

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051814

無線充電線圈形狀對線圈特性之探討

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者： 高二 楊庭宇	指導老師： 蔡豐光
---------------	--------------

關鍵詞：無線充電、耦合係數、幾何形狀

摘要

本實驗主要探討不同形狀線圈對線圈自感、互感、耦合係數等特性的影響。首先查詢線圈相關數學模型，之後設計出螺旋圓形線圈及螺旋方形線圈，再利用實驗數據求得線圈自感值、互感值、耦合係數值。量測自感時，發現螺旋圓形線圈的自感值較螺旋方形線圈高，透過多圈線圈自感互感組合解釋此原因。量測線圈互感值時，發現緊密重疊、無水平方向偏移時，螺旋圓形線圈互感值和耦合係數均較螺旋方形線圈高。但進行水平方向偏移後卻發現，螺旋圓形線圈的互感值和耦合係數下滑趨勢較螺旋方形線圈明顯。最後以必歐-沙伐定律的數值分析模擬偏移後的磁場，解釋此現象。

壹、前言

一、研究動機

近幾年穿戴裝置受到消費者的喜愛，許多產品如智慧手錶、智慧手環、降噪耳機紛紛滿足使用者防水及防塵的需求，一些穿戴產品也開始使用無線充電設計。約一年前，在網站上看到日本公司推出一款適用於穿戴裝置的無線充電模組，從照片中明顯可見，與前一代產品相比，新的無線充電線圈形狀從圓形繞線改成了方形繞線。這讓我很好奇，這樣的改變會有什麼樣的效果。

二、研究目的

- (一) 探討不同線圈形狀對線圈自感、互感、耦合係數的影響
- (二) 探討緊密重疊的線圈在不同水平偏移量對線圈互感、耦合係數的影響
- (三) 探討不同垂直偏移量對線圈互感、耦合係數的影響
- (四) 探討不同水平和垂直偏移量對耦合係數的影響

三、文獻回顧

(一) 發射線圈產生的磁場

必歐-沙伐定律：
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$
 描述了載流導線在各點所產生的磁場，其中 r 是從載流導線到計算點的位移向量， \mathbf{e}_r 是 r 的單位向量， I 是導線電流， μ_0 是磁導率。

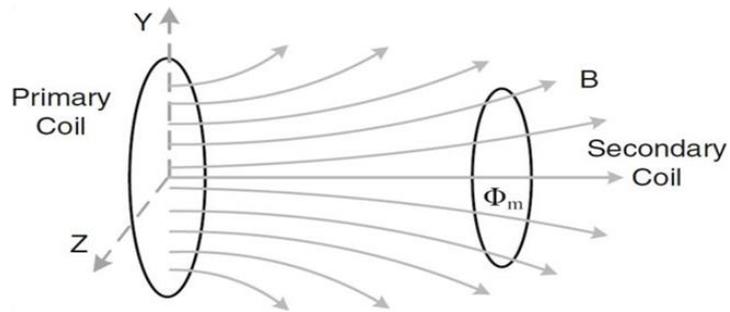
I：導線電流，單位為安培

μ ：磁導率，單位是亨利每米 (H m^{-1})，或牛頓每安培的平方 (N A^{-2})，科學界明確定義 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$

(二) 接收線圈產生的感應電壓

如圖一所示，接收線圈得到的總磁通量 $\Phi_m = \oint_s B dS$ ，其中 B 為發射線圈產生的磁場，dS 為接收線圈的表面積，根據法拉第感應定律，接收線圈中的感應電

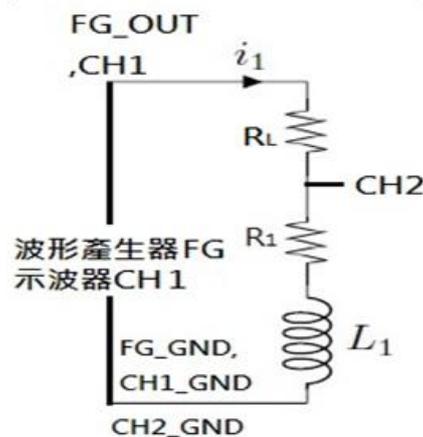
$$\text{壓 } V(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$



圖一：感應式無線充電原理示意圖

(圖一資料來源：Wireless Inductive Charging for Low Power Devices, 2015)

(三) 線圈自感理論公式



圖二：自感量測實驗架構

如圖二，利用示波器的兩個頻道量測兩電壓 CH1 以及 CH2。

假設波形產生器產生的電壓 $u_G = V_1 \sin \omega t$ ，電流 $i_1 = I_1 \sin(\omega t + \theta_1)$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 CH1} &= (R_L + R_1) * I_1 * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \frac{di_1}{dt} \\ &= (R_L + R_1) * I_1 * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \omega * I_1 * \cos(\omega t + \theta_1) \\ &= I_1 * [(R_L + R_1) * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \omega * \cos(\omega t + \theta_1)] \\ &= I_1 * \sqrt{(R_L + R_1)^2 + (\omega L_1)^2} * \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理，CH2} &= R_1 * I_1 * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \frac{di_1}{dt} \\ &= R_1 * I_1 * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \omega * I_1 * \cos(\omega t + \theta_1) \\ &= I_1 * [R_1 * \sin(\omega t + \theta_1) + L_1 * \omega * \cos(\omega t + \theta_1)] \\ &= I_1 * \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} * \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\text{CH1與CH2振幅比值等於 } \frac{I_1 * \sqrt{(R_L + R_1)^2 + (\omega L_1)^2} * \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2)}{I_1 * \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} * \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2)} =$$

$\sqrt{(R_L + R_1)^2 + (\omega L_1)^2} / \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$ 如圖二。其中， R_L 為外接電阻值， R_1 為線圈電阻值， L_1 為線圈自感值， ω 為波形產生器產生的角速度。依照量測到的電壓、電阻值、產生的角速度即可算出線圈自感值。

(四) 線圈互感、耦合係數理論公式

如圖三所示，線圈的互感和耦合係數可以用下列式子算出：

$$1. \quad V_1 = i_1 * R_1 + L_1 * \frac{di_1}{dt} + M * \frac{di_2}{dt}, \text{ 又 } i_2 \text{ 因為示波器電阻極大, } i_2 \text{ 趨近於 } 0。$$

$$\text{故 } V_1 = i_1 * R_1 + L_1 * \frac{di_1}{dt}, \quad V_1 \text{ 振幅} = I_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$$

$$2. \quad V_2 = i_2 * R_2 + L_2 * \frac{di_2}{dt} + M * \frac{di_1}{dt}, \text{ 又 } i_2 \text{ 因為示波器電阻極大, } i_2 \text{ 趨近於 } 0。$$

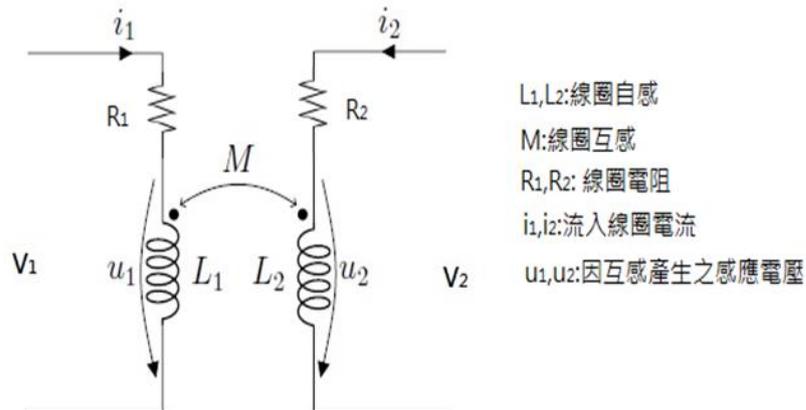
$$\text{故 } V_2 = M * \frac{di_1}{dt}, \quad V_2 \text{ 振幅} = \omega * M * I_1 = \omega * k \sqrt{L_1 * L_2} * I_1$$

$$3. \quad M = k * \sqrt{L_1 * L_2}$$

由上述式子可得以下結論：

$$\frac{V_1 \text{ 振幅}}{V_2 \text{ 振幅}} = \frac{I_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega M * I_1} = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega M} = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega k \sqrt{L_1 * L_2}}$$

其中 L_1 、 L_2 分別為線圈自感， M 為線圈互感， k 為耦合係數(coupling coefficient)，因此只要能量得對應的電壓、電流，便能透過實驗數據對線圈特性進行分析。

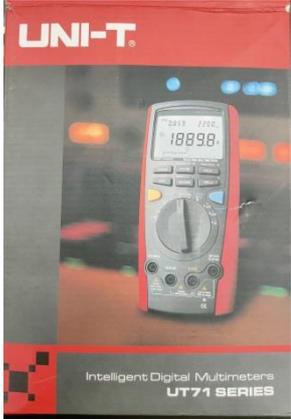
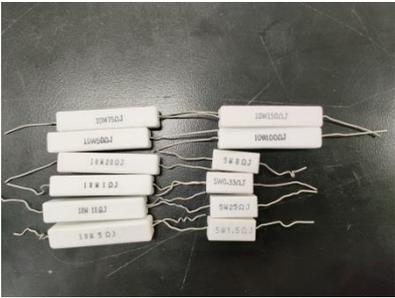


圖三：無線充電線圈數學模型

(圖三資料來源：修改自Wireless Energy Transfer by Resonant Inductive Coupling, 2015)

貳、 研究設備及器材

物品名稱	圖片	說明
自繞螺旋圓形線圈		線圈內徑 L：3.2公分 線圈間距：0.2公分 圈數：18圈 漆包線型號：AWG-29
自繞螺旋方形線圈		線圈內徑 L：3.2公分 線圈間距：0.2公分 圈數：15圈 漆包線型號：AWG-29

<p>波形產生器</p>		<p>型號：HFG-101</p>
<p>示波器</p>		<p>型號：TDS-2012B</p>
<p>三用電表</p>		<p>型號：UT71C</p>
<p>水泥電阻</p>		<p>規格：1、1.5、5、8、10、 20、25、50、75、100、 150 (Ω)</p>

參、 研究過程或方法

一、線圈設計

設計兩對總長相等的螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈如圖一。螺旋圓形線圈內徑 L 為 3.2cm ，圈與圈の間距為 0.2cm ，共 18 圈，代入螺旋總長公式可得總長為 369.2cm 。螺旋方形線圈內徑 L 亦為 3.2cm ，圈與圈の間距亦採 0.2cm ，為使總長與螺旋圓形線圈相同，因此圈數較螺旋圓形線圈少，約 15 圈。



(a) 螺旋圓形線圈

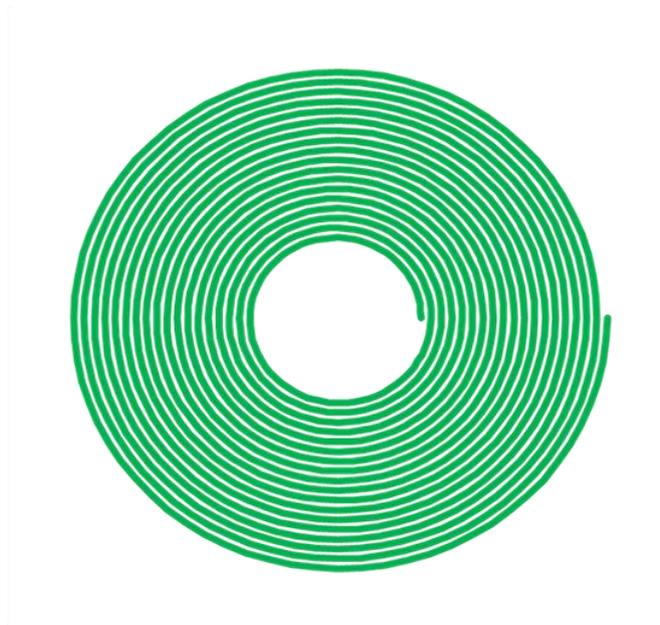


(b) 螺旋方形線圈

圖四：兩對總長相等的螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈

(一) 螺旋圓形線圈設計方式

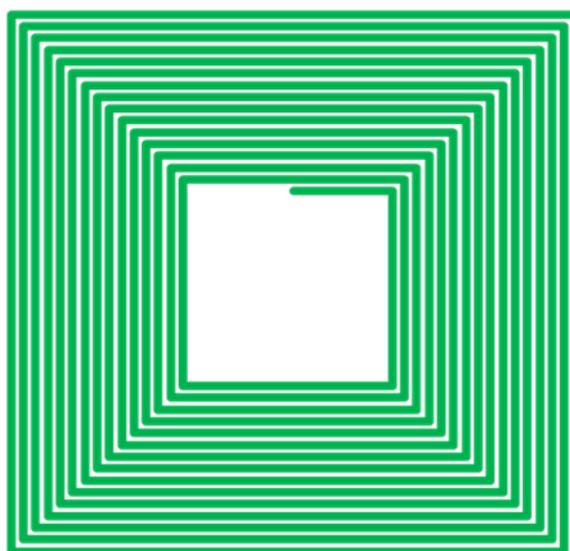
螺旋圓形線圈設計參採阿基米德螺線。阿基米德螺線極坐標方程式為 $r = a + b \cdot \theta$ ，螺線上 x 座標為 $r \cdot \cos\theta$ ， y 座標為 $r \cdot \sin\theta$ 。因 AWG-29 漆包線本身具有應力，數次嘗試後，發現手工繞線下可維持線圈形狀的最小間距約為 0.2 公分，故取 0.2 公分為圈與圈の間距。因螺旋圓形線圈內徑 L 為 3.2cm，圈與圈の間距為 0.2cm，故 a 取 1.6cm， b 取 $\frac{0.2}{2\pi}$ cm。實際作圖時，一圈取 72 點，即每次角度增加 $\frac{2\pi}{72}$ (rad)。利用 Excel 作圖如圖五，並影印於紙張上做圍繞線時的參考依據。



圖五：Excel 螺旋圓形線圈

(二) 螺旋方型線圈設計方式

同螺旋圓形線圈之因素，圈與圈之間距為0.2公分。每一邊長皆較前一邊長多 $\frac{\text{間距}}{2}$ ，如圖六。以 Excel 製作出圖形並影印成紙，於距離線圈中心1.6公分處開始繞線。

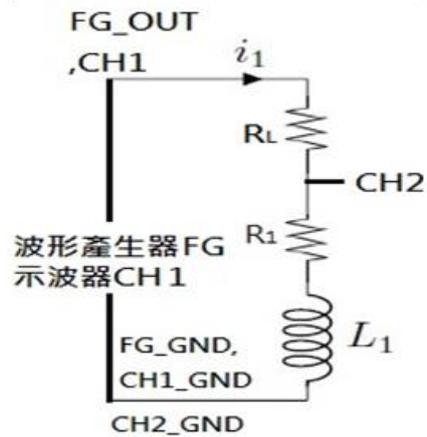


圖六：Excel螺旋方形線圈

二、實驗設計

(一) 實驗一：探討螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈自感的差異

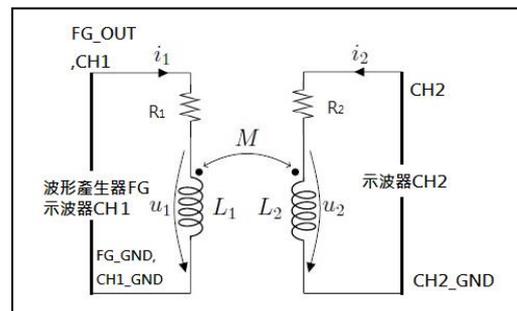
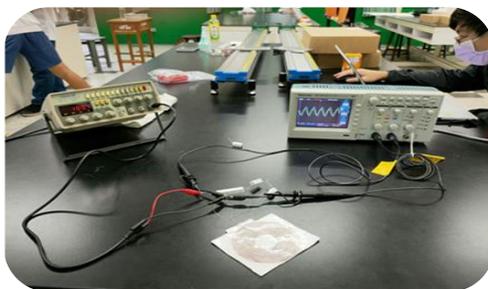
本實驗將線圈與已知阻值電阻串接後接上波形產生器與示波器(如圖七)，因頻率低於100kHz時的感應電壓較低不易量測，波形產生器的頻率上限約為2Mhz，故分別量測100kHz、200kHz、500kHz、1MHz下的波形產生器與線圈兩端電壓作為均值，結果如表一。在表一實驗過程中，串接電阻 R_L 均採固定值 20Ω ，但發現隨著量測頻率的增加，CH1及CH2電壓振幅相近，導致自感值估算產生較大誤差，因此改將串接電阻值隨頻率增加提升以改善準確度。分別量測100kHz、200kHz、500kHz、1MHz下的波形產生器與線圈兩端電壓作為均值，結果如表二、表三。



圖七：自感量測實驗架構

(二) 實驗二：探討完全重疊的螺旋圓形線圈或螺旋方形線圈互感的差異

本實驗將發射線圈接上波形產生器、接收線圈接上示波器(如圖八)。示波器CH1的探針端與地端接至發射線圈的兩端以量測發射線圈電壓，示波器CH2的探針端與地端接至接收線圈的兩端以量測接收線圈電壓。



圖八：無線充電線圈特性量測系統與架構圖

(三) 實驗三：探討螺旋圓形線圈或螺旋方形線圈垂直重疊、中心水平偏移對互感的影響

本實驗將發射線圈接上波形產生器、接收線圈接上示波器(如圖八)，並分別量測在500kHz下，兩線圈垂直重疊、不同水平偏移量下的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓。

(四) 實驗四：探討螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈在線圈中心重疊、有垂直偏移量下對互感的影響

本實驗將發射線圈接上波形產生器、接收線圈接上示波器(如圖八)，並分別量測在500kHz下，中心水平無偏移，有不同垂直偏移量下的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓。

(五) 實驗五：探討螺旋圓形與螺旋方形線圈在有水平和垂直偏移量下對互感的影響

本實驗將發射線圈接上波形產生器、接收線圈接上示波器(如圖八)，並分別量測在500kHz下，有水平和垂直偏移量的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓，垂直偏移量固定為1公分。

肆、 研究結果

一、實驗一：螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈自感量測

本實驗將波形產生器接上發射線圈如圖七，透過前述公式，計算出螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈在多種頻率下測得的自感值如表一、表二、表三。因表一採固定串接電阻導致誤差較大，故採表二、表三為實驗數據並得螺旋圓形線圈平均自感值為23.67 (μH)，螺旋方形線圈平均自感值為16.33 (μH)。兩線圈自感值如圖九。

表一：螺旋圓形線圈自感量測

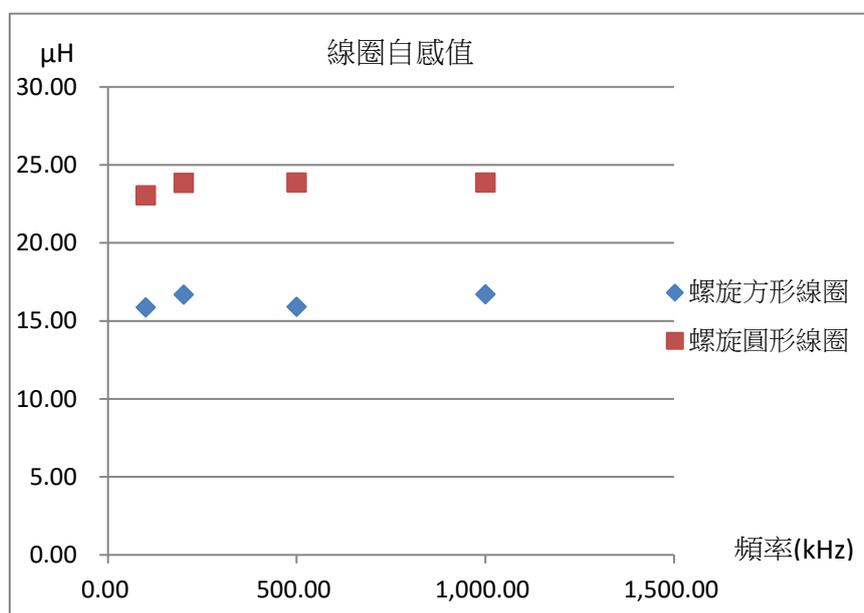
波形產生器頻率 (kHz)	100	200	500	1000
波形產生器電壓振幅 (V)	3.71	4.91	7.74	9.82
串接電阻值(ohm)	20	20	20	20
線圈兩端電壓振幅 (V)	2.20	3.91	7.23	9.32
螺旋圓形線圈自感 (μH)	23.42	20.95	16.66	9.59

表二：螺旋圓形線圈自感量測

波形產生器頻率 (kHz)	100	200	500	1000
波形產生器電壓振幅 (V)	3.23	5.19	7.94	9.33
串接電阻值(ohm)	14.5	30	75	150
線圈兩端電壓振幅 (V)	2.2	4.04	5.08	6.62
螺旋圓形線圈自感 (μH)	23.05	23.87	23.87	23.87

表三：螺旋方形線圈自感量測

波形產生器頻率 (kHz)	100	200	500	1000
波形產生器電壓振幅 (V)	2.5	4.45	6.82	8.88
串接電阻值(ohm)	10	21	50	105
線圈兩端電壓振幅 (V)	1.8	3.28	4.92	6.25
螺旋方形線圈自感 (μH)	15.88	16.70	15.91	16.71



圖九：兩線圈自感值

二、實驗二：螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈互感量測

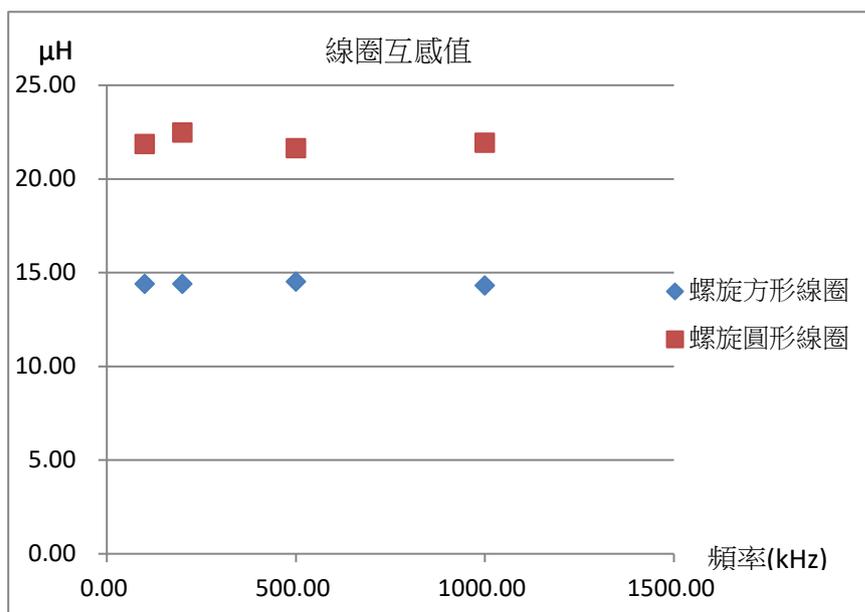
本實驗將波形產生器接上發射線圈、接收線圈接上示波器(如圖八)，分別量測 100kHz~1MHz 下的發射線圈收線圈的輸出電壓，結果如表四、表五。螺旋圓形線圈互感平均值為 21.98 (μH)，耦合係數平均值為 90.70%。螺旋方形線圈平均值為 14.42 (μH)，耦合係數平均值為 88.11%。因為實驗一與實驗二中的發射及接收線圈為一對的同樣幾何形狀線圈，因此其自感值均近似，故 $M=k*L_1$ ， k 為耦合係數(coupling coefficient)，將表四、表五資料運算後即可得各頻率下的耦合係數。透過圖十、圖十一，可以發現當發射與接收線圈緊貼時，螺旋圓形線圈較螺旋方形線圈的耦合係數高約 3%。

表四：螺旋圓形線圈互感量測

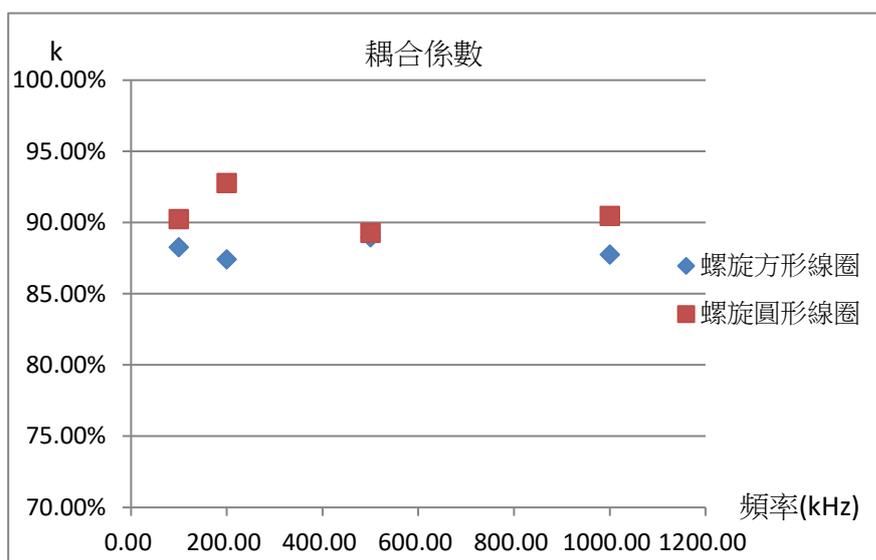
波形產生器頻率 (kHz)	100	200	500	1000
發射線圈輸入電壓振幅 (V)	2.54	4.70	8.40	10.50
接收線圈輸出電壓振幅 (V)	2.29	4.36	7.50	9.50
螺旋圓形線圈互感 (μH)	21.87	22.49	21.64	21.93
螺旋圓形線圈耦合係數(%)	90.25	92.79	89.29	90.48

表五：螺旋方形線圈互感量測

波形產生器頻率 (kHz)	100	200	500	1000
發射線圈輸入電壓振幅 (V)	2.18	3.96	7.25	9.80
接收線圈輸出電壓振幅 (V)	1.92	3.46	6.45	8.60
螺旋方形線圈互感 (μH)	14.42	14.42	14.53	14.33
螺旋方形線圈耦合係數(%)	88.28	87.42	88.97	87.76



圖十：兩線圈無水平偏移下之互感值



圖十一：兩線圈無水平偏移下之耦合係數

三、實驗三：螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈水平偏移量下互感量測

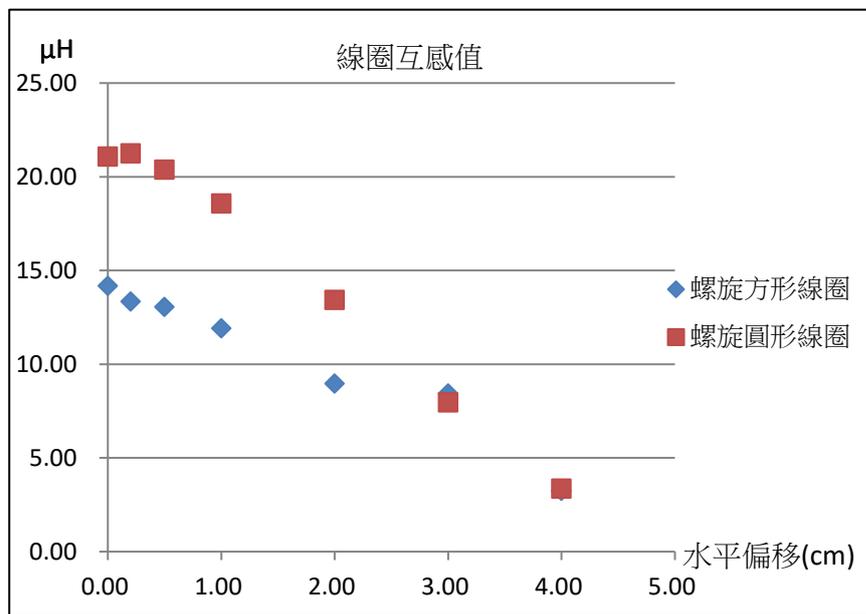
本實驗將波形產生器接上發射線圈、接收線圈接上示波器(如圖八)，分別量測在 500kHz 下，不同水平偏移量下的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓，結果如表六、表七。可從圖十二、圖十三明顯看出隨著水平偏移量增加，螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈的接收線圈輸出電壓振幅都隨著下降。

表六：不同水平偏移量下螺旋圓形線圈互感量測

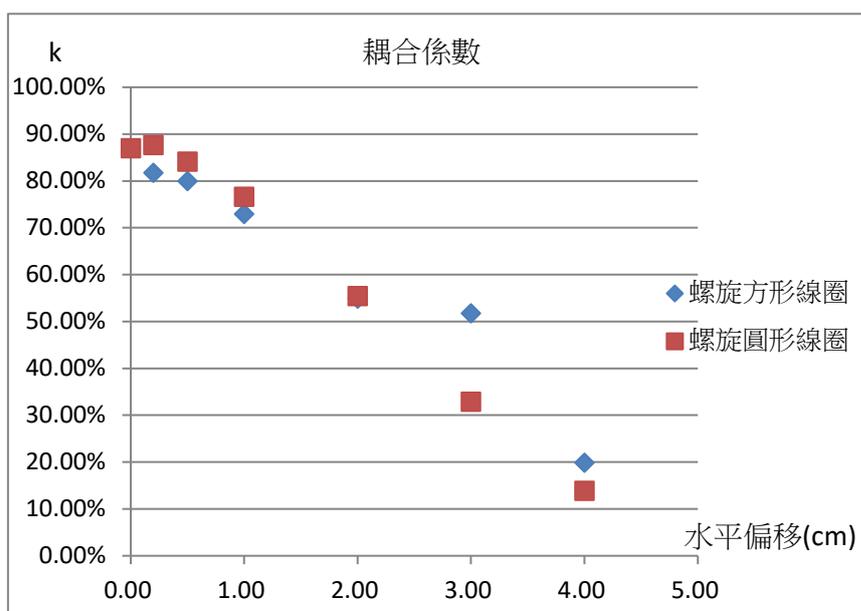
水平偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.50	1.00	2.00	3.00	4.00
發射線圈輸入電壓振幅(V)	8.32	8.68	8.68	8.65	8.60	8.03	8.00
接收線圈輸出電壓振幅(V)	7.24	7.61	7.30	6.63	4.77	2.64	1.11
螺旋圓形線圈互感 (μH)	21.09	21.25	20.38	18.58	13.44	7.97	3.36
螺旋圓形線圈耦合係數(%)	87.02	87.68	84.10	76.65	55.47	32.88	13.88

表七：不同水平偏移量下螺旋方形線圈互感量測

水平偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.50	1.00	2.00	3.00	4.00
發射線圈輸入電壓振幅 (V)	7.63	7.73	7.69	7.77	7.76	7.76	7.81
接收線圈輸出電壓振幅 (V)	6.63	6.32	6.15	5.67	4.26	4.015	1.55
螺旋方形線圈互感 (μH)	14.19	13.35	13.06	11.92	8.97	8.45	3.24
螺旋方形線圈耦合係數(%)	86.90	81.77	79.98	72.98	54.90	51.74	19.85



圖十二：不同水平偏移下，兩線圈之互感值



圖十三：不同水平偏移下，兩線圈之耦合係數

四、實驗四：螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈垂直偏移量下互感量測

本實驗將波形產生器接上發射線圈、接收線圈接上示波器(如圖八)，分別量測在500kHz下，不同垂直偏移量下的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓，結果如表八、表九。將表八、表九的數據以Excel圖表呈現如圖十四、圖十五。可以發現螺旋圓形線圈及螺旋方形線圈，其互感及耦合係數在垂直偏移量增加初期下降速度較快，隨著垂直偏移量增加，下降速度逐漸減緩。

表八：不同垂直偏移量下螺旋圓形線圈互感量測

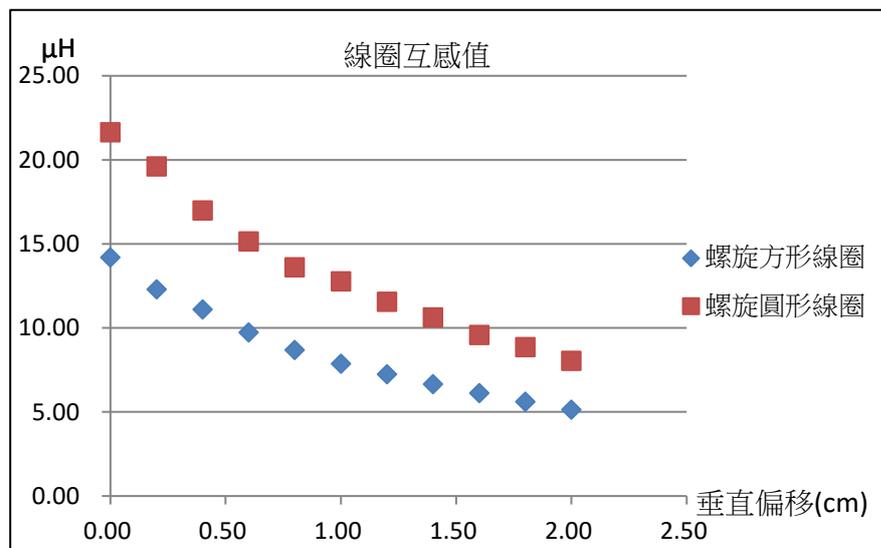
垂直偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
發射線圈輸入電壓振幅(V)	8.40	8.40	8.20	8.40	8.40	8.20
接收線圈輸出電壓振幅(V)	7.50	6.80	5.75	5.25	4.72	4.32
螺旋圓形線圈互感 (μH)	21.64	19.62	17.0	15.15	13.62	12.77
螺旋圓形線圈耦合係數(%)	89.29	80.96	70.12	62.50	56.19	52.69

垂直偏移量 (cm)	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	
發射線圈輸入電壓振幅(V)	8.30	8.30	8.30	8.20	8.20	
接收線圈輸出電壓振幅(V)	3.96	3.64	3.28	3.00	2.72	
螺旋圓形線圈互感 (μH)	11.56	10.63	9.58	8.87	8.04	
螺旋圓形線圈耦合係數(%)	47.71	43.86	39.52	36.59	33.17	

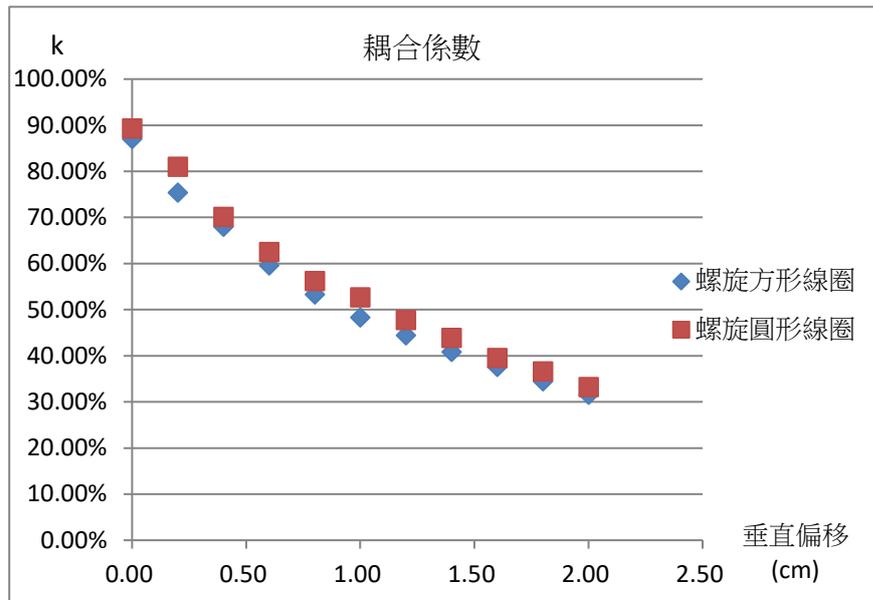
表九：不同垂直偏移量下螺旋方形線圈互感量測

垂直偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
發射線圈輸入電壓振幅(V)	7.25	7.30	7.30	7.25	7.25	7.25
接收線圈輸出電壓振幅(V)	6.45	5.50	4.96	4.32	3.86	3.50
螺旋方形線圈互感 (μH)	14.53	12.30	11.10	9.73	8.70	7.88
螺旋方形線圈耦合係數(%)	88.97	75.35	67.95	59.59	53.25	48.28

垂直偏移量 (cm)	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	
發射線圈輸入電壓振幅(V)	7.25	7.25	7.35	7.20	7.30	
接收線圈輸出電壓振幅(V)	3.22	2.96	2.76	2.48	2.30	
螺旋方形線圈互感 (μH)	7.25	6.67	6.13	5.62	5.15	
螺旋方形線圈耦合係數(%)	44.42	40.83	37.55	34.45	31.51	



圖十四：不同垂直偏移下，兩線圈之互感值



圖十五：不同垂直偏移下，兩線圈之耦合係數

五、實驗五：螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈在有水平和垂直偏移量下對互感的影響

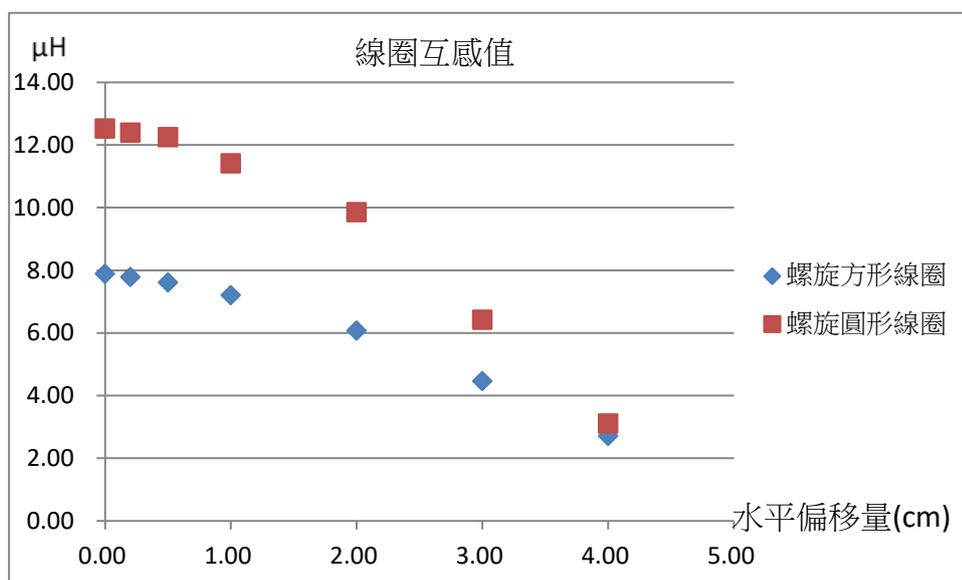
本實驗將波形產生器接上發射線圈、接收線圈接上示波器(如圖八)，分別量測在 500kHz 下，有水平和垂直偏移量下的發射線圈輸入電壓與接收線圈的輸出電壓，垂直偏移量固定為1公分，結果如表十，表十一。將表十、表十一的數據以 Excel 圖表呈現如圖十六、圖十七。由圖十六、圖十七可發現，螺旋圓形線圈之互感值和耦合係數下降趨勢皆較螺旋方形線圈明顯。比較實驗三和實驗五，可以發現，在有固定垂直偏移量之情況下，水平偏移量對兩線圈的互感值和耦合係數下降量影響較小。

表十：有水平和垂直偏移量下螺旋圓形線圈互感量測

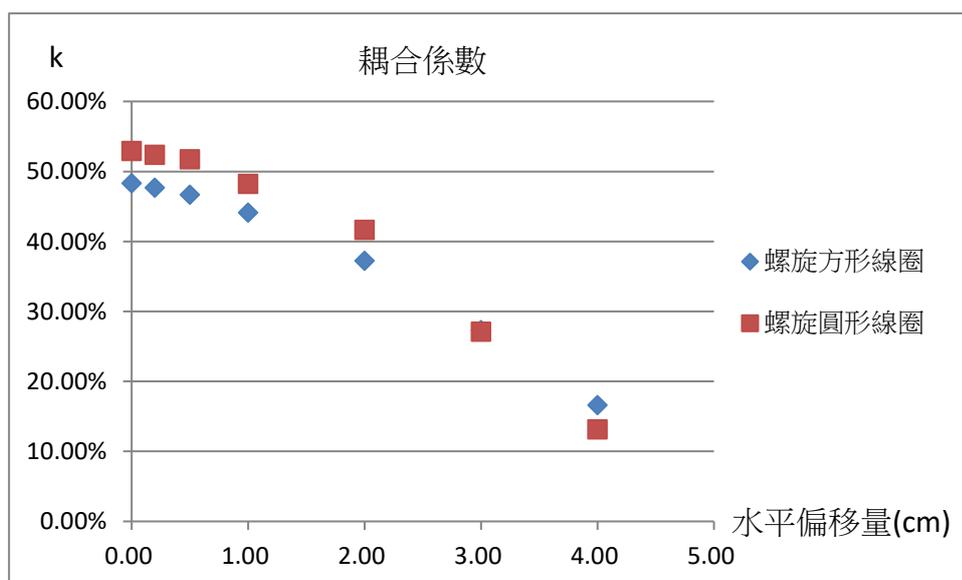
垂直偏移量 (cm)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
水平偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.50	1.00	2.00	3.00	4.00
發射線圈輸入電壓振幅 (V)	8.50	8.40	8.50	8.50	8.40	8.40	8.50
接收線圈輸出電壓振幅 (V)	4.50	4.40	4.40	4.10	3.50	2.28	1.12
螺旋圓形線圈互感 (μH)	12.53	12.40	12.25	11.41	9.86	6.42	3.12
螺旋圓形線圈耦合係數(%)	52.94	52.38	51.77	48.24	41.67	27.14	13.18

表十一：有水平和垂直偏移量下螺旋方形線圈互感量測

垂直偏移量 (cm)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
水平偏移量 (cm)	0.00	0.20	0.50	1.00	2.00	3.00	4.00
發射線圈輸入電壓振幅 (V)	7.70	7.80	7.80	7.70	7.60	7.60	7.70
接收線圈輸出電壓振幅 (V)	3.72	3.72	3.64	3.40	2.83	2.08	1.28
螺旋方形線圈互感 (μH)	7.89	7.79	7.62	7.21	6.08	4.47	2.71
螺旋方形線圈耦合係數(%)	48.32	47.70	46.67	44.16	37.24	27.37	16.62



圖十六：固定垂直偏移、改變水平偏移量下，兩線圈之互感值



圖十七：固定垂直偏移、改變水平偏移量下，兩線圈之耦合係數

伍、 討論

一、螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈自感量測

(一) 實驗一為估測線圈自感值。當串接電阻採用固定值時，發現隨著量測頻率增加，

估測值也差異愈來愈大。因為自感值是用CH1與CH2振幅比值等於 =

$$\frac{\sqrt{(R_L + R_1)^2 + (\omega L_1)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

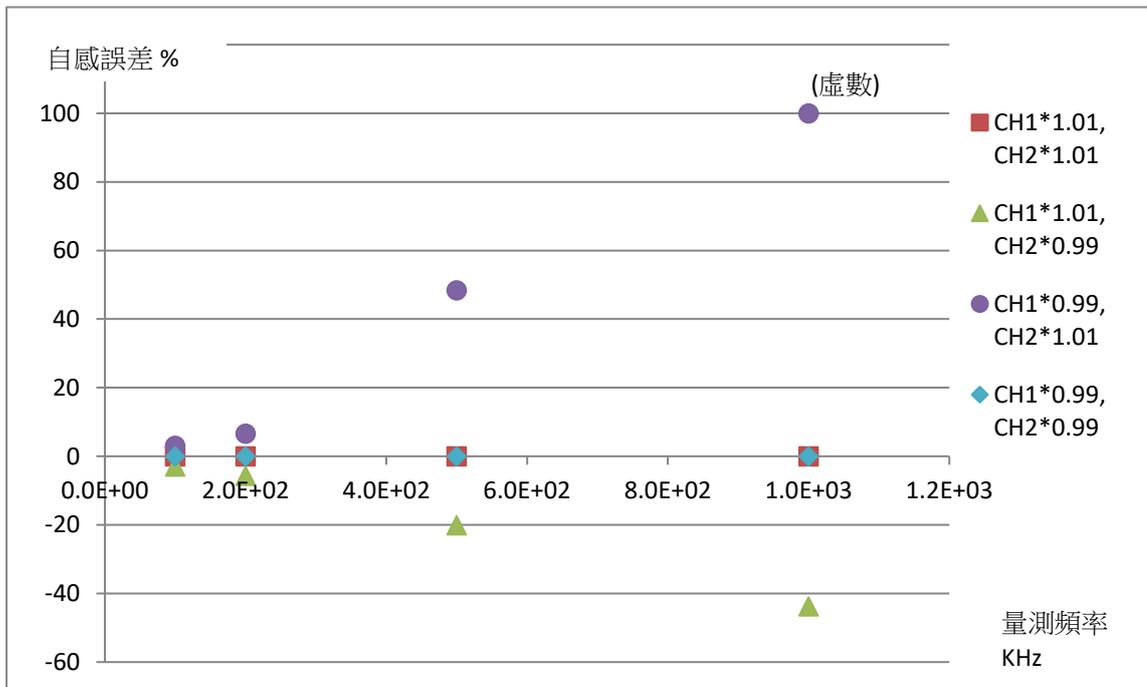
計算得到，因此當CH1與CH2振幅比值隨

著頻率增加而逐漸接近時，因量測誤差便會造成估測誤差也愈來愈大。將實驗

數據 R_L 、 R_1 及理論上應量到的電壓值分別加減1%後帶入計算式，可得到圖十八

的自感誤差比例，趨勢與實驗現象一致。因此將串接電阻隨著頻率增加而增加

阻值，便可增加量測的準確度。



圖十八：CH1、CH2在不同量測誤差組合下造成之自感誤差

(二) 實驗一可以清楚發現螺旋圓形線圈的自感值明顯比螺旋方形線圈自感值大很多，

比值約為1.45。為了解造成此現象原因，進一步分析單一圓形線圈與方形線圈的

自感。單一圓形線圈的自感為 $\mu_0 a [\ln(\frac{8a}{R}) - 1.75]$ ，單一方形線圈的自感為

$$\frac{\mu_0}{\pi} [2x \ln(\frac{2x}{R}) + 2\sqrt{2}x - 2x \sinh^{-1} - 3.5x]$$

(Inductance calculation Techniques,1999)，其中R為導線線徑半徑，a為圓形線圈半徑，x為方形線圈邊長。將實驗的螺旋圓

形線圈最內側半徑與線徑代入，在等周長的情況下，單一圓形線圈與方形線圈的自感比值約為1.086，可見形狀並非造成實驗線圈的自感比值達1.45的主要原因。螺旋圓形線圈是由18個螺旋組成，若將它視為18個同心圓時，其整體自感可視為第1個到第18個同心圓的自感總和，再加上18個同心圓中第 $n(n=1\sim 18)$ 圈對第 $m(m=1\sim 18$ 但 $n \neq m)$ 圈的互感總和(Geometric Approach for Coupling Enhancement of Magnetically Coupled Coils, 1996)，同理，螺旋方形線圈是由15個螺旋組成，若將它視為15個方形時，其整體自感可視為15個方形的自感總和，再加上15個方形中第 $n(n=1\sim 15)$ 圈對第 $m(m=1\sim 15$ 但 $n \neq m)$ 圈的互感總和。近似長度的圓形與方形自感與互感差異不大，但因圈數差異的結果就造成整體自感的明顯差異。因為設計線圈時希望總長度與間距一致，因此造成圈數差異，導致螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈自感值差異較大。

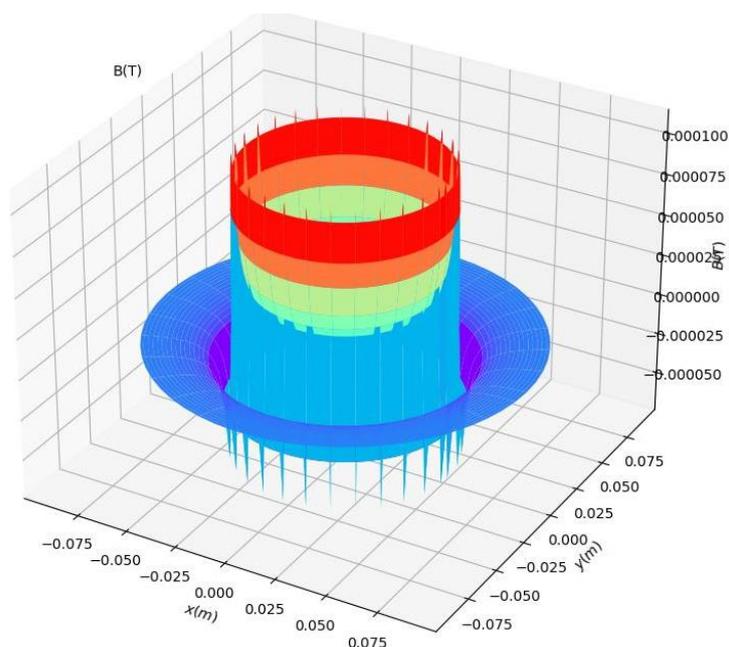
二、螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈互感量測

實驗二為線圈在不同頻率下的互感值量測，CH1與CH2振幅比值等於 $\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} / \omega M$ ，將表四、表五資料換算成各頻率下的互感值，可以清楚發現與實驗一相同，螺旋圓形線圈的互感值明顯比螺旋方形線圈互感值大很多。其原因與上述原因相同，螺旋圓形線圈互感可視為發射線圈第 $n(n=1\sim 18)$ 圈對接收線圈第 $m(m=1\sim 18)$ 圈的互感總和，螺旋方形線圈可視為發射線圈第 $n(n=1\sim 15)$ 圈對接收線圈第 $m(m=1\sim 15)$ 圈的互感總和。因為圈數差異，導致螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈互感值差異。

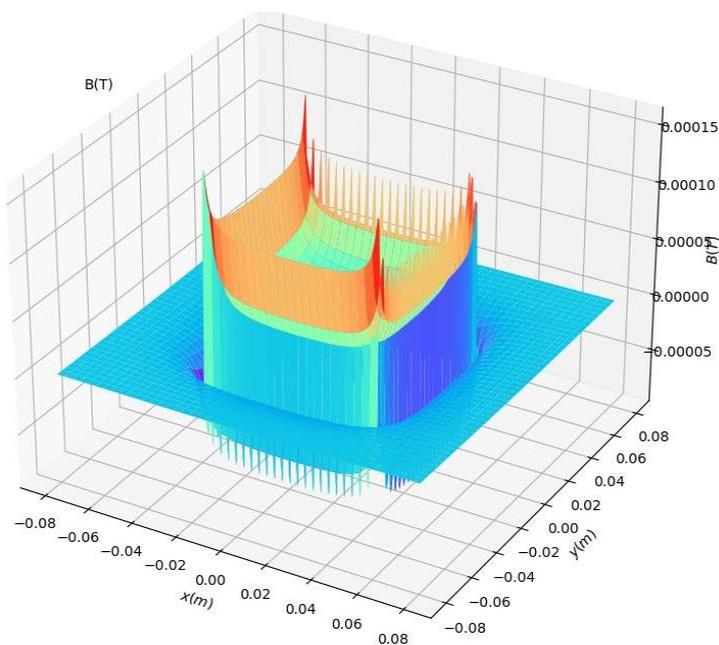
三、螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈水平偏移量下互感量測

實驗三為改變充電線圈水平偏移後在不同頻率下的互感值量測，與實驗二相同，將表六、表七資料換算成各頻率下的互感值與耦合係數，如圖十二、圖十三。透過圖十二，可以發現隨著發射與接收線圈偏移量增加，螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈的互感值均下降；透過圖十三，可以發現螺旋圓形線圈耦合係數下降速度較螺旋方形線圈快。模擬單一線圈磁場。如圖十九，計算距離發射線圈圓心於特定距離時，所獲得的Z軸磁場。由圖中可知，磁場最強的地方為靠近線圈處。如圖二十，設方形線圈中心點為原點，並建立X、Y軸，X、Y軸平行方形線圈。模擬當Y值固定時，

距離原點各距離時的磁場。發現當接近線圈、距離約3.8公分時，磁場最強。而當螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈在水平方向偏移同樣距離時，螺旋圓形線圈會接收較少來自線圈的磁場，且水平偏移越大，螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈接收來自線圈的磁場差會越來越大，因此造成螺旋圓形線圈耦合係數下降趨勢較明顯。



圖十九：圓形線圈磁場(線圈半徑5cm)



圖二十：方形線圈磁場(邊長 $\frac{5}{2}\pi$ cm)

四、螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈垂直偏移量下互感量測

實驗四為改變充電線圈垂直偏移後在不同頻率下的互感值量測，與實驗二相同，將表八、表九資料換算成各頻率下的互感值與耦合係數，如圖十四、圖十五。透過圖十四、圖十五，可以發現螺旋圓形線圈及螺旋方形線圈，其互感及耦合係數在垂直偏移量增加初期下降速度較快，隨著垂直偏移量增加，下降速度逐漸減緩。這現象可由必歐-沙伐定律解釋。接收線圈的總磁通量為接收線圈截面每一點的磁通量總合，而每一點的磁通量又由該點的磁場決定。當接收線圈垂直偏移改變時，每一點對應的必歐-沙伐定律中的 Z 軸分子項 $Idl \times e_r$ 均維持改變前數值(說明如下)，但其分母項則由 $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$ 變為 $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + (r_z + \Delta z)^2$ ，因此 r_z 愈小，磁場變化量比例便愈大，與實驗結果一致。

說明 Z 軸分子項 $Idl \times e_r$ 均維持改變前數值(以螺旋圓形線圈為例)：

假設發射線圈上一點 $(x_0, y_0, 0) = (r_0 \cdot \cos\theta, r_0 \cdot \sin\theta, 0)$ ， r_0 為圓形線圈半徑

向量 $dl = (\cos(90+\theta), \sin(90+\theta), 0) * \Delta l = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) * \Delta l$

則依據必歐-沙伐定律，點 (x_1, y_1, z_1) 收到來自 $(x_0, y_0, 0)$ 的磁場如下：

$r = (x_1 - r_0 \cdot \cos\theta, y_1 - r_0 \cdot \sin\theta, z_1)$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} * Idl \times e_r / r^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} * Idl \times (x_1 - r_0 \cdot \cos\theta, y_1 - r_0 \cdot \sin\theta, z_1) / r^3$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} * I * \Delta l * (z_1 \cdot \cos\theta, z_1 \cdot \sin\theta, r - y_1 \sin\theta - x_1 \cos\theta) / r^3$$

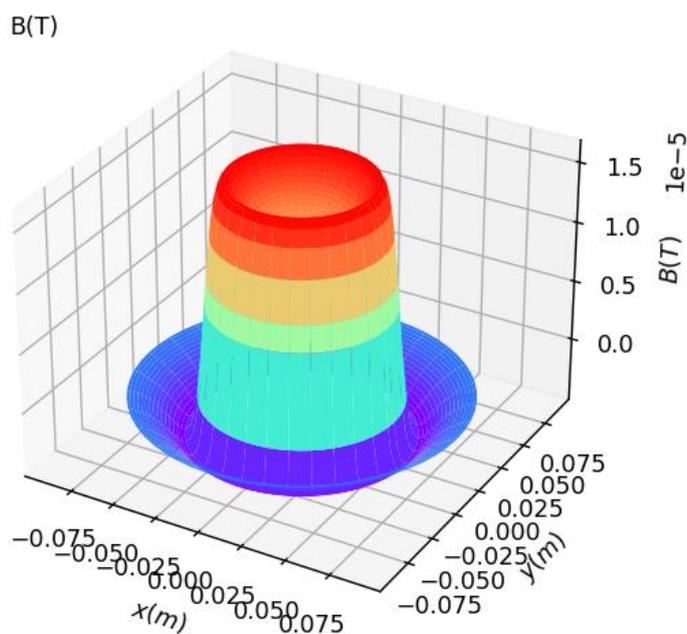
由上述算式可知：無論垂直方向偏移量為多少，Z 軸分子項皆為定值。

五、螺旋圓形線圈與螺旋方形線圈在有水平和垂直偏移量下對互感的影響

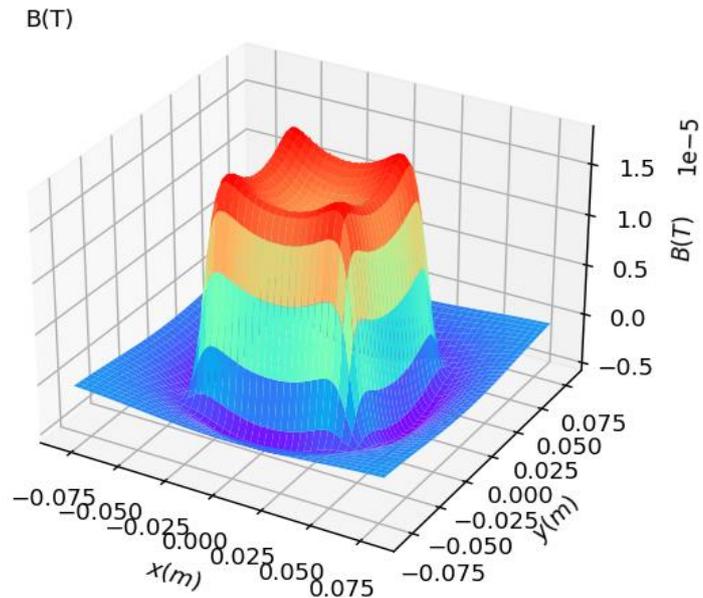
實驗五為改變充電線圈在水平、垂直偏移後在不同頻率下的互感值量測，與實驗二相同，將表十、表十一資料換算成各頻率下的互感值與耦合係數，如圖十六、圖十七。

利用 Python 3D Plot 程式模擬單一線圈在水平、垂直偏移下的磁場，如圖二十一、圖二十二。同實驗三，在水平偏移距離同樣的情況下，螺旋圓形線圈會因為接收到較少的磁場，耦合係數下降趨勢因此較螺旋方形線圈明顯。和實驗三比較，相同水

平偏移的情況下，有垂直偏移的線圈互感值和耦合係數下降趨勢皆較不明顯。因為根據必歐-沙伐定律，分母項為 $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$ ，當 $r_z = 0$ 時，分母項只受到 r_x 影響，分母 r 變化較大，故相同水平偏移量下，無垂直偏移的接收線圈耦合係數下降趨勢較明顯。由此可得知，當垂直偏移量越大，接收線圈感應電壓較小，但兩線圈之耦合係數下降趨勢較不明顯，與模擬結果一致。且比較圖十九、圖二十一後可發現，當兩線圈緊密貼合時，最大磁場的數據點極接近 r_0 ；當線圈垂直距離為一公分時，最大磁場的數據點內縮至約為 $0.8 * r_0$ 處。且當垂直偏移量較大時，最大磁場和最小磁場的差較小。由此也得一結論；有垂直偏移量時，水平偏移量對磁場變化量較小，耦合係數下降趨勢也會因此較小。



• 圖二十一：圓形線圈上方一公分之磁場



圖二十二：方形線圈上方一公分之磁場

陸、 結論

- 一、螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈在總長、線圈間距相同的情況下，螺旋圓形線圈自感值較高，但形狀差異並非主要因素。若將兩線圈皆視為多個單一線圈組成的同心圓，因螺旋圓形線圈圈數多於螺旋方形線圈，所以互感值總和較大，導致螺旋圓形線圈自感值大於螺旋方形線圈自感值。
- 二、由於螺旋圓形線圈圈數較多，導致線圈互感加總大於螺旋方形線圈互感加總，所以螺旋圓形線圈互感值大於螺旋方形線圈互感值。
- 三、螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈在沒有偏移的情況下，螺旋圓形線圈耦合係數高於螺旋方形線圈耦合係數。但當螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈開始偏移後，在水平偏移距離同樣的情況下，螺旋圓形線圈會因為接收到較少的磁場，耦合係數下降趨勢因此較螺旋方形線圈明顯。
- 四、螺旋圓形線圈和螺旋方形線圈在中心沒有偏移但垂直方向偏移時，兩者的互感及耦合係數均下降，但垂直偏移量小時變動比例較大，垂直偏移量大時變動比例較小。
- 五、當垂直偏移量越大，兩線圈之耦合係數下降趨勢較不明顯，且最大磁場發生處會逐漸遠離線圈上方，往線圈內部靠近。

柒、 未來展望

- 一、在初期做實驗的過程裡，曾經發現前後周實驗數據有明顯差異的現象。後來才發現是受到周邊物品、設備的影響。讓我想起在搜尋線圈的相關資料時，曾看到有文獻談到鐵磁材料(Ferrite)對磁場的影響，這部分值得未來進行探討。
- 二、為了維持兩種線圈總長相等以及圈與圈的間距相等，導致兩種線圈圈數不同，如果其中一種線圈採用變動間距設計，便可能達成兩種線圈總長相等及圈數相等，對線圈特性的影響亦值得進一步探討。

捌、 參考文獻資料

- 一、Wireless Inductive Charging for Low Power Devices, 2015
- 二、Wireless Energy Transfer by Resonant Inductive Coupling, 2015
- 三、Inductance calculation Techniques,1999
- 四、Geometric Approach for Coupling Enhancement of Magnetically Coupled Coils, 1996

【評語】 051814

所測線圈為圓形和方形，其各相關物理量值皆可依理論計算出來，但作者只做了實驗卻無進行量化的理論探討或計算，也就是說，其實驗結果不用做也可以用理論算出來，但作者似乎不知道也因此沒算、沒做比較驗證，即便是有驗證也是沒有科學深度，因為實在是很基本的大一物理內容和考題。

作品簡報

無線充電線圈形狀對線圈特性之探討

組別：高級中等學校組

科別：物理與天文學科

前言

探索動機：

日本藍芽耳機產品2018、2019線圈形狀相異

2018：螺旋圓形線圈

2019：螺旋方形線圈

探討核心：

線圈形狀對特性造成甚麼影響？

探討項目：

- 線圈形狀對線圈自感、互感、耦合係數的影響
- 緊密重疊的線圈在不同水平偏移量，對線圈互感、耦合係數的影響
- 不同垂直偏移量對線圈互感、耦合係數的影響
- 不同水平和垂直偏移量對耦合係數的影響

研究方法-文獻蒐集、推導

1. 發射線圈產生的磁場

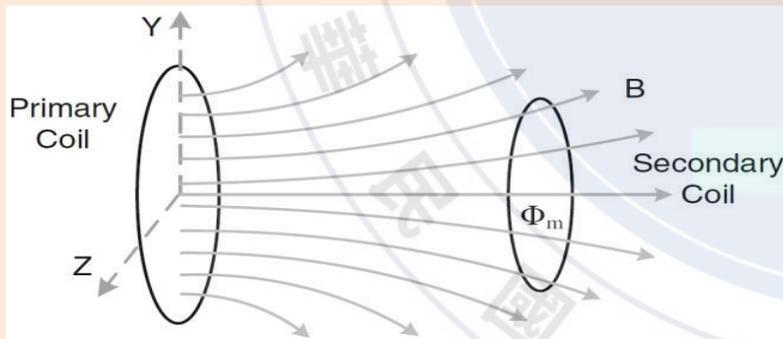
必歐-沙伐定律：
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

描述載流導線在各點所產生的磁場

2. 接收線圈的感應電壓

接收線圈得到的總磁通量 $=\Phi_m = \oint_s B dS$

接收線圈的感應電壓 $V(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt}$



感應式無線充電原理示意圖

3. 線圈自感推導

設波形產生器電壓 $u_G = V_1 * \sin \omega t$

電流 $i_1 = I_1 * \sin(\omega t + \theta_1)$

CH1/CH2

$$= \sqrt{(R_L + R_1)^2 + (\omega L_1)^2} / \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$$

依電壓、電阻值、角速度可算出線圈自感值。

4. 線圈互感、耦合係數理論

$$M = k * \sqrt{L_1 * L_2}$$

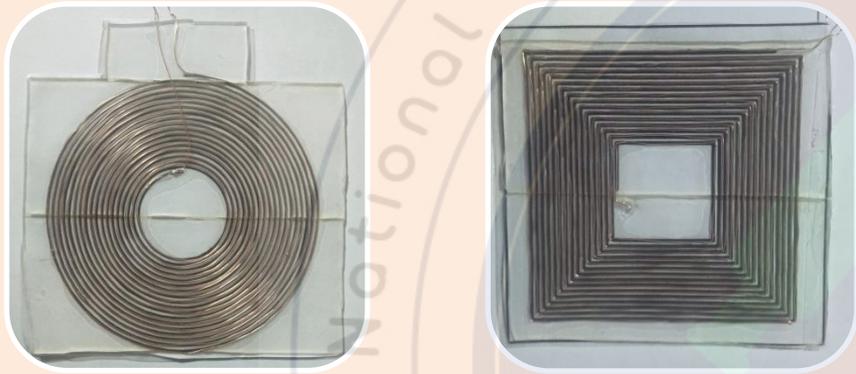
$$\frac{V_1 \text{ 振幅}}{V_2 \text{ 振幅}} = \frac{I_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega M * I_1} = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega M} = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\omega * k \sqrt{L_1 * L_2}}$$

量到電壓，將其他已知參數值代入

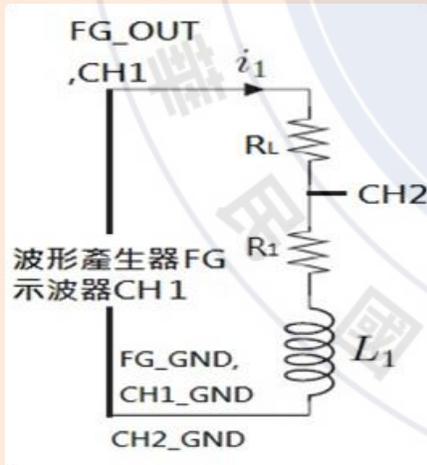
算出互感值和耦合係數

研究方法-設計線圈、實驗

設計線圈



實驗一：設計自感量測實驗



自感量測實驗架構

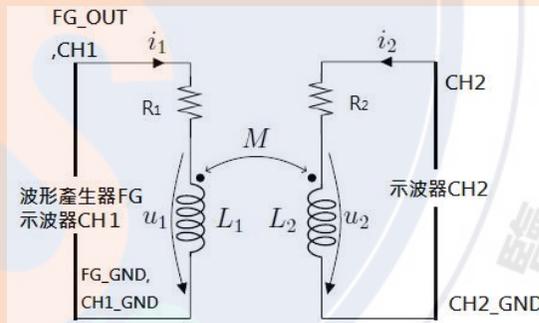
實驗二至五：

CH1：發射線圈電壓、CH2：接收線圈電壓

以水平偏移量為變因進行實驗

以垂直偏移量為變因進行實驗

測量互感、耦合係數



量測系統架構圖

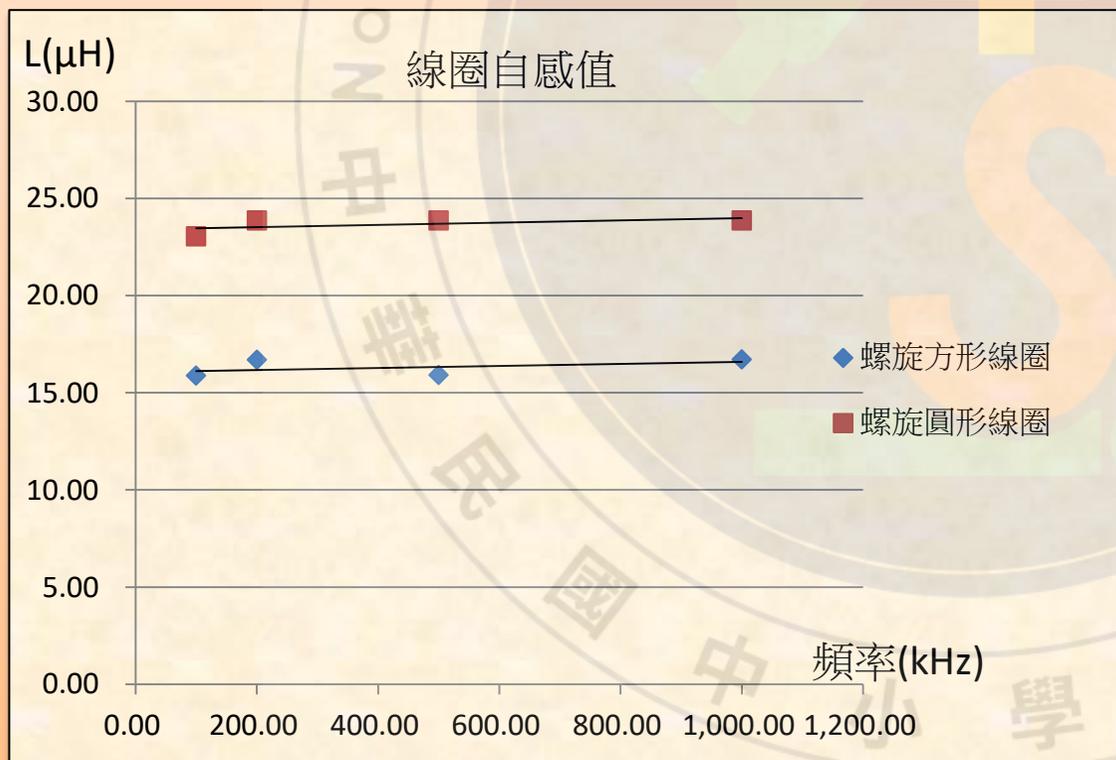


實驗實際照片

研究結果

實驗一、線圈自感量測

- 螺旋圓形線圈平均自感值為23.67 (μH)
- 螺旋方形線圈平均自感值為16.33 (μH)
- 螺旋圓形線圈自感值約為螺旋方形線圈自感值1.45倍



解釋：

分析一：

單一圓形線圈自感：

$$\mu_0 a \left[\ln\left(\frac{8a}{R}\right) - 1.75 \right]$$

單一方形線圈：

$$\frac{\mu_0}{\pi} \left[2x \ln\left(\frac{2x}{R}\right) + 2\sqrt{2}x - 2x \sinh^{-1} - 3.5x \right]$$

等周長情況下代入參數，比值為1.086

形狀非自感差異主因

分析二：

視線圈為同心圓

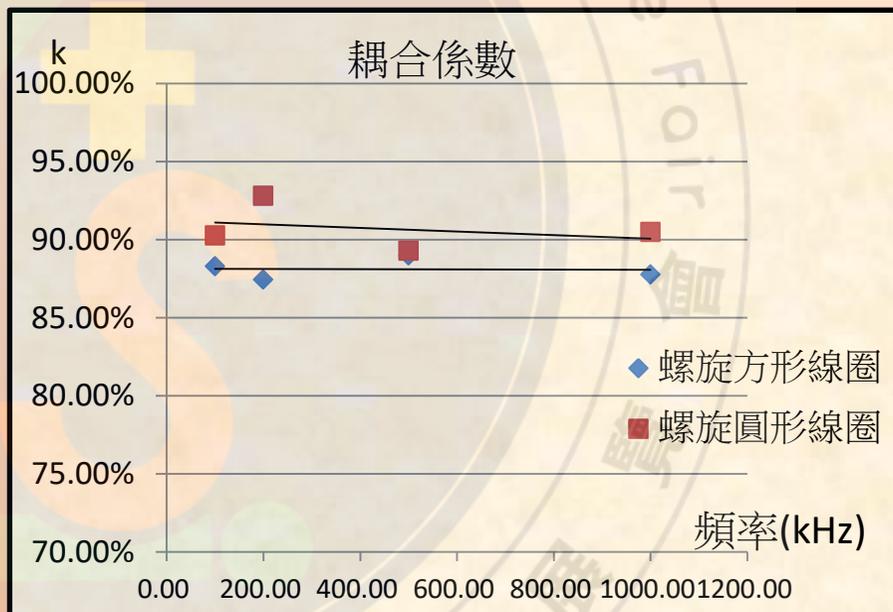
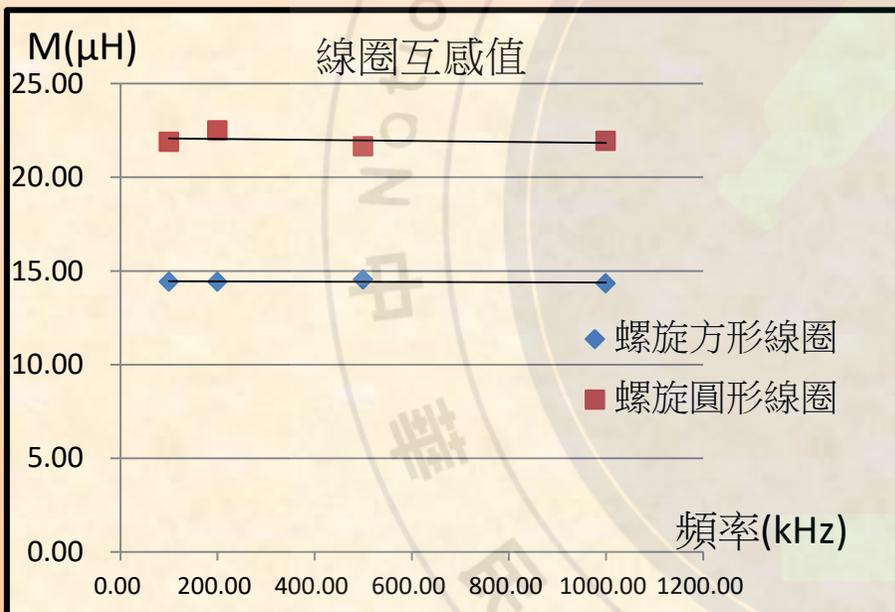
自感=同心圓自感&同心圓互感總和。

線圈數差異導致自感差異

研究結果

實驗二、線圈互感量測

- 螺旋圓形線圈互感平均值為 21.98 (μH)，耦合係數平均值為 90.70%
- 螺旋方形線圈互感平均值為 14.42 (μH)，耦合係數平均值為 88.11%



解釋：同實驗一，**形狀非互感差異主因**

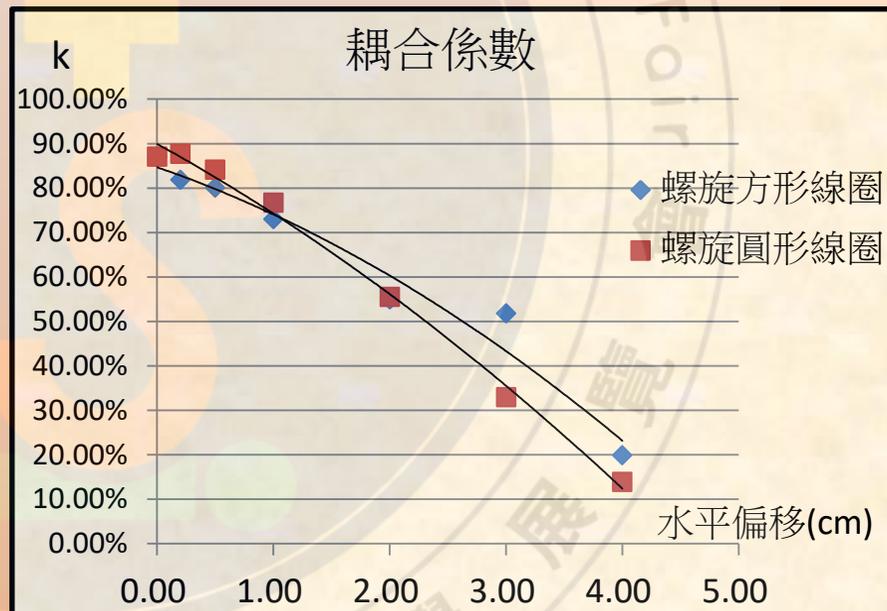
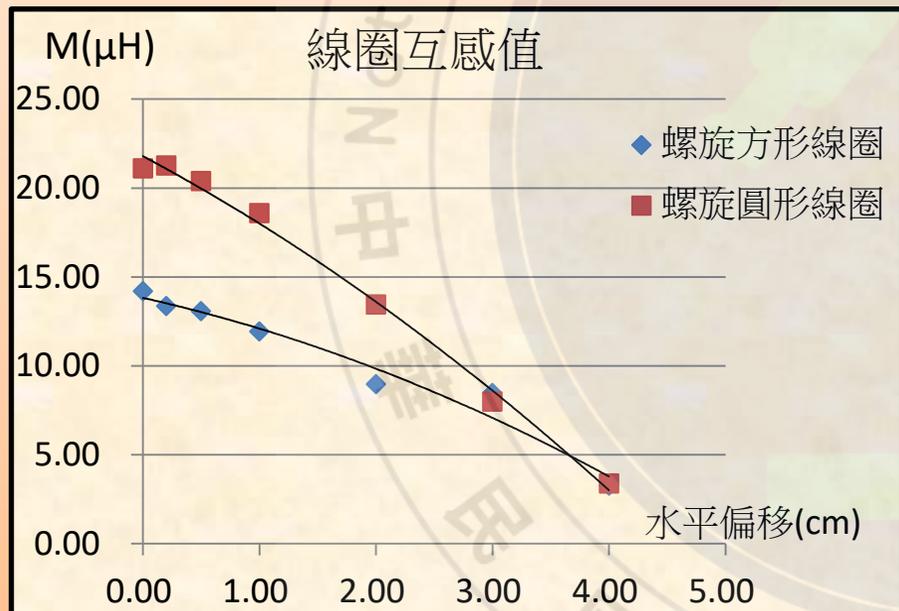
視線圈為同心圓時，自感=同心圓自感&同心圓互感總和

線圈數差異導致互感差異

研究結果

實驗三、不同水平偏移量下互感量測

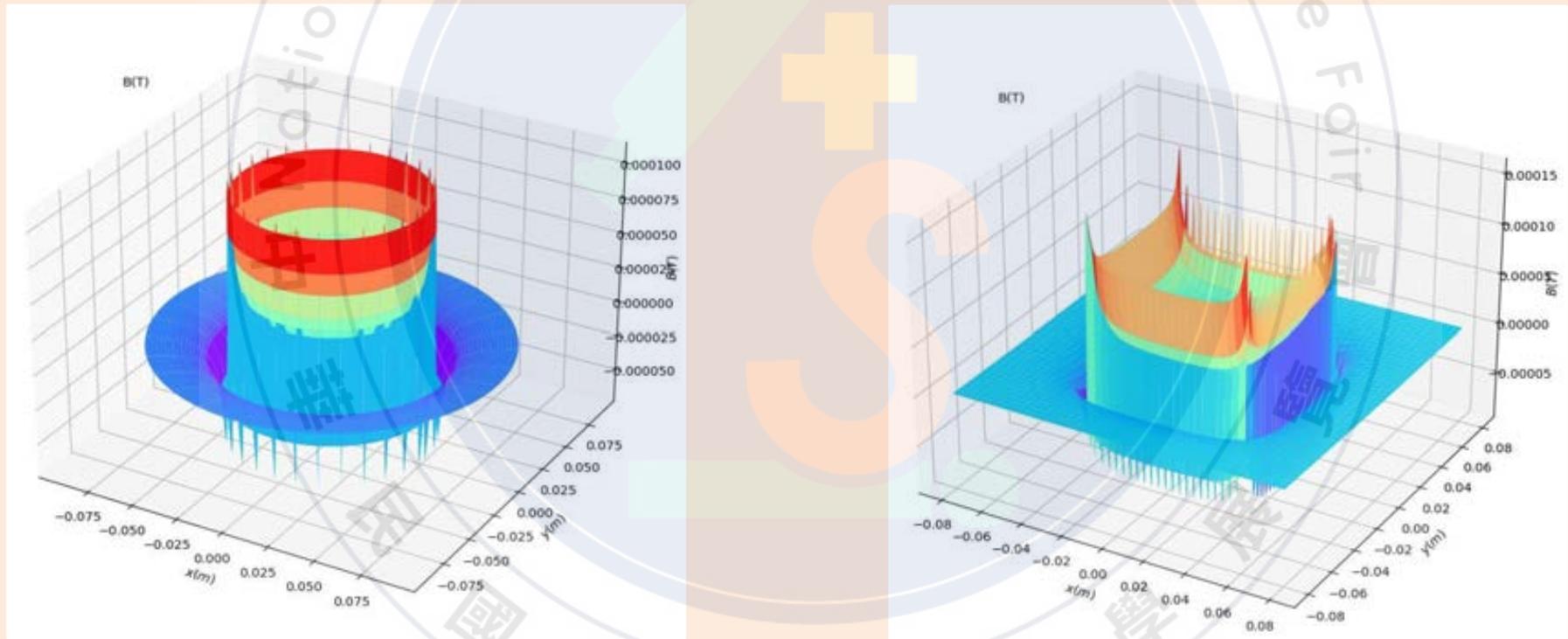
- 水平偏移量增加，螺旋圓形線圈互感值和耦合係數下降趨勢比螺旋方形線圈明顯



結果解釋

解釋：

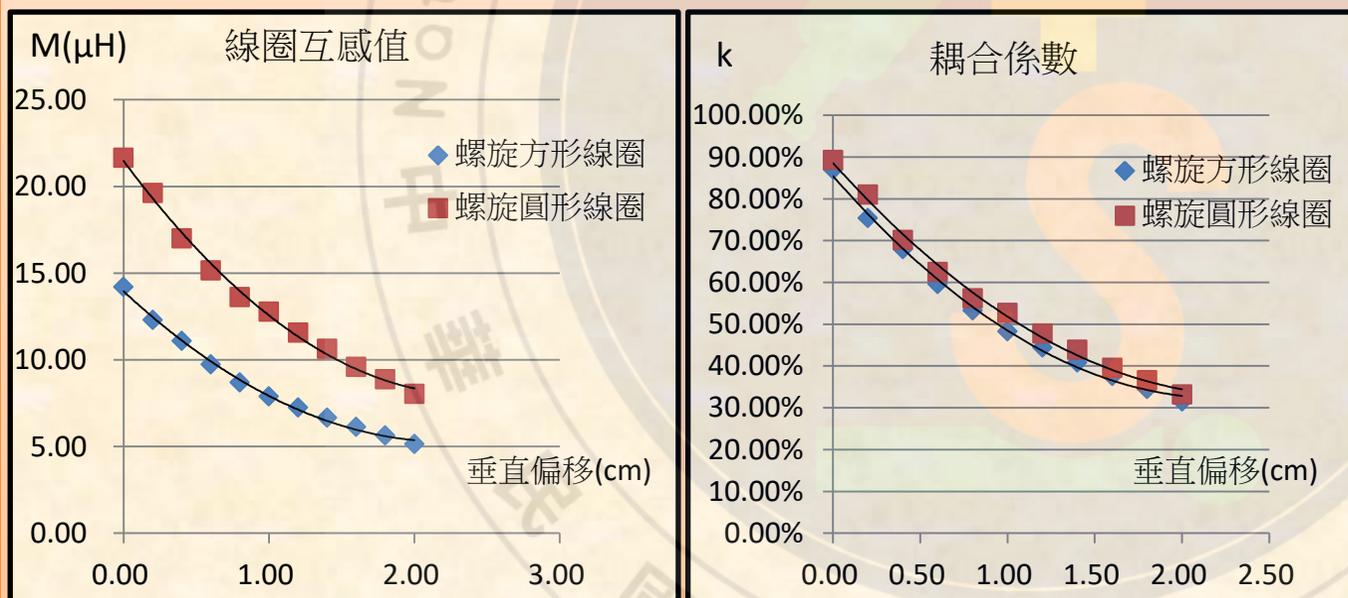
模擬單一圈線圈磁場



研究結果

實驗四、線圈在不同垂直偏移量下互感量測

- 垂直偏移量增加初期，其互感及耦合係數下降速度均較快
- 隨著垂直偏移量增加，下降速度逐漸趨緩



解釋：

由必歐-沙伐定律解釋
必歐-沙伐定律的 Z 軸
分子項 $|dl \times e_r|$ 均不變

只有分母有變

分母項由 $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$

加上垂直 變化量 Δz

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + (r_z + \Delta z)^2$$

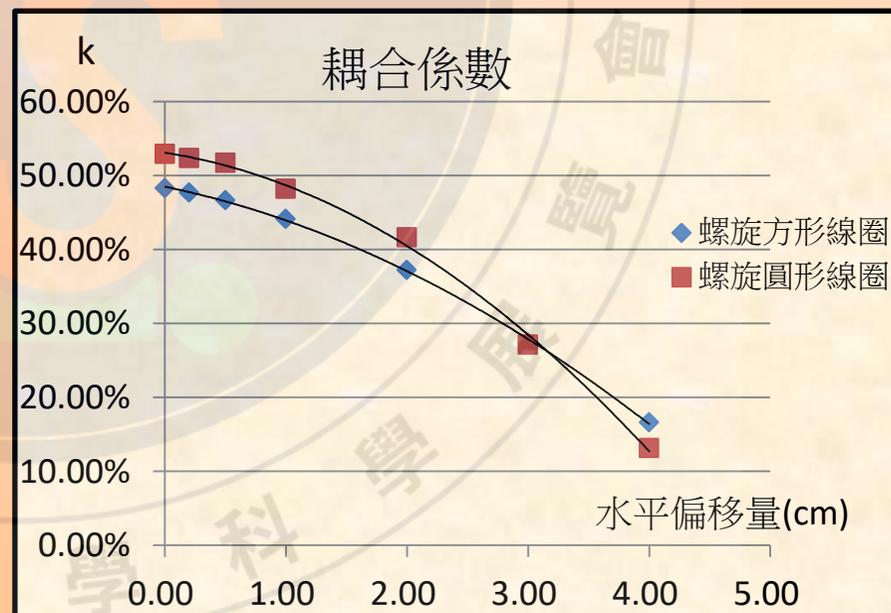
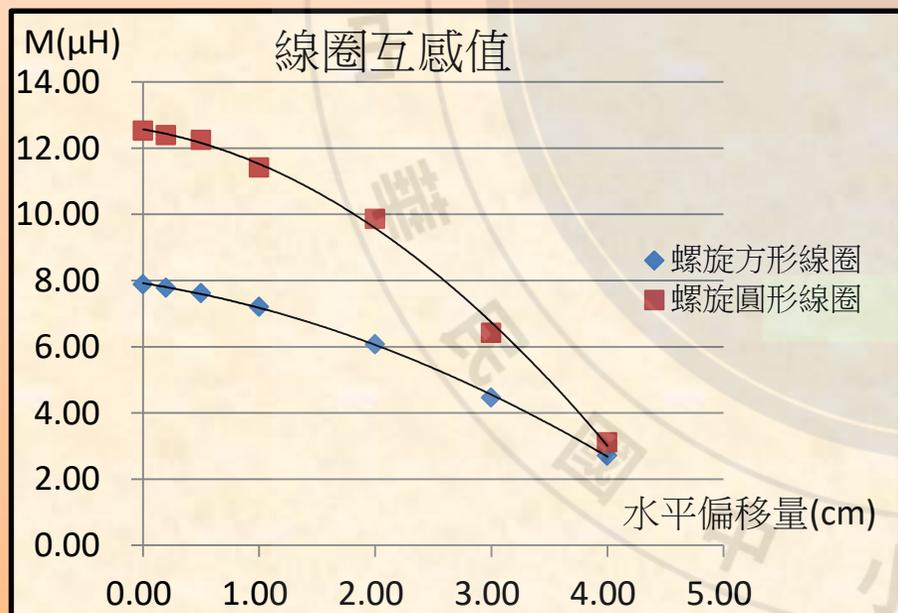
由上述分析 得以下結論

r_z 愈小，磁場變化量比例便愈大

研究結果

實驗五、線圈在固定垂直偏移量、不同水平偏移量下互感量測

- 垂直偏移量固定為1公分
- 螺旋圓形線圈之互感值和耦合係數下降趨勢較螺旋方形線圈明顯
- 比較實驗三和五
- 有固定垂直偏移量下，水平偏移量對兩線圈的互感值和耦合係數下降量影響較小。



結果解釋

解釋：

模擬單一圈線圈在水平、垂直偏移下的磁場

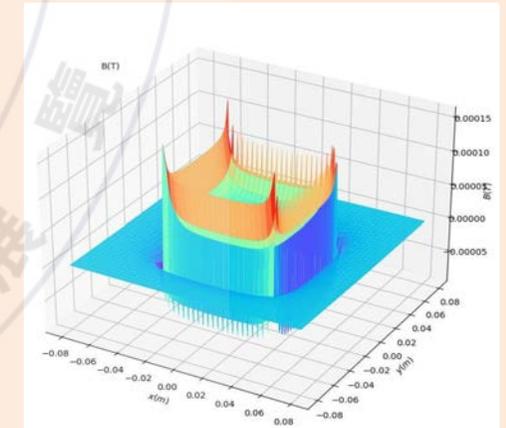
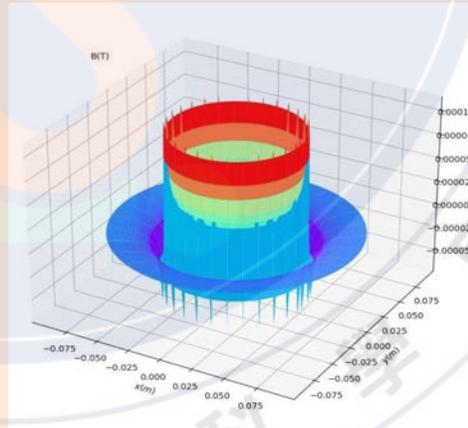
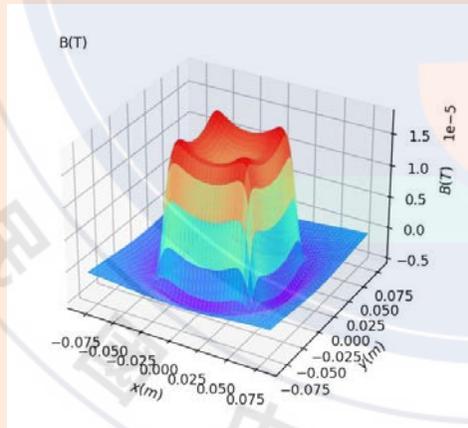
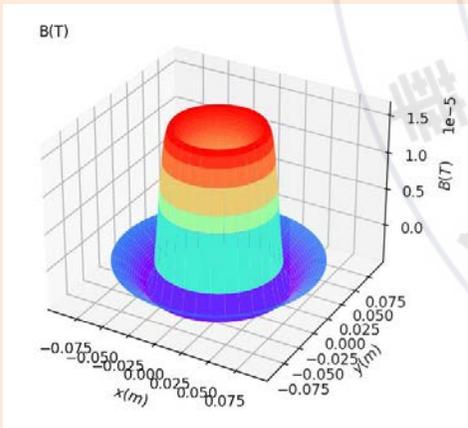
$r_z = 0$ 時， r^2 只受 r_x 影響，變化大

實驗三：最大磁場的數據點極接近 r_0

實驗五：最大磁場的數據點內縮至約 $0.8 * r_0$ & 垂直偏移量較大，最大和最小磁場差較小

由此也得一結論：

有垂直偏移量時，水平偏移量對磁場變化量影響較小，耦合係數下降趨勢也因此較小



結論、未來展望

- 總長、線圈間距相同時，線圈數導致自感值和互感值差異
- 無偏移時，螺旋圓形線圈耦合係數高於螺旋方形線圈。相同水平偏移量，螺旋圓形線圈因為接收到較少磁場，耦合係數下降趨勢較明顯。
- 只有垂直偏移時，偏移量小時磁場變動比例較大
- 垂直偏移量越大，耦合係數下降趨勢較不明顯，最大磁場發生處往線圈內部靠近。
- 未來展望一：探討鐵磁材料對磁場的影響
- 未來展望二：採用變動間距，圈數和總長相等，再探討線圈特性。

參考資料

- Wireless Inductive Charging for Low Power Devices, 2015
- Wireless Energy Transfer by Resonant Inductive Coupling, 2015
- Inductance calculation Techniques, 1999
- Geometric Approach for Coupling Enhancement of Magnetically Coupled Coils, 1996