心圈轉折點往左移動到底後往下移動格數，當α為奇數時，往下移動 $\frac{2n-\alpha+3}{2}$ 格；當α為偶數，往下移動 $\frac{2n-\alpha+4}{2}$ 格

終點 B 之稅額

從*結論三-2*、***規律* 3-4、3-5**，我們可以得到終點稅額最大值的公式。

結論三-3：在 $n \times m$ 的城鎮中順向行走，若依據稅額最大值走法，則

1. 當$n \le m$且n為奇數

$$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (2m - n + 1)] \div 2^{\frac{n+3}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , n \ge 7,$$

2. 當$n \le m$且n為偶數

$$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (2m - n + 2)] \div 2^{\frac{n+4}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , n \ge 8$$

3. 當$m < n$且m為奇數

$$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (m + 1)] \div 2^{\frac{2n-m+3}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , m \ge 7$$

4. 當$m < n$且m為偶數

$$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (m + 1)] \div 2^{\frac{2n-m+4}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , m \ge 8$$

研究四：在$n \times m$的長方形城鎮中，從 B 到 A 逆向行走時，探討課稅額最大值之最佳解

接著我們思考，如果將出入口對調，即從 B 到 A 行走時，稅額大小會有如何的變化呢？沒想到實際試做了之後，如表 4-6，發現驚人的結果！

表 4-6　長方形城鎮$n \times m$逆向行走之稅額

$n \times m$	4×4	4×5	4×6	4×7	5×4	6×4	7×4
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	16	26	36	46	48	112	240
$n \times m$	5×5	5×6	5×7	5×8	6×5	7×5	8×5
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	78	112	146	180	190	414	862
$n \times m$	6×6	6×7	6×8	6×9	7×6	8×6	9×6
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	272	354	436	518	592	1232	2512
$n \times m$	7×7	7×8	7×9	7×10	8×7	9×7	10×7
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	778	972	1166	1360	1642	3370	6826
$n \times m$	8×8	8×9	8×10	8×11	9×8	10×8	11×8
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	2060	2478	2896	3314	4236	8588	17292
$n \times m$	9×9	9×10	9×11	9×12	10×9	11×9	12×9
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	5118	6016	6914	7812	10430	21054	42301
$n \times m$	10×10	10×11	10×12	10×13	11×10	12×10	13×10
$\mathrm{RS}_{n \times m}$	12288	14146	16004	17862	24832	49920	100096

從**研究一的性質**探討以及順向走法的經驗我們得知：逆時針、繞大圈、繞多圈、從外而內可以獲得最大的稅額。在逆向行走時，我們也遵循同樣的走法，並定義在逆向走法時的名詞與特定位置。如圖 4-8。

逆向路徑之名詞定義

1. **右外轉折點**：與順向行走相同，行走路徑中右外角之轉折點，以 C 表示其為置。
2. **實際轉折點**：在逆向走法中，若依稅額最大值走法，位於**進入中心圈之前**的轉折處稱為實際轉折點，其位置我們以 T 表示。
3. **虛擬轉折點**：在逆向走法路徑中，**經實際轉折點後**往上一格處，為虛擬轉折點，位置以 V 表示。**這邊需特別注意的是，逆向行走依最大稅額路徑，經實際轉折點後並未經過虛擬轉折點，但行經實際轉折點後若再往上一格來到虛擬轉折點，其稅額與右外轉折點有相同的規律存在。因此，我們將虛擬轉折點視為最後一個右外轉折點計算。**

4. **中心圈交點**：逆向行走中，進入中心圈與離開中心圈之交點，稱為中心圈交點，位置以 Q 表示。

同樣的，我們分三階段來探討：

第一階段：起點 B 至實際轉折點 T (紫色路線)

第二階段：實際轉折點 T 至中心圈交點 Q (藍色路線)

第三階段：中心圈交點 Q 至終點 A (紅色路線)

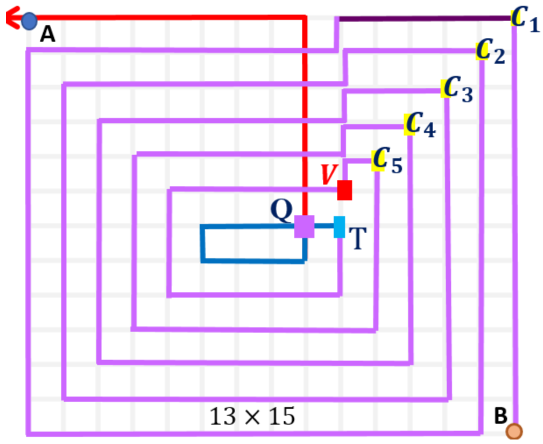


圖 4-8

第一階段　起點 B → 實際轉折點 T

行走路徑規律

逆向行走時，我們應用***性質八***，從 B 出發後先往上到第一個轉折點後，進行第一段向左移動後(如圖 4-8 右上方路徑中深紫色路段)，再往下一格，後續第二段的向左移動。第一段的向左移動可以讓我們在抵達最左方的負值較小，有助於終點稅額的增加。這一段向左移動的距離，我們發現與長方形的**短邊**，也與**右外轉折點數量(包含虛擬轉折點)**有關。因此，我們將**第一段向左移動**格數設為 f，右外轉折點數量設為 q，整理如下表。

表 4-7　長方形城鎮$n \times m$逆向行走之第一段向左移動格數與右外轉折點數量

短邊長	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
q	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

從表 4-7 中我們可以歸納出在逆向行走中，右外角第一段向左移動格數的規律。

規律 4-1：在 $n \times m$ 的逆向走法中，設$\alpha = min\{m，n\}$，若依稅額最大值走法，則

當α 為奇數時，$f = (\alpha - 3) \div 2$， $\alpha > 4$

當α 為偶數時，$f = (\alpha - 4) \div 2$， $\alpha > 4$

規律 4-2：在 $n \times m$ 的逆向走法中，設$\alpha = min\{m，n\}$，若依稅額最大值走法，則

當α 為奇數時，$q = (\alpha - 1) \div 2$， $\alpha > 4$

當α 為偶數時，$q = (\alpha - 2) \div 2$， $\alpha > 4$

右外轉折點 C_k 之稅額

從 B 出發，起始稅額為 0，因此，抵達第一個右外轉折點C_1的稅額仍保持 0。因第一個右外轉折點C_1的稅額仍保持 0，所以我們先尋求位置C_2第二個右外轉折點的稅額公式，也就是$RS_{n\times m}$（C_2）。一開始，我們列出 n=7～14、m=8～12 時，位置C_2第二個右外轉折點的稅額。

	(n，m)=(奇，偶)	(n，m)=(偶，奇)
$n \le m$	$RS_{7\times 8}(C_2) = -2 - 10 + 6 \times 2^6$	$RS_{8\times 9}(C_2) = -2 - 12 + 7 \times 2^7$
	$RS_{7\times 10}(C_2) = -2 - 14 + 8 \times 2^6$	$RS_{8\times 11}(C_2) = -2 - 16 + 9 \times 2^7$
	(n，m)=(奇，奇)	(n，m)=(偶，偶)
	$RS_{7\times 7}(C_2) = -2 - 8 + 5 \times 2^6$	$RS_{8\times 8}(C_2) = -2 - 10 + 6 \times 2^7$
	$RS_{7\times 9}(C_2) = -2 - 12 + 7 \times 2^6$	$RS_{8\times 10}(C_2) = -2 - 14 + 8 \times 2^7$
$m < n$	(n，m)=(奇，偶)	(n，m)=(偶，奇)
	$RS_{11\times 10}(C_2) = -3 - 12 + 8 \times 2^{10}$	$RS_{12\times 9}(C_2) = -3 - 10 + 7 \times 2^{11}$
	$RS_{13\times 10}(C_2) = -3 - 12 + 8 \times 2^{12}$	$RS_{14\times 9}(C_2) = -3 - 10 + 7 \times 2^{13}$
	(n，m)=(奇，奇)	(n，m)=(偶，偶)
	$RS_{11\times 9}(C_2) = -3 - 10 + 7 \times 2^{10}$	$RS_{12\times 10}(C_2) = -3 - 12 + 8 \times 2^{11}$
	$RS_{13\times 9}(C_2) = -3 - 10 + 7 \times 2^{12}$	$RS_{14\times 10}(C_2) = -3 - 12 + 8 \times 2^{13}$

由以上各式，我們可以歸納出以下四種情形：

1. 當$n \le m$且 n 為奇數

$$RS_{n\times m}(C_2) = -\frac{n-3}{2} - (2m - n + 1) + (m-2) \times 2^{n-1} = \frac{1 + n - 4m}{2} + (m-2) \times 2^{n-1}$$

2. 當$n \le m$且 n 為偶數

$$RS_{n\times m}(C_2) = -\frac{n-4}{2} - (2m - n + 2) + (m-2) \times 2^{n-1} = \frac{n - 4m}{2} + (m-2) \times 2^{n-1}$$

3. 當$m < n$且 m 為奇數

$$RS_{n\times m}(C_2) = -\frac{m-3}{2} - (m+1) + (m-2) \times 2^{n-1} = \frac{1 - 3m}{2} + (m-2) \times 2^{n-1}$$

4. 當$m < n$且 m 為偶數

$$RS_{n\times m}(C_2) = -\frac{m-4}{2} - (m+2) + (m-2)\times 2^{n-1} = \frac{-3m}{2} + (m-2)\times 2^{n-1}$$

完成$RS_{n\times m}(C_2)$的規律，同樣的，我們透過$RS_{n\times m}(C_2)$繼續推導$RS_{n\times m}(C_3)$、$RS_{n\times m}(C_4)$、$RS_{n\times m}(C_5)$的規律。為了方便描述與說明，我們假設$\alpha = min\{m,n\}$，則：

$\alpha = min\{m，n\}$		α為奇數	α為偶數
$RS_{n\times m}(C_1)$	$n \le m$	0	0
	$m < n$	0	0
$RS_{n\times m}(C_2)$	$n \le m$	$\frac{1+n-4m}{2} + (m-2)\times 2^{n-1}$	$\frac{n-4m}{2} + (m-2)\times 2^{n-1}$
	$m < n$	$\frac{1-3m}{2} + (m-2)\times 2^{n-1}$	$\frac{-3m}{2} + (m-2)\times 2^{n-1}$
$RS_{n\times m}(C_3)$	$n \le m$	$\frac{15+3n-12m}{2^2} + (3m-8)\times 2^{n-3}$	$\frac{12+3n-12m}{2^2} + (3m-8)\times 2^{n-3}$
	$m < n$	$\frac{15-9m}{2^2} + (3m-8)\times 2^{n-3}$	$\frac{12-9m}{2^2} + (3m-8)\times 2^{n-3}$
$RS_{n\times m}(C_4)$	$n \le m$	$\frac{67+7n-28m}{2^3} + (7m-22)\times 2^{n-5}$	$\frac{60+7n-28m}{2^3} + (7m-22)\times 2^{n-5}$
	$m < n$	$\frac{67-21m}{2^3} + (7m-22)\times 2^{n-5}$	$\frac{60-21m}{2^3} + (7m-22)\times 2^{n-5}$
$RS_{n\times m}(C_5)$	$n \le m$	$\frac{219+15n-60m}{2^4} + (15m-52)\times 2^{n-7}$	$\frac{204+15n-60m}{2^4} + (15m-52)\times 2^{n-7}$
	$m < n$	$\frac{219-45m}{2^4} + (15m-52)\times 2^{n-7}$	$\frac{204-45m}{2^4} + (15m-52)\times 2^{n-7}$

從以上的公式，我們再歸納第 k 個右外轉折點$RS_{n\times m}(C_k)$之規律。

結論四-1：在$n\times m$的逆向行走中，若依稅額最大值走法至第 k 個右外轉折點，則：

1. 當$n \le m$，且 n 為奇數，

$$RS_{n\times m}(C_k) = \frac{v+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}} + [(2^{k-1}-1)\times m - t]\times 2^{n-2k+3}，2 \le k \le \frac{n-1}{2}$$

2. 當$n \le m$，且 n 為偶數，

$$RS_{n\times m}(C_k) = \frac{r+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}} + [(2^{k-1}-1)\times m - t]\times 2^{n-2k+3}，2 \le k \le \frac{n-2}{2}$$

3. 當$m < n$，且 m 為奇數

$$RS_{n\times m}(C_k)=\frac{v-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}\text{，}2\le k\le\frac{\mathrm{m}-1}{2}$$

4. 當$m<n$，且 m 為偶數

$$RS_{n\times m}(C_k)=\frac{r-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}\text{，}2\le k\le\frac{\mathrm{m}-2}{2}$$

其中 $v=(6k-17)\times 2^{k-1}+11$, $r=(3k-9)\times 2^k+12$, $t=2^{k+1}-2\times(k+1)$

第二階段　實際轉折點 T → 中心圈交點 Q

行走路徑規律

在這個階段，我們應用***結論四-1***，求出最後一個右外轉折點，即**虛擬轉折點**的稅額。**行走時，我們並未實際經過虛擬轉折點，而是在虛擬轉折點下方的實際轉折點即轉彎進入中心圈**。從路徑中我們又可輕易發現，虛擬轉折點與實際轉折點有**特定關係**存在，即$RS_{n\times m}(V)=2\times RS_{n\times m}(T)$。我們可以應用虛擬轉折點與實際轉折點特定的稅額關係幫助在我們第二階段的稅額計算。

在逆向走法中，其中心圈的大小與順向走法長方形相同，都會留下產生變化的中心圈

規律 4-3：在$n\times m$的逆向行走中，若依稅額最大值走法，則實際轉折點 T 與虛擬轉折點 V 的稅額關係：$RS_{n\times m}(\mathrm{T})=\frac{RS_{n\times m}(C_q)}{2}=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}$

規律 4-4：在$n\times m$的逆向走法中，若依稅額最大值走法，則

1. 當$n\le m$，n為奇數，中心圈為$2\times(2+m-n)$的長方形。
   n為偶數，中心圈為$3\times(3+m-n)$的長方形。
2. 當$\mathrm{m}<\mathrm{n}$，m為奇數，中心圈為$(n-m+2)\times 2$的長方形。
   m為偶數，中心圈為$(n-m+3)\times 3$的長方形。

中心圈交點 Q 之稅額

根據***規律 4-3***、**4-4**，我們即可推導中心圈交點 Q 的稅額，並分為以下四種情形：

1. 當$n\le m$且 n 為奇數

$$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\left[\left(\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}-2\times(m-n+2)\right)\div 2+2\times(m-n+1)\right]\times 2$$

$$=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+2m-2n$$

2. 當$n\leq m$且 n 為偶數

$$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\left[\left(\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}-2\times(m-n+3)\right)\div 4+2\times(m-n+2)\right]\times 4$$

$$=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+6m-6n+10$$

3. 當$m<n$且 m 為奇數

$$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\left[\left(\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}-4\right)\div 2^{n-m+1}+2\right]\times 2^{n-m+1}=\frac{RS_{n\times m}(V)}{2}+2^{n-m+2}-4$$

4. 當$m<n$且 m 為偶數

$$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\left[\left(\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}-6\right)\div 2^{n-m+2}+4\right]\times 2^{n-m+2}=\frac{RS_{n\times m}(V)}{2}+2^{n-m+4}-6$$

因此我們得到*結論四-2*。

結論四-2：在$n\times m$的逆向行走中，若依稅額最大值走法，則

1. 當$n\leq m$且 n 為奇數，則$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+2m-2n$
2. 當$n\leq m$且 n 為偶數，則$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+6m-6n+10$
3. 當$m<n$且m 為奇數，則$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+2^{n-m+2}-4$
4. 當$m<n$且m 為偶數，則$RS_{n\times m}(\mathrm{Q})=\frac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}+2^{n-m+4}-6$

第三階段　中心圈交點 Q → 終點 A

行走路徑規律

最後，我們推導終點 A 的稅額。從圖 4-8 我們發現，從中心圈交點的路線為往上到底後，再往左抵達終點 A。往上的格數恰好為轉折點數量，往左的格數也與轉折點數量有關。

規律 4-5：在$n\times m$的逆向行走中，設 $\alpha=min\{m，n\}$，依稅額最大值走法，

當α為奇數時，往上移動 $\frac{\alpha-1}{2}$ 格；當α為偶數，往上移動 $\frac{\alpha-2}{2}$ 格。

當α為奇數時，往左移動 $\frac{2m-\alpha-1}{2}$ 格；當α為偶數，往左移動 $\frac{2m-\alpha}{2}$ 格。

終點 A 之稅額

結合*結論四-2*、***規律 4-5***，我們推導出終點稅額的規律。

結論四-3：在$n\times m$的逆向行走中，若依稅額最大值走法，則

1. 當$n\leq m$ 且 n 為奇數，$RS_{n\times m}=RS_{n\times m}(\mathrm{Q})\times 2^{\frac{n-1}{2}}-(2m-n-1)$
2. 當$n\leq m$ 且 n 為偶數，$RS_{n\times m}=RS_{n\times m}(\mathrm{Q})\times 2^{\frac{n-2}{2}}-(2m-n)$
3. 當$m<n$且m 為奇數，$RS_{n\times m}=RS_{n\times m}(\mathrm{Q})\times 2^{\frac{m-1}{2}}-(m-1)$
4. 當$m<n$且m 為偶數，$RS_{n\times m}=RS_{n\times m}(\mathrm{Q})\times 2^{\frac{m-2}{2}}-m$

伍、討論與結論

一、順向行走與逆向行走終點稅額的差異

研究中我們發現，逆向行走最終的稅額較順向行走的為大。從行走路徑分析，順向逆向均有逆時針繞圈、繞大圈、多圈、由外而內繞中心圈等走法。在抵達終點前倒數第二步，順向為往下移動；逆向路徑則是往上。可以解釋，逆向行走稅額大於順向稅額之原因。

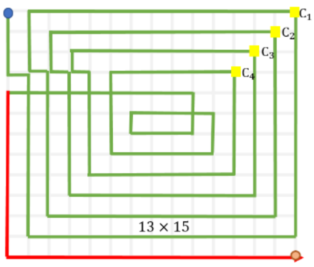


圖 5-1

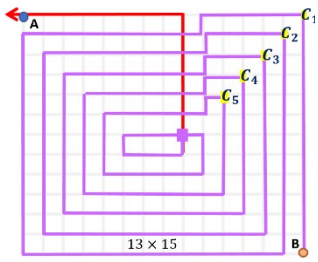


圖 5-2

二、順向稅額公式中，右外轉折點之稅額公式，$S_{n\times n}(C_k)$與$S_{n\times m}(C_k)$差異

從*結論二-1* 與*結論三-1* 比對，兩個公式相當接近。

	❶ +	❷ −	❸
n為奇數，$S_{n\times n}(C_k)$	$k\times 2^{\frac{n-(2k+3)}{2}}$	$\left[(2^k-1)n-t\right]\times 2^{n-(2k-1)}$	$\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}$
設$\alpha=min\{m，n\}$，α 為奇數，$S_{n\times m}(C_k)$	$k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+3)}{2}}$	$\left[(2^k-1)m-t\right]\times 2^{n-(2k-1)}$	$\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}$

❷、❸部分隨著城鎮從$n\times n$正方形轉變為$n\times m$長方形，因 n 影響乘除 2 的次數，

m 則影響加減 2 的次數。可以理解 2 的次方數部分隨著 n 變化；其餘則隨著 m 變化。但 1 在 2 的指數上，卻視 n、m 大小而有變化。

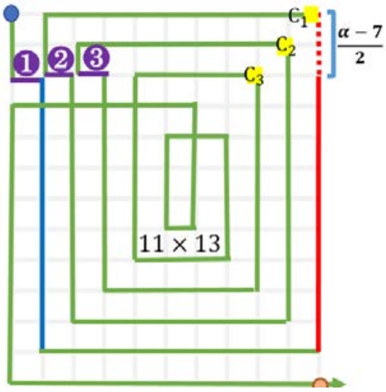


圖 5-3

若我們將稅額的計算分開，單獨看圖 5-1 中紫色 1 段的稅額。從順向行走路徑中我們發現，到C_1時，上升較下降多了一段，恰好等於起步下降格數。根據***規律 2-1、3-1*** 我們得知，起步下降與長方形的**短邊**有關。可以解釋，在順向行走右外轉折點稅額的規律中，長方形公式 $n < m$與$m < n$兩者的差異所在。

三、逆向稅額公式中，右外轉折點之稅額公式，$\mathbf{RS}_{n\times m}(C_k)$在$n \le m$ 與 $m < n$之差異探討

在逆向最後一個右外轉折點的稅額公式，即*結論四-1*，我們發現 n、m 同為奇數時，

當$n \le m$，$RS_{n\times m}(C_k) =$

$$\frac{v+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}} + [(2^{k-1}-1)\times m - t]\times 2^{n-2k+3}，2 \le k \le \frac{n-1}{2}$$

當$m < n$時，$RS_{n\times m}(C_k) = \dfrac{v-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}} + [(2^{k-1}-1)\times m - t]\times 2^{n-2k+3}$，$2 \le k \le \dfrac{m-1}{2}$

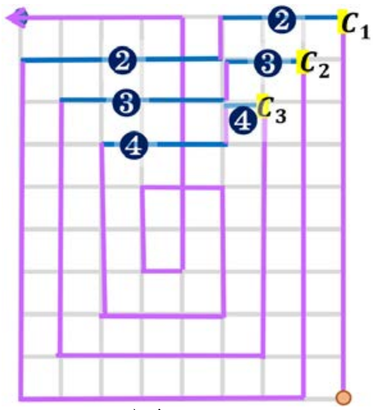


圖 5-4

兩個僅在紅色標示部分有差異。從走法中我們得知，逆向的向左移格數與長方形的短邊有關，當$n \le m$時，向左移動格數與 n 有關；當$m < n$時向左移動格數與 m 有關。可以解釋兩者之間的差異所在。

在深入探討發現，兩者公式相差了$\dfrac{(2^{k-1}-1)\times(n-m)}{2^{k-1}}$。可見，縱向延伸的長方形逆向最終稅額會大於橫向延伸的長方形，也與我們實際操作的結果相符(表 4-6)。

我們將稅額拆解成兩部分，造成差異的僅與深藍色路段有關，因此，轉折點稅額的計算我們單看深藍色段造成的差異。當$n \le m$時，圖中 2 部分到C_2的稅額是$\frac{1+n-4m}{2}$，當 $m < n$時，2 部分到C_2的稅額是$\frac{1-3m}{2}$；兩者相差$\frac{n-m}{2}$。$n \le m$時，3 到C_3的稅額是

$\frac{7+n-4\mathrm{m}}{2}$，當$m < n$時，❸到$C_3$的稅額是$\frac{7-3m}{2}$，兩者也相差$\frac{n-m}{2}$。我們發現，若單獨看每一圈每一段行走的稅額，到右外轉折點均相差$\frac{n-m}{2}$。

但❷的稅額到C_3後，因位置下降一格，因此差額會變成$\frac{n-m}{2^2}$，因此，到C_k處，差額會變成$\frac{n-m}{2^{k-1}}$。❸段的差異來到C_4為$\frac{n-m}{2^2}$，到C_k差異則為$\frac{n-m}{2^{k-2}}$；❹段的差異在C_k處則為$\frac{n-m}{2^{k-3}}$，則 **k** 段在C_k的差異則為$\frac{n-m}{2^{k-(k-1)}}$。我們將C_2、C_3、C_4 … … C_k差異加總：

$$\frac{n-m}{2^{k-1}}+\frac{n-m}{2^{k-2}}+\frac{n-m}{2^{k-3}}+\cdots+\frac{n-m}{2^{k-(k-1)}}$$

$$=\frac{1\times(n-m)}{2^{k-1}}+\frac{2\times(n-m)}{2^{k-1}}+\frac{2^2\times(n-m)}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{2^{k-2}\times(n-m)}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{(1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{k-2})\times(n-m)}{2^{k-1}}=\frac{(2^{k-1}-1)\times(n-m)}{2^{k-1}}$$

與我們從***結論四-1*** 公式觀察的結果相符。也意外讓我們發現另一個尋求規律的方法。

四、我們從研究中發現了九項行走與稅額的性質、應用其性質找出了在正方形與長方形城鎮中，順向以及逆向走法的稅額最大值之最佳解。利用路徑中的規律，將過程分為三階段，提出每一個階段的路徑規律與稅額最大值公式，有效降低了問題的複雜度。

陸、未來發展

一、針對這個問題，我們覺得非常有挑戰性。未來還可以繼續探討，如果加減乘除的數字變成 3、4、5…，那走法跟稅額的規律是否會有其他變化？

二、我們也嘗試，在計算稅額過程中，要求要全程保持**整數**狀態，更是大大提昇問題的複雜度。若合併更改運算數字，也是未來可以考慮延伸的研究問題。

柒、參考文獻資料

一、遊戲學校網站　http://gameschool.cc/

二、邱韋齊(2018)。堆集遊戲解法之探討。第 58 屆全國科展

【評語】080402

1. 該研究為作者接觸有趣的網路遊戲引發研究興趣，對於矩形棋盤格中行走路徑的最大值進行研究，透過觀察局部特例，擬定三個階段得到最大化路徑的策略。路徑地圖從正方形到長方形並考慮反路徑問題最後都能得到最佳的解，該研究路徑求解過程有趣且分析路徑完整度高。

2. 該研究方法初期能計算出實際稅額來比較路徑的優勢，透過四則運算計算得到最大值走法，當圖形變大時，分類路徑的規律逐步計算出稅額，研究步驟分明有序。

3. 作者賦予路徑問題一個稅收的模型，頗富創意。能用小學生可上手的手法處理路徑優化問題，很有發展性。

作品簡報

課稅小鎮—
稅額最大值走法之
最佳解探討

國小組　數學科

研究動機

背包客從A處進入、B處離開小鎮，行走過程中，移動每一格都必須按照小鎮規定課稅。

舉例： $[((0+2\times 2)\div 2^3-2)\times 2+2\times 3]\div 2^2=0.75$

如何走出最大值稅額？　稅額是否有規律？

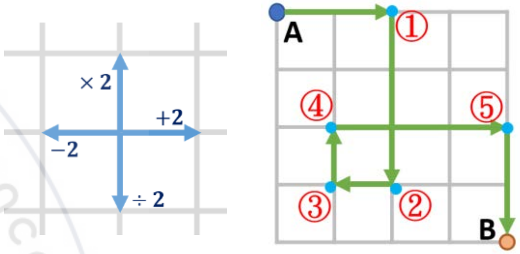


圖1：課稅方式及示例

研究目的與架構

名詞解釋 符號定義

城鎮大小：$n\times m$

順向行走：$A\rightarrow B$

逆向行走：$B\rightarrow A$

$S_{n\times m}$：順向終點稅額

$RS_{n\times m}$：逆向終點稅額

$S_{n\times m}(K)$：$A\rightarrow K$ 稅額

$RS_{n\times m}(K)$：$B\rightarrow K$ 稅額

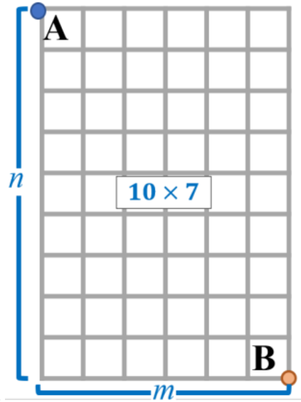
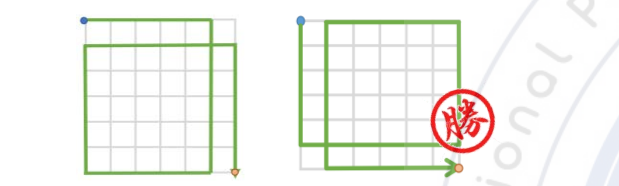


圖2：城鎮大小與起終點位置

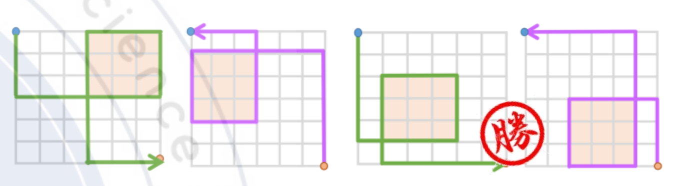
研究一：在正方形城鎮中，探討行走路徑與稅額的關係

性質一
逆時針繞圈，稅額會**增加**

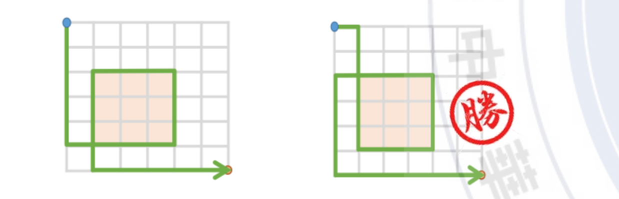


性質二
繞**圈越大**，增加稅額也**越大**

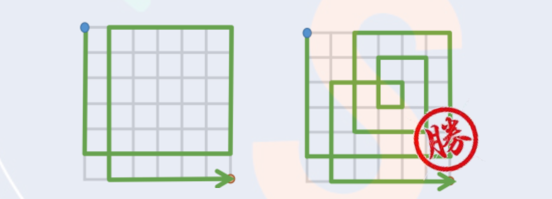
性質三 **順向**繞圈靠**左下方**、**逆向**繞圈靠**右下**，其稅額**越大**



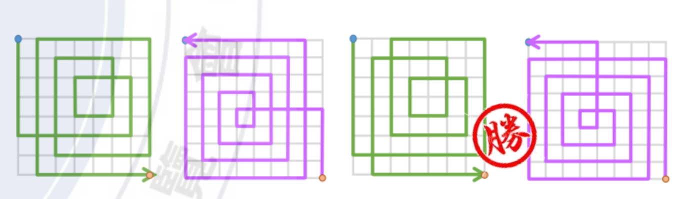
性質四 順向行走繞圈後回到最**左側**稅額會**增加**



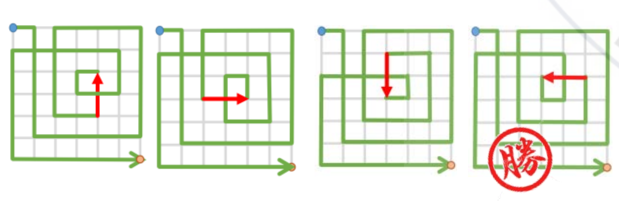
性質五
繞**圈數越多**，稅額增加越**多**



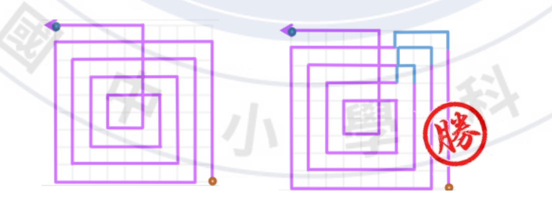
性質六 繞行圈數固定，**由外而內**較由內而外繞行的稅額**大**



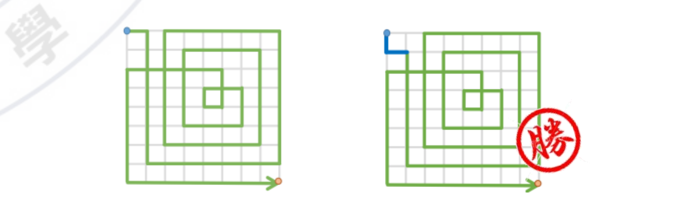
性質七 繞圈時，**向左**進入中心圈，則稅額較**大**



性質八 **逆時針ㄇ字型**(及對稱型)繞行稅額比直線行走**大**



性質九 **矩形**走至對角頂點，**逆時針**行走較順時針方向的稅額**大**



研究二：在正方形城鎮中，從A到B順向行走，課稅額最大值

順向路徑重要名詞

右外轉折點 C_k

中心圈

中心圈外框

中心圈轉折點 J

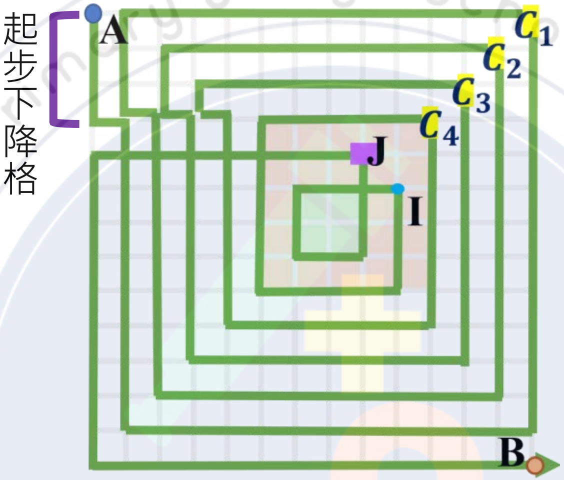


圖3：正方形城鎮順向行走稅額最大值之行走路徑

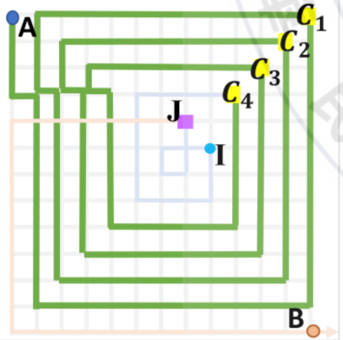
將路徑依規律分為三階段：

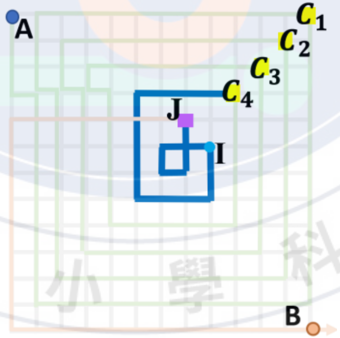
一、A → C_p

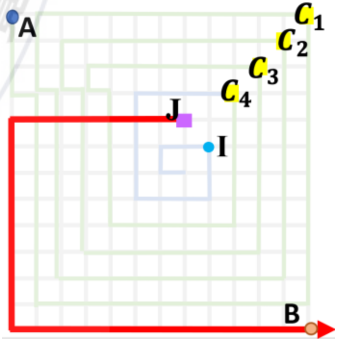
二、C_p → J

三、J → B

第一階段路徑	第二階段路徑	第三階段路徑







第一階段　起點A → 最後一個右外轉折點 C_p

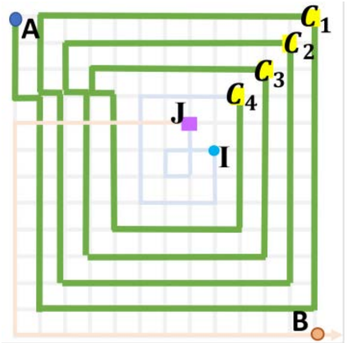


圖4：正方形順向第一階段路徑

n 為奇數	
$S_{n\times n}(C_1)=2^{\frac{n-5}{2}}+(n-2)\times 2^{n-1}$	
n 為偶數	
$S_{n\times n}(C_1)=2^{\frac{n-6}{2}}+(n-2)\times 2^{n-1}$	

規律	$n(\geq 7)$	奇數	偶數
2-1	起步下降格數 d	$(n-7)\div 2$	$(n-8)\div 2$
2-2	右外轉折點數 p	$(n-5)\div 2$	$(n-6)\div 2$

表1：正方形順向右外轉折點公式

	1 n 為奇數	1 n 為偶數	+ 2	− 3
$S_{n\times n}(C_2)$	$2\times 2^{\frac{n-7}{2}}$	$2\times 2^{\frac{n-8}{2}}$	$(3n-8)\times 2^{n-3}$	$\frac{n-2}{2^0}$
$S_{n\times n}(C_3)$	$3\times 2^{\frac{n-9}{2}}$	$3\times 2^{\frac{n-10}{2}}$	$(7n-22)\times 2^{n-5}$	$\frac{3n-10}{2^1}$
$S_{n\times n}(C_4)$	$4\times 2^{\frac{n-11}{2}}$	$4\times 2^{\frac{n-12}{2}}$	$(15n-52)\times 2^{n-7}$	$\frac{7n-34}{2^2}$
$S_{n\times n}(C_5)$	$5\times 2^{\frac{n-13}{2}}$	$5\times 2^{\frac{n-14}{2}}$	$(31n-114)\times 2^{n-9}$	$\frac{15n-98}{2^3}$
$S_{n\times n}(C_6)$	$6\times 2^{\frac{n-15}{2}}$	$6\times 2^{\frac{n-16}{2}}$	$(63n-240)\times 2^{n-11}$	$\frac{31n-258}{2^4}$

結論二-1：在 $n\times n$ 城鎮順向行走中，右外轉折點之稅額規律

當n為奇數，$S_{n\times n}(C_k)=k\times 2^{\frac{n-(2k+3)}{2}}+\left[(2^k-1)n-t\right]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}$，$2\leq k\leq\frac{n-5}{2}$

當n為偶數，$S_{n\times n}(C_k)=k\times 2^{\frac{n-(2k+4)}{2}}+\left[(2^k-1)n-t\right]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}$，$2\leq k\leq\frac{n-6}{2}$

其中，$t=2^{k+2}-2\times(k+2)$　$u=2^k\times k-2^{k+1}+2$

第二階段　最後一個右外轉折點C_p → 中心圈轉折點 J

規律	$n(\geq 7)$	奇數	偶數
2-3	中心圈	2×2	3×3
	中心圈外框	5×5	6×6
2-4	$S_{n\times n}(J)$	$2\times S_{n\times n}(I)$	$2\times S_{n\times n}(I)+20$

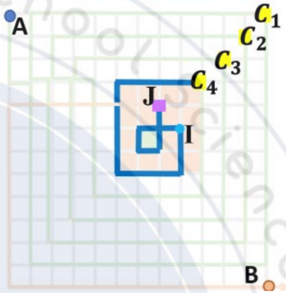


圖5：$n\times n$(n為奇數)中心圈及外框

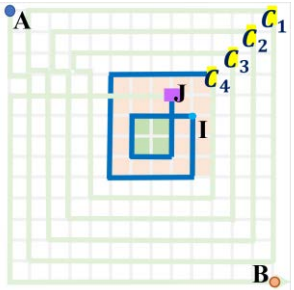


圖6：$n\times n$(n為偶數)中心圈及外框

結論二-2： 在$n\times n$ 城鎮中順向行走，中心圈轉折點之稅額規律

當n為奇數，$S_{n\times n}(J)=\dfrac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-5}{2}}\right)}{2}+44$； 當$n$為偶數，$S_{n\times n}(J)=\dfrac{S_{n\times n}\left(C_{\frac{n-6}{2}}\right)}{2}+143$

第三階段　中心圈轉折點 J → 終點 B

規律	$n(\geq 7)$	奇數	偶數
2-5	左移	$(n+1)\div 2$	$(n+2)\div 2$

規律	$n(\geq 7)$	奇數	偶數
2-6	下移	$(n+3)\div 2$	$(n+4)\div 2$

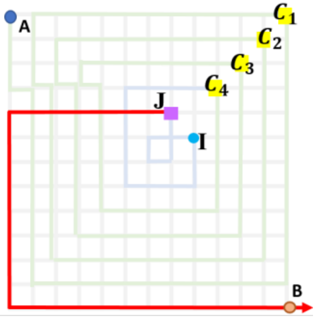


圖7：正方形順向第三階段路徑

結論二-3： 在$n\times n$的正方形城鎮中，終點B之稅額規律

當n為奇數，$S_{n\times n}=\left[S_{n\times n}(J)-2\times\frac{n+1}{2}\right]\div 2^{\frac{n+3}{2}}+2\times(n-1)$，$n\geq 7$；

當n為偶數，$S_{n\times n}=\left[S_{n\times n}(J)-2\times\frac{n+2}{2}\right]\div 2^{\frac{n+4}{2}}+2\times(n-1)$，$n\geq 8$

研究三：在長方形城鎮中，從A到B順向行走，課稅額最大值

與正方形城鎮路徑之差異點

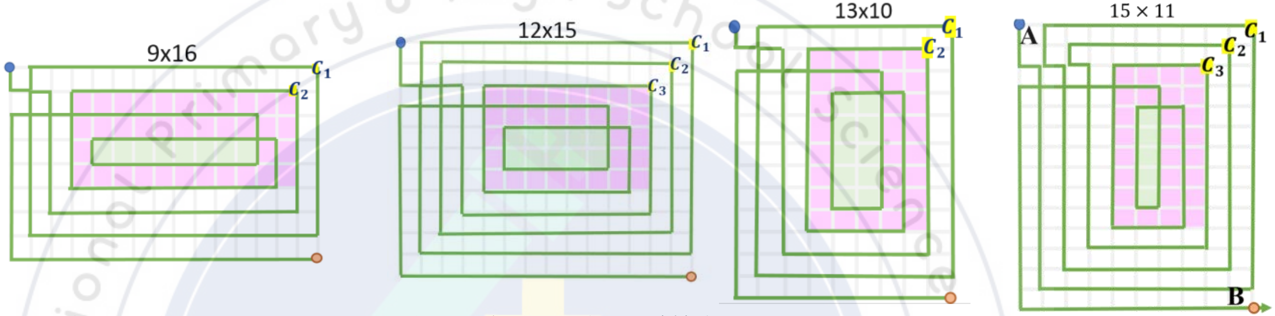


圖8：長方形順向路徑

發現

- 路徑相似，僅在中心圈大小，中心圈外框產生變化。
- 行走規律均與長方形的**短邊**有關。

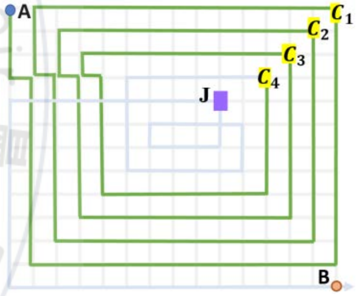


圖9：長正方形順向第一階段路徑

第一階段　起點A → 最後一個右外轉折點 C_p

規律	α (≥ 7)	奇數	偶數
3-1	起步下降格數 d	$(\alpha-7)\div 2$	$(\alpha-8)\div 2$
3-2	右外轉折點數 p	$(\alpha-5)\div 2$	$(\alpha-6)\div 2$

結論三-1：在$n\times m$城鎮中順向行走，設$\alpha=\min\{m,n\}$，**第 k 個右外轉折點之稅額規律**

當α為奇數，$S_{n\times m}(C_k)=k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+3)}{2}}+[(2^k-1)m-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}$，$2\le k\le\frac{\alpha-5}{2}$

當α為偶數，$S_{n\times m}(C_k)=k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+4)}{2}}+[(2^k-1)m-t]\times 2^{n-(2k-1)}-\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}$，$2\le k\le\frac{\alpha-6}{2}$

其中 $t=2^{k+2}-2\times(k+2)$　$u=2^k\times k-2^{k+1}+2$

第二階段　最後一個右外轉折點C_p → 中心圈轉折點 J

規律	$n(n \le m)$	奇數	偶數
3-3	中心圈	$2 \times (2+m-n)$	$3 \times (3+m-n)$
	中心圈外框	$5 \times (5+m-n)$	$6 \times (6+m-n)$

$m(m < n)$	奇數	偶數
中心圈	$(2+n-m) \times 2$	$(3+n-m) \times 3$
中心圈外框	$(5+n-m) \times 5$	$(6+n-m) \times 6$

結論三-2：在 $n \times m$ 的城鎮中順向行走，中心圈轉折點之稅額規律

當$n \le m$，n為奇數，$S_{n\times m}(J) = \dfrac{S_{n\times m}(C_p)}{2} + (m-n) \times 19 + 44 \quad , n \ge 7$

n為偶數，$S_{n\times m}(J) = \dfrac{S_{n\times m}(C_p)}{2} + (m-n) \times 43 + 143 \, , n \ge 8$

當$m < n$，m為奇數，$S_{n\times m}(J) = \dfrac{S_{n\times m}(C_p)}{2} + 7 \times 2^{n-m+3} - 12 \quad , m \ge 7$

m為偶數，$S_{n\times m}(J) = \dfrac{S_{n\times m}(C_p)}{2} + 5 \times 2^{n-m+5} - 17 \quad , m \ge 8$

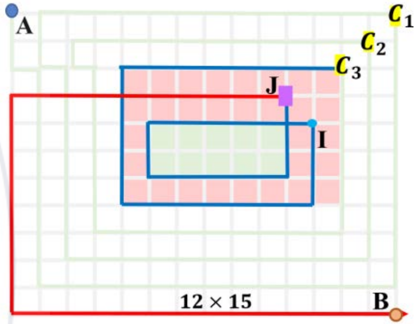


圖10：長方形順向第二、三階段路徑

第三階段　中心圈轉折點 J → 終點 B

規律	α(≥ 7)	奇數	偶數
3-4	左移	$(2m-\alpha+1) \div 2$	$(2m-\alpha+2) \div 2$

規律	α(≥ 7)	奇數	偶數
3-5	下移	$(2n-\alpha+3) \div 2$	$(2n-\alpha+4) \div 2$

結論三-3：在 $n \times m$ 的城鎮中順向行走，終點之稅額規律

當$n \le m$，n為奇數，$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (2m-n+1)] \div 2^{\frac{n+3}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , n \ge 7$

n為偶數，$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (2m-n+2)] \div 2^{\frac{n+4}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , n \ge 8$

當$m < n$，m為奇數，$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (m+1)] \div 2^{\frac{2n-m+3}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , m \ge 7$

m為偶數，$S_{n\times m} = [S_{n\times m}(J) - (m+1)] \div 2^{\frac{2n-m+4}{2}} + 2 \times (m-1) \quad , m \ge 8$

研究四：在長方形城鎮中，從B到A逆向行走時，課稅額最大值

逆向路徑重要名詞

實際轉折點 T

虛擬轉折點 V

中心圈交點 Q

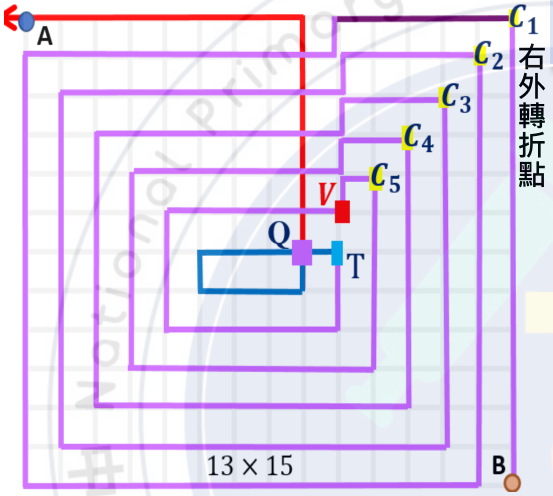


圖11：長方形城鎮逆向行走稅額最大值之行走路徑

第一階段　起點 B → 實際轉折點 T

規律	α(≥ 5)	奇數	偶數
4-1	第一段左移 f	$(\alpha-3)\div 2$	$(\alpha-4)\div 2$
4-2	右外轉折點數 q	$(\alpha-1)\div 2$	$(\alpha-2)\div 2$
規律	$RS_{n\times m}(\mathrm{T})$、$RS_{n\times m}(C_q)$稅額關係		
4-3	$\dfrac{RS_{n\times m}(C_q)}{2}=\dfrac{RS_{n\times m}(\mathrm{V})}{2}=RS_{n\times m}(\mathrm{T})$		

結論四-1：在$n\times m$的逆向行走中，第k個右外轉折點之稅額規律

當$n\le m$，n為奇數，$RS_{n\times m}(C_k)=\dfrac{v+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}$，$2\le k\le\dfrac{n-1}{2}$

n為偶數，$RS_{n\times m}(C_k)=\dfrac{r+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}$，$2\le k\le\dfrac{n-2}{2}$

當$m<n$，m為奇數，$RS_{n\times m}(C_k)=\dfrac{v-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}$，$2\le k\le\dfrac{m-1}{2}$

m為偶數，$RS_{n\times m}(C_k)=\dfrac{r-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}+[(2^{k-1}-1)\times m-t]\times 2^{n-2k+3}$，$2\le k\le\dfrac{m-2}{2}$

其中　$v=(6k-17)\times 2^{k-1}+11$，　$r=(3k-9)\times 2^{k}+12$，　$t=2^{k+1}-2\times(k+1)$

第二階段　實際轉折點T → 中心圈交點 Q

規律	$n(n \le m)$	奇數	偶數
4-4	中心圈	$2 \times (2 + m - n)$	$3 \times (3 + m - n)$

$m(m < n)$	奇數	偶數
中心圈	$(n - m + 2) \times 2$	$(n - m + 3) \times 3$

結論四-2：在$n \times m$的逆向行走中，中心圈交點Q之稅額

當$n \le m$，n為奇數，則$RS_{n\times m}(Q) = \frac{RS_{n\times m}(V)}{2} + 2m - 2n$；

n為偶數，則$RS_{n\times m}(Q) = \frac{RS_{n\times m}(V)}{2} + 6m - 6n + 10$

當$m < n$，m為奇數，則$RS_{n\times m}(Q) = \frac{RS_{n\times m}(V)}{2} + 2^{n-m+2} - 4$；

m為偶數，則$RS_{n\times m}(Q) = \frac{RS_{n\times m}(V)}{2} + 2^{n-m+4} - 6$

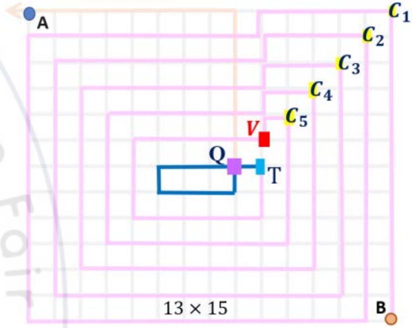


圖12：長方形逆向第二階段路徑

第三階段　中心圈交點 Q → 終點 A

規律	$\alpha(\ge 5)$	奇數	偶數
4-5	上移	$(\alpha - 1) \div 2$	$(\alpha - 2) \div 2$

$\alpha(\ge 5)$	奇數	偶數
左移	$(2m - \alpha - 1) \div 2$	$(2m - \alpha) \div 2$

結論四-3：在$n \times m$的逆向行走中，終點A之稅額

當$n \le m$，n為奇數，$RS_{n\times m} = RS_{n\times m}(Q) \times 2^{\frac{n-1}{2}} - (2m - n - 1)$，

n為偶數，$RS_{n\times m} = RS_{n\times m}(Q) \times 2^{\frac{n-2}{2}} - (2m - n)$

當$m < n$，m為奇數，$RS_{n\times m} = RS_{n\times m}(Q) \times 2^{\frac{m-1}{2}} - (m - 1)$，

m為偶數，$RS_{n\times m} = RS_{n\times m}(Q) \times 2^{\frac{m-2}{2}} - m$

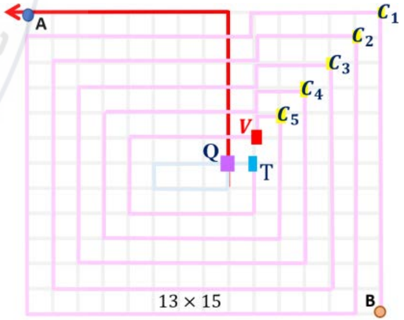


圖13：長方形逆向第三階段路徑

討論

一、順向行走與逆向行走終點稅額的差異，**逆向**終點稅額較順向為**大**

順向行走時，長方形城鎮橫向延伸的終點稅額會**大於**縱向延伸的終點稅額

逆向行走時，長方形城鎮縱向延伸的終點稅額會**大於**橫向延伸的終點稅額

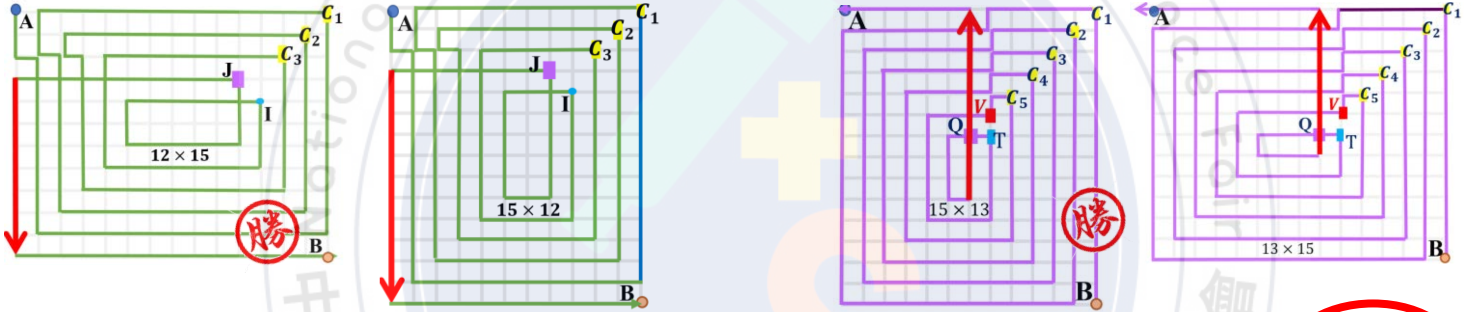


圖14：長方形縱向延伸與橫向延伸，順向與逆向之終點稅額之比較

二、順向稅額公式中，$S_{n\times n}(C_k)$與$S_{n\times m}(C_k)$差異

	① +	② −	③
n為奇數，$S_{n\times n}(C_k)$	$k\times 2^{\frac{n-(2k+3)}{2}}$	$[(2^k-1)n-t]\times 2^{n-(2k-1)}$	$\frac{(2^{k-1}-1)n-u}{2^{k-2}}$
設$\alpha=min\{m，n\}$，α 為奇數，$S_{n\times m}(C_k)$	$k\times 2^{\frac{\alpha-(2k+3)}{2}}$	$[(2^k-1)m-t]\times 2^{n-(2k-1)}$	$\frac{(2^{k-1}-1)m-u}{2^{k-2}}$

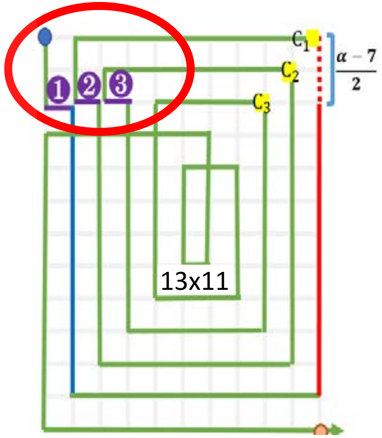


圖15：順向行走分段稅額分析圖

三、逆向稅額公式中，$RS_{n\times m}(C_k)$在$n \le m$與$m < n$之差異探討

(一) $n \le m$，n為奇數，$RS_{n\times m}(C_k) = \dfrac{v+(2^{k-1}-1)\times n-4\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}$

$m < n$，m為奇數，$RS_{n\times m}(C_k) = \dfrac{v-3\times(2^{k-1}-1)m}{2^{k-1}}$

(二) 兩者公式相差了 $\dfrac{(2^{k-1}-1)\times(n-m)}{2^{k-1}}$

$$\frac{n-m}{2^{k-1}}+\frac{n-m}{2^{k-2}}+\frac{n-m}{2^{k-3}}+\cdots+\frac{n-m}{2^{k-(k-1)}}=\frac{(2^{k-1}-1)\times(n-m)}{2^{k-1}}$$

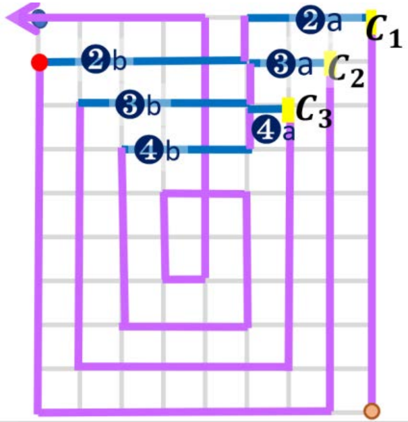


圖16：逆向行走分段稅額分析圖

結論與未來發展

一、研究中，我們提出了行走與稅額間關係之**九項性質**，應用找出順、逆向行走最大稅額之**路徑**。
將路徑將過程分為**三階段**，先歸納行走**規律**，再提出每一階段**稅額最大值公式**。
最後深入**分析比較**公式的差異，提出原因。

二、全程保持稅額**整數**，合併更改運算數字，路徑改為立體空間，也是未來可以延伸的研究方向。

參考文獻資料

[1] 遊戲學校網站 http://gameschool.cc/
[2] 邱韋齊(2018)。堆集遊戲解法之探討。第58屆全國科展