中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050417

邊權與零的親密關係

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉伯晏 高二 馮德毓	張光輝

關鍵詞：圖形覆蓋、尤拉圖、零和基數

摘要

在圖論中，以 G=(V,E)表示一個圖，其中 G 的頂點集合記作 V(G)、邊集合記作 E(G)。令 k 是一個正整數，若能在 G 的每個邊上各給一個非零整數{±1,±2,±3,...,±(k−1)}的標號，且每個頂點所連出的邊標號總和為 0，則稱圖 G 有零和 k 流，當 k 有最小值時，稱 k 為圖 G 的零和基數，記作 F(G)。

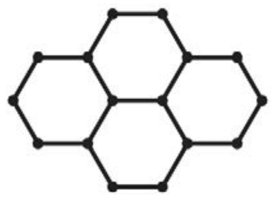
零和流（zero-sum flow）是由無零流（nowhere-zero flow）演化而來的問題，亦是一種邊上加權的問題。在 2009 年 S. Akbari 等人提出零和流猜想，猜測所有滿足零和的圖其零和基數皆不大於 6。

在本作品，我們設計雙色標籤與圖形變換的方法，成功刻劃出尤拉圖（每個頂點都連出偶數個邊的連通圖）零和基數為 3 的充要條件，並將其變換的技巧與結果，應用於判斷其它圖形的零和基數。

壹、前言

一、研究動機

過去在報章雜誌、飲料包裝、數學書刊等，都曾出現各種有趣的標數字遊戲，而高一有一天，老師也拋了一個標數字問題給我們：「你們能不能在這個圖的每個邊都寫上一個不是零的整數，讓每個點連出去的邊加起來都是零？」



這個問題打動了我們的好奇心，我們嘗試給出一組解答，同時好奇這個問題有沒有一個一般化的結論或「最佳解」，不知不覺一頭栽入了這個研究。我們上網搜尋發現這其實是個名為「零和流」的問題，而且已有前人利用線性代數提出解的存在條件（S. Akbari et al. [2]），以及某些特定的圖給出標準的數字標法。起初我們也希望從一些特殊的圖出發，一窺這神秘的問題；一經深入探究發現，它不只是單純的標數字問題，還可涉及到子圖的聯集與拼接，也察覺出鑲嵌圖形與尤拉圖的獨特性質，期待能站在前人的肩膀上給出更進一步的結論或避開大學數學對已知結果給出嶄新的證明。

二、名詞解釋與定義

(一)本研究主要定義：零和與零和基數（沿用前人定義，翻譯成中文）

1. 若存在一正整數 k 以及函數 $f: E(G) \longrightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm(\boldsymbol{k-1})\}$滿足

$$\sum_{e \in N_G(v)} f(e) = 0 \;\; \forall v \in V(G)$$

   則稱 *f* 為 G 的**零和邊權函數**，且稱圖 G **有零和**；否則稱圖 G 沒有零和。

   同時我們也稱$f(e)$為邊 e 的權重。

2. 以 F(G)表示最小的正整數 k 滿足 G 有零和，且稱 F(G)為 G 的**零和基數**，以其表示 G 的邊權與 0 的「親密程度」。若 G 不存在零和，則定 F(G)=∞。

(二)本研究會用到的圖論（graph theory）相關常用專有名詞與符號

在閱讀文獻前，我們須先了解圖論相關名詞。

1. **一般圖**泛稱所有滿足任意兩個頂點間連至多一條沒有方向的邊，且任意一條邊的兩端不會是同一個頂點的圖。
2. deg(v)代表頂點 v 所連出的邊數，也稱作 degree 或度。$\boldsymbol{N_G(v)}$表示圖 G 中的頂點 v 所連出的邊所構成的集合，同時有$|N_G(v)| = \deg(\mathrm{v})$
3. **子圖**（subgraph）：取$\mathrm{V(S)} \subseteq \mathrm{V(G)}$，$\mathrm{E(S)} \subseteq \mathrm{E(G)}$，且對於所有$e \in E(S)$均有 e 的兩端點位於 V(S)中，此時 S 為 G 的子圖
4. **路徑**（path）：以圖中某個頂點為起點，途經一些兩兩不重複的頂點與邊後，以某個頂點為終點，此頂點與邊的集合稱為路徑（注意到頂點比邊多一個）
5. 對於 G 中任意兩個頂點，若兩者間都能以一條只經過 G 的邊的路徑連接，則稱 G 為**連通圖**（connected graph）。一個子圖 S⊆G 滿足 S 是連通的且對於任意$v \in V(S)$及$u \in V(G \backslash S)$都滿足 v, u 間不存在任何一個路徑連接兩者，則稱 S 為 G 的一個**連通區**（component）。特別地，連通圖只有一個連通區。
6. **橋**（bridge）：若將某條邊從圖中移除後（兩端頂點不被移除），圖的連通區數量會增加，則該邊稱為橋。
7. **二部圖**（二分圖）（bipartite）：存在$V_1, V_2 \subset \mathrm{V(G)}$滿足 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 及 $V_1 \cup V_2 =$

$V(G)$，且對於任何 $u, v \in V_1$ 都滿足 u, v 沒有連邊，對於任何 $u, v \in V_2$ 都滿足 u, v 沒有連邊，則稱 G 為二部圖。

8. **樹**（tree）：每一個邊都是橋的圖。樹中 degree=1 的頂點被稱作**葉子**（leaf）。
9. 對於所有$v \in V(G)$都有$deg(v)$為偶數的圖稱為**偶圖**（even graph）。連通的偶圖稱為**尤拉圖**（Eulerian graph）。
10. **正則**（regular）：若圖 G 所有頂點的 degree 都相同且值為 r，則稱 G 為 r-正則圖。
11. **完美匹配**（perfect matching）：若圖 G 存在一個邊子集合$M \subseteq E(G)$使得對所有頂點$v \in V(G)$都有$|N_G(v) \cap M| = 1$，則稱 G 有完美匹配，且稱 v 被 E^*許配。
12. **(2,3)圖**：對於所有$v \in V(G)$都有$deg(v) = 2,3$ 的圖。

三、文獻回顧：前人猜想與相關定理

在文獻探討時，我們讀到幾個零和研究中重要的猜想與結果，在此列出。

猜想 1.1 (S. Akbari et al. [2], P3, Zero-Sum Conjecture)

若圖 G 有零和，F(G)≤6。

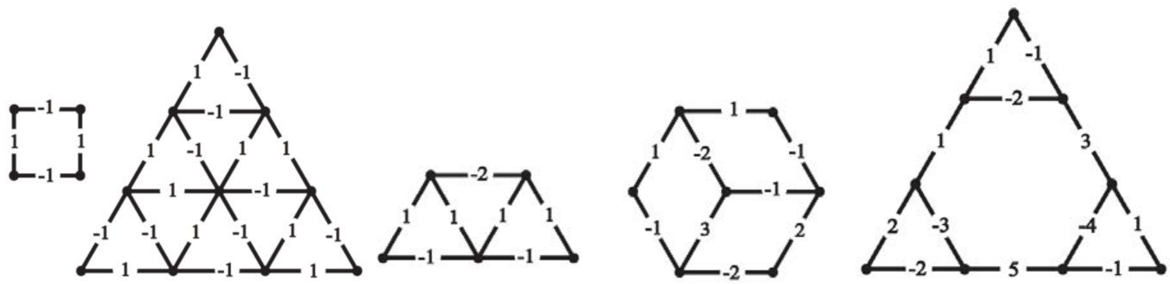


圖 1.2 F(G)≤6 的例子，由左到右零和基數分別是 2、2、3、4、6

定理 1.3 (S. Akbari et al. [2], P10, Theorem 4)

若猜想 1.1 對所有(2,3)圖都對，則猜想 1.1 對所有圖都正確。

定理 1.4 (T. M. Wang and S. W. Hu [11], P3, Lemma 3)

假設 G 連通。F(G)=2 若且唯若 G 為偶數邊尤拉圖。

定理 1.5 (T. M. Wang and S. W. Hu [11], P5, Theorem 4)

若 G 是一個 3-正則圖（3-regular graph）且 F(G)=3 若且唯若 G 有完美匹配。

定義 1.6 (Z. K. Eu [5], P16, Definition 4.1)

一個**樹**（tree）的所有**葉子**（leaf）都以一個奇圈（奇數個邊的圈）取代，而其他頂點可以選擇奇圈或偶圈替換，亦可不替換，則此圖稱為**樹燈圖**（tree lamp），如**圖** 1.7。

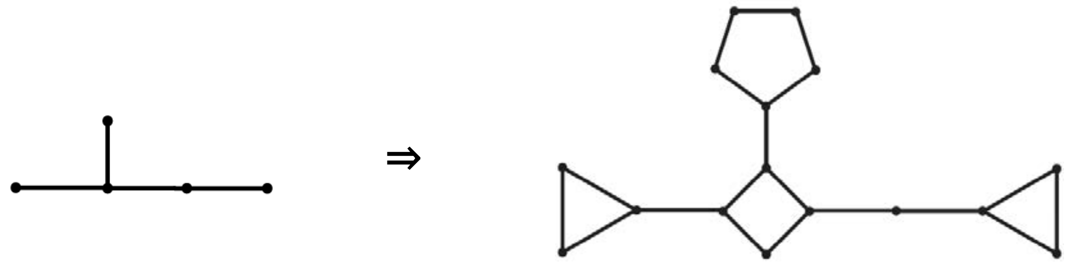


圖　1.7　　樹燈圖舉例

定理　1.8　(Z. K. Eu [5], P17, Theorem 4.3)

若 G 是樹燈圖，則 G 有零和且零和基數小於等於 5。

猜想　1.9　(Z. K. Eu [5], P20, Open Problem 2)

一個(2,3)圖若有零和，則可以表示為若干個**偶圈**與**樹燈圖**的聯集。

（其中偶圈指偶數個邊的圈，且同一個偶圈允許頂點重複）

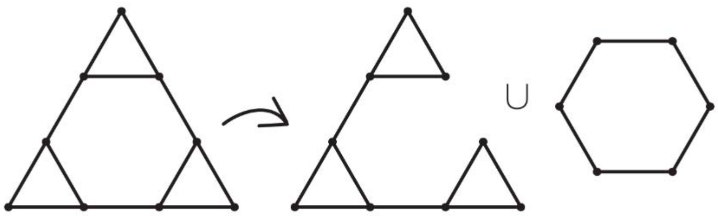


圖　1.10　　有零和的圖拆解成偶圈與樹燈圖聯集 舉例

四、研究目的

在閱讀文獻後，我們決定討論以下三大主題：

(一)探討圖形零和基數為 3 的充要條件。

(二)探討圖形覆蓋與零和基數之間的關係，並解決猜想 1.9。

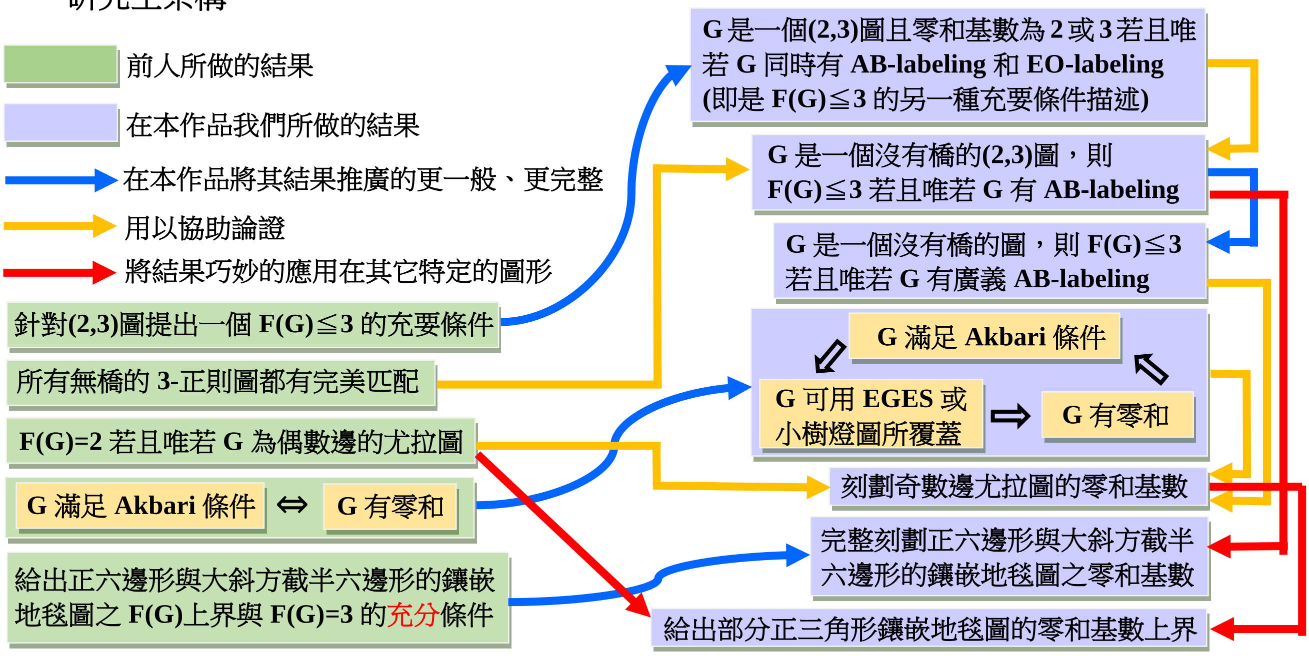
(三)探討尤拉圖的零和基數。

貳、研究設備及器材

一、筆、紙、黑板、電腦。

參、研究過程或方法

一、研究主架構



二、零和性質的簡單觀察

根據零和的定義與文獻，我們首先很快地觀察到有零和的圖有以下的性質：

性質　2.1　（零和的基本性質）

若 $E(G) \neq \emptyset$ 且 G 有零和，則不存在 degree=1 的頂點。

性質　2.2　（零和的基本性質）

若 $E(G) \neq \emptyset$ 且 G 有零和，則$\mathrm{F(G)} \geq 2$。等號成立時，我們以± 1在 G 的邊上標號。

性質　2.3　（零和的基本性質）

圖 G 有連通區$G_1, G_2, \ldots, G_n$，則$F(G) = max\{F(G_i) : 1 \leq i \leq n\}$。**因任兩個連通區的零和存在性與零和基數是獨立的，故本文中若未特別強調，我們均只討論連通圖。**

三、零和基數等於 3 的充分必要條件

章節主旨：從定理 1.4 ([11])可以發現，零和基數等於 2 的情況是已經被清楚刻劃的，很自然的，我們對於零和基數為 3 的充要條件感到好奇。前人已針對(2,3)圖提出了一種檢驗零和基數為 3 的流程（Z. K. Eu [5], P9, Theorem 2.12），而我們透過兩種雙色標籤（定義 3.1、3.5），給出較簡單的判斷方法，如 3.1～3.7。此外，對於沒有橋的(2,3)圖，我們發現能大幅簡化判斷效率的方式，如 3.8～3.16。最後，我們將結論推廣到一般圖，如 3.21～3.24。

定義　3.1　雙色標籤一：AB-labeling（我們自創的定義）

我們稱一個(2,3)圖 G 有 AB-labeling，表示圖 G 存在一種在邊上標 A 與 B 的標籤方式，使得每一個頂點皆滿足下列條件：

- degree=2 的頂點，其連出去的兩條邊，一條邊標 A、一條邊標 B。
- degree=3 的頂點，其連出去的三條邊，三條邊皆標 A 或三條邊皆標 B。

引理　3.2

若 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤3，則 G 有 AB-labeling

證明：若 F(G)≤3，則僅能使用±1、±2 標邊使圖滿足零和，又 G 是一個(2,3)圖，當 deg(v)=2 時，與 v 相鄰的兩邊標號只可能是 1,-1 或 2,-2；而當 deg(v)=3 時，與 v 相鄰的三邊標號只可能是 1,1,-2 或-1,-1,2。

當邊上標的是 1 或-2 時，我們標 A 於邊上，標-1 或 2 時，則標 B 於邊上。此時當 deg(v)=2 時，v 相鄰兩邊必定為 AB；而當 deg(v)=3 時，v 相鄰三邊必定為 AAA 或 BBB。故 G 符合 AB-labeling 的定義。

□

這裡要特別注意的是，並非所有滿足 AB-labeling 的(2,3)圖其零和基數都小於等於 3，如**圖** 3.3 就是一個例子，該圖有 AB-labeling，但從**引理** 3.4 可輕易看出其零和基數為 **5**，因此圖 G 有 AB-labeling 只是 F(G)≤3 的必要條件。

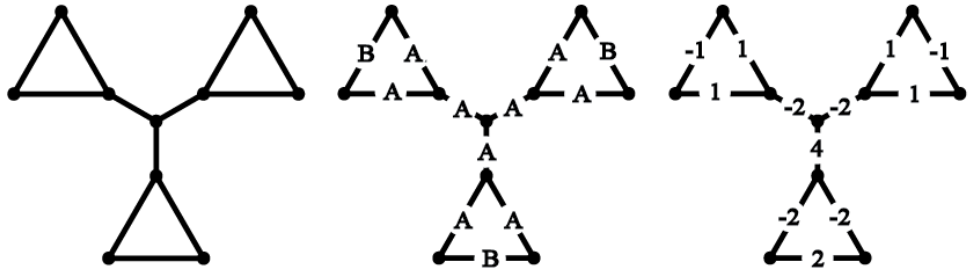


圖　3.3　　**滿足 AB-labeling 但 F(G)>3 的例子**

引理　3.4

b 是 G 的一個橋且 f 是 G 的零和邊權函數，那麼$f(b)$是偶數

證明：假設 b 的兩端點分別是 u*和 v*，而將 b 從 G 移除後會有兩個連通區，分別為G_1與G_2，假設 u*落在G_1中而 v*落在G_2中。

$$f(b)=0-\sum_{e\in N_G(u^*)\setminus\{b\}} f(e)=-\left[\sum_{v\in V(G_1)\setminus\{u^*\}}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)-2\sum_{e\in E(G_1)\setminus N_G(u^*)} f(e)\right]$$
$$=2\sum_{e\in E(G_1)\setminus N_G(u^*)} f(e)$$

□

定義 3.5 雙色標籤二：EO-labeling（我們自創的定義）

我們稱一個(2,3)圖 G 有 EO-labeling，表示圖 G 存在一種在邊上標 E 與 O 的標籤方式，使得每一個頂點皆滿足下列條件：

- degree=2 的頂點，其連出去的兩條邊，兩條邊都標 E 或兩條邊都標 O。
- degree=3 的頂點，其連出去的三條邊，一條標邊標 E 另兩條邊標 O。

引理 3.6

若 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤4，則 G 有 EO-labeling。

證明：若圖 G 滿足 F(G)≤4，則僅能使用±1、±2、±3 標邊使圖滿足零和。根據零和標號的定義，每一個頂點的總和一定是 0，又 G 是一個(2,3)圖，其中 degree 為 2 的頂點，其相鄰邊權重必為相反數；而對於每個 degree 為 3 的頂點，其相鄰邊權重僅可能為三個偶數或一偶數兩奇數，另外在 F(G)≤4 的前提下，能標在邊上的偶數只有±2，所以三個偶數的情況是不存在的。

當邊上標的是 1、-1、3、-3 時，在邊標記 O；當邊上標的是 2 或-2 時，在邊標記 E。已知 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤4，當 deg(v)=2 時，其相鄰邊權重和僅可能是 1+(-1)、2+(-2)、3+(-3)，則相鄰邊可標記為 EE 或 OO；當 deg(v)=3 時，相鄰邊權重和僅可能是(-2)+1+1 或 2+(-1)+(-1)，則相鄰邊可標記為 EOO，故 G 為(2,3)圖且 F(G)≤4 時，G 有 EO-labeling。

□

定理 3.7 (以我們的定義描述(2,3)圖 F(G)≤3 的充要條件)

G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤3 若且唯若 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling

證明：

“⇒”(證明充分性) 若 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤3，則根據**引理 3.2**，G 有 AB-labeling。且同時 G 是一個也滿足 F(G)≤4，則根據**引理 3.6**，G 有 EO-labeling。綜合上述兩點，推

得 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling。

"⇐"(證明必要性) 若 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling，我們同時給 G 一種 AB-labeling 以及一種 EO-labeling 的標籤方式，此時每條邊上會有四種標籤：AO、AE、BO、BE。若將 AO 轉換為 1，AE 轉換為-2，BO 轉換為-1，BE 轉換為 2，那麼：

對於 degree=2 的頂點，其相鄰兩邊可能是 AO、BO 或 AE、BE

因此 degree=2 的頂點，其相鄰兩邊可轉換標號為 1、-1 或-2、2

對於 degree=3 的頂點，其相鄰三邊可能是 AO、AO、AE 或 BO、BO、BE

因此 degree=3 的頂點，其相鄰三邊可轉換標號為 1、1、-2 或-1、-1、2

故 F(G)≤3。

□

在得到**定理 3.7** 後，我們希望能夠更快速判斷一個(2,3)圖 G 是否滿足 F(G)≤3，而我們在觀察(2,3)圖的圖形結構之後，發現雙色標籤在 G 沒有橋時可以簡化成單色標籤，我們採用細分與平滑變換來論證。細節如下 3.8~3.16：

定義 3.8 (D. B. West [14], P162, Definition 4.2.5)

細分（subdivision）：對於一個圖 G 來說，在圖 G 的邊上加入新頂點，使邊轉變成由多個頂點構成之路徑的變換。

平滑（smoothing）：對於一個圖 G 來說，將圖 G 路徑上 degree 為 2 的點全部抹去，使新圖與原圖仍為同胚（Homeomorphism）的一種變換。

引理 3.9

對於任意一個 3 正則圖，都存在一種細分變換，使原圖變為(2,3)圖。

證明：若 G 是一個 3 正則圖，將圖 G 做細分變換，那麼新的圖中每一個頂點的 degree 僅可能是 2 或 3，故 3 正則圖可以透過細分變換為(2,3)圖。

□

引理 3.10

對於任意一個(2,3)圖，都存在一種的平滑變換，使原圖變換成 3 正則圖。

證明：若 G 是一個(2,3)圖，將圖 G 中 deg(v)=2 的點都做平滑變換得新圖 G*，則圖 G*

每一個頂點 degree 都會是 3，故圖 G*是一個 3 正則圖。

□

定理　3.11

已知圖 G 是一個(2,3)圖。圖 G 經平滑變換後的 3 正則圖 G*有完美匹配若且唯若原圖 G 有 EO-labeling。

證明：由**引理 3.10** 知，任何一個(2,3)圖，都存在一種平滑變換使原圖變換成 3 正則圖，因此我們可令平滑變換後的 3 正則圖為 G*。

“⇒”（證明充分性）若 G*有完美匹配 M，我們將 G*上 M 中的邊都標上 E，其餘標 O。根據完美匹配的定義，此時每一個 deg(v)=3 的點所連出去的邊都是 2 個 O、1 個 E。已知 G*有 EO-labeling，且圖 G*是一個 3 正則圖，每一個 deg(v)=3 的點所連出去的邊都是 2 個 O、1 個 E，將有 EO-labeling 的 3 正則圖進行細分，便可得到一張有 EO-labeling 的(2,3)圖。

“⇐”（證明必要性） 將有 EO-labeling 的(2,3)圖進行平滑，由於 degree=2 的頂點兩邊標 EE 或 OO，抹除頂點後其兩連出邊合併為一邊，並標上相同的標籤（E 或 O），可得到一張有 EO-labeling 的 3 正則圖。此時所有標上 E 的邊即該 3 正則圖的完美匹配。

□

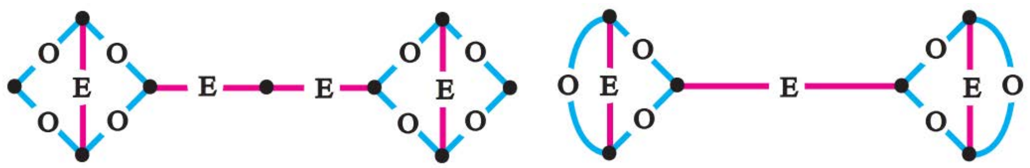


圖　3.12　　EO-labeling 與完美匹配對應示意圖

定理　3.13　(J. Petersen [7])（張振華，蔡牧村 [1], P117, 定理 4.15）

所有無橋（bridgeless）的 3-正則圖（3-regular graph）都有完美匹配（perfect matching）

引理　3.14

對於任意一個圖 G 來說，若圖 G 沒有橋，則平滑變換後的圖 G*亦然沒有橋。

證明：假設圖 G*有橋 e，因為將 e 移除後會使圖不連通，故 e 是 v_1 與 v_2 間的唯一路徑。若對圖 G*作細分，那麼 v_1 與 v_2 間的路徑仍是唯一，且路徑上的任何一條邊都會是該圖的橋。故若圖 G*有橋，經過平滑前(細分後)亦有橋。根據逆否命題得證。

□

推論 3.15

若 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 G 有 EO-labeling

證明：

由**引理 3.10** 知，任何一個(2,3)圖，都存在一種平滑變換，使原圖變換成 3 正則圖。

由**引理 3.14** 知，若 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，經過平滑變換後亦然沒有橋。

由**定理 3.13** 知，任意一個沒有橋的 3 正則圖都有完美匹配。

因此任何一個沒有橋的(2,3)圖，都存在一種平滑變換，使原圖變換成有完美匹配的 3 正則圖，故由**定理 3.11** 知，任意一個沒有橋的(2,3)圖都有 EO-labeling。

□

推論 3.16

設 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 F(G)≤3 若且唯若 G 有 AB-labeling

證明：“⇒”（證明充分性）

設 G 是(2,3)圖且 F(G)≤3，根據**定理 3.7**，G 有 AB-labeling 且有 EO-labeling。

“⇐”（證明必要性）

已知 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，根據**推論 3.15**，G 有 EO-labeling

又 G 有 AB-labeling 前提下，根據**定理 3.7** 可以推得 F(G)≤3。

□

在閱讀文獻時，我們發現已有前人給出正六邊形鑲嵌（定義 3.17）的零和基數最小上界等於 4、一個零和基數為 3 的充分條件（T. M. Wang & G. H. Zhang [13], P5 , Theorem 1, P7 , Theorem 3）以及截角正方形鑲嵌(4.8.8)的一個零和基數為 3 的充分條件（M. Naeem et al. [6], P8 Theorem 2）。我們發現這兩類圖都是(2,3)圖，所以我們希望能夠**以 AB-labeling 來刻劃這兩類圖其零和基數為 3 或 4 的分類方法**。（根據**定理 1.4** 已能夠確定 F(G)=2 之充要條件）

定義 3.17

鑲嵌地毯圖：指的是由相同的基本元素，所拼貼出來的鑲嵌圖形，其中任一個基本元素都與其他基本元素有共用邊，簡而言之，該圖是由相同的基本元素拼接覆蓋所得到。本

文中我們以縮寫表示圖 3.18 的兩種鑲嵌：**HXT**（正六邊形鑲嵌）、**ETT**（三角形鑲嵌）。

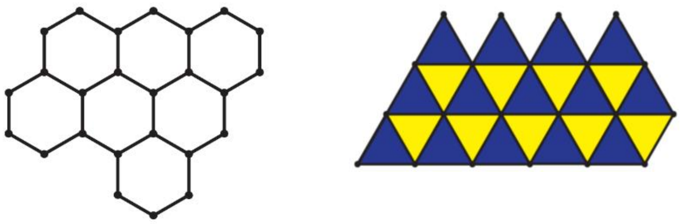


圖 3.18　　鑲嵌地毯圖　(左)HXT　(右) ETT

圖 3.19　**（左）大斜方截半六邊形鑲嵌(4.6.12) 例圖**

（右）截角正方形鑲嵌(4.8.8) 例圖

定理 3.20

已知 G 是一個 HXT、一個截角正方形鑲嵌(4.8.8)或大斜方截半六邊形鑲嵌(4.6.12)

若 G 是 EGES，即單一個偶圈，則 F(G)=2

若 G 不是 EGES 且存在 AB-labeling，則 F(G)=3

若 G 都不是上述兩類，則 F(G)=4

證明：利用後面**引理 4.3** 的證明手法（將圖形拆解成多邊形再拼貼，重疊邊權重相加）便不難說明 HXT、一個截角正方形鑲嵌(4.8.8)或大斜方截半六邊形鑲嵌(4.6.12)之零和基數不超過 4。我們不在此贅述。

觀察到這三類圖形都是(2,3)圖，同時，**由多邊形所拼貼出的圖形顯然沒有橋**，因此根據**定理 3.16**，當 G 是它們三者之一時，G 存在 AB-labeling 若且唯若 F(G)≤3。

□

接著再回到 F(G)=3 充分與必要條件的探討。我們在**定理 3.7** 中已將(2,3)圖 F(G)≤3 的情形刻畫完畢，而我們希望將其結果推廣至一般圖。以下是我們的探究：

定義 3.21　廣義 AB-labeling（我們自創的定義）

若存在一種在圖 G 的每個邊上標 A 或 B 的方式使得對於每個頂點，其每個頂點連出的

邊中，標上 A 的數量與標上 B 的數量相差 3 的倍數（含 0）。

定理　3.22

若一個圖 G 滿足 F(G)≤3 則 G 滿足廣義 AB-labeling

證明：若圖 G 滿足 F(G)≤3，那麼對於任意一個$v \in V(G)$，假設在$N_G(v)$中，邊上的權重為 1,-2 的有 a 個、為-1,2 的有 b 個。當邊上標 1,-2 時，我們在邊上標 A；當邊上標-1,2 時，我們再邊上標 B。那麼標上 A 的邊數為 a；標上 B 的邊數為 b。

由於 v 連出的邊權重是 0，又$\mathbf{1,-2 \equiv 1(\boldsymbol{mod}\ 3)}$, $\mathbf{-1,2 \equiv 2(\boldsymbol{mod}\ 3)}$，因此$a - b \equiv a + 2b \equiv \mathbf{0(\boldsymbol{mod}\ 3)}$。我們可推論 F(G)≤3 的圖 G 滿足廣義 AB-labeling 定義。

□

定理　3.23

G 是一個沒有橋的圖，F(G)≤3 若且唯若 G 滿足廣義 AB-labeling

證明：

“⇒”　根據**定理 3.22**，若 G 滿足 F(G)≤3 則 G 滿足廣義 AB-labeling

“⇐”　假設 G 是一個沒有橋的圖且滿足廣義 AB-labeling。

我們先在 G 的邊上標廣義 AB-labeling 標號，並對 G 進行兩項變換如下：

（第一型吹泡泡變換） 對於頂點 v，若其連出邊 A 的數量與 B 的數量一樣多，則不進行變換。此外，不失一般性假設 v 連出的邊標 A 的數量比 B 多，我們任意挑其中一個標 A 的邊 e，並另外放置三個頂點 u, w, x，並使 e 改與 u 相連，同時建邊 uw, ux, vw, vx。由於 u, w, x, v 會構成一個圈，u 到 v 間至少有兩條不重疊的路徑，故移除任何一個邊都不會產生新的橋。此外，我們可以在邊 uw 與 ux 標 A、vw 與 vx 標 B，使圖仍然滿足廣義 AB-labeling，同時 v 連出的邊中，A 的數量與 B 的數量的差會減少 3。如圖 3.24.1 所示。

我們對 G 的每個頂點都進行第一型吹泡泡變換，直到每個 degree 大於 3 的頂點連出的邊標 A 與 B 的數量都相同。令得到的圖為 G*。

此後，再對 G*的每個頂點都進行第二型吹泡泡變換，令得到的圖為 G**。

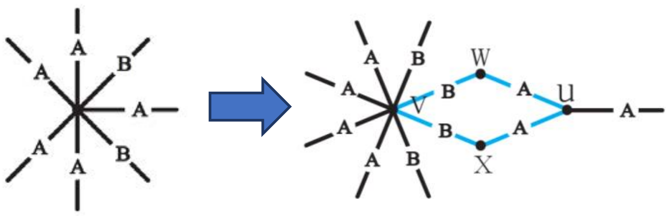
（第二型吹泡泡變換） 對於頂點 v，令 r=deg(v)，且 $N_G(v)=\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$滿足 $e_1, e_3, \cdots, e_{r-1}$

上標 A 且 $e_2, e_4, \cdots, e_r$ 上標 B。我們額外放置 r 個頂點 $v_1, v_2, \cdots, v_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 分別改與 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 相連而不與 v 相連，再將 v 從 G 中移除。另外再加入 $u_1, u_2, \cdots, u_r$，並且按照 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_r, v_r, u_1$ 以 2r 條邊連成一圈，且按照 A, A, B, B, A, A, ⋯, B, B 標邊。如圖 3.24.2 所示。

與第一型吹泡泡變換同理，經由第二型吹泡泡變換後不會產生新的橋。而 G**也滿足廣義 AB-labeling。此外，經過兩個變換後得到的 G**是(2,3)圖，換句話說，G**滿足 AB-labeling。所以根據推論 3.16，$F(G^{**}) \le 3$。

容易觀察到在第一型以及第二型吹泡泡變換中所新增的圈上的每個邊權重都是與相反數相鄰，故每個圈上的權重總合都是 0。也因此當 $F(G^{**}) \le 3$ 時，對 G**進行第二型吹泡泡變換的逆向操作將得到 G*也有零和且 $F(G^*) \le 3$，同理也有 $F(G) \le 3$。如圖 3.24 所示。

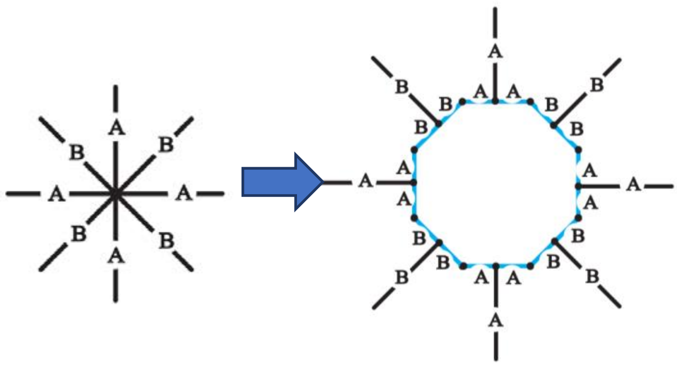
□



(3.24.1)

第一型吹泡泡變換

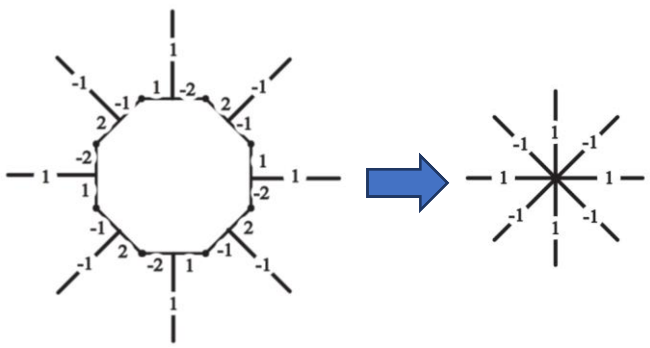
(藍色為新增的邊，由 v, w, u, x 圍成一個圈)



(3.24.2)

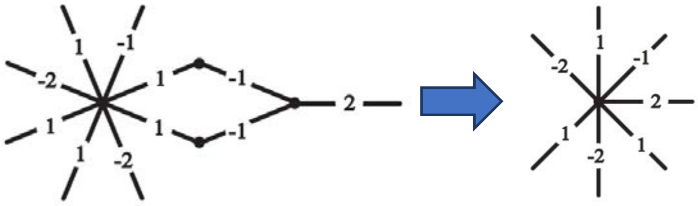
第二型吹泡泡變換

(藍色為新增的邊，是一個圈)



(3.24.3)

對 G**進行第二型吹泡泡變換的逆向操作



(3.24.4)

再對 G*進行第一型吹泡泡變換的逆向操作

圖　3.24　　第一型吹泡泡變換與第二型吹泡泡變換的操作與逆操作 範例

由於滿足 AB-labeling 的(2,3)圖只有兩種 AB-labeling 的標法，故在一般圖中 degree=2,3 的頂點可以很快判斷每個邊上要標 A 或是 B。我們發現有不少圖從局部結構就可以看出無論如何都不滿足廣義 AB-labeling。如圖 3.22（扇子圖）。反之，對於沒有橋的圖只要能夠找到任何一組廣義 AB-labeling 標籤，便保證 F(G)≤ **3**。事實上，已有前人證明了輪子圖與扇子圖的完整零和基數（T. M. Wang & G. H. Zhang [12], P8 Theorem 8），而我們的結果等於是提供另一個證明手法。

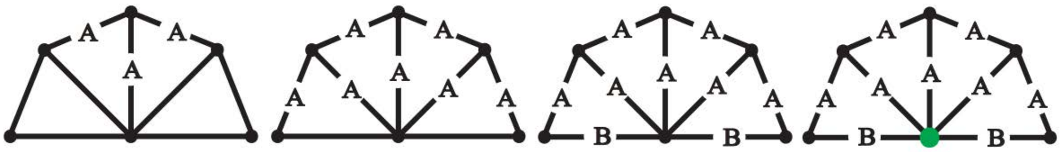


圖　3.25　　使用廣義 AB-labeling 判別 F(G)>3 的例子（綠頂點不合）

四、一般圖的零和存在性充分必要條件與零和基數上界

章節主旨：在文獻[5]中，作者提出了猜想：「所有有零和的(2,3)圖都可以表示為若干個樹燈圖與 EGES 的聯集」（猜想 1.9），其問題本質即是，對於任意有零和的圖，都可表示為若干個有零和的基本圖形（偶數邊尤拉圖、樹燈圖）的聯集（覆蓋），我們經過很多圖形的觀察認為它是對的，並藉由圖形結構的性質成功的證明它。過程中，我們運用文獻[2]中零和存在性條件（定義 4.8）進行驗證與分析。細節如 4.1~4.22。

定義　4.1　偶數邊尤拉圖與奇數邊尤拉圖的縮寫

EGES：G 是連通的尤拉圖且邊數為偶數（**E**ulerian **G**raph with **E**ven **S**ize）

EGOS：G 是連通的尤拉圖且邊數為奇數（**E**ulerian **G**raph with **O**dd **S**ize）

值得注意的是，偶圈是一種特別的 EGES，奇圈是一種特別的 EGOS

定義　4.2

若 V(S),V(T) $\subseteq$ V(G)， E(S)$\cap$E(T)=ϕ，則我們稱圖 G 中的兩個子圖 S 與 T 為**邊互斥**。

引理 4.3

若圖 G 存在子圖集合 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_k,$ 滿足 $\bigcup_{1\le i\le k} S_i = G$ 且 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_k,$ 個別都有零和，則圖 G 有零和，且 $F(G) \le \prod_{1\le i\le k} F(S_i)$

證明：事實上，只需要證明「若 G_A 與 G_B 個別都有零和，且 G 可以表示為 G_A 與 G_B 兩個子圖的聯集($G = G_A \cup G_B$)，則 G 有零和且 $F(G) \le F(G_A)\cdot F(G_B)$ 」，則原命題得證。

令零和邊權函數 $f: E(G_A) \to \{i : 1 \le |i| \le F(G_A) - 1\}$，$g: E(G_B) \to \{i : 1 \le |i| \le F(G_B) - 1\}$ 滿足 G_A 與 G_B 個別有零和，構造零和邊權函數 $h: E(G_A) \to \{F(G_B)\cdot i : 1 \le |i| \le F(G_A) - 1\}$，使得 G_A 有零和。接著便可利用 g 與 h 來構造 G 的零和邊權函數 x，其定義如下：

1. 若 $e \in E(G_A \setminus G_B)$，則 $x(e) = h(e)$
2. 若 $e \in E(G_B \setminus G_A)$，則 $x(e) = g(e)$
3. 若 $e \in E(G_A \cap G_B)$，則 $x(e) = h(e) + g(e)$

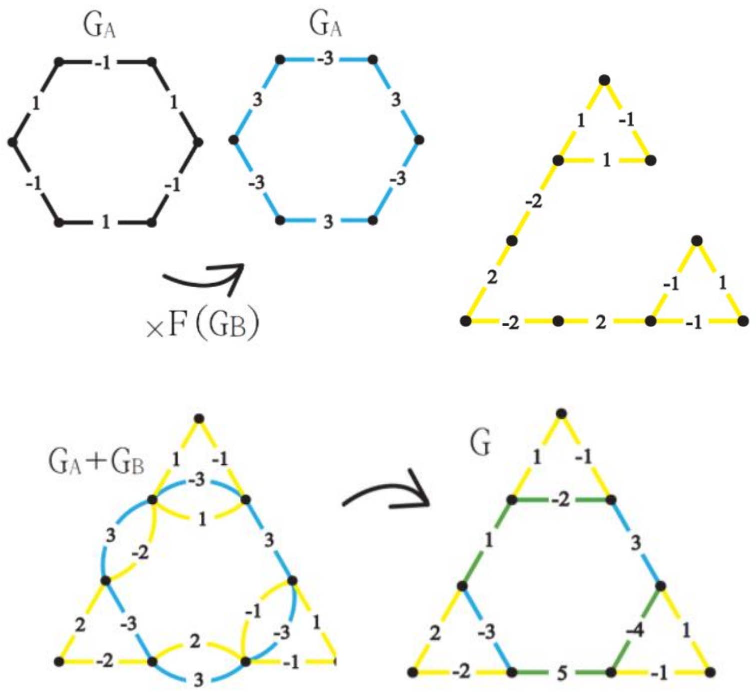
在此定義下，對於任一 G 中的頂點 v，由於 $N_{G_A}(v)$、$N_{G_B}(v)$ 中的邊權總和都是 0，因此 x 會使得 $N_G(v)$ 中的邊權重和等於 0。

同時 g 與 h 個別的值域為 $R(h) = \{i : 1 \le |i| \le F(G_A) - 1\}$ ， $R(g) = \{i : 1 \le |i| \le F(G_B) - 1\}$

則 $R(x) = \{i : 1 \le |i| \le [F(G_A) - 1]F(G_B) + F(G_B) - 1\} = \{i : 1 \le |i| \le F(G_A)F(G_B) - 1\}$

故 G 有零和且 $F(G) \le F(G_A)F(G_B)$，透過一樣的手法，我們可以針對 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_k$ 其個別的零和基數 $F(S_i)$ 做組合，因此滿足 $\bigcup_{1\le i\le k} S_i = G$ 且 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_k$ 個別都有零和時，可以推得 G 有零和，且 $F(G) \le \prod_{1\le i\le k} F(S_i)$ 。

$\square$



(上左圖)$\boldsymbol{G_A}$以 f 標號

(上中圖)$\boldsymbol{G_A}$以 h 標號

(上右圖)$\boldsymbol{G_B}$以 g 標號

(下左圖)將$\boldsymbol{G_A}$與$\boldsymbol{G_B}$疊圖

(下右圖)重疊邊權重相加

圖 4.4 **兩個有零和的圖聯集後亦有零和**

推論 4.5

若圖 G 存在子圖集合 $S_1, S_2, S_3, \ldots S_k$, 滿足 $\bigcup_{1\le i\le k} S_i = G$ 且每一個子圖 S_i 都是 EGES，其中 $1 \le i \le k$，則 $F(G) \le 2^k$。

證明：根據**定理** 1.4 我們可以確定，當 S_i 都是 EGES 時，$F(S_i) = 2 \;\forall 1 \le i \le k$

根據**引理** 4.3 得知，$F(G) \le \prod_{1\le i\le k} F(S_i) = 2^k$

□

針對文獻[5]中的開放問題二（猜想 1.9），我們參考文獻[2]，文中提到，圖 G 存在零和若且唯若圖 G 滿足 *Akbari* 條件（定義 4.6），作者採用了線性代數的方法來證明。而我們希望在探討猜想 1.9 時，能更進一步地，單純從圖形結構的方式去解釋 *Akbari* 條件與零和存在性是等價的（結果見**定理** 4.21）。

定義 4.6 (S. Akbari et al. [2], P5, Lemma 1 & Theorem 1) *Akbari* 條件

圖 G 滿足 Akbari **條件**的意思是：

1. 若圖 G 是二部圖，則 G 沒有橋。（二部圖定義見名詞解釋編號 7）

2. 若圖G不是二部圖，則$G\setminus\{e\}$的任何一個連通區都不是二部圖，其中$e\in E(G)$。

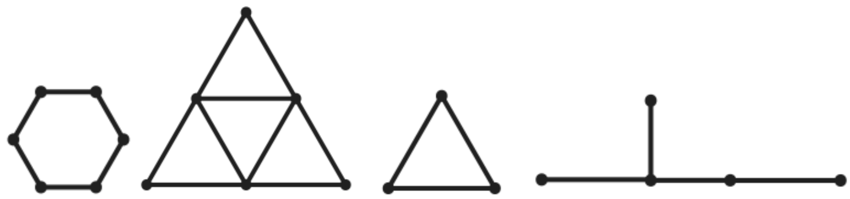


圖 4.7　（左一、二）滿足 Akbari 條件的例子（右一、二）不滿足的例子

引理 4.8 (S. Akbari et al. [2], P5, Lemma 1 & Theorem 1)（我們給予另證）

若圖G存在零和，則G滿足 *Akbari* 條件（定義 4.6）

證明：我們利用反證法來說明這件事。假設 G 不滿足 *Akbari* 條件，即 G 滿足：「**（情況一）**G 是一個有橋的二部圖」或「**（情況二）**G 不是二部圖且存在一個橋 e 滿足 G\{e}的其中一個連通區（名詞解釋編號 5）為二部圖」或「**（情況三）**G 不是二部圖也沒有橋，且存在一個邊 e 滿足 G\{e}是二部圖（因 G\{e}只有一個連通區）」。

(1) 對於圖G有橋的情況，假設b是圖G的橋，若將b從G中移除後會產生兩個連通區G_1及G_2，b的其中一端點是G_1的其中一個頂點，而另一端點是G_2中的其中一個頂點，則$E(G)=E(G_1)\bigcup E(G_2)\bigcup\{b\}$。

根據性質 1.1(2.)與前面假設，可知G_1及G_2都是二部圖**（符合情況一）**或其中一個是二部圖**（符合情況二）**。不失一般性假設G_1是二部圖，則有$V(G_{1A})$與$V(G_{1B})$兩個點集合滿足$V(G_{1A})\bigcap V(G_{1B})=\phi$且$V(G_{1A})\bigcup V(G_{1B})=V(G_1)$，同時$\forall uv=e\in E(G_1)$，都滿足$u\in V(G_{1A})$，$v\in V(G_{1B})$。

另外假設一個頂點$v^*\in V(G_{1B})$且$b\in N_G(v^*)$，令邊集合$E(S)=E(G_1)\setminus N_G(v^*)$。

在G有零和的條件下，假設f是G的一個零和邊權函數，

那麼有$\displaystyle\sum_{v\in V(G_{1B})\setminus\{v^*\}}\sum_{e\in N_G(v)}f(e)=0$且$\displaystyle\sum_{v\in V(G_{1A})}\sum_{e\in N_G(v)}f(e)=0$

因此$\displaystyle f(b)=0-\sum_{e\in N(v^*)\setminus\{b\}}f(e)=0-\left[\sum_{v\in V(G_{1B})\setminus\{v^*\}}\sum_{e\in N_G(v)}f(e)-\sum_{e\in E(S)}f(e)\right]$

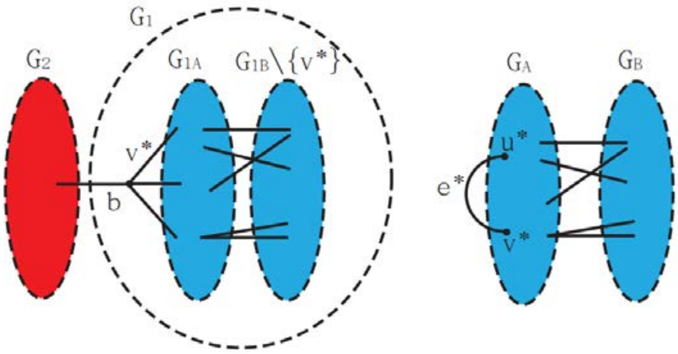
$$= \sum_{e \in E(S)} f(e) = \sum_{v \in V(G_{1B}) \setminus \{v^*\}} \sum_{e \in N_G(v)} f(e) = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

(2) 對於 G 沒有橋的情況，根據性質 1.1(2.)與前面假設，可知存在一條邊 e^* 滿足 $G \setminus \{e^*\}$ 為二部圖**(符合情況三)**，故有 $V(G_A)$ 與 $V(G_B)$ 兩個點集合滿足 $V(G_A) \cap V(G_B) = \phi$ 且 $V(G_A) \cup V(G_B) = V(G)$，同時 $\forall uv = e \in E\left(G \setminus \{e^*\}\right)$，都滿足 $u \in V(G_A)$，$v \in V(G_B)$ 或 $v \in V(G_A)$，$u \in V(G_B)$。不失其一般性假設 $u^*, v^* \in V(G_A)$，且 $e^* \in N_G(v^*)$，$e^* \in N_G(u^*)$，由於 G 有零和，假設 f 是 G 的一個零和邊權函數，那麼有 $\sum_{v \in V(G_B)} \sum_{e \in N_G(v)} f(e) = 0$ 且 $\sum_{v \in V(G_A)} \sum_{e \in N_G(v)} f(e) = 0$

因此 $2f\left(e^*\right) = \sum_{v \in V(G_A)} \sum_{e \in N_G(v)} f(e) - \sum_{e \in E(G \setminus \{e^*\})} f(e)$

$$= -\sum_{e \in E(G \setminus e^*)} f(e) = -\sum_{v \in V(G_B)} \sum_{e \in N_G(v)} f(e) = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

□



(1)G 有橋的情況 (2) G 沒有橋的情況

圖 4.9 引理 4.8 反證法示意圖

性質 4.10 (D. B. West [14], P27, Definition 1.2.24 & Theorem 1.2.26) 尤拉圖常見性質

1. G 是尤拉圖若且唯若 G 中存在**尤拉迴路**，即對於每個頂點 v，都可以從 v 出發，經過 G 中所有邊恰各一次，回到 v。同時，允許頂點重複的圈（迴路）即是一個尤拉圖。

2. 尤拉圖與尤拉圖的**頂點沾黏**（頂點重疊，邊不重疊）仍然是尤拉圖，尤拉圖移除掉任何一個尤拉圖子圖後，每個連通區仍是尤拉圖。參考圖 4.11。

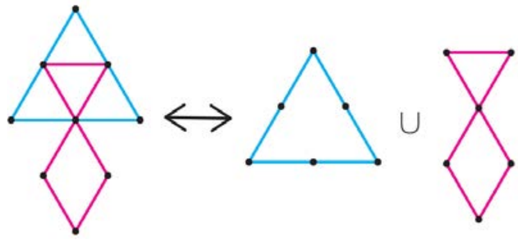
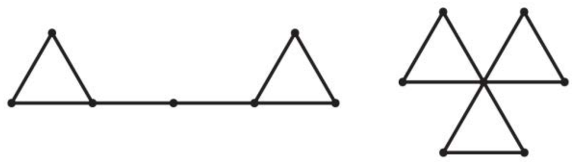


圖 4.11 尤拉圖的頂點沾黏 範例

接著我們將利用**引理 4.8** 來證明猜想 1.9，但問題中所提到的樹燈圖（定義 1.6）的圖形結構較複雜，為此我們將樹燈圖簡化以協助我們論證，如下定義 4.12。事實上，任何樹燈圖皆可表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的聯集，或者說小樹燈圖是樹燈圖的一個特例。所以根據性質 4.10，只要證明「所有有零和的圖都可以表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的聯集」，就相當於證明猜想 1.9。再根據**引理 4.8**，只需要證明「若滿足 *Akbari* 條件則可表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的聯集」。**另外，「圖 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的（定義 4.14）」與「圖 G 可表示為若干個 EGES 與小樹燈圖的聯集」是等價敘述**。

定義 4.12 小樹燈圖（我們自創的定義）

我們稱圖 S 為 **小樹燈圖** 若 S 是兩個 EGOS 以一個路徑連接且任意兩個邊均不重疊。但另一方面，頂點是允許有重疊的。另外不難發現，**小樹燈圖零和基數都不超過 3**。



圖例一　　　　圖例二

圖 4.13 小樹燈圖示意圖

定義 4.14 （我們自創的定義）

圖 G 為**可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的**若且唯若對於所有邊 $e \in E(G)$，都存在一個子圖 $S \subseteq G$ 滿足 $e \in E(S)$ 且 S 是 EGES 或小樹燈圖

性質 4.15 (D. B. West [14], P25, Theorem 1.2.18) 二部圖常見性質

1. G 是二部圖若且唯若 G 中沒有奇圈；G 是二部圖若且唯若 G 沒有奇數邊尤拉圖子圖

2. 二部圖移除任何一個邊或頂點之後都還是二部圖

性質　4.16　(D. B. West [14], P389, 7.3.26) 無橋圖常見性質

對於一個沒有橋（名詞解釋編號 6）的圖 G 與兩個相異頂點 u, v∈V(G)，都存在兩個路徑 p, q 滿足 p, q 沒有邊重疊且 p, q 的起點與終點都是 u, v；且每個邊都存在圈所包含它。

引理　4.17

令 G 一個沒有橋的圖，則 G 是二部圖若且唯若存在一個頂點 v ∈ V(G) 使得不存在任何 G 的 EGOS 子圖包含頂點 v

證明：

"⇒"充分條件　根據性質 4.15 成立。

"⇐"必要條件　考慮反證法。假設圖 G 不是二部圖且沒有橋。令 $S \subset G$ 為一個 G 的 EGOS 子圖使得$v \notin V(S)$，此時任選一個頂點 $u \in V(S)$。由於 G 沒有橋，故根據**引理** 4.16，存在兩個邊互斥的路徑 P_A 及 P_B，其兩個端點都是 u, v，此時令 p 為從 v 經由 P_A 路徑走到 u 的過程中，最早遇到的 S 上的頂點；而 q 為從 v 經由 P_B 路徑走到 u 的過程中，最早遇到的 S 上的頂點。觀察到，在 S 的一個尤拉迴路(性質 4.10)中存在一個路徑 $P_C \subseteq E(S)$ 滿足 p 及 q 為 P_C 路徑的兩端點，且因為 $|E(S)|$ 是奇數，故 $|E(P_C)|$與 $|E(S \backslash P_C)|$ 其中之一為偶數，同時有 $|E(P_D \cup P_C \cup P_E)|$ 與 $|E(P_D \cup (S \backslash P_C) \cup P_E)|$ 的其中之一為奇數，另外一個為偶數。但如此一來 $P_D \cup P_C \cup P_E$ 與 $P_D \cup (S \backslash P_C) \cup P_E$ 兩者都是從 v 經過 p, q 再回到 v 的迴路(圈)，且其中之一為奇迴路(奇圈)，這裡與假設產生了矛盾。

□

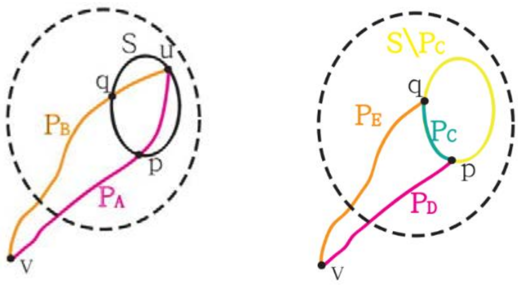


圖　4.18　　引理 4.17 證明示意圖

定理　4.19

若圖 G 是滿足 *Akbari* 條件的則 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的

證明：假設 G 滿足 *Akbari* 條件，那麼對於一個邊 e∈E(G)，我們分成以下三種狀況證明 e 必包含於某個 EGES 或小樹燈圖：

(1) 首先考慮 e 是橋的狀況。定義 e = uv 且 u∈V(S_1), v∈V(S_2), 其中 S_1, S_2 是為將 e 從 G 移除後產生的兩個相異聯通區。當 *Akbari* 條件成立時，任何 G 的橋移除後都不能產生二部圖連通區，故根據性質 4.15，可知 S_1 及 S_2 都包含 EGOS 子圖（各任挑一個出來並令他們為 R_1 及 R_2）。

由於 G 是連通的，所以存在一個路徑連接 R_1 與 R_2 （定義該路徑為 P，其中 P 與 R_1, R_2 沒有邊重疊）。另外因為 R_1 及 R_2 顯然是邊互斥的（$R_1 \subseteq S_1$, $R_2 \subseteq S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$），所以 $R_1 \cup P \cup R_2$ 是一個 G 的小樹燈圖子圖，而因為 e 是橋，所以 P 必包含 e，故 e 被小樹燈圖所包含。

(2) 考慮 e 不是橋的狀況，假設 e 沒有被 G 的任何 EGES 子圖所包含（如果有，那 G 便是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，不特別討論）；換句話說，e 必須被某個 EGOS 子圖所包含。

此時考慮再對 G 進行一項變換。將 G 的所有橋移除，得到一個圖 G*；再將 G* 的每個連通區都以一個頂點取代，並將 G 中的橋放回去，得到 G**。

而因為 G 有橋，所以 G*中至少有兩個連通區，即 G**中至少有兩個頂點。觀察到 G**是一個樹，再觀察到兩個頂點以上的樹都有至少兩個葉子，所以對應回 G*，至少有兩個連通區只被原 G 中的一個橋連接。*Akbari* 條件成立時，對有橋的圖 G 而言，移除任何一個橋都不能有連通區是二部圖，故 G*中的這兩個連通區都不是 G 的二部圖子圖。

根據性質 4.15，這兩個連通區都存在一個 EGOS 子圖。也因此無論 e 落在 G*中的哪一個連通區，都一定至少有另一個連通區存在 EGOS 子圖 G_A。又根據假設，e 落在 G*中某個連通區的某個 EGOS 子圖 G_B 上。對應回 G，將 G_A 與 G_B 間以一個路徑連接，得到一個 G 的小樹燈圖子圖，其包含 e。

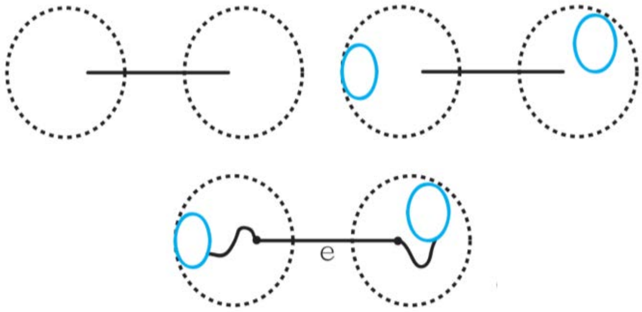
(3) 若 G 是沒有橋的圖。先假設 e = uv ，其中 u 與 v 為 e 的兩端頂點。假設 e 沒有被 G 的任何 EGES 子圖所包含（如果有，那 G 便是可用 EGES 或小樹燈圖覆

蓋的，不特別討論)。

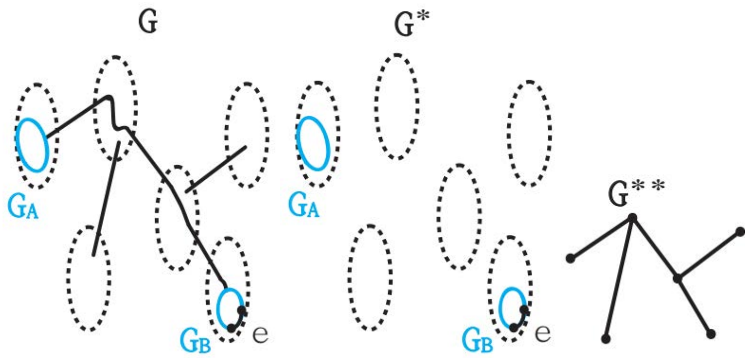
我們對 G 進行一個變換:「將 e 移除並以頂點 w 將頂點 u 與 v 取代，此時所有原本與 u 或 v 相鄰的邊會與 w 相鄰」。

根據假設（e 沒有被任何 EGES 子圖所包含）我們知道 w 不被任何 EGOS 子圖所包含，根據**引理 4.17** 我們知道此 G 經變換後為二部圖。現在將 G 還原，我們應有 G\{e} 為二部圖的結論，也因此 G 不符合 *Akbari* 條件，矛盾。

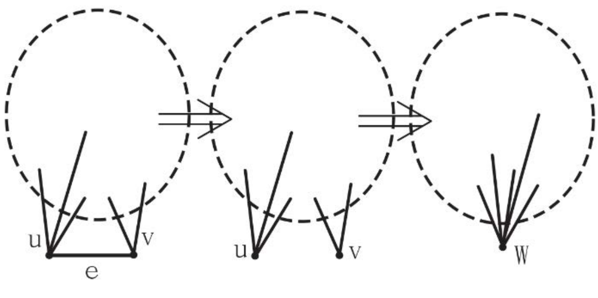
□



（上）當 e 是橋時。存在某個小樹燈圖子圖包含 e。



（中）當 e 不是橋，但 G 有橋時。若 e 不包含於 EGES 子圖，則存在小樹燈圖子圖包含 e



（下）當 G 沒有橋時。若 e 不被 EGES 子圖包含，則 w 不被任何 EGOS 子圖所包含。

圖　4.20　　　　定理 4.19 證明示意圖

定理　4.21

對於一個圖 G ，以下三個敘述兩兩等價

1. G 有零和　⇔　2. G 滿足 *Akbari* 條件 ⇔　3. G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的

證明：

（1.⇒2.）根據**引理 4.8**，若 G 有零和則 G 滿足 *Akbari* 條件。

（2.⇒3.）根據**定理 4.19**，若 G 滿足 *Akbari* 條件則 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的。

（3.⇒1.）**因為小樹燈圖與 EGES 都有零和**，若圖 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，即 G 可以表示若干個小樹燈圖與 EGES 的聯集，則根據**引理 4.3** 知 G 有零和。

□

至此，我們不只單從圖形結構證明零和存在性與 *Akbari* 條件等價，同時也證明完猜想 1.9。更一般地，事實上對於任何一個有零和的圖 G，其每條邊都會被一個 **EGES** 或**小樹燈圖**所包含，即存在不超過$|E(G)|$個子圖$S_1, S_2, S_3, \ldots$為 EGES（零和基數為 2）或小樹燈圖（零和基數為 3）滿足其聯集為 G。故根據**引理 4.3**，我們有以下推論：

推論　4.22

若 G 有零和，則$\mathrm{F(G)} \leq 3^{|E(G)|}$，若 G 又同時沒有橋，則$\mathrm{F(G)} \leq 2^{|E(G)|}$

另一方面，我們能透過**定理 4.21** 以輕易描述一些圖形的零和存在性。以 ETT 為例：

定理　4.23

ETT（定義 3.17）存在零和若且唯若該 ETT 中有至少三個三角形

證明：“⇐”對於 ETT 至少有三個三角形的情況，顯然每條邊都會包含於某個菱形(是個 EGES)，該 ETT 是可被 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，故根據**定理 4.21** 知其有零和。

“⇒”ETT 不是二部圖，而當 ETT 只有一或二個三角形的時候，都存在一條邊使得移除後為二部圖，不滿足 Akbari 條件，故根據**定理 4.21** 知其沒有零和。如圖 4.24 所示。

□

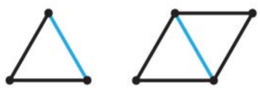


圖　4.24　　沒有零和的三角形 示意圖 (藍色邊移除後為二部圖)

五、尤拉圖的零和基數

章節主旨：到目前為止，我們發現 **EGES** 子圖對於一張圖的零和基數有一定的影響，因此我們也很好奇 **EGOS** 零和基數會是多少。以下是我們的討論策略與結果。

引理　5.1

若圖 G 不是一個二部圖且 G 有零和，則存在一個子圖 S⊆G 滿足 S 是一個小樹燈圖。

證明：我們使用反證法。假設 G 有零和且不是二部圖但不存在小樹燈圖子圖，換句話說，不存在兩個邊互斥的 EGOS 子圖。令 T 為所有 G 中的 EGOS 子圖所構成的交集（根據假設，|E(T)|>0）。任選一邊 e∈E(T)，那麼所有 G 的 EGOS 子圖都要包含 e，也因此 G\{e} 將不存在 EGOS 子圖，根據性質 4.15 知 G\{e}為二部圖。

根據定義 4.6，G 不滿足 Akbari 條件。故根據**定理 4.21** 知 G 不具有零和，矛盾。

□

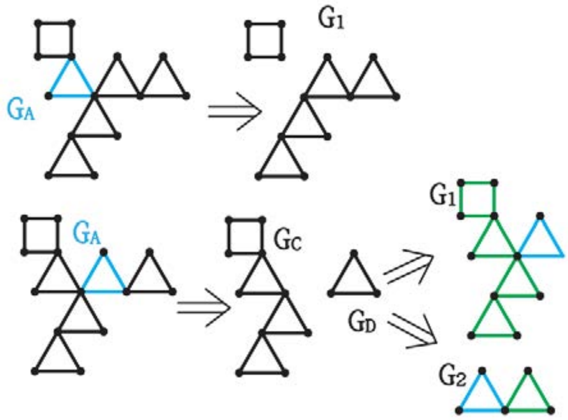
引理　5.2

若 G 是一個有零和的 EGOS，則存在兩個子圖 G_1, $G_2 \subseteq$ G 滿足$G_1 \cup G_2 = G$且G_1, G_2所有連通區都是 EGES。

證明：由性質 4.15 知 EGOS 不可能是二部圖。根據**引理 5.1**，G中必存在小樹燈圖子圖，由定義 4.12 知 G 存在兩個邊互斥的 EGOS 子圖。取G的兩個邊互斥 EGOS 子圖G_A與G_B。由性質 4.10 知$G\backslash G_A$與$G\backslash G_B$的每個連通區都是 EGOS 或 EGES。若 $G\backslash G_A$ 的每個連通區與 $G\backslash G_B$ 的每個連通區都是 EGES，此時令 $G_1 = G\backslash G_A$及 $G_2 = G\backslash G_B$即為所求。

現在假設 $G\backslash G_A$ 及 $G\backslash G_B$ 有其中一個非連通且有一個連通區為 EGOS。不失一般性，假設$G\backslash G_A$不連通。我們令 $G\backslash G_A$ 的其中一個 EGOS 連通區為 G_C，而其他連通區的聯集為 G_D，又因為$|E(G)|$、$|E(G_A)|$和$|E(G_C)|$都是奇數，所以 $|E(G_D)| = |E(G)| - |E(G_A)| - |E(G_C)|$是一個奇數，得$|E(G_A \cup G_C)|$和$|E(G_A \cup G_D)|$為偶數。且因為$G_C$與$G_D$的每個連通區都與$G_A$有頂點重疊，故 $G_A \cup G_C$ 和 $G_A \cup G_D$ 都是連通的，此時令$G_1 = G_A \cup G_C$，$G_2 = G_A \cup G_D$即為所求。

□



(上) $G\backslash G_A$的每個連通區都是 EGES。

令$G_1 = G\backslash G_A$

(下) $G\backslash G_A$非連通且其中一個連通區為 EGOS。

令$G_1 = G_A \cup G_C$，$G2 = G_A \cup G_D$

圖 5.3 定理 5.2 證明示意圖

定理 5.4

若圖 G 是一個有零和的 **EGOS**，那麼 3≤F(G)≤4。

證明：由**定理 1.4** 知，若圖 G 不是 **EGES**，則 F(G)>2，故 3≦F(G)，由**引理 5.2** 知圖 G 存在兩個子圖G_1, $G_2 \subseteq G$滿足G_1, $G_2 \subseteq$ G且G_1, G_2的每個連通區皆為 **EGES**，根據性質 2.3 知 $F(G_1)=F(G_2)=2$，再根據**推論 4.5**，$F(G) \leq F(G_1) \cdot F(G_2)=4$。

□

圖 5.6 的兩張圖即滿足 F(G)=4，故 4 確實為 F(G)的最小上界。至此，我們完全掌握有零和的 EGOS 的零和基數上下界。接著，我們希望刻劃 F(EGOS)=3 與 F(EGOS)=4 的情況。

定理 5.5

若圖 G 是一個有零和的 **EGOS** 且滿足 Δ(G)=4，則 F(G)=4。其中$\Delta(G)$表示圖 G 中最大的頂點度。

證明：我們使用反證法，假設 F(G)≠4，而根據**定理 5.4**，有 F(G)=3。此時假設有一個零和邊權函數 f 滿足 F(G)=3，則對於任何 V(G)中的頂點 v 而言，有以下兩種情況：

(i) 若$deg(v) = 2$，則無序數對$(f(a), f(b)) = (1,-1)$ 或 $(2,-2)$，其中 $N_G(v) = \{a, b\}$

(ii) 若$deg(v) = 4$，則無序數對$(f(a), f(b), f(c), f(d)) = (1,-1,1,-1)$、$(1,-1,2,-2)$, 或 $(2,-2,2,-2)$，其中$N_G(v) = \{a, b, c, d\}$

我們可以發現，在(i)與(ii)中，G **權重為奇數的邊的數量**與**權重為偶數的邊的數量**都是相同的，這代表|E(G)|為偶數，但 G 是有奇數個邊，矛盾。因此 F(G)=4。

□

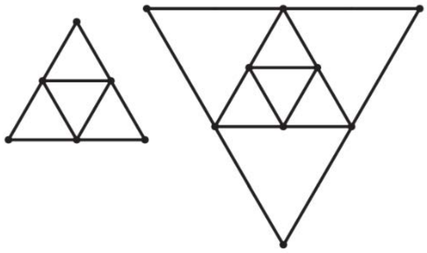


圖　5.6　　　　有零和的且滿足 Δ(EGOS)=4 的兩個例子

令 G 是一個 EGOS。可以觀察到，在圖 5.6 中，原本可能需要使用代數方法證明 F(G)=4，但根據 5.5，我們可以很快地指出 F(G)=4。此外值得注意的是，Δ(G)≥6 不是 F(G)=3 的充要條件（在 EGOS 有零和的前提下），因為我們找到反例如圖 5.7。

圖　5.7　　　　**G 是 EGOS，Δ(G)≥6 但 F(G)=4 的兩個例子**

定理　5.8

G 是一個 EGOS，則 F(G)=3 若且唯若 G 有廣義 AB-labeling

證明：因為尤拉圖不可能會有橋，否則將無法從某個頂點出發，經由每條邊各一次回到該頂點，與性質 4.10 牴觸。而根據**定理 1.4**，F(G)>2。故根據**定理 3.23**，F(G)=3 若且唯若 G 有廣義 AB-labeling。

□

現在我們再次以 ETT（定義 3.17）為例說明 F(EGOS)≤4 的應用。

性質　5.9　ETT 的重要性質

1. 所有三角形只有兩種方向
2. 同個 ETT 中，任意兩個 PT 不會有共用邊，任意兩個 NT 不會有共用邊
3. 所有 PT 的聯集為一個連通的尤拉圖，NT 的聯集也是

縮寫定義（PT&NT）：對於一個 ETT 而言，存在兩系列三角形，同一系列中的任兩個三角形的頂點都朝向同個方向。此時，其中一個方向中的每個三角形我們均各稱作一個 PT（positive triangle），另一個方向我們稱作 NT（negative triangle）。換句話說，ETT 是所

有 PT 與所有 NT 的聯集。舉例來說，圖 3.18 中有 14 個 PT 與 9 個 NT。

引理 5.10

在 ETT 中，如果 PT 和 NT 數量有其中一個是偶數則 F(ETT)≤4

證明：不失一般性假設該 ETT 中 PT 有偶數個，此時由於至少有三個三角形（至少一奇一偶或二奇二偶），因此根據**定理 4.23**，該 ETT 必有零和。

根據性質 5.9 第 2 條，一個 NT 除非在整個鑲嵌的邊界，否則其三個邊必會個別與一個 PT 的邊重疊。因此 ETT 可以表示為「所有 PT 的聯集」與「ETT 的邊界（是一個圈）」的聯集。我們分下面兩種狀況討論：

(1) 假設沒有任何一個 PT 的邊在 ETT 的邊界上時，該 ETT 可以視為所有 NT 的聯集，根據性質 5.9 第 3 條，所有 NT 的聯集是一個 EGOS 或 EGES，又已經確定該 ETT 有零和，所以根據**定理** 5.4 及**定理 1.4** 得 F(ETT)≤4。

(2) 假設存在一個 PT 的邊在 ETT 的邊界上，而根據性質 5.9 第 3 條，所有 PT 的聯集是連通的，另根據假設，我們知道「所有 PT 的聯集」是一個 EGES，也就是其零和基數為 2（根據**定理 1.4**）。當「ETT 的邊界」是一個偶圈時，根據**引理 4.3** 可知 F(ETT)≤2×2=4。另外，當 ETT 的邊界是個奇圈的時候（令此奇圈為C_1），我們在邊界上取一個 PT（令此三角形為 T），由於|E(T)|=3 為奇數，又 ETT 的三角形都有重疊邊，因此必存在一個圈$C_2 \neq C_1$滿足$C_1 \cup T = C_2 \cup T$且|E(T)|為偶數。如此一來，「所有 PT 的聯集」與 C_2的聯集亦會是整個 ETT，也同樣會得到 F(ETT)≤ 2×2=4。

□

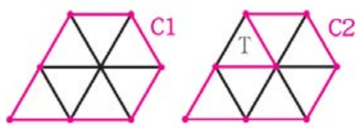


圖 5.11 邊界上有 PT 且 PT 有偶數個時，構造邊界上偶圈 範例

肆、研究結果

本研究的主要研究結果為：定理 3.7、推論 3.16、定理 4.21、推論 4.22、定理 5.4、定理 5.8。而上述可推論下表。左右兩表分別呈現當 G 是有零和的(2,3)圖以及當 G 是有零和的尤拉圖

時，零和基數的分布情形。

	G 沒有橋	G 有橋		G 是 EGES	G 是 EGOS
G 有 AB-labeling	F(G)≤3	F(G)≥5 or F(G)=3	G 有廣義 AB-labeling	F(G)=2	F(G)=3
G 沒有 AB-labeling	F(G)≥4	F(G)≥4	G 沒有廣義 AB-labeling	不存在	F(G)=4

此外我們在定理 3.20、圖 3.23、定理 4.23、定理 5.10 中，將[6]、[12]、[13]討論的圖形以我們的方式另證其零和基數或刻劃更完整。

伍、討論

在此章節，我們將分析本研究的主要結果並提出未來可持續發展的方向。

一、零和基數的上界

猜想 1.1([2])猜測所有有零和的圖其零和基數都不超過 6，而在定理 1.3 ([2])提出「若所有有零和的(2,3)圖的零和基數都不超過 6，則所有有零和的圖都不超過 6」，這也是文獻[5]針對(2,3)圖討論的原因。我們期望能為猜想 1.1 貢獻一份心力，因此於定理 4.22 提出一個變數的零和基數上界，這也是我們於定理 4.21 解決猜想 1.9 的其中一個價值所在。**（未來展望一）**<u>考量一個圖是否能表示為「有限個」樹燈圖（零和基數不超過 5）與 EGES（零和基數=2）的聯集，將有助於找到一個零和基數的常數上界</u>，即使其值可能大於 6。實際上我們曾猜測「所有有零和的(2,3)圖都能表示為不超過 1 個 EGES 與 1 個小樹燈圖的聯集或 2 個 EGES 的聯集」，因為如此一來根據引理 4.3，所有(2,3)圖的零和基數都會在 2×3 以下。但實際上圖 3.3 就是一個反例。所以「有限個」的實際數量仍有待商榷。

二、關於 EGOS，零和基數=3 的猜想

若 G 是有零和的 EGOS，根據定理 5.4，F(G)∈{3,4}，我們希望能找到 F(G)=3 時更明確的圖形結構，經過不少觀察之後，**（未來展望二）**<u>我們猜測一個尤拉圖 G 的零和基數為 3 若且唯若 G 本身是一個小樹燈圖</u>。如圖 4.13 之右圖即為一個同時為 EGOS 的小樹燈圖。這樣個圖是一定會有廣義 AB-labeling 的，但反過來仍不確定。

三、關於零和基數=3 的判斷

在文獻[5]中，作者針對(2,3)圖提出了零和基數=3 的充要條件，而我們除了以自己的方式寫出充要條件，亦透過細分與平滑刻劃出充要條件與 3-正則圖的完美匹配的關聯。若一個圖有 AB-labeling，則其在邊上標 A 與 B 的方法數只有兩種，因此可以很快判斷一個圖是否有 AB-labeling。

承繼討論「一」，在(2,3)圖的討論有助於一般圖零和的刻畫。我們目前已將 AB-labeling 推廣至一般圖的定義（廣義 AB-labeling），也實際給出使用廣義 AB-labeling 判斷圖形 F(G)>3 的例子。同時證明對於沒有橋的圖而言，廣義 AB-labeling 是 F(G)=3 的充要條件。所以**（未來展望三）**<u>了解如何判斷廣義 AB-labeling 有機會能更有效判斷零和基數。</u>

陸、結論

一、在本研究，我們僅從圖形結構論證零和存在條件：對於文獻[2]中「圖 G 存在零和若且唯若 G 滿足 Akbari 條件」我們給予另一種證明，同時解決文獻[5]提出的開放問題二並更一般化地給出「所有存在零和的圖都可以表示為若干個 EGES 與小樹燈圖的聯集」。也得到推論「若 G 有零和，則 F(G) ≤ $3^{|E(G)|}$，若 G 又同時沒有橋，則 F(G) ≤ $2^{|E(G)|}$」。

二、本研究使用全新的定義描述(2,3)圖零和基數為 3 的條件並推廣至一般圖：我們證明(2,3)圖滿足兩種雙色標籤等價於 F(G)=3，同時證明當(2,3)圖沒有橋時，G 滿足一種雙色標籤（AB-labeling）等價於 F(G)=3。相比文獻**[5]**能更快判斷是否 F(G)=3。同時 AB-labeling 可以推廣至廣義 AB-labeling 並用於一般圖。

三、本研究刻劃了尤拉圖的零和基數：證明了對於有零和的 EGOS 都有 F(EGOS)≤4，且可利用廣義 AB-labeling 判斷 F(EGOS)=3 及 F(EGOS)=4。

四、本研究構造或引用一些變換技巧輔助證明上述結果：平滑、細分、吹泡泡變換等。

五、本研究使用上述結果將前人關於鑲嵌圖形的零和基數刻劃更完整。

六、針對零和基數判斷方式改進以及零和基數上界的刻劃於「伍」提出三個未來展望。

柒、參考文獻資料

[1] 張鎮華，蔡牧村 (2020)。*演算法觀點的圖論*（修訂版）。台大出版中心。

[2] S. Akbari, N. Gharaghani, G.B. Khosrovshahi, A. Mahmoody (2009). *On zero-sum 6-flows of* *graphs*. Linear Algebra Appl. 430, pp. 3047-3052.

[3] S. Akbari, N. Ghareghani, G. B. Khosrovshahi, S. Zare (2012), *A note on zero-sum 5-flows in regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics 19(2), P7.

[4] A. Dehghan and M.-R. Sadeghi(2015). *The complexity of the zero-sum 3-flows. Inform. Process*. Lett., 115(2):316 – 320.

[5] Z.-K. Eu (2016). *Zero-Sum Flow Numbers of (2,3)-Graphs* . Master's thesis, Department of Applied Mathematics College of Science National Chiao Tung University.

[6] M. Naeem, M. Imran, S. Ahmad, M. K. Siddiqui (2019). *Zero-sum flow number of octagonal grid and generalized prism*, Proyecciones (Antofagasta. On line) vol. 39, n.5 pp. 1027-1038.

[7] J. Petersen (1891). *Die theorie der regularen graphs*. Acta mathematica (15) pp. 193-220

[8] M. A. Rashid, S. Ahmad, M. F. Hanif, M. K. Siddiqui, M. Naeem (2020). *Zero-sum flow number of categorical and strong product of graphs*. Transaction on combinatorics. Vol. 9 No. 4 pp. 181-199

[9] P. D. Seymour (1981). *Nowhere-zero 6-flows.* J. Comb. Theory Ser. B 30, pp. 130-135.

[10] T.-M.Wang (2020). *Report on Zero-Sum Flow Number of Hanoi Graphs(a.k.a. Sierpinski Graphs)*. Department of Applied Mathematics Tunghai University.

[11] T.-M.Wang, S.-W. Hu (2012). *Zero-Sum Flow Numbers of Regular Graphs*. FAW-AAIM 2012. Lecture Notes in Computer Science(LNCS) 7285, pp. 269-278

[12] T.-M.Wang, S.-W. Hu, G.-H. Zhang (2014). *Zero-Sum Flow Numbers of Triangular Grids*. FAW-AAIM 2014. LNCS, vol. 8497, pp. 264 – 275.

[13] T.-M.Wang, G.-H. Zhang (2013). *Zero-Sum Flow Numbers of Hexagonal Grids*. FAW-AAIM 2013. LNCS, vol. 7924, pp. 339 – 349.

[14] D. B. West (2002). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., Indian Braneh.

[15] O. Zyka (1987). *Nowhere-zero 30-flow on bidirected graphs.* Thesis, Charles University, Praha, Kamdimatia Series 87-26.

【評語】050417

本作品討論圖上 zero-sum flow 的問題，在 G 的每個邊上各給一個非零整數標號，且每個頂點所連出的邊標號總和為 0，則稱圖 G 有零和流。本作品引用大量的名詞與文獻以及圖論的背景知識，討論了一個圖論類的零和流問題。雖然是有解決了一篇碩士論文中留下的一個問題，但核心的工具是把已知的多個結果用簡單的推論連結起來，原創想法較為不足。是較為可惜的地方。

作品簡報

邊權與零的親密關係

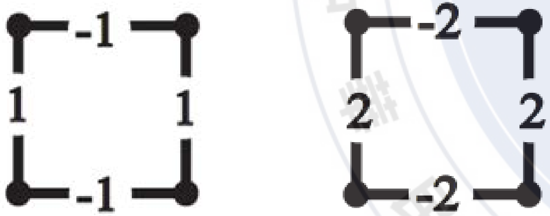
高級中等學校組
數學科

零和與零和基數 定義：

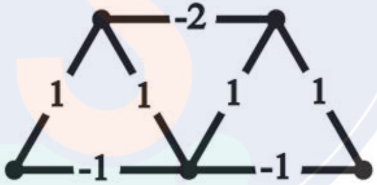
若函數f : E(G) ⟶ {±1,±2,±3,...,±(k−1)} 滿足對於所有頂點v∈V(G)，都有

$$\sum_{e\in N(v)} f(e) = 0$$

則稱G有零和，且以F(G)表示對G而言最小的k值，同時稱作零和基數



F(G)=2



F(G)=3

F(G)=∞

研究動機

- 生活中的標號問題
- 老師提出的問題
- 由著色問題演化而來、未解的猜想

☆ 前人得到的結果

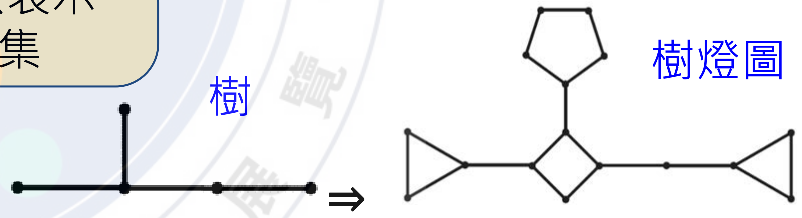
★ 本研究得到的結果

前人重要定理與猜想

☆ **定理([11])**：F(G)=2若且唯若G是偶數邊尤拉圖

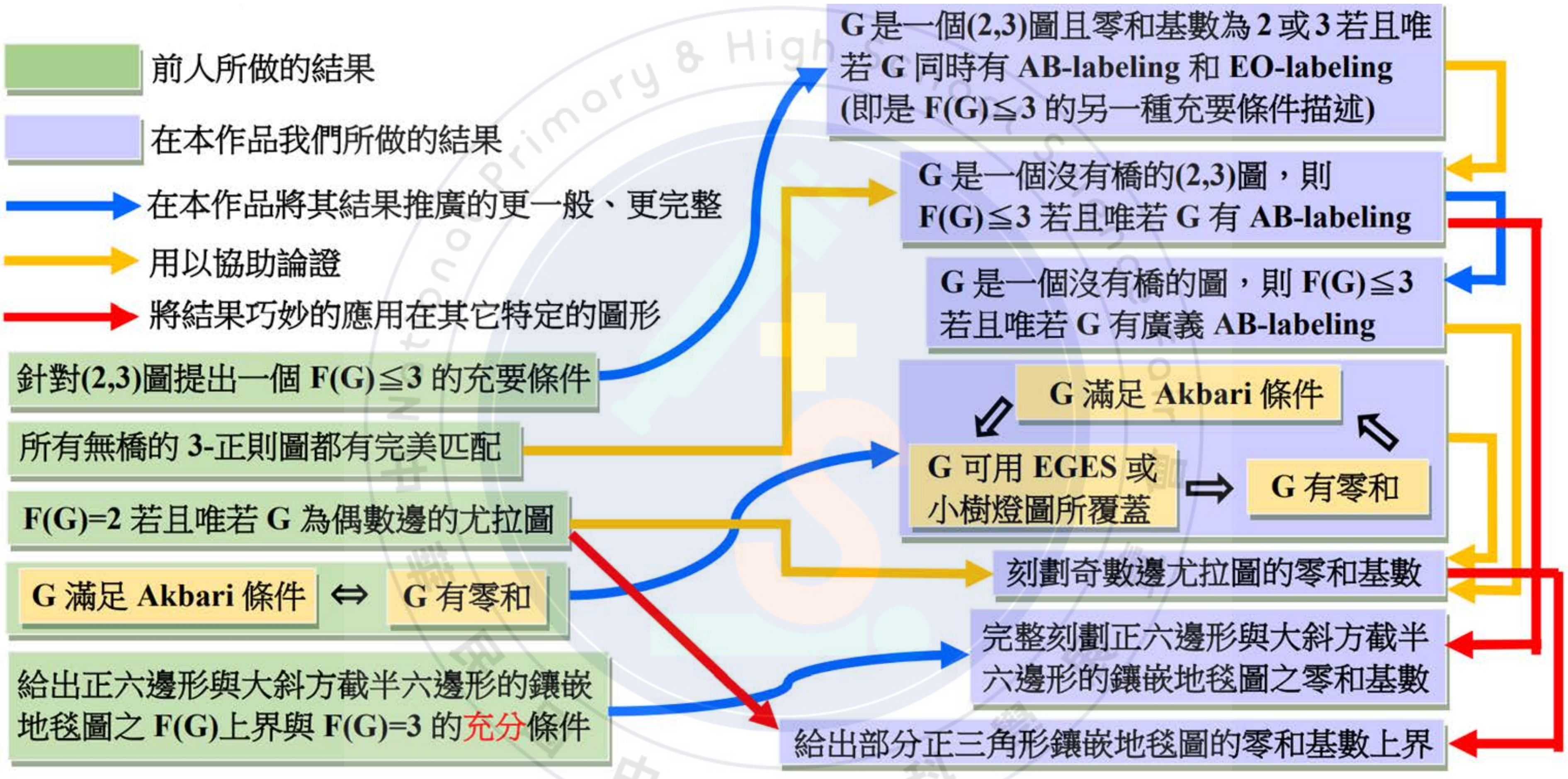
☆ **猜想([2] ZSC零和猜想)**：若G有零和，則F(G) ≤ 6

☆ **猜想([5] 開放問題二)**：所有有零和的(2,3)圖都可以表示為若干個偶數邊尤拉圖(EGES)與若干個樹燈圖的聯集



研究目的

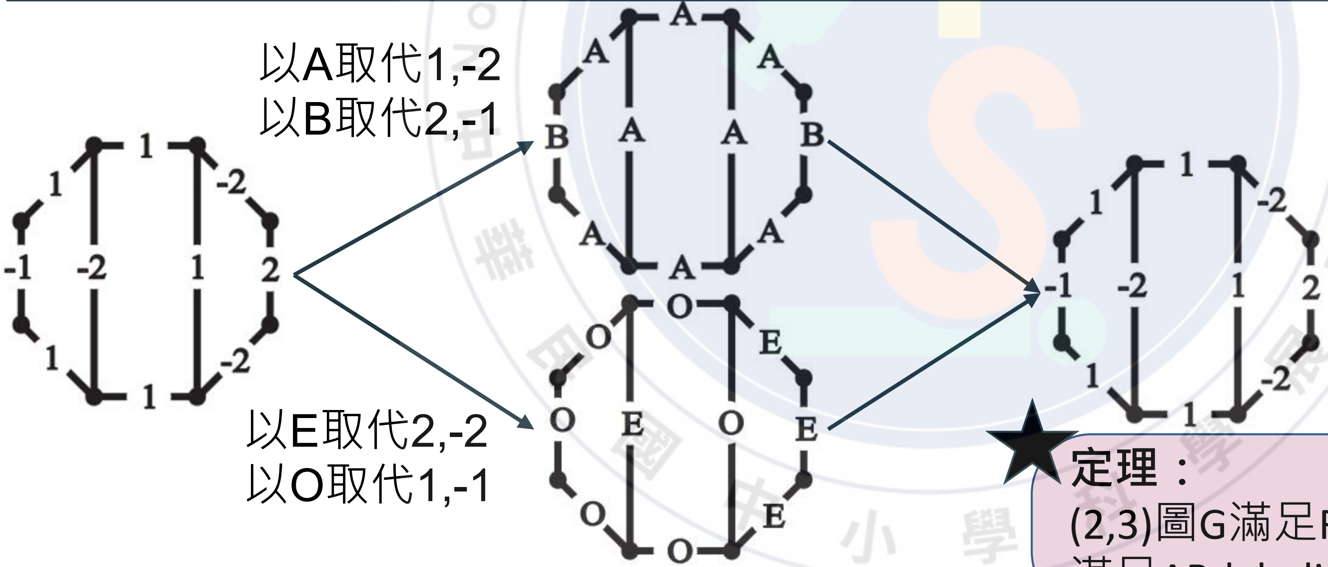
➢ 探討另一個圖形零和基數為3的充要條件並推廣
➢ 探討圖形覆蓋與零和基數之間的關係，並解決文獻[5]中所提出的開放問題
➢ 探討尤拉圖的零和基數


前人所做的結果
在本作品我們所做的結果
在本作品將其結果推廣的更一般、更完整
用以協助論證
將結果巧妙的應用在其它特定的圖形
針對(2,3)圖提出一個 F(G)≦3 的充要條件
所有無橋的 3-正則圖都有完美匹配
F(G)=2 若且唯若 G 為偶數邊的尤拉圖
G 滿足 Akbari 條件 ⇔ G 有零和
給出正六邊形與大斜方截半六邊形的鑲嵌地毯圖之 F(G)上界與 F(G)=3 的充分條件
G 是一個(2,3)圖且零和基數為 2 或 3 若且唯若 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling (即是 F(G)≦3 的另一種充要條件描述)
G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 F(G)≦3 若且唯若 G 有 AB-labeling
G 是一個沒有橋的圖，則 F(G)≦3 若且唯若 G 有廣義 AB-labeling
G 滿足 Akbari 條件
G 可用 EGES 或小樹燈圖所覆蓋
⇨
G 有零和
刻劃奇數邊尤拉圖的零和基數
完整刻劃正六邊形與大斜方截半六邊形的鑲嵌地毯圖之零和基數
給出部分正三角形鑲嵌地毯圖的零和基數上界

(2,3)圖G滿足F(G)≤3 的充要條件

(定義) 若有一個圖G存在一種邊上標A、B的方式使得下列成立則稱G有AB-labeling
deg=2的頂點，其鄰邊會是A、B
deg=3的頂點，其鄰邊會是A、A、A或B、B、B。

(定義) 若有一個圖G存在一種邊上標E、O的方式使得下列成立則稱G有EO-labeling
deg=2的頂點，其鄰邊會是O、O或E、E
deg=3的頂點，其鄰邊會是E、O、O。



	A	B
E	-2	2
O	1	-1

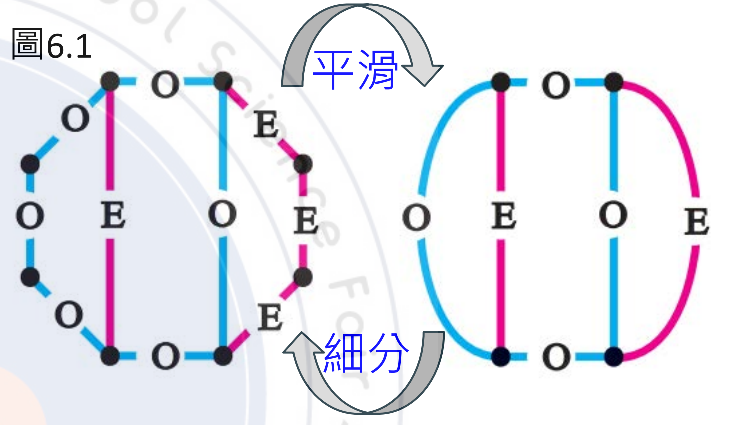
★ **定理：**
(2,3)圖G滿足F(G)≤3⇔G同時滿足AB-labeling與EO-labeling

沒有橋的(2,3)圖G滿足F(G)≤3 ⇔ G有AB-labeling

定理：(Petersen 1891)
若3正則圖沒有橋，則該圖有完美匹配

推論：對於一個沒有橋的(2,3)圖G，
F(G)≤3若且唯若G有AB-labeling

圖6.1

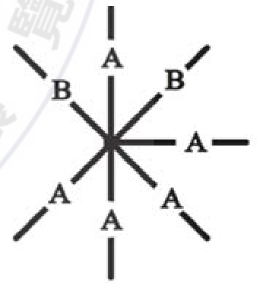


F(G)≤3的必要條件 推廣至一般圖

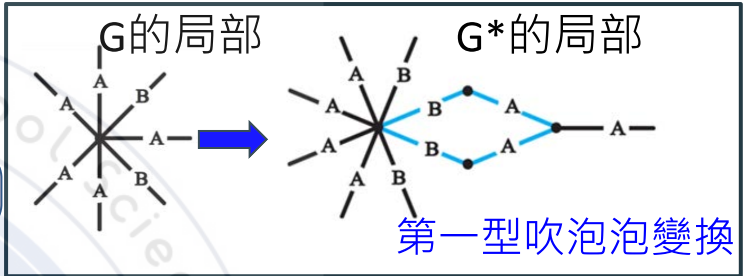
(定義)廣義AB-labeling：在每個邊標上A或B，使得每個頂點連出的邊中，A與B的數量相差3的倍數

引理：若F(G)≤3則G有廣義AB-labeling

圖6.2

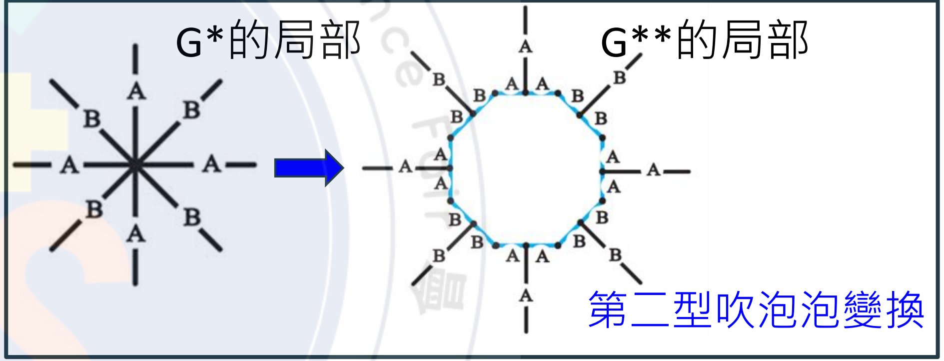


無橋圖F(G)=3 ⇔ 廣義AB-labeling



定理：圖G沒有橋： 滿足F(G)≤3 ⇔ G有廣義AB-labeling

G沒有橋、有廣義AB-labeling
G**是沒有橋且是滿足AB-labeling的(2,3)圖
⇒ F(G**)=3 ⇒ F(G*)=3 ⇒ F(G)=3



與文獻比較

	F(G)=3的充要條件 及 判斷方式	討論對象
文獻[4]	進行三次平滑再檢驗變換後的圖形結構(二部圖結構)	(2,3)圖
文獻[5]	判斷323-path再著紅、藍色	(2,3)圖
我們	AB與EO標邊可獨立判斷，G沒有橋時只需判斷AB	(2,3)圖+推廣至無橋一般圖

零和存在性 充要條件

([2]) G滿足Akbari條件 ⇔ G有零和

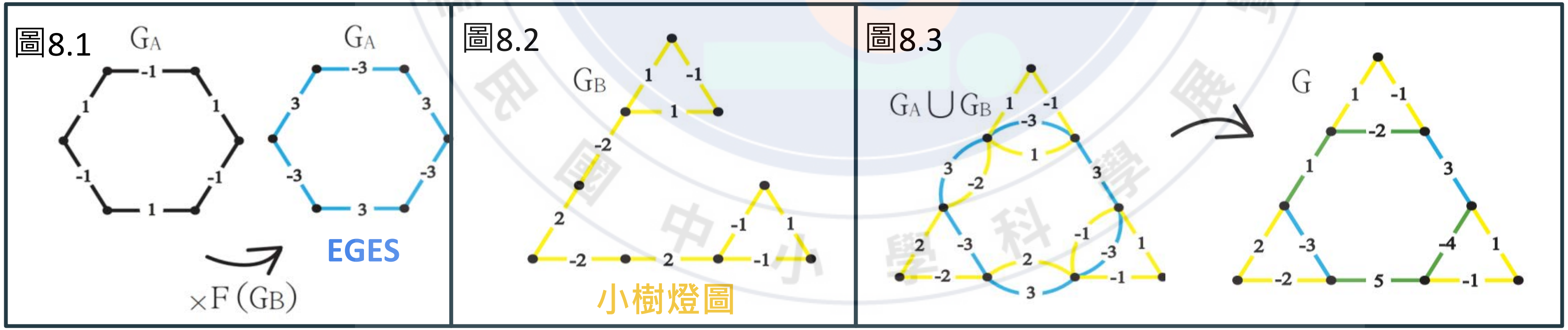
我們的目標：

G滿足Akbari條件 ⇒ G是可用EGES及小樹燈圖覆蓋的 ⇒ G有零和 ⇒ G滿足Akbari條件

猜想([5] 2016 開放問題二)：所有有零和的(2,3)圖都可以表示為若干個偶數邊尤拉圖(EGES)與若干個樹燈圖的聯集

(定義)可用EGES與小樹燈圖覆蓋的：若圖G滿足對於所有e∈E(G)，都存在一個S⊆G使得S是一個EGES或小樹燈圖滿足e∈E(S)，則稱G是可覆蓋的

G是可用EGES與小樹燈圖覆蓋的 ⇒ G有零和



零和存在性 充要條件

Akbari條件([2])：若圖G滿足下列則稱G滿足Akbari條件

- ➢ 當G是二部圖時，G沒有橋(對應情況一)
- ➢ 當G不是二部圖時，對於所有e∈E(G)，G\{e}的每一個連通區都不可為二部圖(對應情況二三)

★ G有零和 ⇒ G滿足Akbari條件

★ G滿足Akbari條件 ⇒ G是可用EGES與小樹燈圖覆蓋的

若G有零和且不滿足Akbari條件(反證法)，則：

(情況一)G是一個有橋的二部圖

(情況二)G是一個有橋的非二部圖

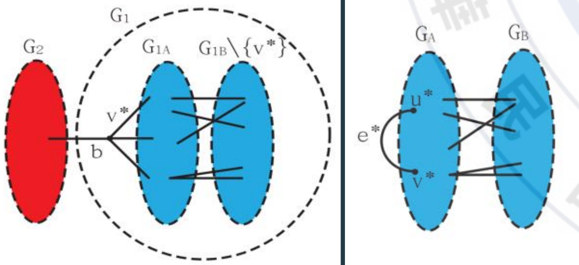
(情況三)G是一個沒有橋的圖

若G滿足Akbari條件，則對於G中任意邊e

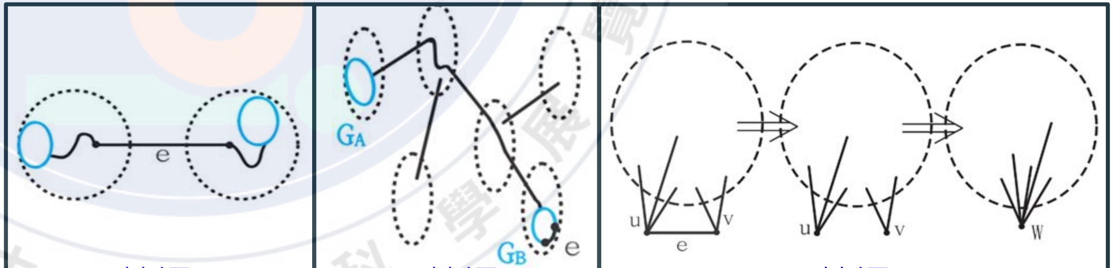
(情況A)e是橋

(情況B)e不是橋，但G有橋

(情況C)G沒有橋(e也不會是橋)



情況一、二　　情況三

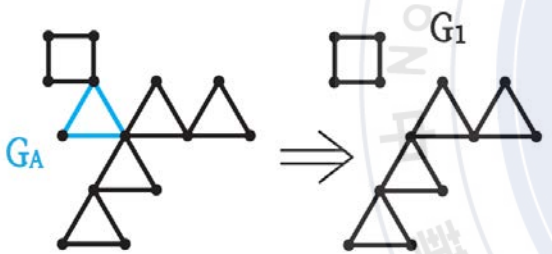


情況A　　情況B　　情況C

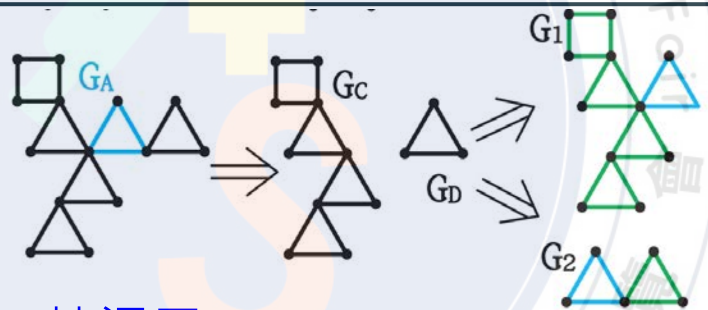
奇數邊尤拉圖(EGOS)的零和基數

★**引理**：有零和的非二部圖必存在小樹燈圖子圖。

★**定理**：EGOS若有零和，則其必存在兩個子圖G_1 ,G_2滿足每個連通區都是EGES，且$G_1 \cup G_2$是整個EGOS



(情況一) $F(G \backslash G_A)=F(G_1)=2$



(情況二) $F(G_1)=F(G_2)=2$

★**推論**：EGOS的零和基數都不超過4

★**定理**：圖G是奇數邊尤拉圖： 滿足$F(G)=3 \Leftrightarrow$ G有廣義AB-labeling

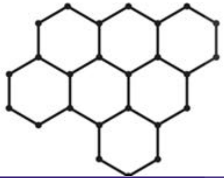
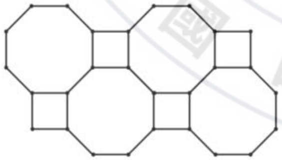
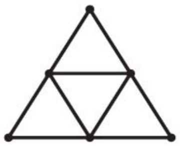
研究結果與結論

本研究經過論證確定以下三件事情等價
1. G有零和
2. G滿足Akbari條件
3. G是可用EGES及小樹燈圖覆蓋的

(2,3)圖	沒有橋	有橋
	有EO	沒有EO
有AB	$F(G)\le 3$	$F(G)\ge 5$
沒有AB	$F(G)\ge 4$	$F(G)\ge 5$

一般圖	有廣義AB	沒有廣義AB
G沒有橋	$F(G)\le 3$	$F(G)\ge 4$
G有橋	$F(G)\ge 3$	$F(G)\ge 4$

尤拉圖	偶數邊	奇數邊
有廣義AB	$F(G)=2$	$F(G)=3$
沒有廣義AB	不存在	$F(G)=4$

圖形	正六邊形鑲嵌	截半正方形鑲嵌	輪子圖	扇子圖	正三角形鑲嵌(ETT)
前人	[6] [10] $F(G)=3$充分條件		[12] 完整刻劃F(G)		[12] 給出特定圖形F(G)的值
我們	$F(G)=3$充要條件完整刻劃		提供另一種證明手法		給出多數ETT圖形的F(G)上界
圖示					

結論 → 未來展望

可用EGES與樹燈圖覆蓋的⇔有零和

無橋的一般圖F(G)=3⇔有廣義AB-labeling

為零和研究 提供純圖形結構的證明手法以及變換技巧

利用EGES與樹燈圖覆蓋的想法得到F(G)的常數上界

(猜想)尤拉圖 G 滿足F(G)=3 ⇔ G 本身是一個小樹燈圖

刻劃有橋的一般圖F(G)=3的情形

刻劃F(G)=4、F(G)=5的情形

主要參考文獻

[2] S. Akbari, N. Gharaghani, G.B. Khosrovshahi, A. Mahmoody (2009). *On zero-sum 6-flows of graphs*. Linear Algebra Appl. 430, pp. 3047-3052.

[5] Z.-K. Eu (2016). *Zero-Sum Flow Numbers of (2,3)-Graphs* . Master's thesis, Department of Applied Mathematics College of Science National Chiao Tung University.

[11] T.-M.Wang, S.-W. Hu (2012). *Zero-Sum Flow Numbers of Regular Graphs*. FAW-AAIM 2012. Lecture Notes in Computer Science(LNCS) 7285, pp. 269-278

[14] D. B. West (2002). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., Indian Braneh.