

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

佳作

050416

柏拉圖立體疊合體之旋轉軸證明與應用

學校名稱：國立屏東女子高級中學

作者： 高二 鄭金玉 高二 謝慧筠 高二 李虹靚	指導老師： 陳哲成
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：疊合體、旋轉軸、鏡面對稱

## 摘要

本研究由柏拉圖立體疊合體出發，分解其結構為旋轉軸與單一柏拉圖立體，接著利用幾何推論以及向量證明在柏拉圖立體中存在的旋轉軸，並命名為  $n$  重軸。在了解旋轉軸存在於柏拉圖立體中的情形與其分布位置後嘗試利用 SketchUp 軟體將柏拉圖立體圖形以特定旋轉軸旋轉複製形成正多面體疊合體，本研究藉由柏拉圖立體所形成的相異疊合體型態，進而發現其對稱特性與對稱面存在的共同性，並推導出疊合體其對稱面總數之通式。

## 壹、前言

### 一、研究動機

在一次學校開設的 SketchUp 軟體研習中，由授課講師林義強老師給予的講義中關於疊合體的特殊結構與其製作方法發想，期望找出各種疊合體製作的基礎規則，因此在課後自行操作軟體製作疊合體並探討背後隱藏的數學性質。

### 二、研究目的

- (一) 探討在柏拉圖立體中存在的旋轉軸種類與數量。
- (二) 探討以特定旋轉軸為法向量時，以平面上等分角度旋轉形成之疊合體數量。
- (三) 探討研究(二)中疊合體之對稱面個數。

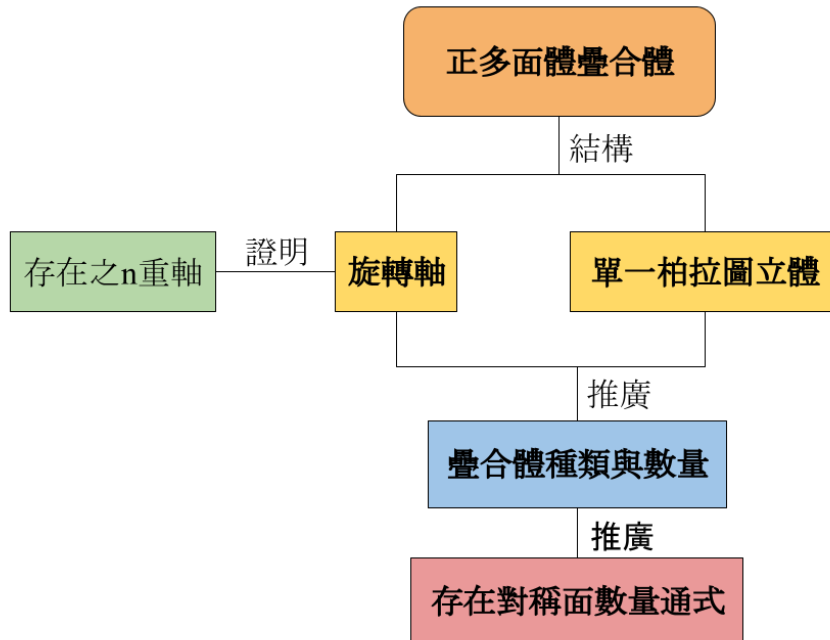
## 貳、研究設備及器材

一、硬體：紙、筆、電腦。

二、軟體：SketchUp (3D 繪圖軟體)、AMA (Activate Mind and Attention)。

## 參、研究過程與方法

### 一、研究流程



### 二、名詞定義

(一) SketchUp 空間中三個軸向，實線為正，虛線為負。

1.  $x$  軸：紅色軸。
2.  $y$  軸：綠色軸。
3.  $z$  軸：藍色軸。

(二) 疊合體：是數個在空間中互相交錯疊合而成的形體，由本身與幾個多面體共享的一個共同幾何中心的多面體。

1. 正多面體：柏拉圖多面體。
2. 正多面體疊合體：是一個共心的對稱正多面體疊合體。

(三) 鏡面對稱：一物件和其變換的像為不可分時，即稱此為鏡面對稱。

(四) 模型框架：正立方體模型放大 1.5 倍後的正立方體稜線。

(五) 正多面體中的  $n$  重軸：一立體模型以此軸為旋轉軸，旋轉  $\frac{1}{n}$  圈，即  $\frac{360^\circ}{n}$ ，與原立體模型重合，稱此軸為正多面體中的  $n$  重軸。

### 三、研究主題：

(一) 利用幾何推論在柏拉圖立體中存在的旋轉軸。

1. 旋轉軸存在特性：

(1) 通過幾何中心  $O$  點。

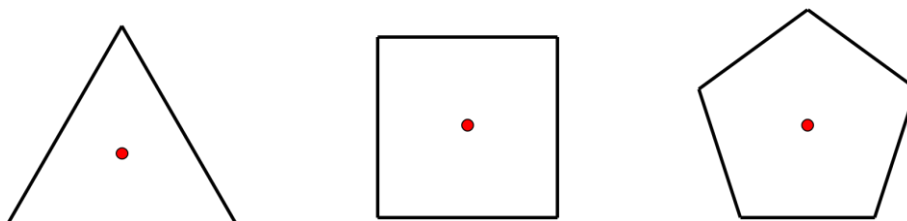
(2) 以旋轉軸作法向量的平面，與柏拉圖立體之表面相交可能為點或線，同一平面上的點或線皆與法向量等距。

(3) 柏拉圖立體中存在三種立體面：正三角形、正方形、正五邊形。

(4) 柏拉圖立體中與頂點相接的面有三種情形：頂點交於三面、頂點交於四面、頂點交於五面。

2. 根據上述特性可知， $n$  重軸與柏拉圖立體相交有五種情形：

(1) 有一面上與軸交於一點，如圖(一)。



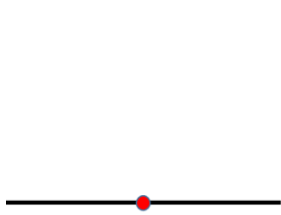
圖(一)

(2) 有一邊與軸交於一點，如圖(二)。

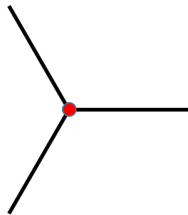
(3) 有三邊與軸交於一點，如圖(三)。

(4) 有四邊與軸交於一點，如圖(四)。

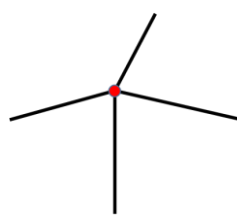
(5) 有五邊與軸交於一點，如圖(五)。



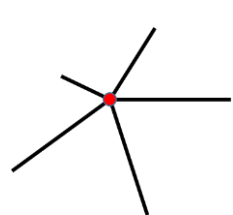
圖(二)



圖(三)



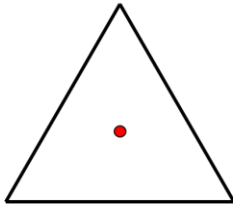
圖(四)



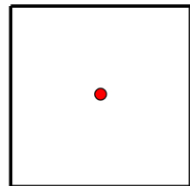
圖(五)

3. 設交點為  $P$ ，則  $\overline{OP}$  為旋轉軸。通過交點  $P$ ，作一平面  $E$  垂直  $\overline{OP}$ 。

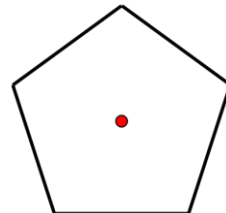
(1) 將與  $P$  點相交的邊投影至平面  $E$  上，則平面  $E$  有以下 7 種情形：



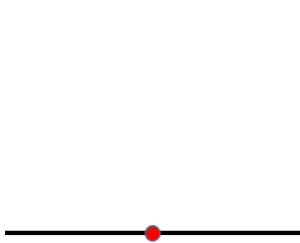
圖(六)



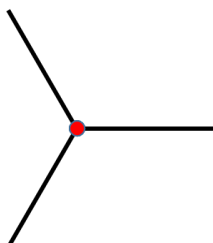
圖(七)



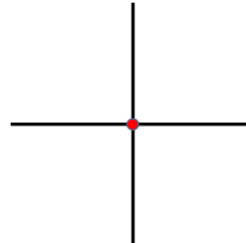
圖(八)



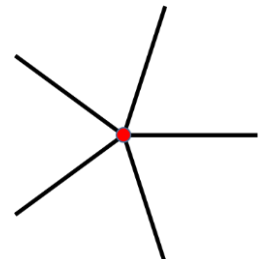
圖(九)



圖(十)



圖(十一)



圖(十二)

- (2) 分析上述平面上向量，可以發現圖(九)中單一直線向量經過旋轉  $180^\circ$  可以與原向量重合，因此該軸為二重軸；圖(六)與圖(十)中單一直線向量經過旋轉  $120^\circ$  可以與原向量重合，因此該軸為三重軸；圖(七)與圖(十一) 中單一直線向量經過旋轉  $90^\circ$  可以與原向量重合，因此該軸為四重軸；圖(八)與圖(十二)中單一直線向量經過旋轉  $72^\circ$  可以與原向量重合，因此該軸為五重軸。
- (3) 承 (2)，得證柏拉圖立體中旋轉軸存在二、三、四、五重軸。

#### 4. 柏拉圖立體中：

- (1) 觀察正四面體，立體與旋轉軸可能存在交點情況有圖(一)、圖(二)，由研究(一)之 3.可知向量平移後存在圖(六)、圖(九)、圖(十)，推得存在二重軸、三重軸，四重軸和五重軸不存在。
- (2) 觀察正六面體，立體與旋轉軸可能存在交點情況有圖(一)、圖(二)、圖(三)，由研究(一)之 3.可知向量平移後存在圖(七)、圖(九)、圖(十)，推得存在二重軸、三重軸、四重軸，而五重軸不存在。
- (3) 觀察正八面體，立體與旋轉軸可能存在交點情況有圖(一)、圖(二)、圖(四)，由研究(一)之 3.可知向量平移後存在圖(六)、圖(九)、圖(十一)，推得存在二重軸

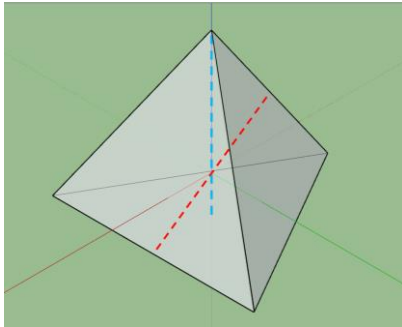
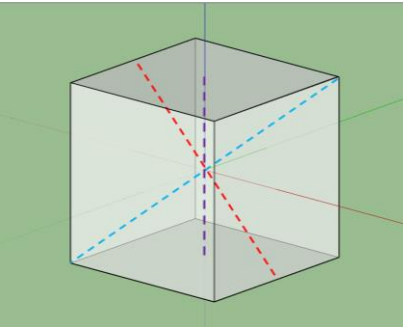
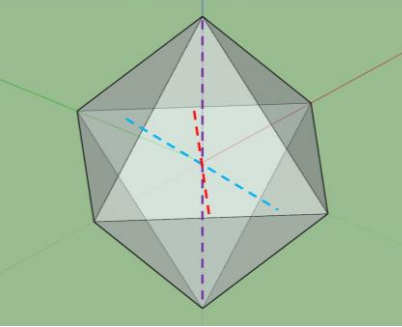
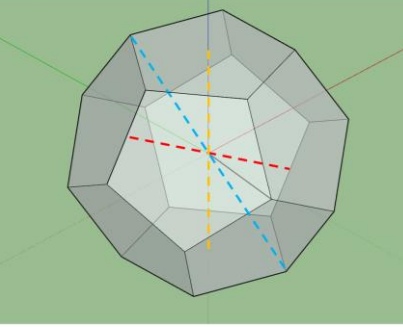
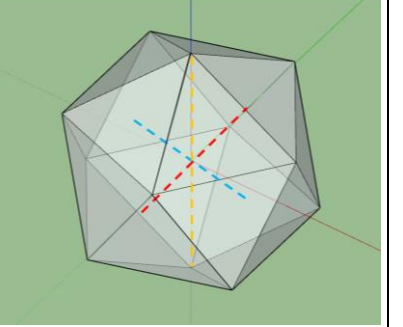
、三重軸、四重軸，而五重軸不存在。

(4) 觀察正十二面體，立體與旋轉軸可能存在交點情況有圖(一)、圖(二)、圖(三)，

由研究(一)之 3.可知向量平移後存在圖(八)、圖(九)、圖(十)，推得存在二重軸、  
三重軸、五重軸，而四重軸不存在。

(5) 觀察正二十面體，立體與旋轉軸可能存在交點情況有圖(一)、圖(二)、圖(五)，

由研究(一)之 3.可知向量平移後存在圖(六)、圖(九)、圖(十二)，推得存在二重  
軸、三重軸、五重軸，而四重軸不存在。

<p>正四面體</p>  <p>圖(十三)</p>	<p>正六面體</p>  <p>圖(十四)</p>	<p>紅色虛線為二重軸 藍色虛線為三重軸 紫色虛線為四重軸 橘色虛線為五重軸</p>
<p>正八面體</p>  <p>圖(十五)</p>	<p>正十二面體</p>  <p>圖(十六)</p>	<p>正二十面體</p>  <p>圖(十七)</p>

表(一) 柏拉圖立體中存在的旋轉軸

柏拉圖立體 \ 旋轉軸	二重軸	三重軸	四重軸	五重軸
正四面體	對稜中點連線 3 組	頂點與對面中心連線 4 組	不存在	不存在
正六面體	對稜中點連線 6 組	對角頂點連線 4 組	對面中心點連線 3 組	不存在
正八面體	稜線中點連線 6 組	對面中心點連線 4 組	對角頂點連線 3 組	不存在
正十二面體	稜線中點連線 15 組	對角頂點連線 10 組	不存在	對面中心點連線 6 組
正二十面體	稜線中點連線 15 組	對面中心點連線 10 組	不存在	對角頂點連線 6 組

表(二) 柏拉圖立體中存在旋轉軸

(二) 利用向量證明在柏拉圖立體中存在的旋轉軸：

以下證明為選定柏拉圖立體中任一存在之旋轉軸為代表。

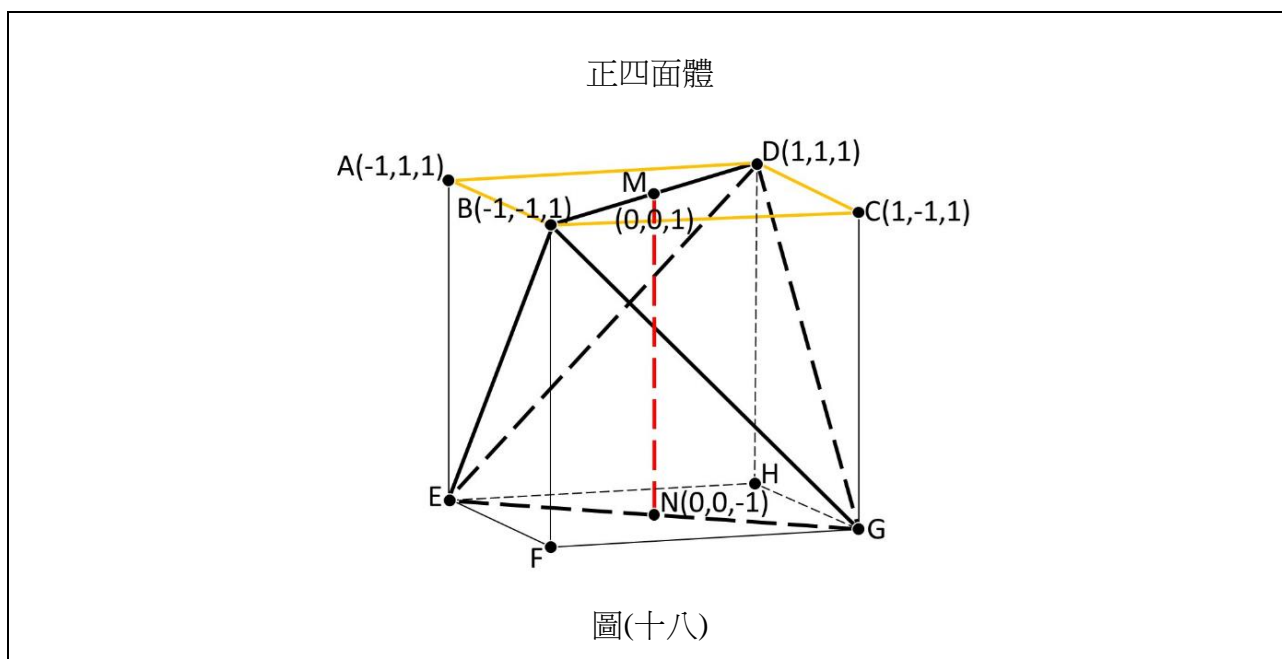
(設黃金比例  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ )



1. 向量證明的通則：

- (1) 選定柏拉圖立體所有邊長的投影面。
- (2) 利用存在於投影面上的兩向量與選定旋轉軸垂直的特性。
- (3) 證明選定的旋轉軸即為該投影面的法向量。
- (4) 計算兩向量的旋轉夾角。
- (5) 根據名詞定義(五)證明選定的旋轉軸為正多面體中的  $n$  重軸，並求得  $n$  值。

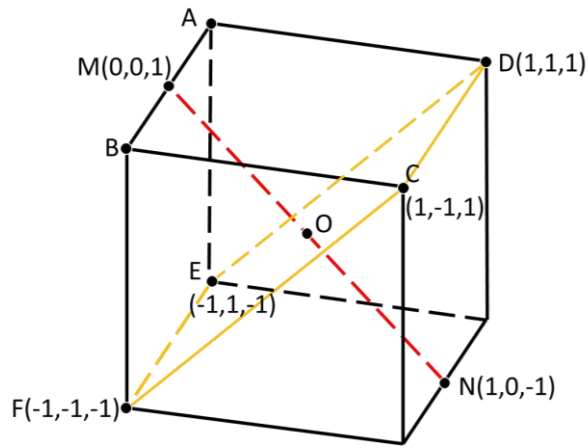
2. 二重軸



- (1) 將正四面體所有邊長投影至  $ABCD$  平面，因為  $\overline{MN} \perp \overline{AB}$  又  $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ ，故平面  $ABCD$  上通過點  $M$  的法向量為  $\overline{MN}$ ，設  $\overline{MD}$  與  $\overline{MB}$  的夾角為  $\theta_1$ ，因為  $\frac{\overline{MD} \cdot \overline{MB}}{|\overline{MD}| |\overline{MB}|} = \frac{(1,1,0) \cdot (-1,-1,0)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -1$ ，得  $\theta_1 = 180^\circ$ ，根據名詞定義(五)，正四面體以  $\overline{MN}$  為旋轉軸旋轉  $180^\circ$  即可與原正四面體重合，所以  $\overline{MN}$  為正四面體的二重軸。

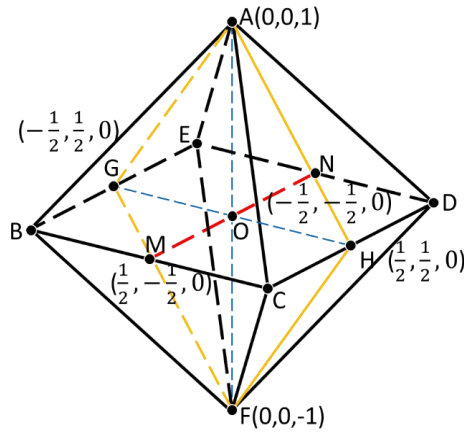
- (2) 其他柏拉圖立體之二重軸向量證明皆以上述(1)類推。

正六面體



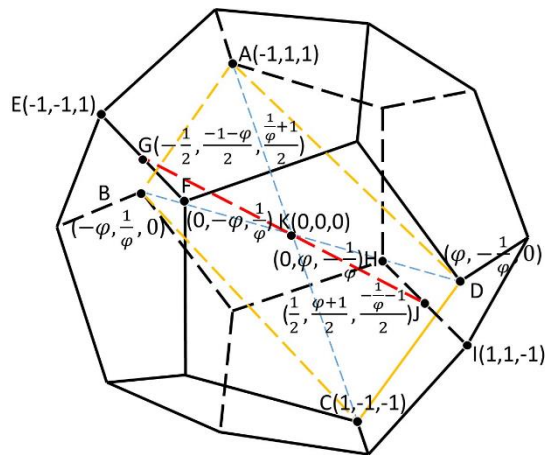
圖(十九)

正八面體



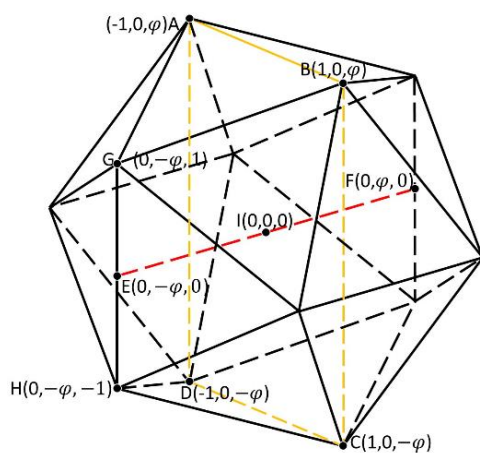
圖(二十)

正十二面體



圖(二十一)

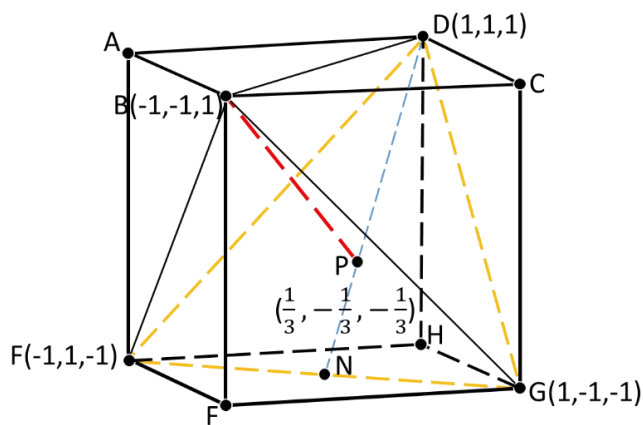
正二十面體



圖(二十二)

3. 三重軸

正四面體



圖(二十三)

(1)  $N$  為  $\overline{FG}$  中點  $\overline{ND} = (1,1,2)$ 、 $|\overline{ND}| = \sqrt{6}$ 、 $\overline{NB} = (-1,-1,2)$ ，

故  $\overline{NB}$  在  $\overline{ND}$  上的正射影  $= \left( \frac{\overline{NB} \cdot \overline{ND}}{|\overline{ND}|^2} \right) \overline{ND} = \frac{2}{6} (1,1,2) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ ，

所以  $P$  座標為  $(0,0,-1) + \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$ ，

$$\overrightarrow{PG} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{PB} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \text{ 可得 } \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PB} = 0,$$

故  $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{PG}$  又  $\overrightarrow{PB}$  垂直  $\overrightarrow{PD}$ ,

所以平面  $DFG$  過點  $B$  的法向量為  $\overrightarrow{BP}$ ,

將正四面體所有邊長投影至  $DFG$  平面,

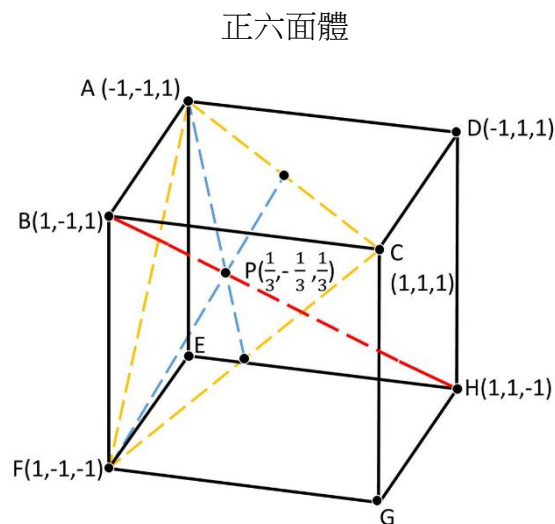
設  $\overrightarrow{PD}$  與  $\overrightarrow{PG}$  的夾角為  $\theta_2$ ,

$$\text{因為 } \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PG}}{|\overrightarrow{PD}| |\overrightarrow{PG}|} = \frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } \theta_2 = 120^\circ,$$

故正四面體以旋轉軸旋轉  $120^\circ$  即可與原正四面體重合,

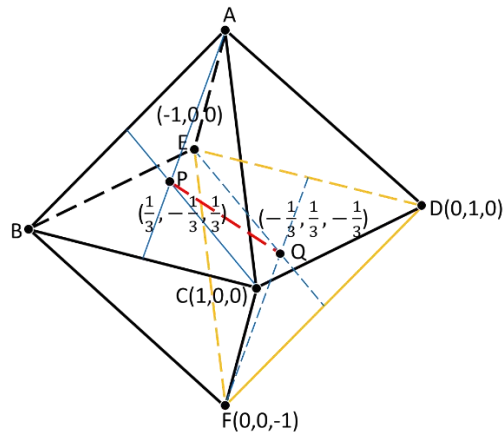
所以  $\overrightarrow{GB}$  為正四面體的三重軸。

(2) 其他柏拉圖立體之三重軸向量證明皆以上述(1)類推。



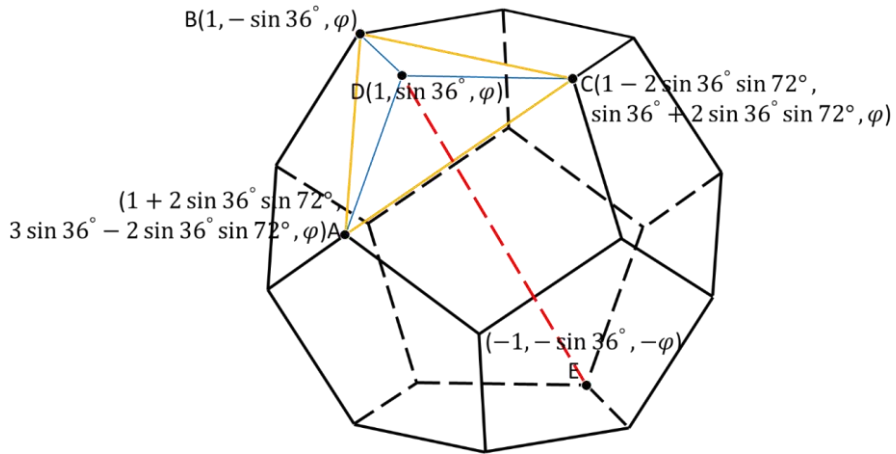
圖(二十四)

正八面體



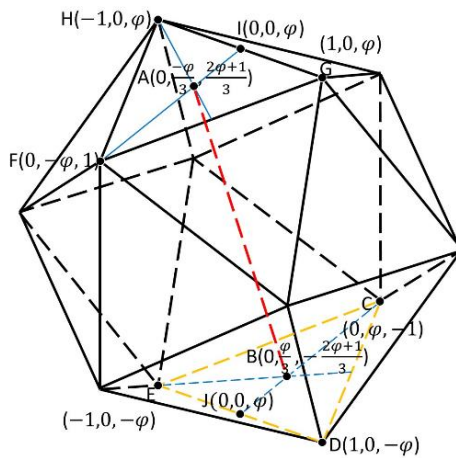
圖(二十五)

正十二面體



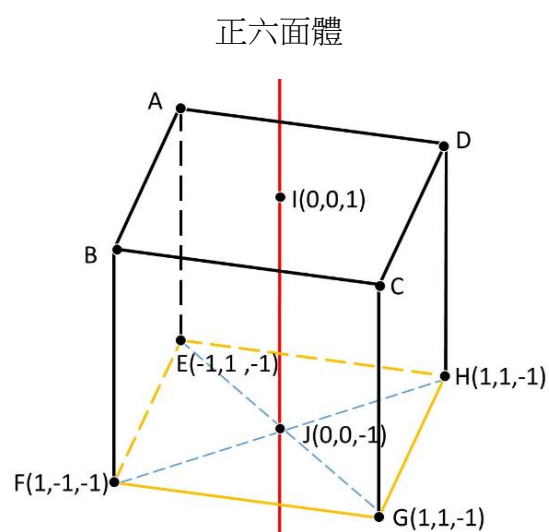
圖(二十六)

正二十面體



圖(二十七)

#### 4. 四重軸



(1) 將正六面體所有邊長投影至  $EFGH$  平面，

$$\text{因為 } \vec{IJ} = (0, 0, -2), \vec{EG} = (2, 0, 0), \vec{HF} = (0, -2, 0),$$

$$\vec{IJ} \cdot \vec{EG} = 0, \vec{IJ} \perp \vec{EG}, \vec{IJ} \cdot \vec{HF} = 0, \vec{IJ} \perp \vec{HF},$$

故平面  $EFGH$  上通過點  $J$  的法向量為  $\vec{IJ}$ ，設  $\vec{JF}$  與  $\vec{JH}$  的夾角為  $\theta_3$ ，

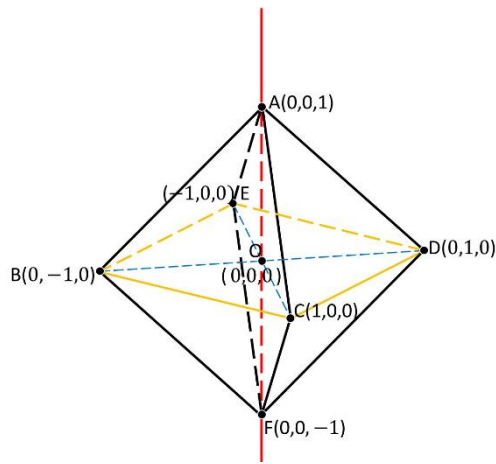
$$\text{因為 } \frac{\vec{JF} \cdot \vec{JH}}{|\vec{JF}| |\vec{JH}|} = \frac{(-1, -1, 0) \cdot (1, -1, 0)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 0, \text{ 所以 } \theta_3 = 90^\circ,$$

故正六面體以  $\vec{IJ}$  為旋轉軸，旋轉  $90^\circ$  即可與原正六面體重合，

故  $\vec{IJ}$  為正六面體的四重軸。

(2) 拉圖立體之四重軸向量證明皆以上述(1)類推。

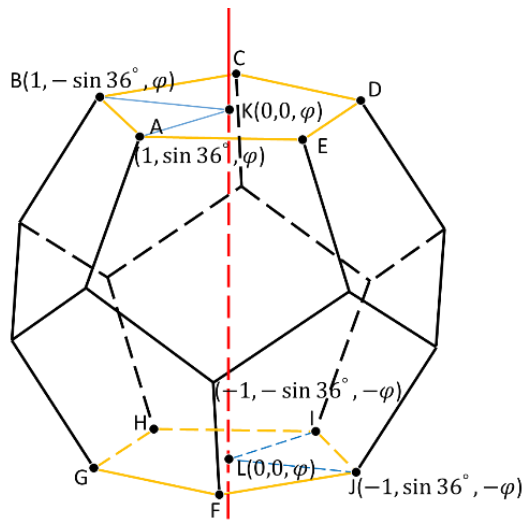
正八面體



圖(二十九)

5. 五重軸

正十二面體



圖(三十)

(1) 因為平面 $ABCDE$ 、平面 $FGHIJ$ 與 $xy$ 平面平行，

又因為  $\overline{KA} = (1, \sin 36^\circ, 0)$ 、 $\overline{KB} = (1, -\sin 36^\circ, 0)$ 、

$\overline{KL} = (0, 0, -2\varphi)$ 、 $\overline{LI} = (-1, -\sin 36^\circ, 0)$ 、 $\overline{LJ} = (-1, \sin 36^\circ, 0)$ 、

$\overline{KA} \cdot \overline{KL} = 0$  且  $\overline{KB} \cdot \overline{KL} = 0$  且  $\overline{LI} \cdot \overline{KL} = 0$  且  $\overline{LJ} \cdot \overline{KL} = 0$  ,

所以  $\overline{KA} \perp \overline{KL}$  且  $\overline{KB} \perp \overline{KL}$  且  $\overline{LI} \perp \overline{KL}$  且  $\overline{LJ} \perp \overline{KL}$  ,

故通過平面  $ABCDE$  上的  $K$  點的法向量為  $\overline{KL}$  ,

所以設  $\overline{KA}$  與  $\overline{KB}$  的夾角為  $\theta_{11}$  ,

$$\text{因為 } \frac{\overline{KB} \cdot \overline{KA}}{|\overline{KB}| |\overline{KA}|} = \frac{(1, -\sin 36^\circ, 0) \cdot (1, \sin 36^\circ, 0)}{\sqrt{1^2 + \sin^2 36^\circ} \times \sqrt{1^2 + \sin^2 36^\circ}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} ,$$

故  $\theta_{11} = 72^\circ$  ,

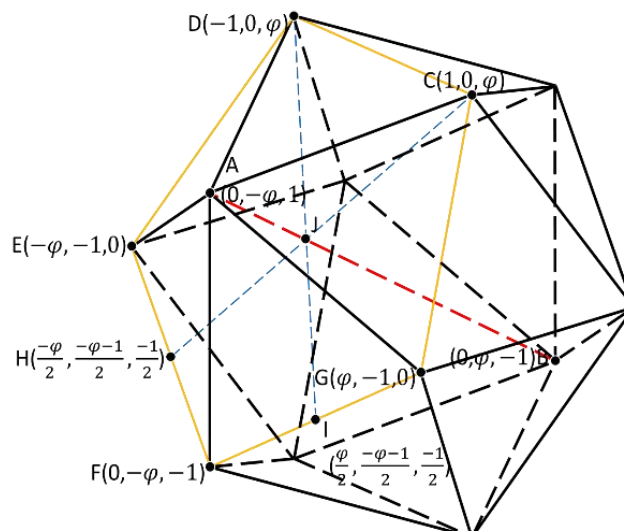
所以正十二面體以  $\overline{KL}$  為旋轉軸 ,

旋轉  $72^\circ$  即可與原正十二面體重合 ,

故  $\overline{KL}$  為正十二面體的五重軸。

(2) 其他柏拉圖立體之四重軸向量證明皆以上述(1)類推。

正二十面體

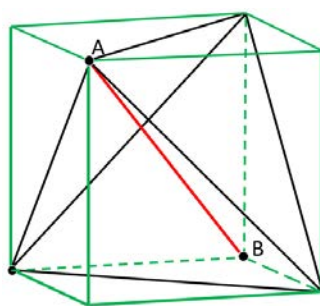


圖(三十一)



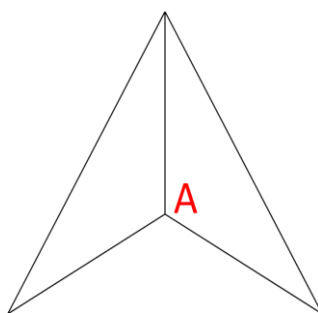
(三) 探討以特定旋轉軸為法向量時，以平面上等分角度旋轉所形成之疊合體數量。

承疊合體定義與研究(一)，我們了解到以旋轉軸為法向量旋轉可得到若干種疊合體，相當於尋找以旋轉軸為中心，將柏拉圖立體旋轉不同次數。承續研究(一)、(二)，可知以 $n$ 重軸為法向量作一平面，則該柏拉圖立體稜線正射影至平面時，稜線間依據 $n$ 重軸 $n$ 值不同而有不同夾角：二重軸、三重軸、四重軸與五重軸分別對應 $180^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $72^\circ$ 。因此當我們期望找到具有最多對稱面的單一重軸旋轉之疊合體，若將指定重軸下的對應角度作等分，便可得到所求。在立體狀況下這樣的想法是抽象的，不妨先以平面視角思考問題：



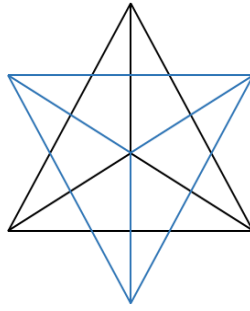
圖(三十二)

以上圖為例，以正四面體三重軸 $\overline{AB}$ 為例，當 $\overline{AB}$ 為法向量時，設想我們由 $A$ 點看向 $B$ 點，可以發現如下圖：



圖(三十三)

我們期望在旋轉一次的情況下製成最多對稱軸的方法便是以 $A$ 點為中心旋轉 $60^\circ$ ，如下：



圖(三十四)

由此我們可以推知將正六面體以三重軸為中心旋轉 $60^\circ$ 後與原正六面體疊合可得到同樣以三重軸為中心旋轉且限制兩個正六面體疊合下最多的對稱面，以此我們知道當依各重軸之對應角度等分則有特定數量限制下最多的對稱面，我們將角度設為 $\theta$ ， $m$ 是疊合數量(含初始模型)， $n$ 是等分角度，有式如下：

$$\theta = m \cdot n^\circ, \quad m, n \in N$$

設 $C$ 為一組因數，且此組兩因數積等於 $\theta$ ，則 $C$ 即為一種指定數量下旋轉等分角度之疊合體種類。以此可推算出以二重軸、三重軸、四重軸與五重軸為中心旋轉下， $C$ 分別有 18 種組合、16 種組合、12 種組合與 12 種組合。

#### (四) 探討疊合體其對稱面的個數

##### 1. 研究綱要：

在柏拉圖多面體中，令任一多面體形成 $t$ 疊合 ( $t \geq 2$ 且 $t \in N$ )，探討 $t$ 疊合根據不同旋轉軸產生的疊合體其對稱面的個數。

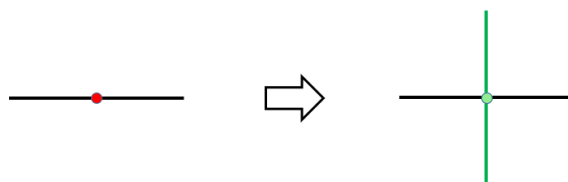
##### 2. 研究方法：

藉由繪製疊合體俯視圖所見的平面，證明平面其分割角度推廣至立體後疊合體對稱面數量關係，並進一步推得通式。

### 3. 證明：

承研究(一)中將平面上的向量平移後的情形，我們知道二重軸、三重軸、四重軸與五重軸的存在，以旋轉軸為中心，柏拉圖立體通過旋轉特定角度後疊合產生的疊合體從平面上觀察帶有對稱性。

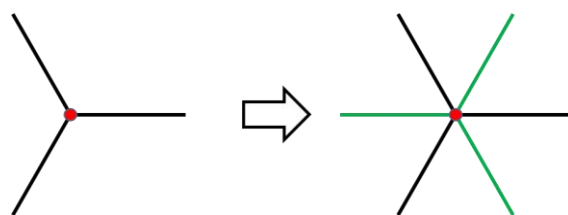
- (1) 以平面上軸心為二重軸為例，若進行二疊合，即向量複製後旋轉  $90^\circ$ ，如圖(三十五)所示。



圖(三十五)

則平面上觀察可以發現該圖存在對稱軸有 4 條推知  $t$  疊合下，對稱軸存在  $2t$  條，推廣至立體中，設二重軸為  $z$  軸，幾何中心為原點，則柏拉圖立體以  $xy$  平面為鏡面對稱(正四面體除外)，故以二重軸旋轉的  $t$  疊合(正四面體除外)存在對稱面共有： $2t + 1$ ，而正四面體  $t$  疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$  且  $k \in \mathbb{N}$ )有存在對稱面： $2t$ ，在正四面體  $t$  疊合( $t = 2k, k \geq 1$  且  $k \in \mathbb{N}$ )下，疊合體存在以  $xy$  平面為鏡面對稱，對稱面有： $2t + 1$ 。

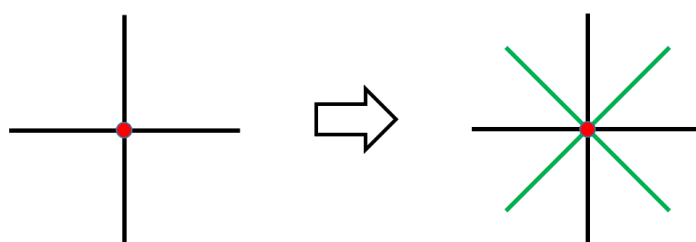
- (2) 再觀察三重軸，若進行二疊合，即向量複製後旋轉  $60^\circ$ ，如圖(三十六)所示。



圖(三十六)

則平面上觀察可以發現該圖存在對稱軸有 6 條。推知  $t$  疊合下，對稱軸存在  $3t$  條，推廣至立體中，設三重軸為  $z$  軸，幾何中心為原點，則柏拉圖立體以  $xy$  平面在  $t$  疊合 ( $t = 2k + 1, k \geq 1$  且  $k \in N$ ) 時不存在鏡面對稱，故以三重軸旋轉的  $t$  疊合存在對稱面： $3t$ ，但柏拉圖立體(正四面體以外)在  $t$  疊合 ( $t = 2k, k \geq 1$  且  $k \in N$ ) 下，疊合體存在以  $xy$  平面為鏡面對稱，則對稱面有： $3t + 1$ 。

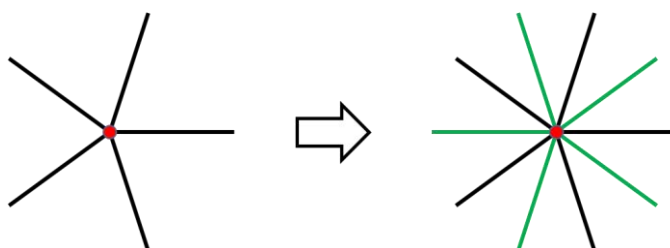
- (3) 再觀察四重軸，若進行二疊合，即向量複製後旋轉  $45^\circ$ ，如圖(三十七)所示。



圖(三十七)

則平面上觀察可以發現該圖存在對稱軸有 8 條。推知  $t$  疊合下，對稱軸存在  $4t$  條，推廣至立體中，設四重軸為  $z$  軸，幾何中心為原點，則柏拉圖立體以  $xy$  平面為鏡面對稱，故以四重軸旋轉的  $t$  疊合存在對稱面共有： $4t + 1$ 。

- (4) 再觀察五重軸，若進行二疊合，即向量複製後旋轉  $36^\circ$ ，如圖(三十八)所示。

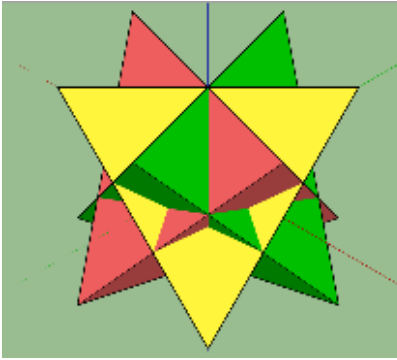
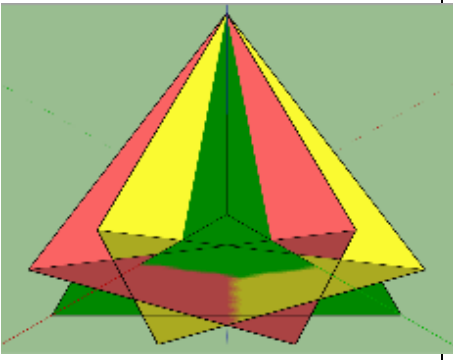
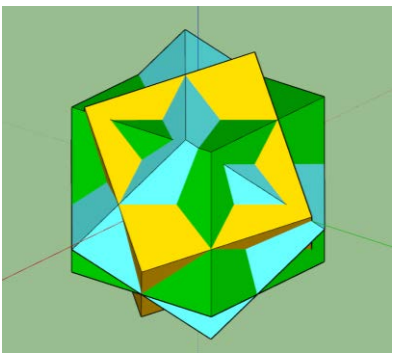
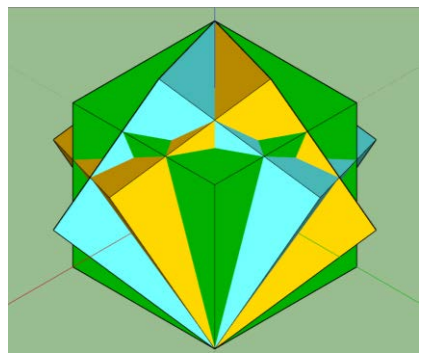
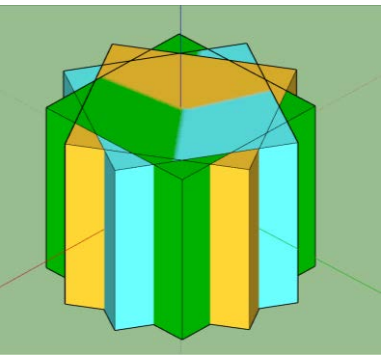


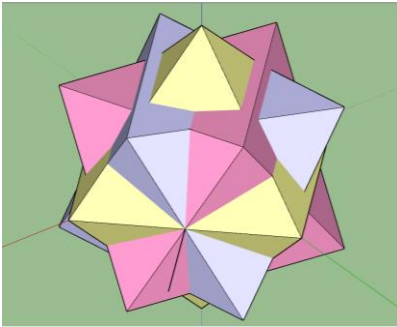
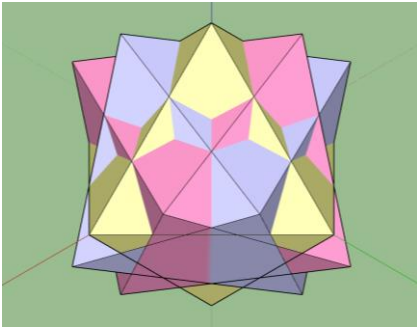
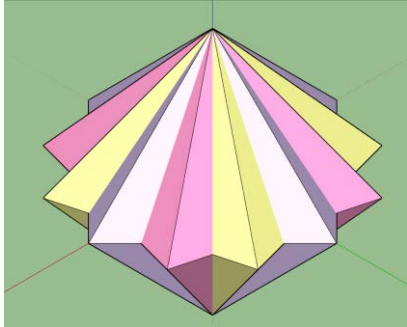
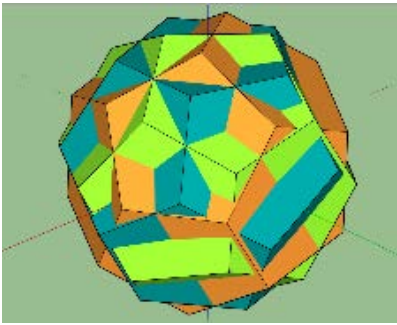
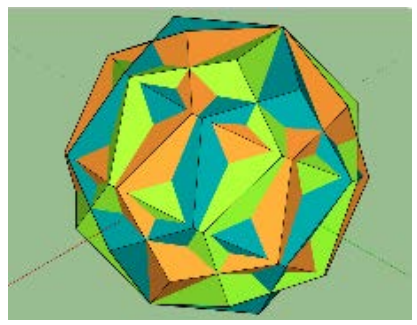
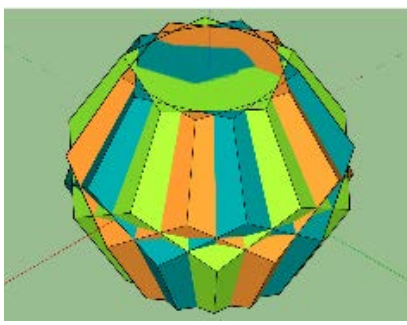
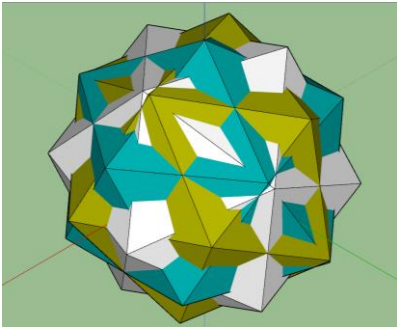
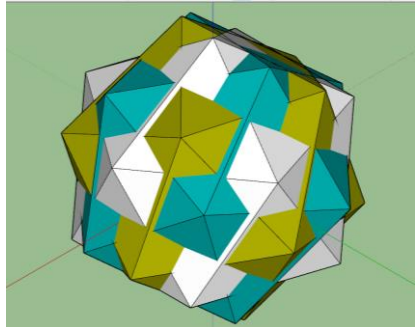
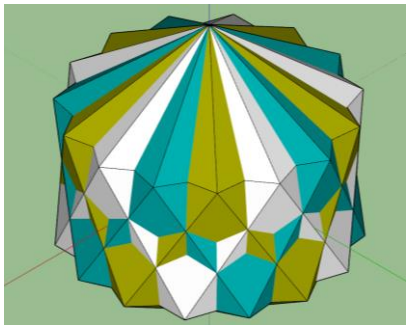
圖(三十八)

則平面上觀察可以發現該圖存在對稱軸有10條，推知  $t$  疊合下，對稱軸存在  $5t$  條，推廣至立體中，設五重軸為  $z$  軸，幾何中心為原點，以  $xy$  平面在  $t$  疊合 ( $t = 2k + 1, k \geq 1$  且  $k \in \mathbb{N}$ ) 時不存在鏡面對稱，故以五重軸旋轉的  $t$  疊合存在對稱面： $5t$ ，但在  $t$  疊合 ( $t = 2k, k \geq 1$  且  $k \in \mathbb{N}$ ) 下，疊合體存在  $xy$  平面為鏡面對稱，則對稱面有： $5t + 1$ 。

## 肆、研究結果

下表(三)為以 sketchup 製作的柏拉圖立體 3 疊合，表中註明該疊合體以幾重軸旋轉。

正四面體		
		
二重軸	三重軸	
正六面體		
		
二重軸	三重軸	四重軸

正八面體		
		
二重軸	三重軸	四重軸
正十二面體		
		
二重軸	三重軸	五重軸
正二十面體		
		
二重軸	三重軸	五重軸

表(三) SketchUp 製作的柏拉圖立體三疊合

## 伍、結論與未來展望

我們由以上探討過程中，統整出以下三種發現：

一、柏拉圖立體因為形態上的差別而各自存在不同旋轉軸，其存在之旋轉軸與數量如表(一)

二、正多面體疊合體存在鏡面對稱性，以限定正多面體數量下去疊合出最多對稱面為目標，

可得到旋轉角度與疊合數量組合分別為二重軸 18 種組合、三重軸 16 種組合、四重軸

12 種組合與五重軸 12 種組合。

三、承續研究(四)之正多面體 $t$ 疊合 ( $t \geq 2$  且  $t \in \mathbb{N}$ )存在之對稱面有通式如下：

(一) 二重軸之正多面體 $t$ 疊合(正四面體除外)： $2t + 1$ ，

正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )： $2t$ ，

正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )下： $2t + 1$ 。

(二) 三重軸之正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )： $3t$ ；

除正四面體外，正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )下： $3t + 1$ 。

(三) 四重軸之正多面體 $t$ 疊合： $4t + 1$ 。

(四) 五重軸之正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )： $5t$ ；

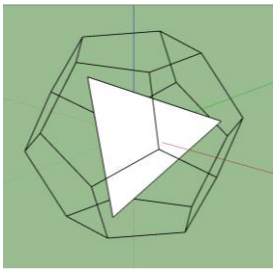
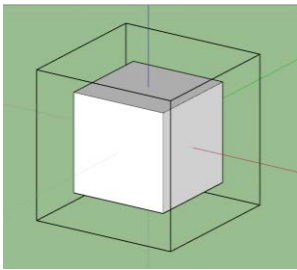
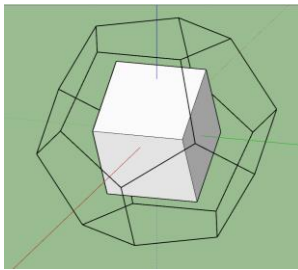
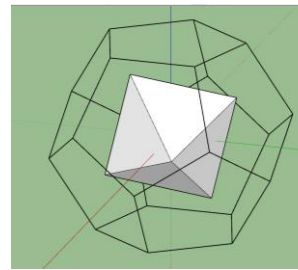
正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$ )下： $5t + 1$ 。

四、經過這次對於正多面體疊合體的探究，我們從疊合體有趣的結構找出重要的兩項基礎：

軸與旋轉之正多面體，然而疊合體仍存在由兩個以上旋轉軸做不同角度旋轉形成的對稱疊合體，含有許多值得深入探究的數學性質和藝術價值。接下來我們透過三個面向：柏拉圖立體(初始模型)、模型框架、旋轉軸去分析與思考柏拉圖立體疊合體的結構，嘗試繪製更多樣化的對稱性質疊合體：

- (一) 柏拉圖立體初始模型：分為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體與正二十面體，且初始模型考慮在空間中的方向位置。
- (二) 模型框架：分為正四面體稜線、正六面體稜線、正八面體稜線、正十二面體稜線與正二十面體稜線，各稜線皆為同一種類柏拉圖立體放大 1.5 倍。
- (三) 旋轉軸：旋轉軸分為柏拉圖立體初始模型與模型框架對應之旋轉軸。

五、參考資料並以此發想，我們整理出四種柏拉圖立體初始模型+模型框架如表(四)：

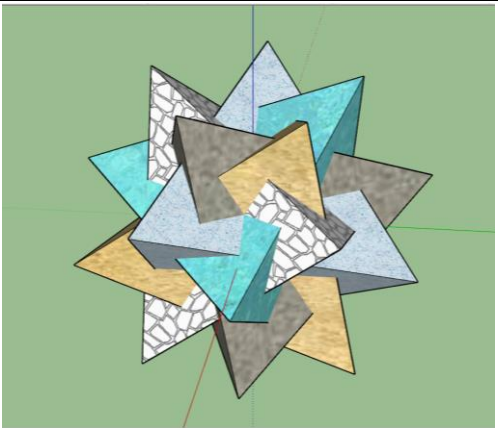
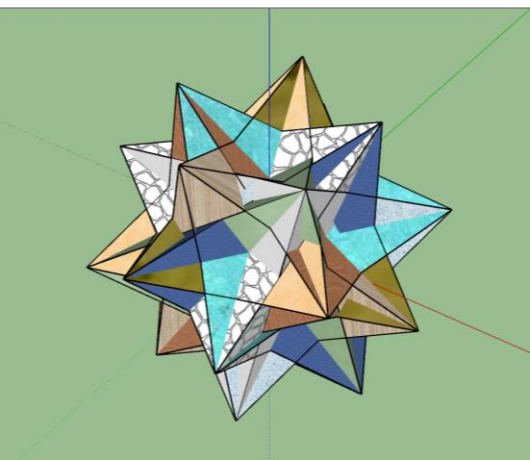
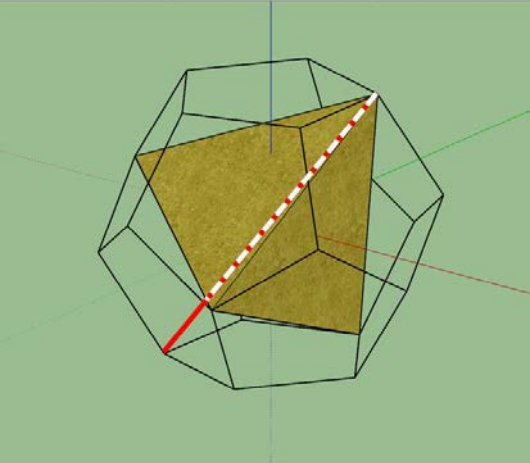
正四面體 + 正十二面體稜線	正六面體 + 正六面體稜線	正六面體 + 正十二面體稜線	正八面體 + 正十二面體稜線
			

表(四) 柏拉圖立體初始模型+模型框架

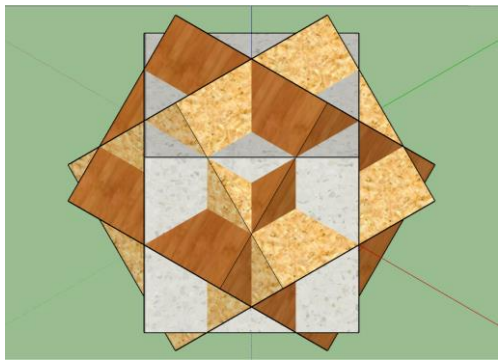
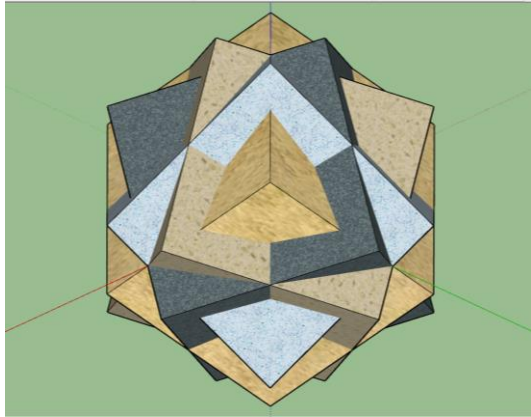
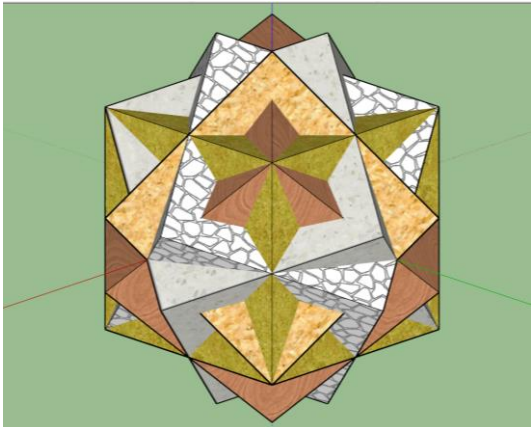


依據這上述四種框架，我們製作四種類型的疊合體：

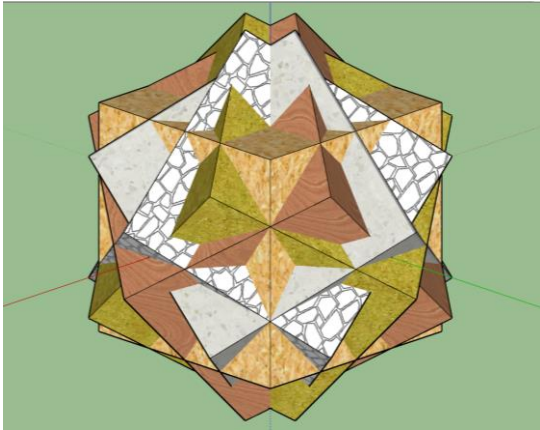
(一) 正四面體+正十二面體稜線

正四面體五疊合	
	SketchUp 製作步驟
	1.載入(正四面體+正十二面體稜線)
	2.旋轉複製(正四面體, z軸, 72°) *4
	旋轉軸
	1.五重軸(z軸)
正四面體十疊合	
  <p style="text-align: center;">重合 3 重軸</p>	SketchUp 製作步驟
	1. 載入(正四面體+正十二面體稜線)
	2. 旋轉複製(正四面體, 重合 3 重軸, 60°)
	3. 旋轉複製(正四面體*2, z軸, 72°) *4
	旋轉軸
	1.稜線與初始模型之重合三重軸(重合三重軸)
2.五重軸(z軸)	

(二) 正六面體+正六面體稜線

正六面體三疊合	
	<p><b>SketchUp 製作步驟</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正六面體稜線)</li> <li>2. 旋轉(正六面體實體, z軸, 45°)</li> <li>3. 旋轉複製(正六面體實體, 三重軸, 120°)*2</li> </ol>
	<p>旋轉軸</p>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 四重軸(z軸)</li> <li>2. 三重軸(三重軸)</li> </ol>
正六面體四疊合	
	<p><b>SketchUp 製作步驟</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正六面體稜線)</li> <li>2. 旋轉(正六面體實體, 三重軸, 60°)</li> <li>3. 旋轉複製(正六面體實體, z軸, 90°)*3</li> </ol>
	<p>旋轉軸</p>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三重軸(三重軸)</li> <li>2. 四重軸(z軸)</li> </ol>
正六面體五疊合 1	
	<p><b>SketchUp 製作步驟</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正六面體稜線)</li> <li>2. 旋轉複製(正六面體實體, 三重軸, 60°)</li> <li>3. 旋轉複製(正六面體實體, z軸, 90°)*3</li> </ol>
	<p>旋轉軸</p>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三重軸(三重軸)</li> <li>2. 四重軸(z軸)</li> </ol>

正六面體五疊合 2



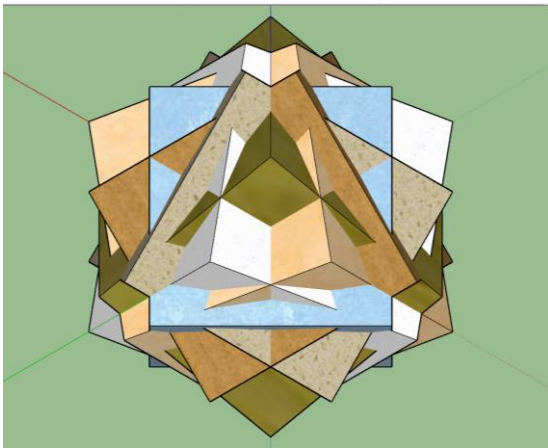
SketchUp 製作步驟

1. 載入(正六面體+正六面體稜線)
2. 旋轉(正六面體實體, 二重軸, 90°)
3. 旋轉複製(正六面體實體, z軸, 90°)\*3

旋轉軸

1. 二重軸(二重軸)
2. 四重軸(z軸)

正六面體六疊合



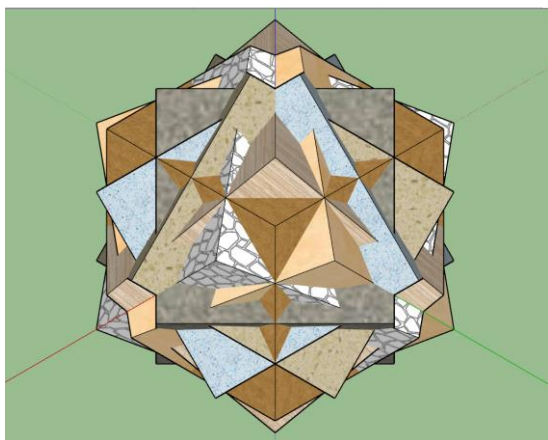
SketchUp 製作步驟

1. 載入(正六面體+正六面體稜線)
2. 旋轉(正六面體實體, z軸, 45°)
3. 旋轉複製(正六面體實體, x軸, 45°) \*3
4. 旋轉複製(正六面體實體, y軸, 90°)
5. 旋轉複製(正六面體實體, y軸, 270°)

旋轉軸

1. 四重軸(z軸, x軸, y軸, y軸)

正六面體七疊合



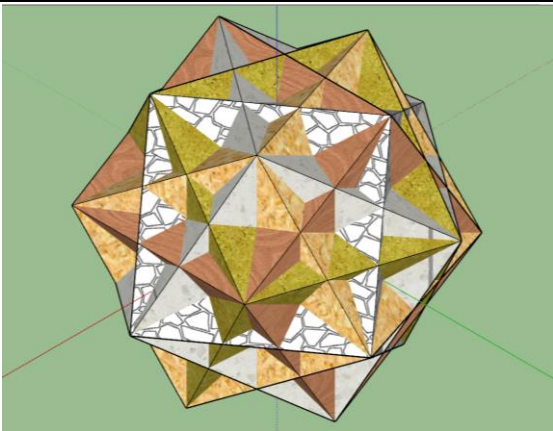
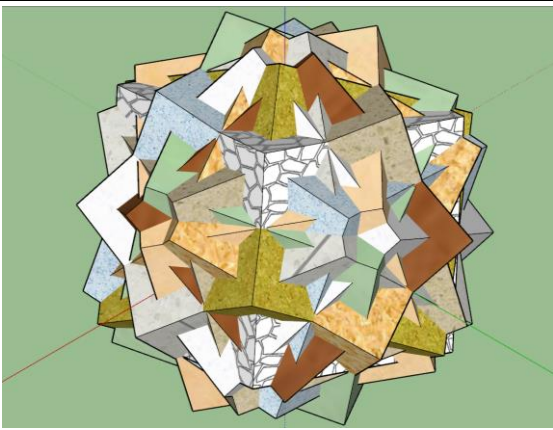
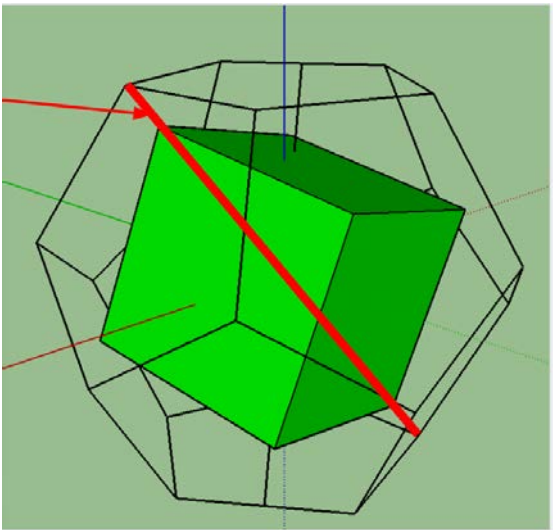
SketchUp 製作步驟

1. 載入(正六面體+正六面體稜線)
2. 旋轉複製(正六面體實體, z軸, 45°)
3. 旋轉複製(正六面體實體, x軸, 45°) \*3
4. 旋轉複製(正六面體實體, y軸, 90°)
5. 旋轉複製(正六面體實體, y軸, 270°)

旋轉軸

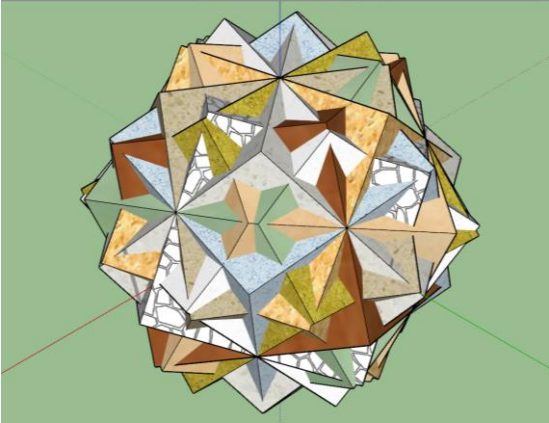
1. 四重軸(z軸, x軸, y軸, y軸)

(三)正六面體+正十二面體稜線

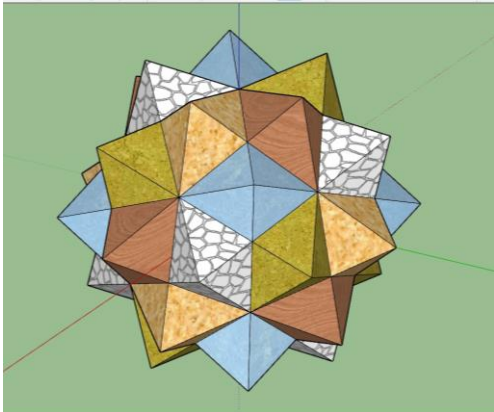
正六面體五疊合 3	
	SketchUp 製作步驟
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正十二面體稜線)</li> <li>2. 旋轉複製(正六面體實體, z軸, 72°) *4</li> </ol>
旋轉軸	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 五重軸(z軸)</li> </ol>	
正六面體十疊合 1	
	SketchUp 製作步驟
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正十二面體稜線)</li> <li>2. 旋轉(正六面體實體, 重合三重軸, A, B)</li> <li>3. 旋轉複製(正六面體實體, 二重軸, 180°)</li> <li>4. 旋轉複製(正六面體實體*2, z軸, 72°)*4</li> </ol> <p>A(基準點)：立方體上與 3 重軸相鄰的頂點 B(目標點)：12 面體稜線上的相鄰頂點</p>
旋轉軸	
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 稜線與初始模型之重合三重軸(重合三重軸)</li> <li>2. 二重軸(二重軸)</li> <li>3. 五重軸(z軸)</li> </ol>
	重合 3 重軸



## 正六面體十疊合 2

	<b>SketchUp 製作步驟</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正六面體+正十二面體稜線)</li> <li>2. 旋轉(正六面體實體,重合三重軸,A,M)</li> <li>3. 旋轉複製(正六面體實體,二重軸,180°)</li> <li>4. 旋轉複製(正六面體實體*2, z軸,72°)*4</li> </ol> <p>A(基準點)：立方體上與 3 重軸相鄰的頂點 M(目標點)：12 面體稜線上的相鄰五邊形對邊中點</p>
	<b>旋轉軸</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 稜線與初始模型之重合三重軸(重合三重軸)</li> <li>2. 二重軸(二重軸)</li> <li>3. 五重軸(z軸)</li> </ol>

### (四)正八面體+正十二面體稜線

<h2>正八面體五疊合</h2>	
	<b>SketchUp 製作步驟</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 載入(正八面體+正十二面體稜線)</li> <li>2. 旋轉複製(正八面體, z軸,72°)*4</li> </ol>
	<b>旋轉軸</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 五重軸(z軸)</li> </ol>

綜合上述，我們發現疊合體可隨初始模型狀態與模型框架而發生差異，也涉及旋轉軸的選定，產生之疊合體可有均勻對稱之性質，含有許多值得深入探究的數學性質和藝術價值，我們期望未來可以針對在不同角度下的原模型作旋轉複製獲得之疊合體在三維空間中的不同型態作分析研究，進一步尋找其規則性，並嘗試創作更加複雜的均勻對稱正多面體疊合體。

## 陸、參考資料

**【研習講義】** 林義強 (2021年12月1日)。使用 SketchUp 繪製多面體模型講義

(SketchUp approach for Polycube&Polyhedral models)。高雄：高雄市立高雄女子高級中學

**【課本】** 許志農 (109年9月初版)。108 課綱龍騰數學課本 4A。台北：國立臺灣師範大學

## 【評語】 050416

本作品由柏拉圖多面體出發，討論他們的對軸，對於各種對稱給予相當具體清楚的描述，雖然這部分的工作算是古典已知的結果，但是作者將其完整清楚的利用現今的高中數學工具呈現，也算是不錯的呈現。但是疊合體的部分的討論與研究相對的就比較初步，數學部分的使用較少是較為可惜之處。若能有更多的進展和發揮，會是優秀的作品。

## 作品簡報





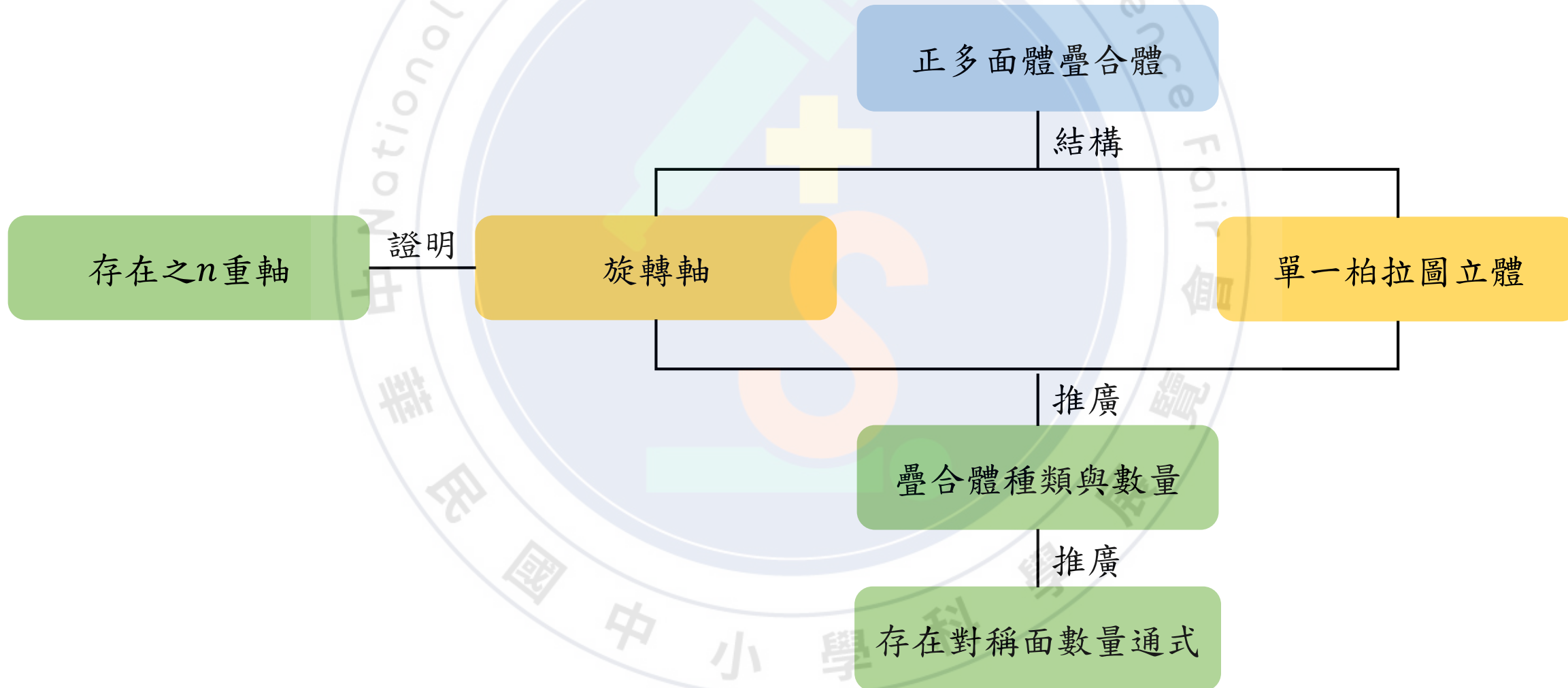
# 柏拉圖立體疊合體之 旋轉軸證明與應用

高級中等學校組

數學科

# 研究過程與方法

## 一、研究流程

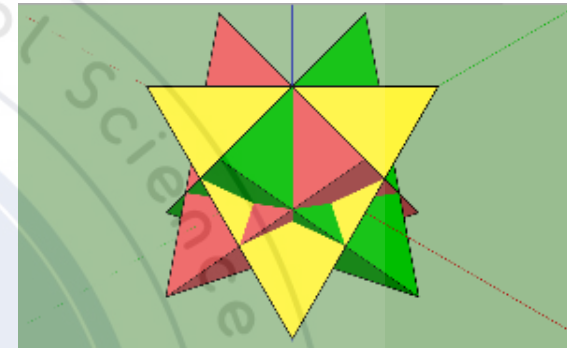


## 二、名詞定義

1. SketchUp空間中三個軸向，實線為正，虛線為負。

- $x$  軸：紅色軸
- $y$  軸：綠色軸
- $z$  軸：藍色軸

正四面體二重軸三疊合



2. 疊合體：是數個在空間中互相交錯疊合而成的形體，由本身與幾個多面體共享的一個共同幾何中心的多面體。

- 柏拉圖立體：又稱正多面體，由正多邊形組成的立體，共存在五種，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體。
- 柏拉圖立體疊合體：是一個共心的對稱正多面體疊合體。

3. 正多面鏡面對稱：一物件和其變換的像為不可分時，即稱此為鏡面對稱。

4. 模型框架：正立方體模型放大 1.5 倍後的正立方體稜線。

5. 正多面體中的 $n$ 重軸：一立體模型以此軸為旋轉軸，旋轉 $\frac{1}{n}$ 圈，即 $\frac{360^\circ}{n}$ ，與原立體模型重合，稱此軸為正多面體中的 $n$ 重軸。

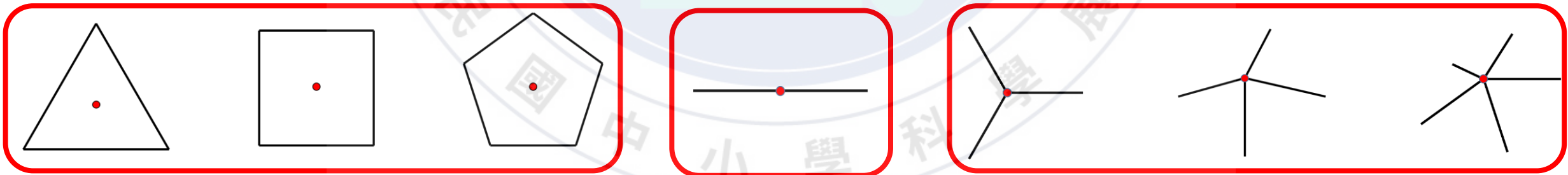
### 三、研究主題

#### (一) 利用幾何推論在柏拉圖立體中存在的旋轉軸

##### 旋轉軸存在特性

1. 通過幾何中心  $O$  點(紅點)。
2. 以旋轉軸作法向量的平面，與柏拉圖立體之表面相交可能為點或線，同一平面上的點或線皆與法向量等距。
3. 柏拉圖立體中存在三種立體面。
4. 柏拉圖立體中與頂點相接的面有三種情形。

根據上述特性可知，旋轉軸與柏拉圖立體相交有三種情形。

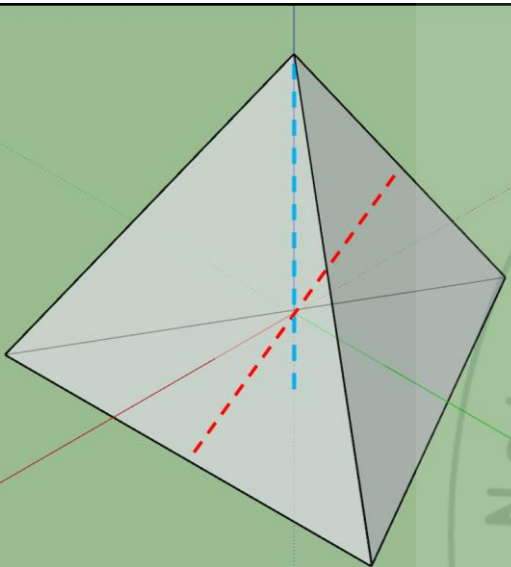


推得平面向量，可得證柏拉圖立體中旋轉軸存在二、三、四、五重軸。

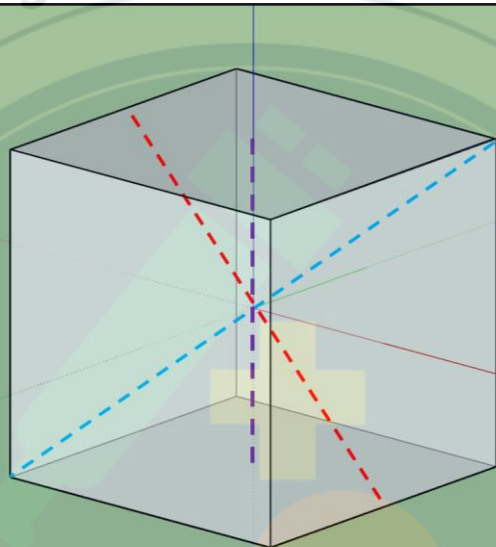


# (一) 利用幾何推論在柏拉圖立體中存在的旋轉軸

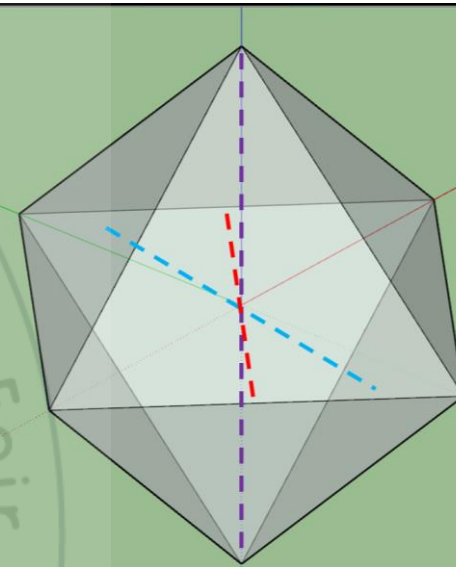
正四面體



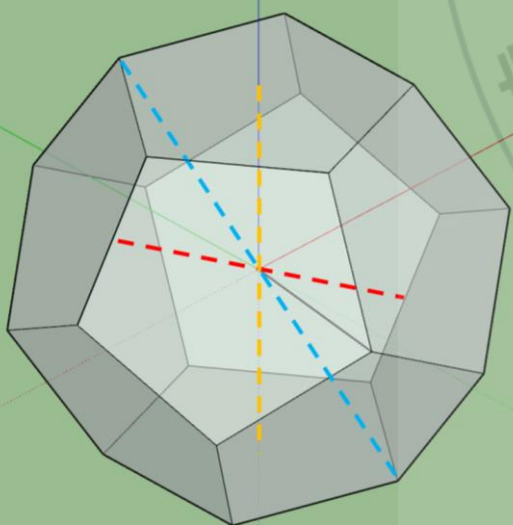
正六面體



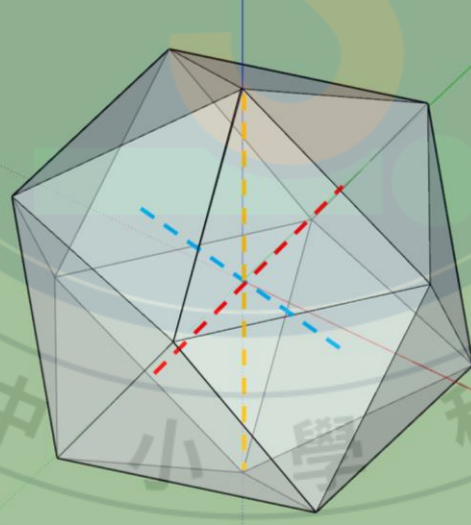
正八面體



正十二面體



正二十面體



圖例

紅色虛線為二重軸

藍色虛線為三重軸

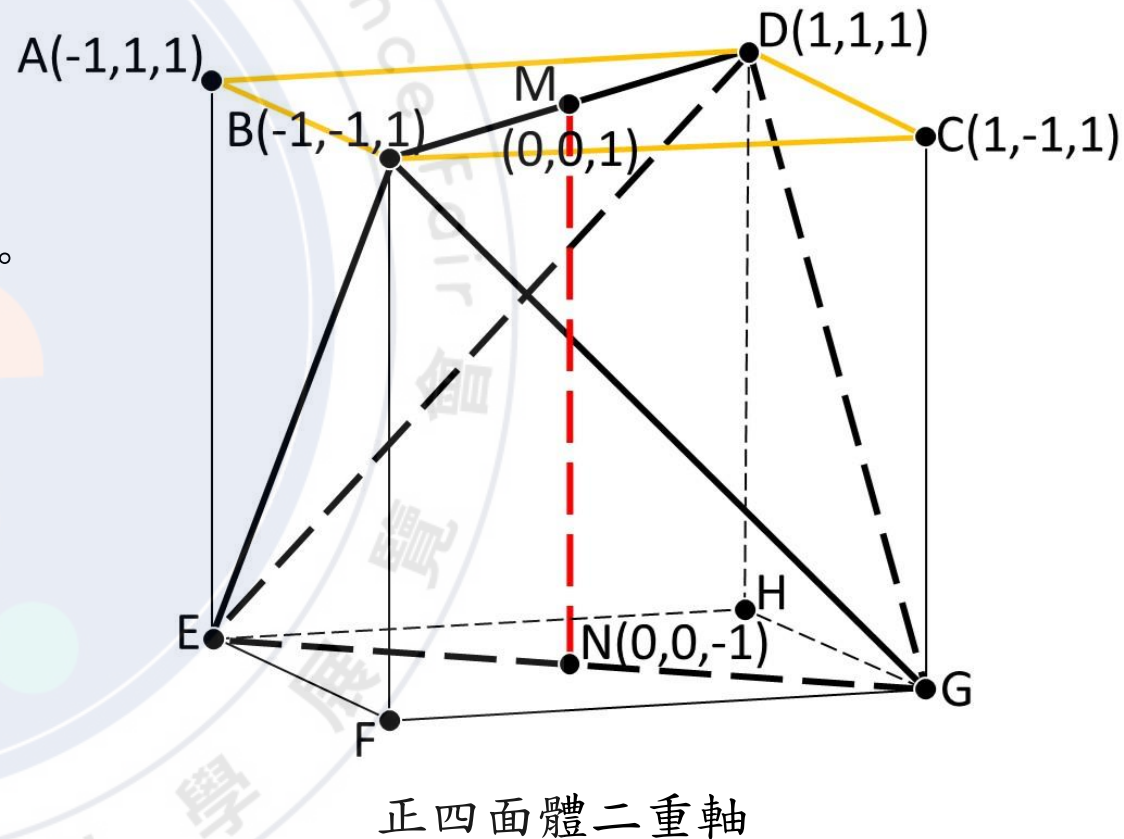
紫色虛線為四重軸

橘色虛線為五重軸

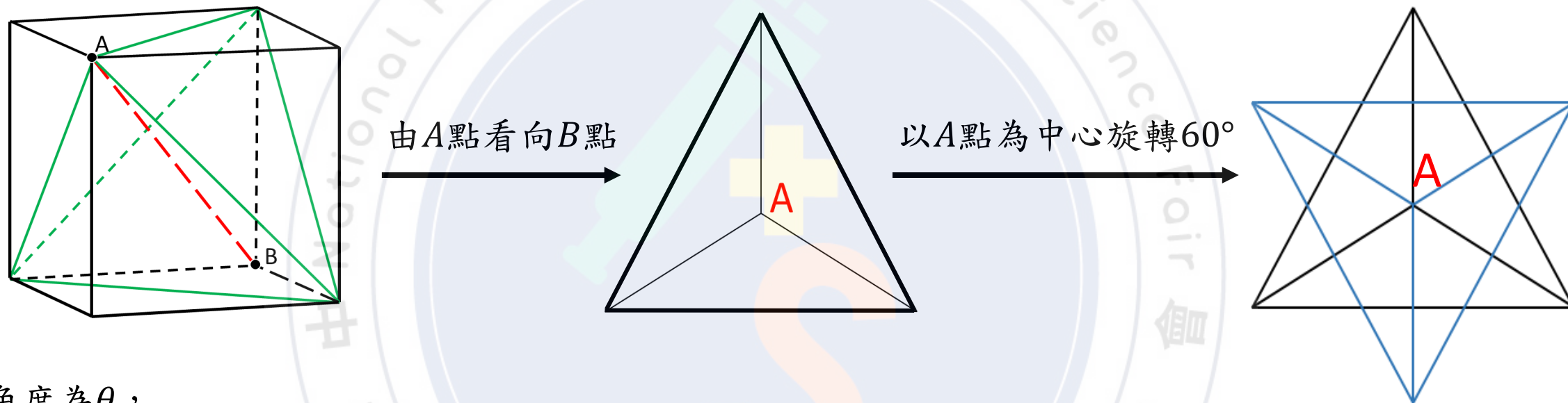
## (二) 利用向量證明在柏拉圖立體中存在的旋轉軸

### 向量證明的通則

1. 選定柏拉圖立體所有邊長的**投影面**。
2. 利用存在於投影面上的兩向量與選定旋轉軸垂直的特性。
3. 證明選定的旋轉軸即為該投影面的法向量。
4. 計算兩向量的旋轉夾角。
5. 根據**名詞定義 5**證明選定的旋轉軸為柏拉圖立體中的 **$n$ 重軸**，並求得 **$n$ 值**。



(三) 探討以特定旋轉軸為法向量時，以平面上等分角度旋轉形成之疊合體數量。



設角度為 $\theta$ ，

疊合數量(含初始模型)為 $m$ ，

等分角度為 $n$ 。

公式： $\theta = m n^\circ$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

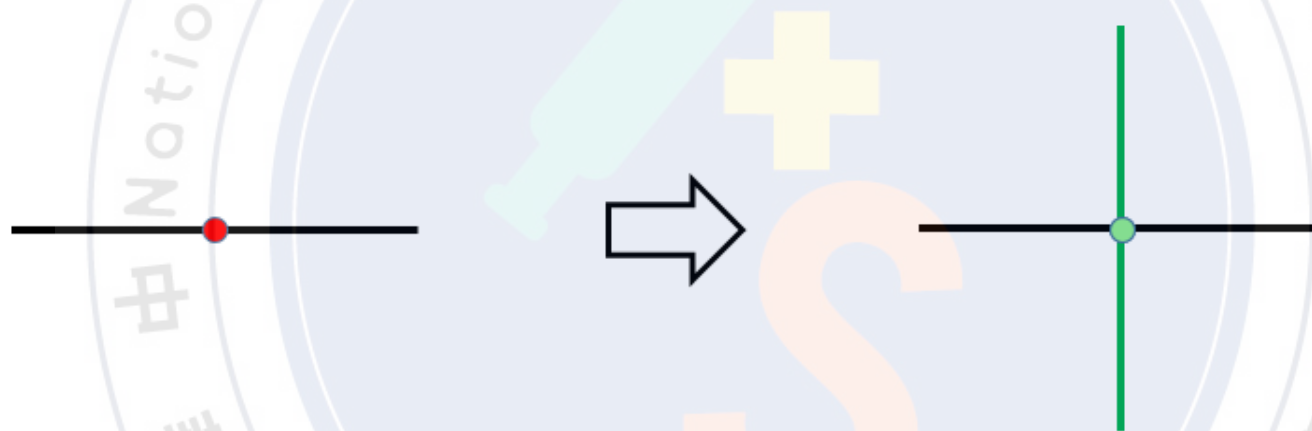
旋轉軸	旋轉夾角(度)	種類
二重軸	180°	18
三重軸	120°	16
四重軸	90°	12
五重軸	72°	12

## (四) 探討疊合體其對稱面的個數

在柏拉圖多面體中，令任一多面體形成 $t$ 疊合( $t \geq 2$ 且 $t \in N$ )，

探討 $t$ 疊合根據不同旋轉軸產生的疊合體其對稱面的個數。

以二重軸為例：



結論：

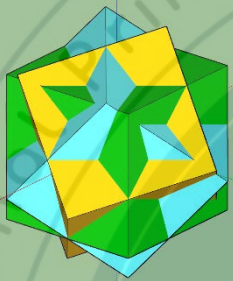
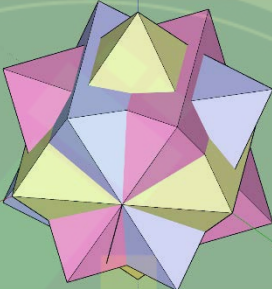

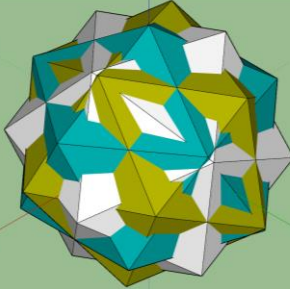
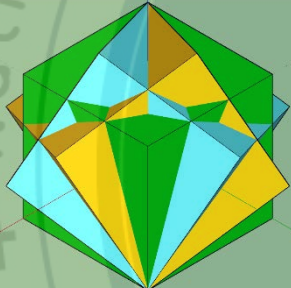
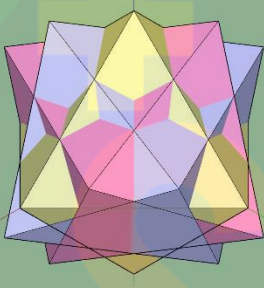
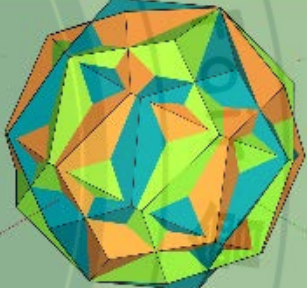
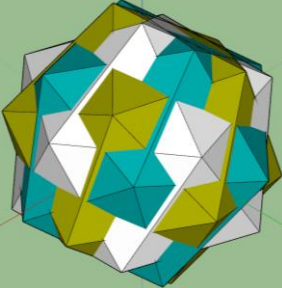
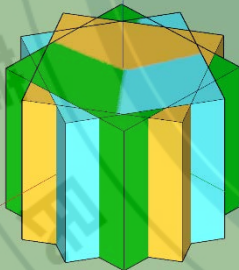
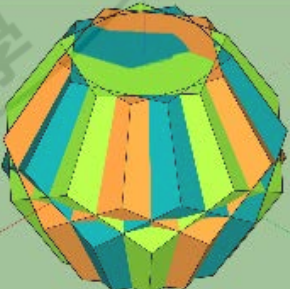
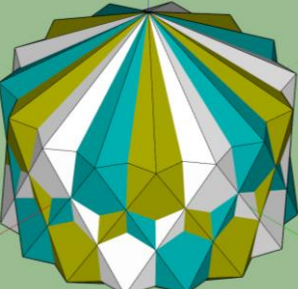
以二重軸旋轉的 $t$ 疊合(正四面體除外)存在對稱面共有 $2t + 1$

正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )有存在對稱面共有 $2t$

在正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )下，疊合體存在以 $xy$ 平面為鏡面對稱，對稱面共有 $2t + 1$



# 研究結果

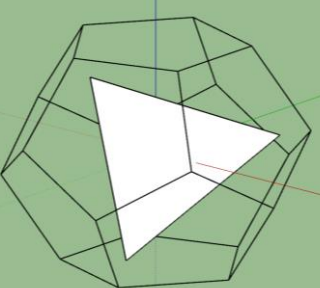

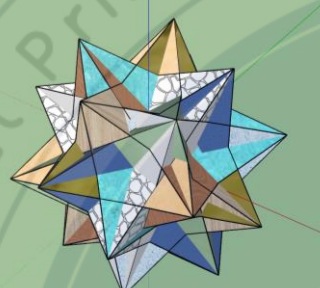
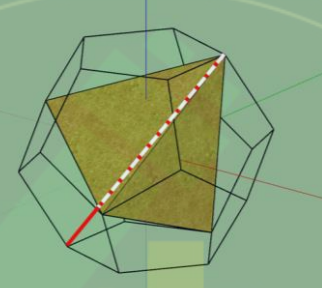
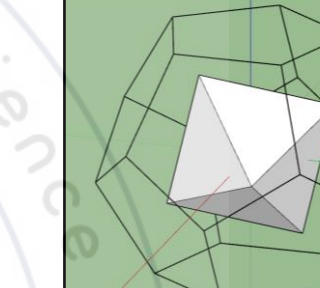
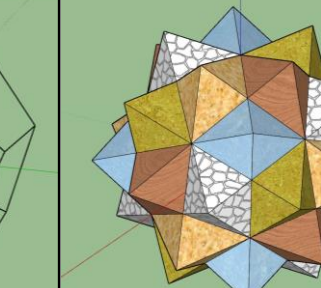
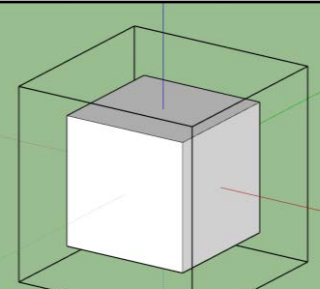
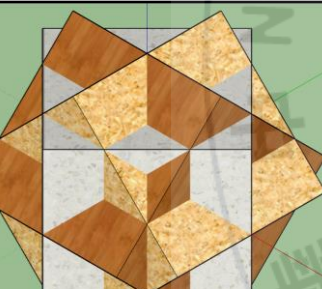
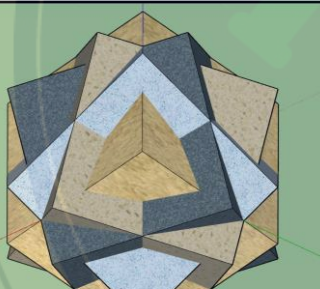
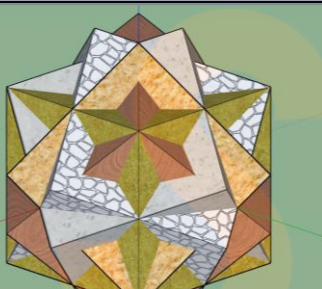
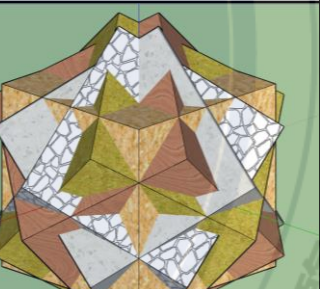
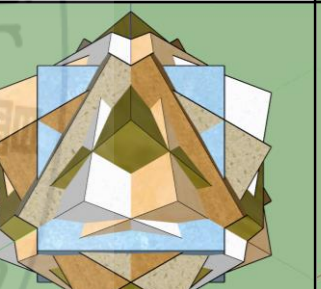
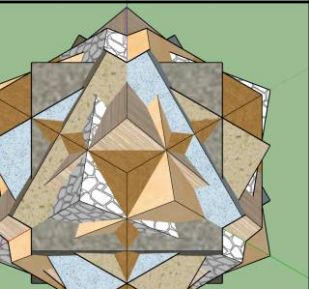
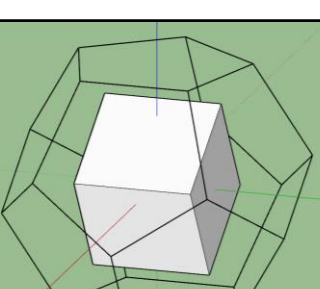
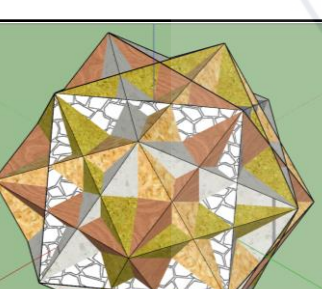
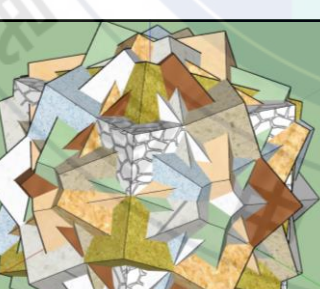
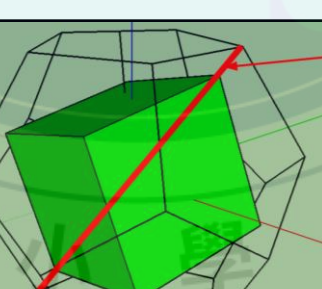

	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
二重軸					
三重軸					
四重軸	不存在			不存在	不存在
五重軸	不存在	不存在	不存在		

# 結論

1. 柏拉圖立體因為形態上的差別而各自存在不同旋轉軸。
2. 正多面體疊合體存在鏡面對稱性，以限定正多面體數量下去疊合出最多對稱面為目標，可得到旋轉角度與疊合數量組合分別為二重軸18種組合、三重軸16種組合、四重軸12種組合與五重軸12種組合。
3. 承續研究(四)之正多面體 $t$ 疊合( $t \geq 2$ 且 $t \in N$ )存在之對稱面通式
  - 二重軸之正多面體 $t$ 疊合(正四面體除外)： $2t + 1$ 
    - 正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )： $2t$
    - 正四面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )下： $2t + 1$
  - 三重軸之正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )： $3t$ 
    - 除正四面體，正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )下： $3t + 1$
  - 四重軸之正多面體 $t$ 疊合： $4t + 1$
  - 五重軸之正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k + 1, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )： $5t$ 
    - 正多面體 $t$ 疊合( $t = 2k, k \geq 1$ 且 $k \in N$ )下： $5t + 1$



# 未來展望

正四面體+正十二面體稜線	正四面體五疊合	正四面體十疊合	重合三重軸		正八面體+正十二面體稜線	正八面體五疊合
						
正六面體三疊合	正六面體三疊合	正六面體四疊合	正六面體五疊合1	正六面體五疊合2	正六面體六疊合	正六面體七疊合
						
正六面體+正十二面體稜線	正六面體五疊合3	正六面體十疊合1	重合三重軸	正六面體十疊合2		
						

# 未來展望

1. 多重軸旋轉下柏拉圖立體疊合體存在的性質與規律
2. 不同柏拉圖立體與模型框架之間存在規律與產生的疊合體之間性質關聯
3. 疊合體的對稱性質深入探究(旋轉對稱、鏡面對稱、均勻對稱)

# 參考資料

【研習講義】林義強 (2021年12月1日)。

使用*SketchUp*繪製多面體模型講義(*SketchUp approach for Polycube&Polyhedralmodels*)。

高雄：高雄市立高雄女子高級中學

【課本】許志農 (109年9月初版)。

108課綱龍騰數學課本4A。

台北：國立臺灣師範大學