中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050412

「圓圓」不絕—三角形內相切多等圓之探討

學校名稱：臺中市立文華高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 廖崑登	林煜家
高二 林哲偉	張仲凱
高二 陳璽屹	

關鍵詞：三角形內切圓、相切多等圓、最適三角形

摘要

本研究旨在探討「直角三角形內部」、「等腰三角形內部」及「任意三角形角平分線上」的相切多等圓之不同排列情形，並找到多等圓的圓半徑公式。而在等腰三角形中，我們找出半徑與邊長、角度的關係後，接著探討該多等圓排列的最大半徑，進而探討內切多等圓在不同排列下產生最大圓半徑時，最適三角形的邊比為何，以及最適三角形頂角會滿足何種關係。最後將等腰三角形內的不同排列之半徑互相比較大小。

壹、研究動機

在探尋科展題目時，我們找到 2011APMO 的初選考試試題第三題，題目如下：

「在直角ΔABC中，$\angle C = 90^\circ$，$\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 3$。其中圓O_1, O_2, $\cdots$, O_n為$n(n \geq 2)$個相等的圓，其半徑為r。圓O_1與圓O_2外切，圓O_2與圓O_3外切，…，圓O_{n-1}與圓O_n外切，圓O_1, O_2, $\cdots$, O_n均與$\overline{AB}$相切，且圓O_1與$\overline{AC}$相切，圓O_n與$\overline{BC}$相切，試求當$n = 2$及$n = 2011$的r為何？」

此題可將ΔABC區分成三個小三角形的面積和並求得其解。在查閱到這題目之前，我們較常見到在三角形內切圓的題目，而此題的多等圓亦激盪出我們思考：直角三角形是否還有其他值得討論的多等圓排列情形；若不是直角三角形，等腰三角形、任意一個三角形是否也能找到相切多等圓的情況？以及不同排列下的半徑為何？這引出我們強烈的好奇心，並著手進行研究。

貳、研究目的

一、探討直角三角形弦切、股切、勾切 n 等圓之半徑公式。

二、探討任意三角形的角平分線上相切 n 等圓。

三、(一)探討等腰三角形最大內切圓。

(二)探討腰切 n 等圓、底切 n 等圓、高上相切 n 等圓以及底角角平分線上相切 n 等圓之最適三角形。

四、等腰三角形內四種不同排列的多等圓半徑比較。

參、名詞釋義

一、最適三角形：當三角形內的相切多等圓半徑有最大值時，該三角形稱為最適三角形。

二、相切多等圓：圓 O_k 與圓 $O_{k+1}(k=1,2,...,n-1)$ 相切，且所有圓心共線，將這些圓排列方式定義為(相)切多等圓。

肆、研究設備及器材

紙、筆、筆記型電腦、GeoGebra 程式、Desmos 程式。

伍、研究過程與方法

一、研究流程：

本研究為針對不同三角形內相切多等圓的各種排列情況的探討，其流程如圖 1 所示。

圖 1

以下針對各大部流程及其細節做簡要介紹。

(一)直角三角形內切多等圓：

1.弦切二等圓→弦切 n 等圓。

2.股切、勾切二等圓→股切、勾切 n 等圓。

3.勾切二等圓。

(二)任意三角形：

內角角平分線上相切 n 等圓。

(三)等腰三角形內切圓：

1.內切圓(一圓)。

2.底切二等圓、高上相切二等圓。

3.腰切三等圓、底切三等圓、高上相切三等圓。

(四)等腰三角形內切 n 等圓：

1.腰切 n 等圓-奇數圓、偶數圓。

2.底切 n 等圓-奇數圓、偶數圓。

3.高上相切 n 等圓。

4.底角角平分線上相切 n 等圓。

(五)延伸討論：

底切 n 等圓與高上相切 n 等圓的圓半徑大小比較。

底切 n 等圓與底角角平分線上相切 n 等圓的圓半徑大小比較。

高上相切 n 等圓與底角角平分線上相切 n 等圓的圓半徑大小比較。

二、直角三角形內相切多等圓排列方式之探討

在一直角ΔABC中，$\angle A=90^\circ,\ \overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{AC}=b\ (a>b\geq c)$，其中圓$O_1$、圓$O_2$為兩個半徑為$r$的圓。我們將推導三種排列方式的相切二等圓半徑公式，分別為弦切二等圓、股切二等圓、勾切二等圓，並將這三種多等圓排列的圓個數推廣到n圓一也就是相切n等圓，作一般化討論。

(一)弦切二等圓

若圓O_1與圓O_2相切，且滿足圓O_1與圓O_2都與$\overline{BC}$(斜邊)相切，圓O_1與$\overline{AB}$相切，圓O_2與$\overline{AC}$相切。如圖 2，將此二等圓排列方式稱為**弦切二等圓**。

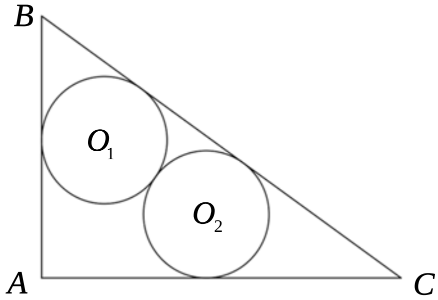


圖 2

結論 1.1

直角ΔABC中，$\angle A=90^\circ,\ \overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{AC}=b\ (a>b\geq c)$，

弦切二等圓之圓半徑 $r=\dfrac{bc}{a+b+c+\dfrac{2bc}{a}}$。

證明：

如圖 3，ΔABC面積$=\Delta ABO_1$面積$+\Delta ACO_2$面積$+\Delta AO_1O_2$面積$+$梯形BO_1O_2C面積

$$\Rightarrow \frac{bc}{2}=\frac{cr}{2}+\frac{br}{2}+\frac{2r(\frac{bc}{a}-r)}{2}+\frac{(a+2r)r}{2}\Rightarrow r=\frac{bc}{a+b+c+\frac{2bc}{a}}$$

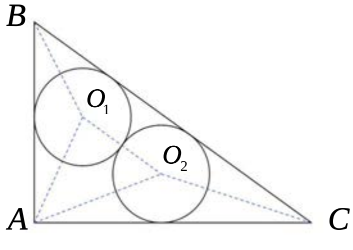


圖 3

(二)弦切n等圓

今有相切n等圓，分別為圓$O_1, O_2, ..., O_n$，該n等圓均與直角ΔABC的斜邊$\overline{BC}$相切，而圓O_1與$\overline{AB}$相切，圓O_n與$\overline{AC}$相切。如圖 4，將此多等圓排列方式定義為弦切n等圓。

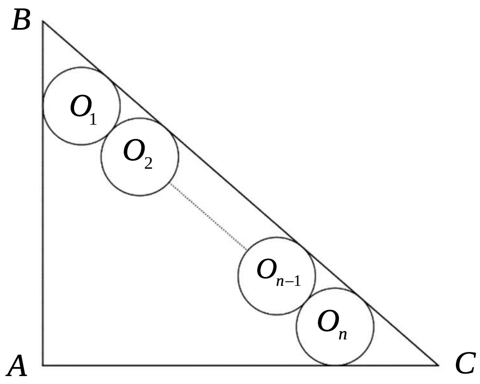


圖 4

> 定理 1.1
>
> 直角ΔABC中，$\angle A = 90°, \overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b\ (a > b \geq c)$，
>
> 弦切n等圓之圓半徑 $r = \dfrac{bc}{a+b+c+\dfrac{2bc(n-1)}{a}}$ 。

證明：

如圖 5，ΔABC面積$=\Delta ABO_1$面積$+\Delta ACO_n$面積$+\Delta AO_1O_n$面積$+$梯形BO_1O_nC面積

$$\Rightarrow \frac{bc}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{[2r(n-1)](\frac{bc}{a} - r)}{2} + \frac{[2r(n-1)+a]r}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{bc}{a+b+c+\dfrac{2bc(n-1)}{a}}$$

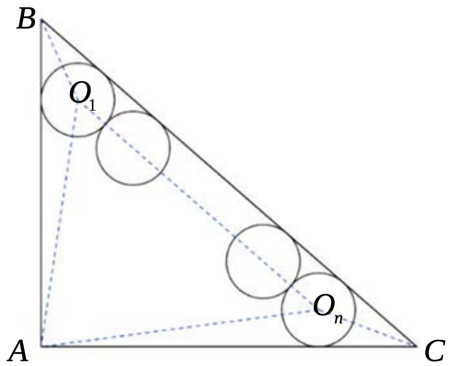


圖 5

此時，若將$a = 5, b = 4, c = 3, n = 2011$代入弦切$n$等圓半徑公式得到$r = \dfrac{1}{805}$，則可順利求得 2011APMO 初選考試的答案，並給出其一般式。接著，延伸此道問題，對於直角三角形中，若此n等圓與直角三角形的另兩邊相切時會有什麼情況？此份研究探討如下。

(三)股切二等圓、勾切二等圓

若圓 O_1 與圓 O_2 相切，且滿足圓 O_1 與圓 O_2 都與 $\overline{AC}$ (股邊)相切，圓 O_1 與 $\overline{AB}$ 相切，圓 O_2 與 $\overline{BC}$ 相切。如圖 6，將此二圓排列方式稱為**股切二等圓**。

若圓 O_1 與圓 O_2 相切，且滿足圓 O_1 與圓 O_2 都與 $\overline{AB}$ (勾邊)相切，圓 O_1 與 $\overline{AC}$ 相切，圓 O_2 與 $\overline{BC}$ 相切。如圖 7，將此二圓排列方式稱為**勾切二等圓**。

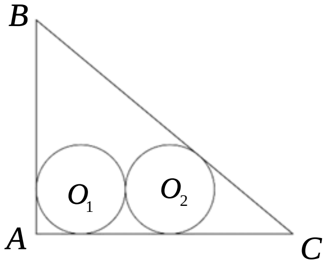


圖 6

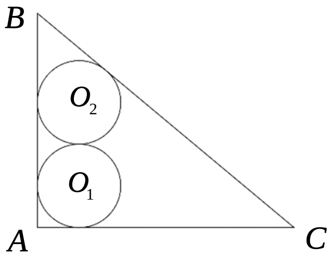


圖 7

結論 1.2

直角 ΔABC 中，$\angle A = 90°, \overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b\ (a > b \geq c)$，

股切二等圓之圓半徑 $r = \dfrac{bc}{a+b+3c}$，而勾切二等圓半徑 $r = \dfrac{bc}{a+3b+c}$。

證明：

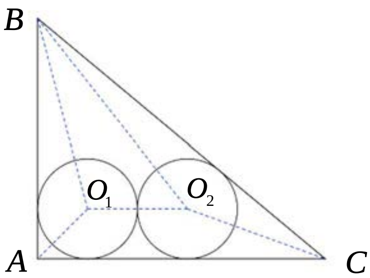


圖 8

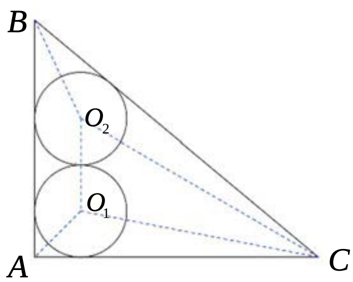


圖 9

如圖 8，ΔABC 面積 $= \Delta ABO_1$ 面積 $+ \Delta BCO_2$ 面積 $+ \Delta BO_1O_2$ 面積 $+$ 梯形 AO_1O_2C 面積

$$\Rightarrow \frac{bc}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{2r(c-r)}{2} + \frac{(b+2r)r}{2} \quad \Rightarrow r = \frac{bc}{a+b+3c}$$

如圖 9 的切割方式，同理，勾切二等圓可得到其半徑 $r = \dfrac{bc}{a+3b+c}$。

(四)股切n等圓、勾切n等圓

今有相切n等圓分別為圓$O_1, O_2, ..., O_n$，該n等圓均與直角ΔABC的股邊$\overline{AC}$相切，而O_1與$\overline{AB}$相切，O_n與$\overline{AC}$相切。如圖 10，將此多等圓排列方式定義為股切n等圓。

今有相切n等圓分別為圓$O_1, O_2, ..., O_n$，該n等圓均與直角ΔABC的勾邊$\overline{AB}$相切，而O_1與$\overline{AC}$相切，O_n與$\overline{BC}$相切。如圖 11，將此多等圓排列方式定義為勾切n等圓。

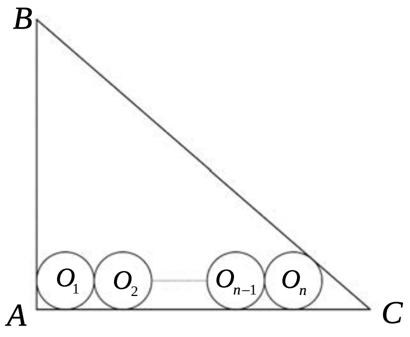


圖 10

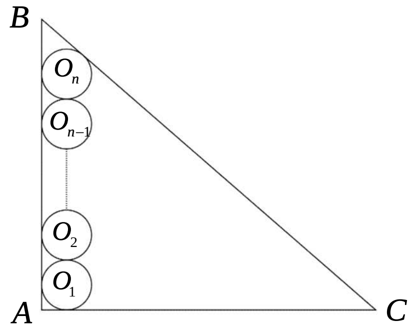


圖 11

定理 1.2

直角ΔABC中，$\angle A = 90°$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ $(a > b \geq c)$，

股切n等圓半徑 $r = \dfrac{bc}{a+b+(2n-1)c}$，勾切$n$等圓半徑 $r = \dfrac{bc}{a+(2n-1)b+c}$。

證明：

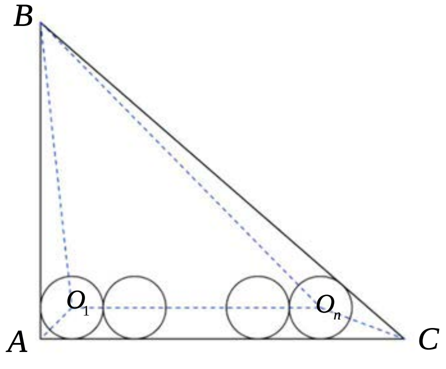


圖 12

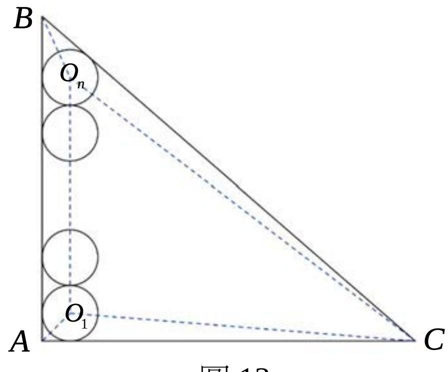


圖 13

如圖 12，ΔABC面積$=\Delta AO_1B$面積$+$ ΔBO_nC面積$+$ ΔBO_1O_n面積$+$梯形AO_1O_nC面積

$$\Rightarrow \frac{bc}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{[2r(n-1)](c-r)}{2} + \frac{[2r(n-1)+b]r}{2} \quad \Rightarrow r = \frac{bc}{a+b+(2n-1)c}$$

如圖 13 的切割方式，同理，可得到勾切n等圓之半徑$r = \dfrac{bc}{a+(2n-1)b+c}$。

三、任意三角形角平分線上相切 n 等圓

如圖 14，在一 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ 的 ΔABC 中，三角度的角平分線通過相切 n 等圓之圓心，故將此排列定義為角平分線上相切 n 等圓。而 $\angle A$ 的角平分線通過相切 n 等圓圓心的稱作 $\angle A$ 之角平分線上相切 n 等圓。

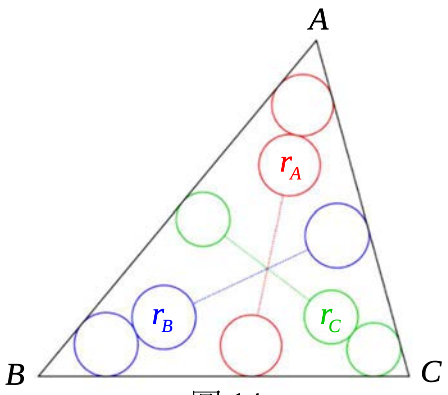


圖 14

定理 2

在一 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$ 的 ΔABC 中，

$\angle A$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑 $r_A=\dfrac{bc\sin A}{a+(b+c)[1+2(n-1)\sin\frac{A}{2}]}$ 。

$\angle B$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑 $r_B=\dfrac{ac\sin B}{b+(a+c)[1+2(n-1)\sin\frac{B}{2}]}$ 。

$\angle C$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑 $r_C=\dfrac{ab\sin C}{c+(a+b)[1+2(n-1)\sin\frac{C}{2}]}$ 。

證明：

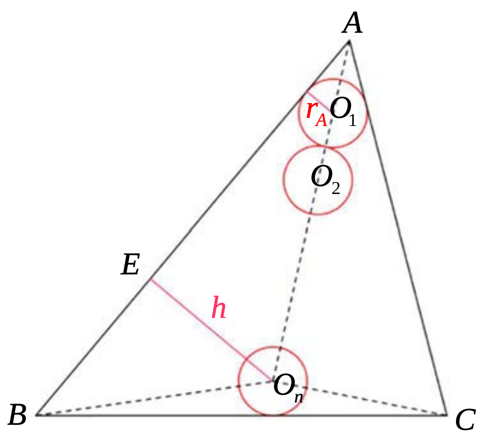


圖 15

1. 如圖 15，作 $\overline{O_nE}\perp\overline{AC}$ 於 E ，並令其為 h ，

$$\overline{AO_n}=\overline{AO_1}+\overline{O_1O_n}=r\csc\frac{A}{2}+2(n-1)r$$

$$\Rightarrow h=[r\csc\frac{A}{2}+2(n-1)r]\cdot\sin\frac{A}{2}$$

2. ΔABC 面積 $=\Delta ABO_n$ 面積 $+\Delta ACO_n+\Delta BO_nC$ 面積

$$\Rightarrow\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{ch}{2}+\frac{bh}{2}+\frac{ar}{2}\Rightarrow bc\sin A=\left(b+c\right)\left[r+2(n-1)r\cdot\sin\frac{A}{2}\right]+ar$$

$$\Rightarrow r=\frac{bc\sin A}{a+\left(b+c\right)\left[1+2\left(n-1\right)\sin\frac{A}{2}\right]}$$

r_B 與 r_C 同理，可得到各角角平分線上相切 n 等圓半徑公式。

四、等腰三角形內切圓、相切二等圓、相切三等圓排列方式之探討

探討完直角三角形的三種多等圓排列後，我們開始思考是否等腰三角形內也可以排出不同多等圓的排列。於是我們將等腰三角形的腰長固定，繪於 GeoGebra 軟體。一開始我們畫等腰三角形內切圓，改變頂角的大小，發現到頂角大約為76°時，內切圓半徑會有最大值。我們對此角度的精確值以及內切圓最大半徑感到好奇，從而展開等腰三角形的研究。進一步思索到二等圓、三等圓的不同排列，探討其最適三角形以及其最大半徑。最後推廣到 n 等圓找出不同排列下的最適三角形以及最大圓半徑。而研究內所述的等腰三角形皆滿足 $\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 的 ΔABC 。

(一)等腰三角形內切圓半徑探討：

> 定理 3
>
> $\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，內切圓之最大半徑 $r=\dfrac{a}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ ，
>
> 最適三角形的 $\angle A=2\sin^{-1}(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$ 註1，最適三角形三邊比$=1:1:(\sqrt{5}-1)$ 。

證明：

1.如圖 16，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H ，

則 $\overline{AH}=a\cos\alpha=r\csc\alpha+r$ ，

同乘以 $\sin\alpha$ 後化簡得 $r=a\cdot\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}$

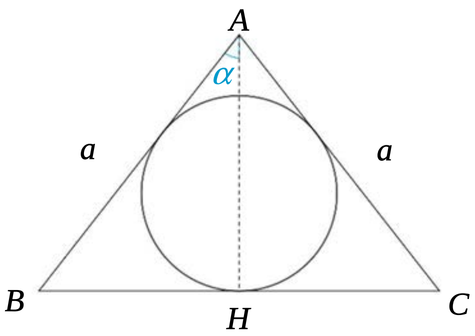


圖 16

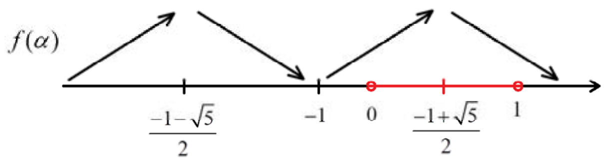
2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}\ (0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ ，

$$f'(\alpha)=\frac{(\sin 2\alpha)'(1+\sin\alpha)-(\sin 2\alpha)(1+\sin\alpha)'}{(1+\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\sin\alpha-\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}=\frac{2}{(1+\sin\alpha)^2}\left(-\sin^3\alpha-2\sin^2\alpha+1\right)$$

$$=\frac{-2}{(1+\sin\alpha)^2}\left(\sin\alpha+1\right)\left(\sin\alpha-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin\alpha-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

又 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow 0<\sin\alpha<1$，如右所示



故 $f(\alpha)$ 在 $\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時有最大值。

3. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 代入， $r=a\cdot\dfrac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=a\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^5}{2}}}{4}=\dfrac{a}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ 。

4.最適三角形三邊比$=a:a:(2a\sin\alpha)=1:1:(\sqrt{5}-1)$ 。

(二)二等圓內切於等腰三角形不同排列方式之半徑探討

1.底切二等圓

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，$\angle A$ 為頂角的等腰 ΔABC 內有相切二等圓排列如圖 17，左邊的圓與 $\overline{AB}$ 相切，右邊的圓與 $\overline{AC}$ 相切，因為該二等圓均與底邊相切，故將此二等圓排列定義為**底切二等圓**。

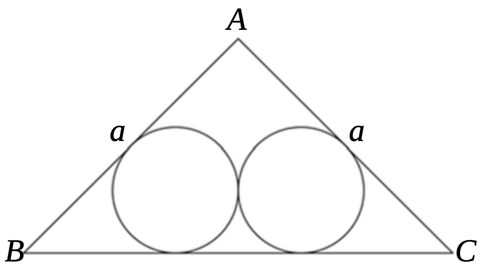


圖 17

> 結論 2
>
> $\overline{AB}=\overline{AC}=a$，頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，底切二等圓的最大半徑 $r=a\cdot\dfrac{(\sqrt{2}-1)}{2}$，最適三角形為等腰直角三角形。

證明：

1. 如圖 18，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H，

$$r=\frac{a\sin\frac{A}{2}+a\cos\frac{A}{2}-a}{2}=\frac{a}{2}(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}-1)$$

$$\because \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\le\sqrt{2}\quad \therefore r\le\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$$

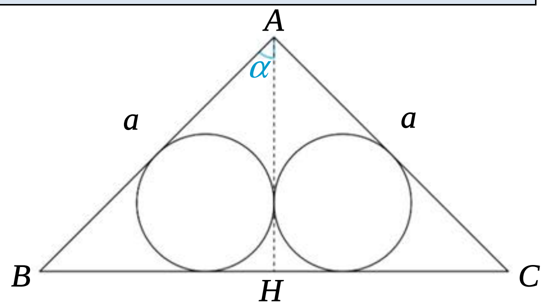


圖 18

2. 故當 $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle A=90°$ 時，**底切二等圓半徑** $r_{\max}=a\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。

2.高上相切二等圓

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，$\angle A$ 為頂角的等腰 ΔABC 內有相切二等圓排列如圖 19，上方的圓與 $\overline{AB},\overline{AC}$ 均相切，下方的圓與 $\overline{BC}$ 相切，因為 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AH}$ 通過兩圓圓心，故將其定義為**高上相切二等圓**。

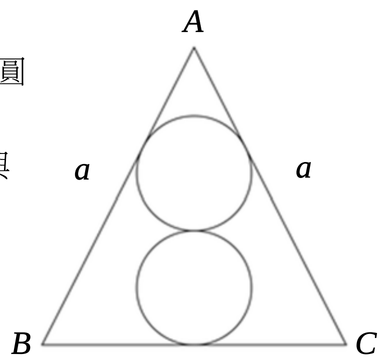


圖 19

註 1：最適三角形的 $\angle A$ 度數近似於 $76.35°$

結論 3

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，高上相切二等圓之最適三角形滿足 $\cos A=3\sin^3(\frac{A}{2})$ [註 2]。

證明：

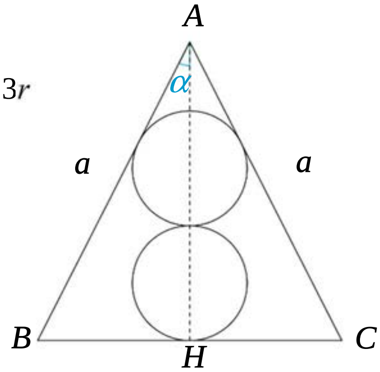


圖 20

1. 如圖 20，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H，則 $\overline{AH}=a\cos\alpha=r\csc\alpha+3r$

   同乘以 $\sin\alpha$ 化簡後得 $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{3\sin\alpha+1}$。

2. 令 $f(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{3\sin\alpha+1}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$f'(\alpha)\overset{let}{=}0$。

$$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{(\sin 2\alpha)'(3\sin\alpha+1)-\sin 2\alpha(3\sin\alpha+1)'}{(3\sin\alpha+1)^2}=0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha(3\sin\alpha+1)=\frac{3}{2}\sin 2\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)(3\sin\alpha+1)=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$\Rightarrow 3\sin^3\alpha+2\sin^2\alpha-1=0\Rightarrow 3\sin^3\alpha=\cos 2\alpha$$

   在滿足此關係式時，可知其二階導數 <0，推得為最大值產生處[註 3]。

3. 由 1、2 可知，高上相切 n 等圓之最適三角形的頂角 $\angle A$ 滿足 $\cos A=3\sin^3(\frac{A}{2})$。

(三)三等圓內切於等腰三角形不同排列方式之半徑探討

1.腰切三等圓

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，$\angle A$ 為頂角的等腰 ΔABC 內有三等圓排列如圖 21，O_1 與 O_2 相切且 O_1 與 O_3 相切，此三等圓均與腰相切，其中 O_2 , O_3 均與 $\overline{BC}$ 相切且 O_1 與兩腰相切，將此排列方式定義為**腰切三等圓**。

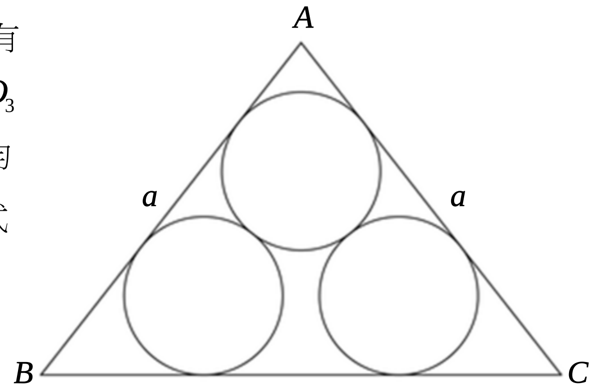


圖 21

註 2：滿足條件的 $\angle A$ 近似於 $63.77°$

註 3：輔以 GeoGeBra 繪圖軟體可知，其滿足關係式時，半徑有最大值。本研究後方所探討最適三角形方式與此相同，將不加以贅述。

結論 4

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，腰切三等圓之最適三角形 $\angle A=2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$[註4]，而三邊比$=1:1:(\sqrt{5}-1)$。

證明：

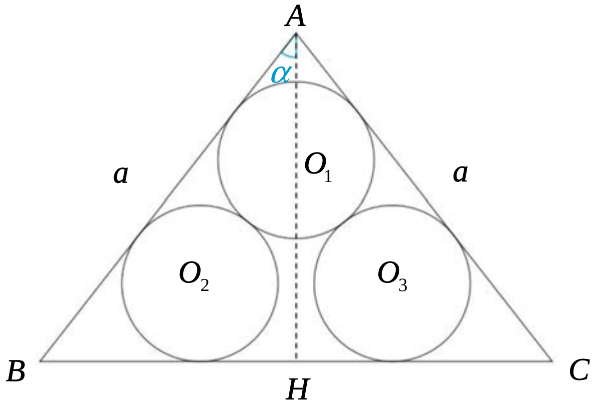


圖 22

1. 如圖 22，令 $\overline{BC}$ 之中點 H,

$\overline{AH}=a\cos\alpha=r(\csc\alpha+2\cos\alpha+1)$

同乘以 $\sin\alpha$ 化簡後得 $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin\alpha+1}$

2. 令 $f(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin\alpha+1}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$[註5]，

$f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$\Rightarrow \frac{(\sin 2\alpha)'(\sin 2\alpha+\sin\alpha+1)-(\sin 2\alpha)(\sin 2\alpha+\sin\alpha+1)'}{(\sin 2\alpha+\sin\alpha+1)^2}=0$

$\Rightarrow 2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha+\sin\alpha+1)=\sin 2\alpha(2\cos 2\alpha+\cos\alpha)$

$\Rightarrow \cos(2\alpha)\sin\alpha+\cos(2\alpha)=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\cos\alpha$

$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha+1-2\sin^2\alpha=\sin\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow (\sin\alpha+1)(\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)=0$

$\therefore \sin\alpha=-1$(不合)或 $\sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$(取正)

3. 由 1、2 可知，最適三角形的頂角 $\angle A=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，其三邊比$=1:1:(\sqrt{5}-1)$。

2.底切三等圓

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，$\angle A$ 為頂角的等腰 ΔABC 內有相切三等圓排列方式如圖 23，令腰長為 a，該三等圓均與底邊相切，圓 O_1 與 $\overline{AB}$ 相切且圓 O_3 與 $\overline{AC}$ 相切，因為該三圓均與底邊相切，故將其定義為**底切三等圓**。

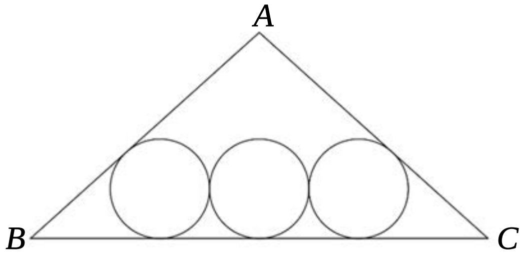


圖 23

註 4：$\angle A$ 的度數近似於 $76.35°$

註 5：當 $\alpha<30°$ 時，也就是 $\angle A<60°$ 時，O_2 與 O_3 會相割，但不影響結論。

結論 5

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，底切三等圓之最適三角形的 $\angle A$ 滿足 $\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-2\cos^3(\frac{A}{2})$[註6]。

證明：

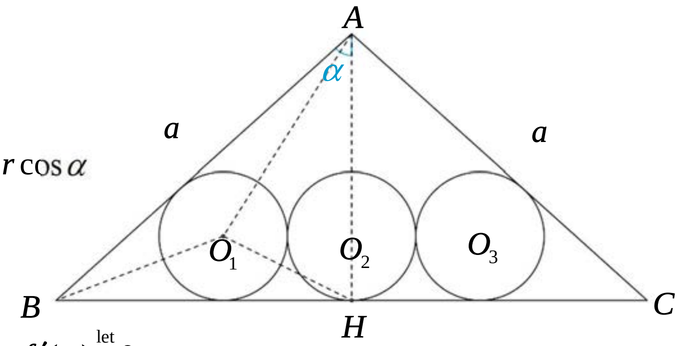


圖 24

1. 如圖 24，令 $\overline{BC}$ 中點為 H，

$$\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}ar\sin\alpha+\frac{1}{2}a\cdot 2r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha+1}$$

2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha+1)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\cos\alpha-2\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)(\sin\alpha+2\cos\alpha+1)=\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha-2\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha=2\sin^3\alpha+2\cos\alpha(\sin^2\alpha-1)+\sin\alpha(\cos^2\alpha-1)$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha=\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha$$

3. 由 1、2 可知，底切三等圓最適三角形的 $\angle A$ 滿足 $\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-2\cos^3(\frac{A}{2})$。

3.高上相切三等圓

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，$\angle A$ 為頂角的等腰 ΔABC 內有相切三等圓排列方式如圖 25，圓 O_1 與 $\overline{AB},\overline{AC}$ 均相切，圓 O_3 與 $\overline{BC}$ 相切。因為 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AH}$ 均通過三圓圓心，故將其定義為高上相切三等圓。

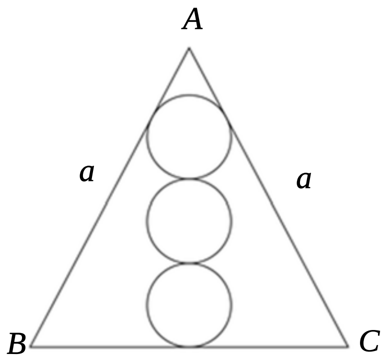


圖 25

註 6：滿足條件的 $\angle A$ 近似於 $97.90°$

結論 6

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$，頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，高上相切三等圓最適三角形的 $\angle A$ 滿足 $\cos A=5\sin^3(\frac{A}{2})$ 註 7。

證明：

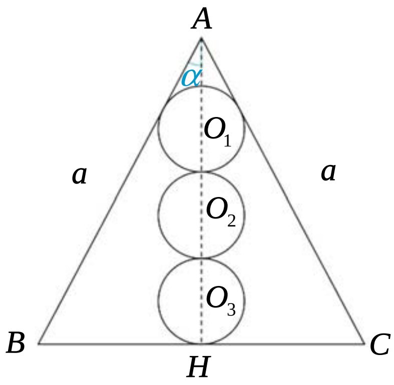


圖 26

1. 如圖 26，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H，$\overline{AH}=a\cos\alpha=r\csc\alpha+5r$

   左右式同乘以 $\sin\alpha$ 化簡後得 $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{5\sin\alpha+1}$

2. 令 $f(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{5\sin\alpha+1}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

   $\Rightarrow \frac{(\sin 2\alpha)'(5\sin\alpha+1)-(\sin 2\alpha)(5\sin\alpha+1)'}{(5\sin\alpha+1)^2}=0$

   $\Rightarrow \cos 2\alpha(5\sin\alpha+1)=\frac{5}{2}\sin 2\alpha\cos\alpha$

   $\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)(5\sin\alpha+1)=5\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$

   $\Rightarrow 5\sin^3\alpha+2\sin^2\alpha-1=0 \ \Rightarrow \cos 2\alpha=5\sin^3\alpha$

3. 由 1、2 可知，**高上相切三等圓最適三角形的 $\angle A$ 滿足 $\cos A=5\sin^3(\frac{A}{2})$**。

五、等腰三角形內相切 n 等圓排列方式之探討

在探討完內切圓、二圓與三圓於等腰三角形內不同相切情形後，我們發現，內切圓與腰切三圓結論相同，某幾種排列情況之最適三角形 $\angle A$ 滿足的三角函數關係似乎有相似之處，於是我們將各種排列方式嘗試推廣至 n 等圓，並探討其最適三角形。

(一)腰切 n 等圓

1.腰切奇(數)圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a, \angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，有 n 等圓 $(n=2m+1, m\in\mathbb{N})$ 的排列方式如圖 27。圓 O_k 與圓 O_{k+2} 相切 $(k=2, 3,\cdots,n-2)$，其中圓 O_{n-1} 與圓 O_n 均與 $\overline{BC}$ 相切且圓 O_1 同時相切於兩腰。因為此 n 等圓均與腰相切，故將此排列定義為**腰切奇(數)圓**。

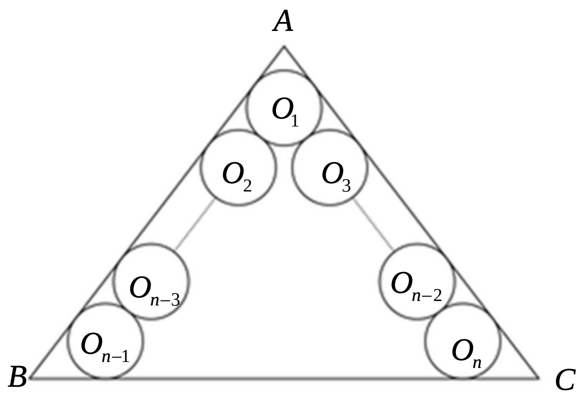


圖 27

註 7：滿足條件的 $\angle A$ 近似於 $57.03°$

定理 4

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，腰切奇圓的最適三角形滿足

(1) $\angle A=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 註 8，最適三角形邊比 $=1:1:(\sqrt{5}-1)$ 。

(2) $r_{\max}=a\cdot\dfrac{\phi^{\frac{5}{2}}}{1+(n-1)\phi^{\frac{5}{2}}}$, $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

證明：

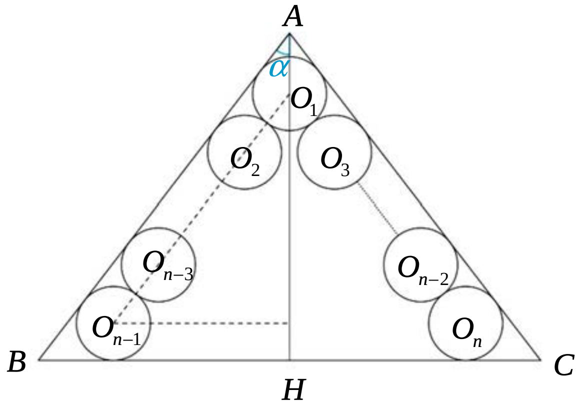


圖 28

1. 如圖 28，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H ， $\overline{AH}=a\cos\alpha=r\csc\alpha+(n-1)r\cos\alpha+r$

左右式同乘以 $\sin\alpha$ 可得 $r=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}$

2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ ， $f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow \frac{(\sin 2\alpha)'[1+\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha]-(\sin 2\alpha)[1+\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha]'}{[1+\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha]^2}=0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha(1+\sin\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\sin 2\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha[(n-1)\cos 2\alpha+\cos\alpha]$$

$$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)=\sin\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^3\alpha+2\sin^2\alpha-1=0$$

$\Rightarrow \sin\alpha=-1$(不合) 或 $\sin\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (取正)

3. 由 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可知，腰切奇圓之最適三角形三邊比 $=1:1:(\sqrt{5}-1)$ 。

4. 令 $\phi=\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，則 $\phi^2+\phi-1=0\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\phi}$ 代入得

$$r_{\max}=a\cdot\frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{1+\phi+\phi^{\frac{3}{2}}(n-1)}=a\cdot\frac{\phi^{\frac{5}{2}}}{\phi^2+\phi+\phi^{\frac{5}{2}}(n-1)}=a\cdot\frac{\phi^{\frac{5}{2}}}{1+\phi^{\frac{5}{2}}(n-1)}$$

註 8： $\angle A$ 的度數近似於 76.35°

2.腰切偶(數)圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a$, $\angle A=2\alpha$ 等腰 ΔABC 中，有 n 等圓 $(n=2m, m\in\mathbb{N})$ 的排列方式如圖 29。圓 O_k 與圓 O_{k+2} 相切 $(k=1,2,\cdots,n-2)$ ，其中圓 O_{n-1} 與圓 O_n 均與 $\overline{BC}$ 相切且圓 O_1 與圓 O_2 相切。因為此 n 等圓均與腰相切，故將此排列方式定義為**腰切偶(數)圓**。

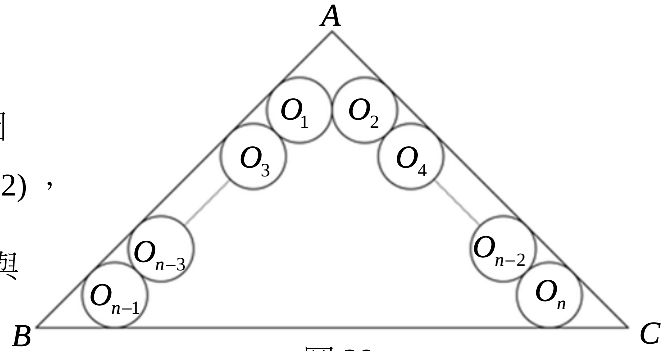


圖 29

定理 5

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ ，頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，腰切偶圓的最適三角形為等腰直角三角形， $r_{\max}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}+n}$ 。

證明：

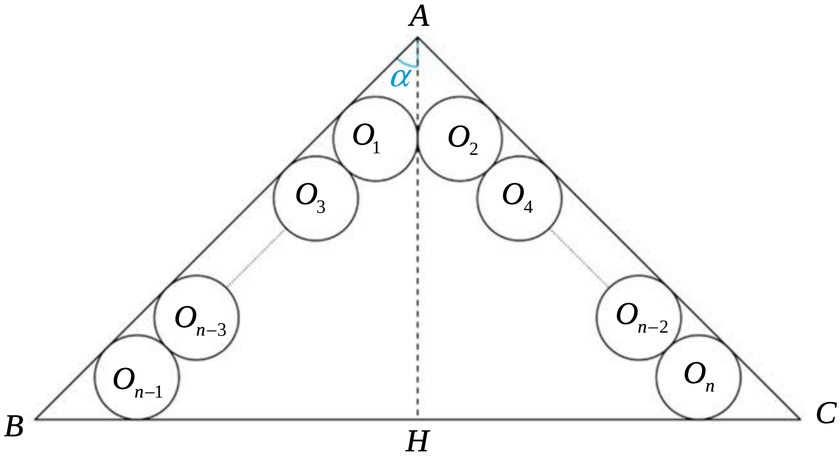


圖 30

1. 如圖 30，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H ，直角 ΔABH 內有弦切 $\dfrac{n}{2}$ 等圓，

代入定理 1 之半徑公式得 $r=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+(n-2)\sin\alpha\cos\alpha}$

2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+(n-2)\sin\alpha\cos\alpha}$ $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ ， $f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}\sin 2\alpha)'(1+\sin\alpha+\cos\alpha+(n-2)\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha+(n-2)\sin\alpha\cos\alpha)'$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha(1+\sin\alpha+\cos\alpha+(n-2)\cos\alpha)=(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha+(n-2)\cos 2\alpha)$$

展開移項整理後得 $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\Rightarrow(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$\Rightarrow(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+1)(\cos\alpha+1)=0$

$\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha=-1$(不合)或 $\cos\alpha=-1$(不合)，

$\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha\quad\Rightarrow\alpha=45^\circ$

3. 故當 $\angle A=2\alpha=90^\circ$ 時，腰切偶圓半徑有最大值

4. 將 $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入圓半徑公式得 $r_{\max}=a\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{\sqrt{2}}+(n-2)\frac{1}{2}}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}+n}$ 。

(二)底切 n 等圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 內，底切二等圓與底切三等圓排列情形是類似的，差異處在於 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AH}$ 沒有通過底切二等圓的半徑。將圓個數推廣到 n 圓後，在奇數上與偶數上的證明就會有所差異，故我們將 n 分為奇數以及偶數探討，如定理 6.1 及定理 6.2，兩者推導後的結果卻是相同的。

1.底切奇(數)圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，有相切 n 等圓($n=2m+1$ ， $m\in\mathbb{N}$)排列的方式如圖 31。其中圓 O_1 與 $\overline{AB}$ 相切且圓 O_n 與 $\overline{AC}$ 相切。因為此 n 圓均與底邊 $\overline{BC}$ 相切，故將此排列定義為**底切奇(數)圓**。

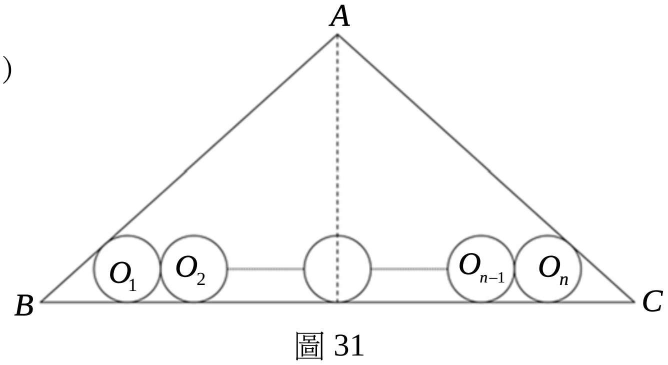


圖 31

定理 6.1

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，底切奇圓最適三角形的 $\angle A$ 滿足

$\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-(n-1)\cos^3(\frac{A}{2})$ 。

證明：

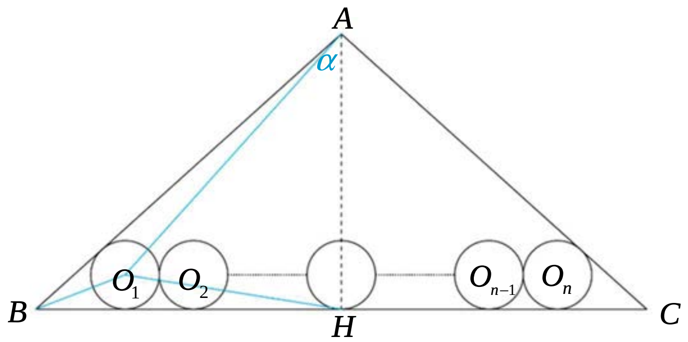


圖 32

1. 如圖 32，令 $\overline{BC}$ 中點為 H ， ΔABH 面積 $=\Delta BO_1H$ 面積 $+\Delta ABO_1$ 面積 $+\Delta AO_1H$ 面積

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}ar\sin\alpha+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}a(n-1)r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1}$$

2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1}\ (0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ ， $f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow \frac{(\sin 2\alpha)'[\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1]-(\sin 2\alpha)[\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1]'}{[\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1]^2}=0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha\left[\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1\right]=\sin 2\alpha\left[\cos\alpha-(n-1)\sin\alpha\right]$$

$$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)\left[(n-1)\cos\alpha+\sin\alpha+1\right]=2\sin\alpha\cos^2\alpha-2(n-1)\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow (n-1)\cos\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)+1-2\sin^2\alpha=2\sin^3\alpha+\sin\alpha(\cos^2\alpha-1)$$

$$\Rightarrow \sin^3\alpha-(n-1)\cos^3\alpha=\cos 2\alpha$$

3. 故底切奇圓之最適三角形的 $\angle A$ 滿足 $\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-(n-1)\cos^3(\frac{A}{2})$ 。

2.底切偶(數)圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，有相切 n 等圓 $(n=2m,m\in\mathbb{N})$ 排列的方式如圖 33。其中圓 O_1 與 $\overline{AB}$ 相切且圓 O_n 與 $\overline{AC}$ 相切。因為此 n 圓均與底邊 $\overline{BC}$ 相切，故將此排列方式定義為**底切偶(數)圓**。

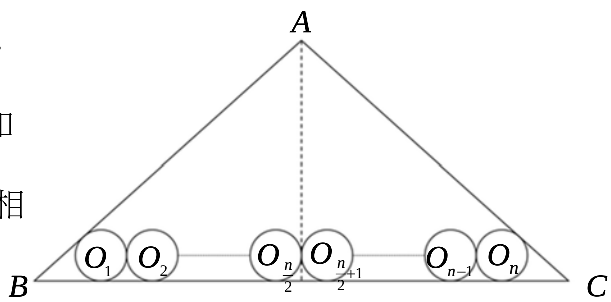


圖 33

定理 6.2

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 、頂角為 A 的等腰 ΔABC 中，底切偶圓的最適三角形 $\angle A$ 滿足

$\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-(n-1)\cos^3(\frac{A}{2})$ 。

證明：

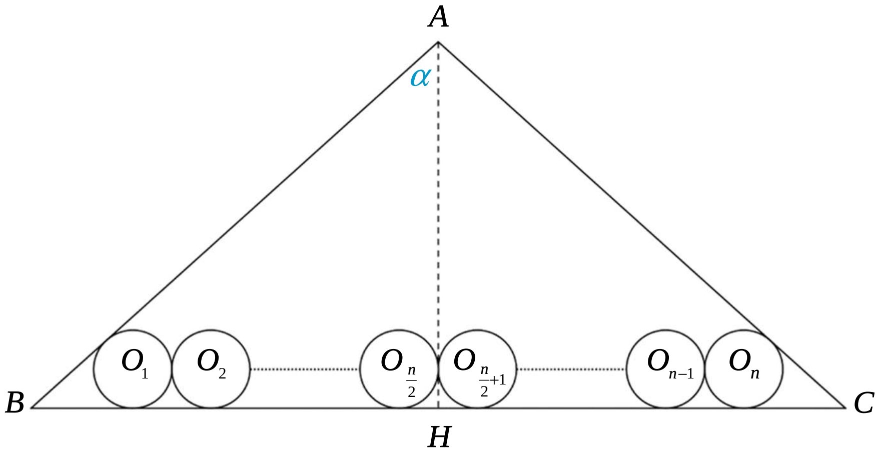


圖 34

如圖 34，令 $\overline{BC}$ 中點為 H ，直角 ΔABH 內有股切 $\frac{n}{2}$ 等圓，代入定理 1.2 之半徑公式

得 $r=\dfrac{a^2\sin\alpha\cos\alpha}{a+a\sin\alpha+\left[2(\frac{n}{2})-1\right]\cdot a\cos\alpha}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha}$

與底切奇圓的半徑關係式相同，因此底切偶圓之最適三角形的 $\angle A$ 亦滿足

$\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-(n-1)\cos^3(\frac{A}{2})$ 。

(三)高上相切 n 等圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 等腰 ΔABC 中，有相切 n 等圓排列的方式如圖 35。其中圓 O_1 與 $\overline{AB},\overline{AC}$ 相切且圓 O_n 與 $\overline{BC}$ 相切。因為 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AH}$ 過所有圓心，故將此排列定義為**高上相切 n 等圓**。

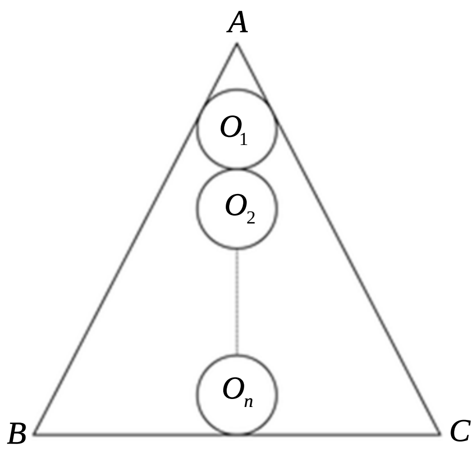


圖 35

定理 7

$\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，高上相切 n 等圓的最適三角形 $\angle A$ 滿足

$\cos A=(2n-1)\sin^3(\dfrac{A}{2})$ 。

證明：

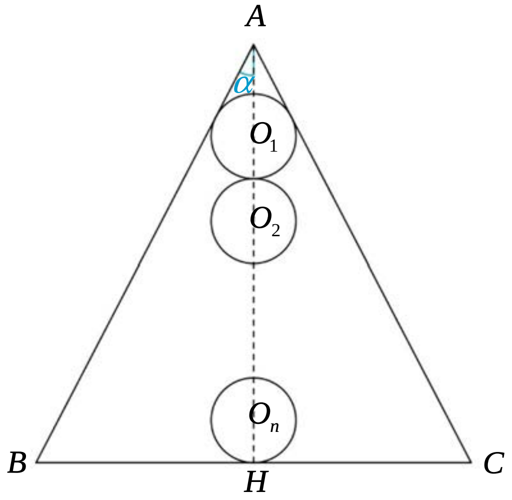


圖 36

1. 如圖 36，令 $\overline{BC}$ 之中點為 H ，$\overline{AH}=a\cos\alpha=r\csc\alpha+2nr-r$

左右式同乘以 $\sin\alpha$ 化簡得 $r=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{(2n-1)\sin\alpha+1}$

2. 令 $f(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{(2n-1)\sin\alpha+1}\ (0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ ， $f'(\alpha)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow \frac{(\sin 2\alpha)'[(2n-1)\sin\alpha+1]-(\sin 2\alpha)[(2n-1)\sin\alpha+1]'}{[(2n-1)\sin\alpha+1]^2}=0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha[(2n-1)\sin\alpha+1]=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot(2n-1)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow (1-2\sin^2\alpha)((2n-1)\sin\alpha+1)=(2n-1)\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$\Rightarrow (2n-1)\sin^3\alpha+2\sin^2\alpha-1=0 \quad \Rightarrow (2n-1)\sin^3\alpha=\cos 2\alpha$$

3. 故高上相切 n 等圓最適三角形的 $\angle A$ 函數關係滿足 $\cos A=(2n-1)\sin^3(\dfrac{A}{2})$ 。

(四)底角角平分線上相切 n 等圓

在 $\overline{AB}=\overline{AC}=a$, $\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，有相切 n 等圓排列的方式如圖 37。其中圓 O_1 與 $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ 相切且圓 O_n 與 $\overline{AC}$ 相切。因為 $\angle B$ 的角平分線通過所有圓心，故將其定義為底角角平分線上相切 n 等圓。

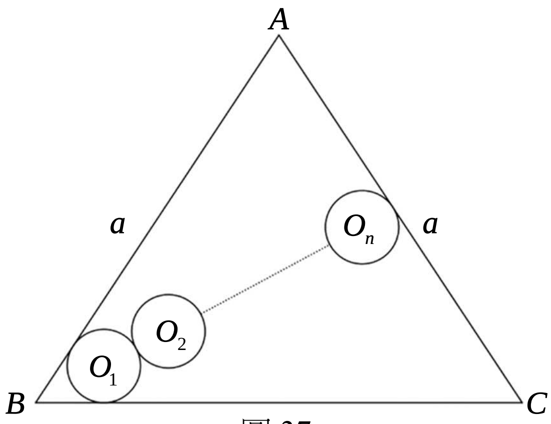


圖 37

定理 8

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$, $\angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，底角角平分線上相切 n 等圓之最適三角形的 $\angle B$ 滿足 $\cos B=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(n-1)(7\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{7B}{2})-\cos 2B}$ 。

證明：

1.代定理 2 之半徑公式得 $r=\dfrac{2a^2\sin\frac{A}{2}\sin B}{a+(a+2a\sin\frac{A}{2})[1+2(n-1)\sin\frac{B}{2}]}$

展開化簡得 $r=\dfrac{a\sin B\cos B}{1+\cos B+(n-1)(1+2\cos B)\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2B}{1+\cos B+(n-1)\sin\frac{3B}{2}}$

2.令 $B=x$ 且 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x+(n-1)\sin\frac{3x}{2}}$ ， $f'(x)\overset{\text{let}}{=}0$

$$\Rightarrow 2\cos 2x[1+\cos x+(n-1)\sin\frac{3x}{2}]=\sin 2x[-\sin x+\frac{3}{2}(n-1)\cos\frac{3x}{2}]$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x+\cos 3x+\cos x+(n-1)(\sin\frac{7x}{2}-\sin\frac{x}{2})=\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)+\frac{3}{4}(n-1)(\sin\frac{7x}{2}+\sin\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x+\frac{1}{2}(4\cos^3 x-3\cos x)+\frac{3}{2}\cos x=\frac{1}{4}(n-1)(7\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{7x}{2})$$

$$\Rightarrow 8\cos^3 x=-8\cos 2x+(n-1)(7\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{7x}{2})$$

$$\Rightarrow \cos x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(n-1)(7\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{7x}{2})-\cos 2x}$$ ，因此可得出定理 8。

六、等腰三角形內的相切多等圓半徑比較

根據等腰三角形底切 n 等圓與高上相切 n 等圓公式，我們利用繪圖軟體 GeoGebra 輔助下，畫出 $n=2$ 的情形，觀察到底切 n 等圓與高上相切 n 等圓之半徑大小在不同的頂角下會不同，這讓我們思考是否會有一個特殊的頂角大小或特殊的三角形邊比使得兩種情況的半徑大小相等，並比較其半徑大小。因此將等腰三角形的四種排列，兩兩進行半徑比較。研究後便推導出以下的結論，並探討 n 等圓的多等圓半徑比較。

(一)底切二等圓與高上相切二等圓的關係

結論 7 今有一 $\overline{AB}=\overline{AC}=a, \angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC，當三邊比 $=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$ 時，底切二等圓之圓半徑＝高上相切二等圓之半徑。

證明：

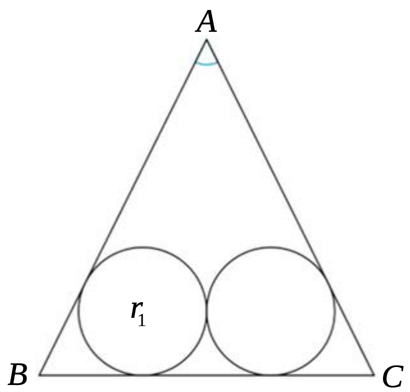


圖 38

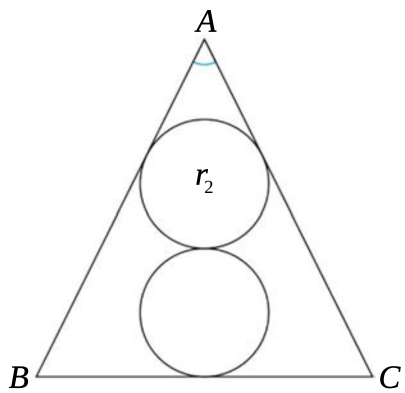


圖 39

$r_1=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$，$r_2=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{3\sin\alpha+1}$

1. 若 $r_1=r_2$，$1+\sin\alpha+\cos\alpha=3\sin\alpha+1 \Rightarrow \cos\alpha=2\sin\alpha$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$

2. $\tan A=\tan 2\alpha=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{3}$，$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$

3. 若 $r_1>r_2$，則 $\tan\alpha>\frac{1}{2}$，$\tan A>\frac{4}{3}$；若 $r_1<r_2$，則 $\tan A<\frac{4}{3}$

(二)腰切n等圓與其他三種排列的半徑比較

在一$\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$的等腰$\Delta ABC$中，取$n$為奇數$(n\neq 1)$，並令腰切奇圓、底切$n$等圓、高上相切$n$等圓、底角角平分線上相切$n$等圓半徑分別為$r$、$r_1$、$r_2$、$r_3$，則

$$r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin a+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}\qquad r_1=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1}$$

$$r_2=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{(2n-1)\sin\alpha+1}\qquad r_3=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2B}{1+\cos B+(n-1)\sin\dfrac{3B}{2}}$$

從幾何上來看，可以確定腰切n等圓的半徑恆大於其他三個排列的半徑，此處我們給出證明確認此不等式恆成立。給出腰切奇圓證明後，即可以從幾何上確認腰切偶圓的半徑恆大於其他三者的半徑。

證明：

1.若$r\le r_1$，即$(n-1)\sin\alpha\cos\alpha\ge(n-1)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha\ge 1$(大於或等於皆不成立)

$\Rightarrow r>r_1$

2.若$r\le r_2$，即$\sin\alpha+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha\ge(2n-1)\sin\alpha\Rightarrow\cos\alpha\ge 2$(不成立)

$\Rightarrow r>r_2$

3.若r恆大於r_3，即$(n-1)\sin\alpha\cos\alpha<(n-1)\sin\dfrac{3B}{2}\Rightarrow\sin B\cos B<\sin\dfrac{3B}{2}$

令$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$、$g(x)=\sin\dfrac{3x}{2}$，繪製兩函數可觀察到在$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$區域內，如圖 40 $f(x)<g(x)$恆成立，故r恆大於r_3

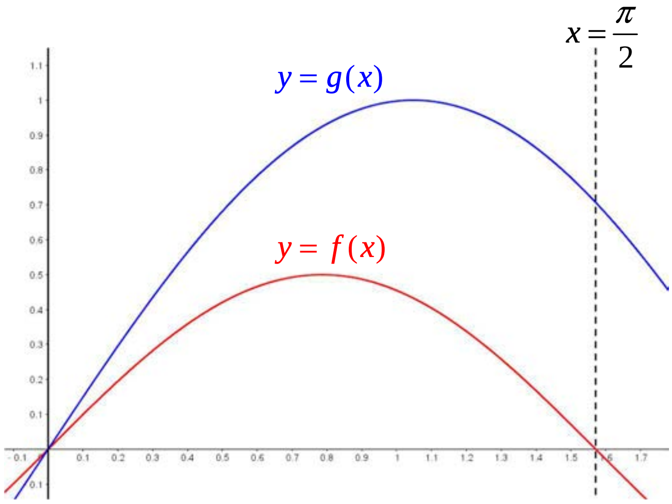


圖 40

(三)底切n等圓、高上相切n等圓、底角角平分線上相切n等圓的半徑比較

在一$\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$的等腰$\Delta ABC$中，令底切$n$等圓半徑為$r_1$，高上相切$n$等圓半徑為$r_2$，底角角平分線上相切$n$等圓半徑為$r_3$，將$r_1,r_2,r_3$與$a,\alpha$的關係式，兩兩比較後可得：當其中任兩排列的半徑相等時，該三角形邊比為何。以及三半徑的大小關係。

定理 9

1.當底切n等圓半徑＝高上相切n等圓半徑時：

等腰ΔABC之三邊比$=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$，$r_1=r_2=\dfrac{2a}{2\sqrt{5}n-\sqrt{5}+5}$。

2.當底切n等圓半徑＝底角角平分線上相切n等圓半徑時：

等腰ΔABC為銳角黃金三角形，$r_1=r_3=a\cdot\dfrac{\phi^2\sqrt{2-\phi}}{2+2\phi(n-1)\sqrt{2-\phi}},\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

3.當高上相切n等圓半徑＝底角角平分線上相切n等圓半徑時：

ΔABC為正三角形，$r_2=r_3=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{4n+2}$。

證明：

因為三種排列一圓的情形相同，故討論$n\geq 2$的情形。

$$r_1=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1},r_2=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{(2n-1)\sin\alpha+1},r_3=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2B}{1+\cos B+(n-1)\sin\frac{3B}{2}}$$

1.若$r_1=r_2$，即$\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha=(2n-1)\sin\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\angle A=\tan^{-1}(\dfrac{4}{3})$

$\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，三邊比$=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$。

將$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$代入，得。

同理，若$r_1>r_2\Rightarrow\tan A>\dfrac{4}{3}$；若$r_1<r_2\Rightarrow\tan A<\dfrac{4}{3}$。

2.若 $r_1=r_3$ ，即 $\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha=\cos B+(n-1)\sin\frac{3B}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\sin\frac{3B}{2}$ ，又 $\alpha+\angle B=90°$

$\Rightarrow\sin B=\sin\frac{3B}{2}$ $\because 0°<\angle B<90°\therefore$ 僅可能為 $\angle B+\frac{3}{2}\angle B=180°\Rightarrow\angle B=72°$

故當 $r_1=r_3$ 時，該三角形為一銳角黃金三角形。

又得知 $\alpha=18°\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\overset{\text{let}}{=}\frac{\phi}{2},\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{\phi^2}{4}}$

$$\Rightarrow r_1=r_3=a\cdot\frac{\frac{\phi}{2}\sqrt{1-\frac{\phi^2}{4}}}{1+\frac{\phi}{2}+(n-1)\sqrt{1-\frac{\phi^2}{4}}}=a\cdot\frac{\phi\sqrt{(2+\phi)(2-\phi)}}{4+2\phi+2(n-1)\sqrt{(2+\phi)(2-\phi)}}$$

又 $2+\phi=(1+\phi)^2$ 且 $\phi(1+\phi)=1$

$$\Rightarrow r=a\cdot\frac{\sqrt{2-\phi}}{2(\phi+1)^2+2(\phi+1)(n-1)\sqrt{2-\phi}}=a\cdot\frac{\phi^2\sqrt{2-\phi}}{2+2\phi(n-1)\sqrt{2-\phi}}$$ 。

同理，若 $r_1>r_3$ ，則 $\sin B>\sin\frac{3B}{2}$ ， $\angle B<72°$ ；若 $r_1<r_3$ ，則 $\angle B>72°$ 。

3.從幾何觀點思考，可考慮到當 ΔABC 為正三角形時，兩半徑相等。但我們須確認正三角形為唯一的三角形使等式成立。

若 $r_2=r_3$ ，即 $(2n-1)\sin\alpha=\cos B+(n-1)\sin\frac{3B}{2}\Rightarrow 2\cos B=\sin\frac{3B}{2}$

$\Rightarrow 2-4\sin^2\frac{B}{2}=3\sin\frac{B}{2}-4\sin^3\frac{B}{2}$ ， $4\sin^3\frac{B}{2}-4\sin^2\frac{B}{2}-3\sin\frac{B}{2}+2=0$

因先前猜測正三角形為合理解，應有 $2\sin\frac{B}{2}-1$ 之因式

$\Rightarrow(2\sin\frac{B}{2}-1)(2\sin^2\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}-2)=0\therefore\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$ 或 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ (皆不合)

故當 $r_2=r_3$ 時，該三角形為正三角形 $\Rightarrow r=a\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1+(2n-1)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{4n+2}$

同理，若 $r_2>r_3$ ，則 $\angle B>60°(\angle A<60°)$ ；若 $r_2<r_3$ ，則 $\angle B<60°(\angle A>60°)$ 。

陸、研究結果

一、直角三角形內相切多等圓

如圖 24，在一 $\angle A=90°, \overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c\ (a>b\geq c)$ 直角 ΔABC 中，得到定理 1：

$$\begin{cases} \text{弦切 } n \text{ 等圓半徑 } r_1=\dfrac{bc}{a+b+c+\dfrac{2bc(n-1)}{a}} \\ \text{股切 } n \text{ 等圓半徑 } r_2=\dfrac{bc}{a+b+(2n-1)c} \\ \text{勾切 } n \text{ 等圓半徑 } r_3=\dfrac{bc}{a+(2n-1)b+c} \end{cases}$$

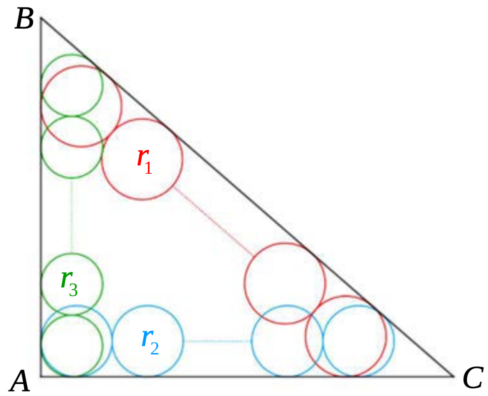


圖 41

二、任意三角形角平分線上相切多等圓

在一 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ 的 ΔABC 中，得到定理 2：

1. $\angle A$ 之角平分線上相切 n 等圓公式 $r_A=\dfrac{bc\sin A}{a+(b+c)[1+2(n-1)\sin\frac{A}{2}]}$。

2. $\angle B$ 之角平分線上相切 n 等圓公式 $r_B=\dfrac{ac\sin B}{b+(a+c)[1+2(n-1)\sin\frac{B}{2}]}$。

3. $\angle C$ 之角平分線上相切 n 等圓公式 $r_C=\dfrac{ab\sin C}{c+(a+b)[1+2(n-1)\sin\frac{C}{2}]}$。

三、等腰三角形內切圓：

在一腰長固定，$\overline{AB}=\overline{AC}=a, \angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 中，得出定理 3：

$\overline{AB}=\overline{AC}=a, \angle A=2\alpha$ 的等腰 ΔABC 內切圓中：

(1)最適三角形的三邊比 $1:1:(\sqrt{5}-1)$，其中 $\angle A=2\sin^{-1}(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$。

(2) $r_{\max}=\dfrac{a}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$

四、等腰三角形內相切多等圓：

在一$\overline{AB}=\overline{AC}=a,\angle A=2\alpha$的等腰$\Delta ABC$中，得出四種排列的相切多等圓之最適三角形滿足條件：

(一)腰切n等圓

1.定理 4：腰切奇圓最之適三角形三邊比$=1:1:(\sqrt{5}-1)$，$\angle A=2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$。

$$r_{\max}=a\cdot\frac{\phi^{\frac{5}{2}}}{1+(n-1)\phi^{\frac{5}{2}}},\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

2.定理 5：腰切偶圓之最適三角形為等腰直角三角形，$r_{\max}=\frac{a}{2\sqrt{2}+n}$。

(二)底切n等圓

定理 6：無論n為奇數或偶數，底切n等圓之最適三角形的$\angle A$滿足：

$\cos A=\sin^3(\frac{A}{2})-(n-1)\cos^3(\frac{A}{2})$。

(三)高上相切n等圓

定理 7：高上相切n等圓之最適三角形的$\angle A$滿足：$\cos A=(2n-1)\sin^3(\frac{A}{2})$。

(四)底角角平分線上相切n等圓

定理 8：底角角平分線上相切n等圓之半徑$r=\frac{a\sin B\cos B}{1+\cos B+(n-1)\sin\frac{3B}{2}}$，其最適三角形的底角$\angle B$滿足：$\cos B=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(n-1)(7\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{7B}{2})-\cos 2B}$。

五、等腰三角形的三種相切多等圓排列

(一)底切 n 等圓 (r_1) 與高上相切 n 等圓 (r_2) 的半徑大小

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 的等腰 ΔABC 中，底切 n 等圓與高上相切 n 等圓半徑比較如下表：

$r_1>r_2$	$r_1=r_2$	$r_1<r_2$
$A>\tan^{-1}\frac{4}{3}$	$\angle A=\tan^{-1}\frac{4}{3}$	$A<\tan^{-1}\frac{4}{3}$

當底切 n 等圓半徑 $=$ 高上相切 n 等圓半徑時，

等腰 ΔABC 三邊比 $=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$，$r_1=r_2=\dfrac{2a}{2\sqrt{5}n+5-\sqrt{5}}$。

(二)底切 n 等圓 (r_1) 與底角角平分線上相切 n 等圓 (r_3) 的半徑大小

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 的等腰 ΔABC 中，底切 n 等圓與 $\angle B$ 角平分線上相切 n 等圓半徑比較如下表：

$r_1>r_3$	$r_1=r_3$	$r_1<r_3$
$\angle A>36°$	黃金三角形	$\angle A<36°$

當底切 n 等圓半徑 $=$ 底角角平分線上相切 n 等圓半徑時，$r_1=r_3=\dfrac{\phi^2\sqrt{2-\phi}}{2+2\phi(n-1)\sqrt{2-\phi}}$，

其中 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

(三)高上相切 n 等圓 (r_2) 與底角角平分線上相切 n 等圓 (r_3) 的半徑大小

$\overline{AB}=\overline{AC}=a$ 的等腰 ΔABC 中，高上相切 n 等圓與 $\angle B$ 角平分線上相切 n 等圓的半徑比較如右表：

$r_2>r_3$	$r_2=r_3$	$r_2<r_3$
$\angle A<60°$	正三角形	$\angle A>60°$

當高上相切 n 等圓半徑 $=$ 底角角平分線上相切 n 等圓半徑時，$r_2=r_3=\dfrac{\sqrt{3}a}{4n+2}$。

(四)將上述內容再統整，即可找到 r_1, r_2, r_3 在不同的等腰三角形中之半徑大小如下表：

角度範圍	半徑大小比較
$0°<\angle A<36°$	$r_1<r_3<r_2$
$36°<\angle A<\tan^{-1}\frac{4}{3}$	$r_3<r_1<r_2$
$\tan^{-1}\frac{4}{3}<\angle A<60°$	$r_3<r_2<r_1$
$60°<\angle A<180°$	$r_2<r_3<r_1$

柒、未來展望

一、希望將來能夠將底角角平分線上相切 n 等圓之最適三角形的 $\angle B$ 滿足的關係化簡到較簡易的關係式。

二、若將二維的三角形之多圓不同排列推廣到三維的三角錐之多球的不同排列，在某些特殊的三角錐是否亦可以找到最大內切球，又是否可以將多個內切球排列於三角錐內。

捌、參考資料

一、2011 年 APMO 初選試題。取自：https://yadismath.blogspot.com/2020/07/apmo.html

二、陳一理(2019)。新觀念數學叢書 16 微分。建興文化事業有限公司。

三、陳一理(2020)。新觀念數學叢書 6 三角函數。建興文化事業有限公司。

四、李維歐(Mario Livio)著，邱宏義譯(2014)。黃金比例 1.618⋯世界上最美的數字。臺北市：遠流。

五、陳俐安、陳品璇(2011)。共邊三角形的內切圓。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會。

【評語】050412

本作品是三角形內相切多等圓之探討，固定好一個三角形、固定好一種排法、並固定好圓的個數，然後決定圓的半徑。在這樣的設定之下，基本上都可以用適當的中學數學手法得到解決。這個問題的延伸是有名的 sphere packing 的問題。本篇作品中的數學部分與論述部分尚屬清晰，編排也算完整，是一個不錯的作品。

作品簡報

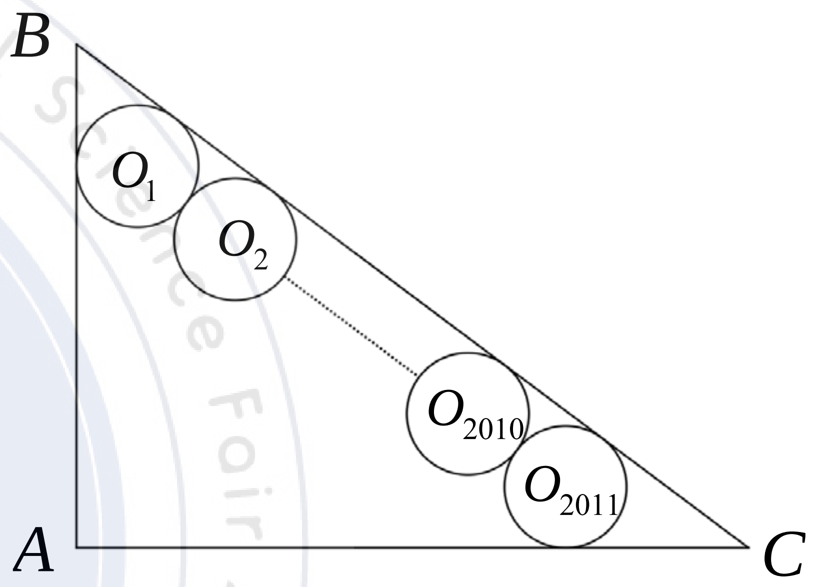
「圓圓」不絕-三角形內相切多等圓之探討

高級中等學校組

數學科

研究動機

在一邊長為3,4,5的直角ΔABC中有2011個等圓排列如右圖，圓O_k與圓O_{k+1}相切$(k=1,2,...,2010)$，所有圓心共線且所有圓與$\overline{BC}$相切，其中圓O_1與$\overline{AB}$相切，圓O_{2011}與$\overline{AC}$相切。試問該多等圓半徑為何？



此題的多等圓於直角三角形內的排列激盪我們思考：

1. 直角三角形是否還有其他值得討論的排列？
2. 等腰三角形或任一三角形
   是否也能找到相切多等圓的不同排列？
3. 不同排列下的多等圓半徑為何？能否找出其最大半徑？

名詞釋義

一、最適三角形：若一三角形使得排列於該三角形內的圓半徑有最大值，該三角形稱為最適三角形。

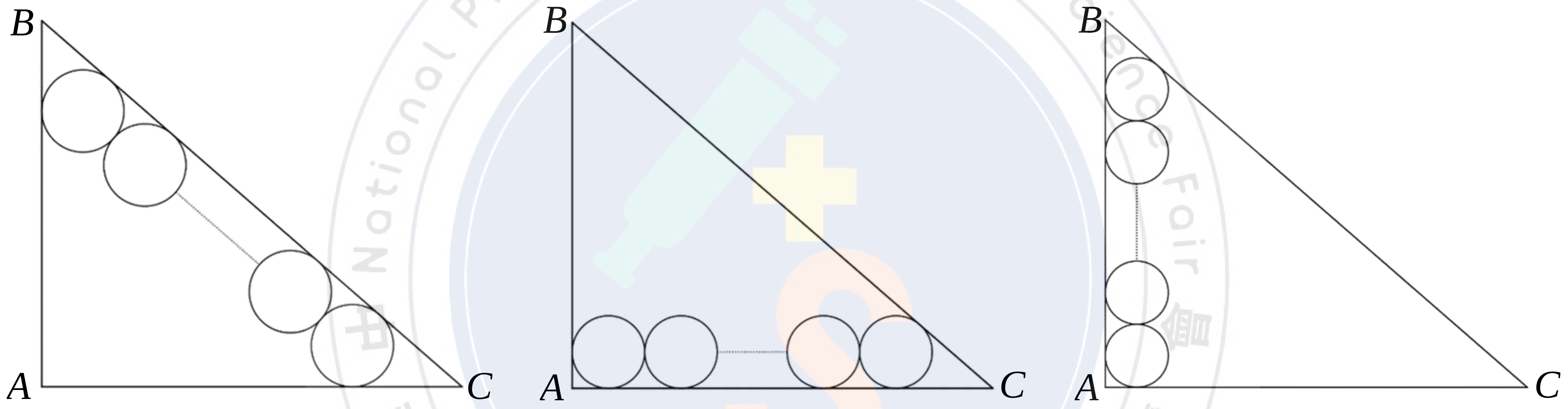
二、相切多等圓：圓 O_k 與圓 O_{k+1} 相切 $(k=1,2,...,n-1)$，且所有圓心共線，將這些多等圓的排列方式稱為相切多等圓。

研究流程

直角三角形內相切多等圓 → 任意三角形內相切多等圓 → 等腰三角形內切圓 → 等腰三角形內相切多等圓 → 等腰三角形內相切多等圓不同排列比較

直角三角形內相切多等圓之探討

【定理1】在$\angle A$為直角，$\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b\ (a>b\geq c)$ 的直角ΔABC中：



弦切 n 等圓

$$r=\frac{bc}{a+b+c+\dfrac{2bc(n-1)}{a}}$$

股切 n 等圓

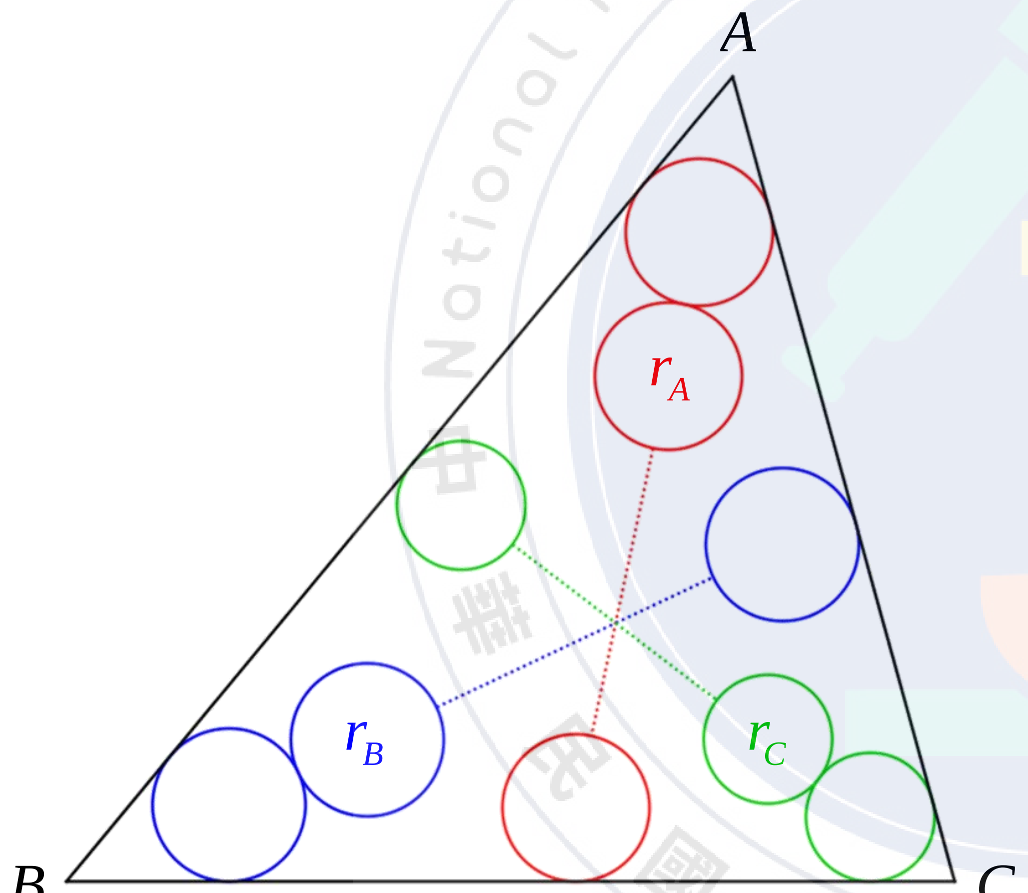
$$r=\frac{bc}{a+b+(2n-1)c}$$

勾切 n 等圓

$$r=\frac{bc}{a+(2n-1)b+c}$$

任意三角形內相切多等圓

【定理2】在 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$ 的 ΔABC 中：



$\angle A$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑

$$r_A=\frac{bc\sin A}{a+(b+c)[1+2(n-1)\sin\frac{A}{2}]}$$

$\angle B$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑

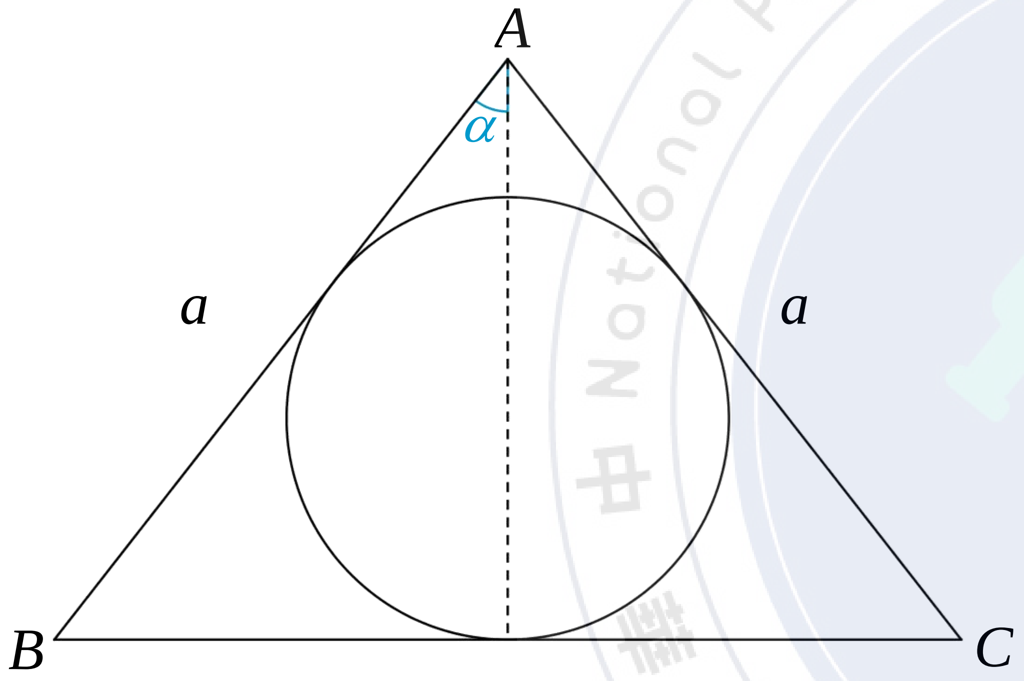
$$r_B=\frac{ac\sin B}{b+(a+c)[1+2(n-1)\sin\frac{B}{2}]}$$

$\angle C$ 之角平分線上相切 n 等圓的圓半徑

$$r_C=\frac{ab\sin C}{c+(a+b)[1+2(n-1)\sin\frac{C}{2}]}$$

等腰三角形內切圓

等腰三角形內切圓在固定腰長下改變頂角大小$\Rightarrow \angle A$ 大約76度時，內切圓半徑有最大值。



【定理3】

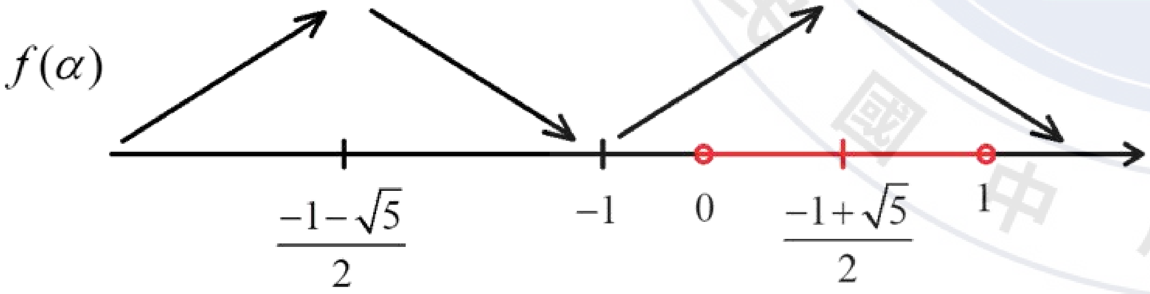
內切圓最大半徑 $r=\frac{a}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ 。

內切圓之最適三角形的$\angle A=2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ ，

三邊比$=1:1:(\sqrt{5}-1)$。

說明： $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}$ ，令$f(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}$

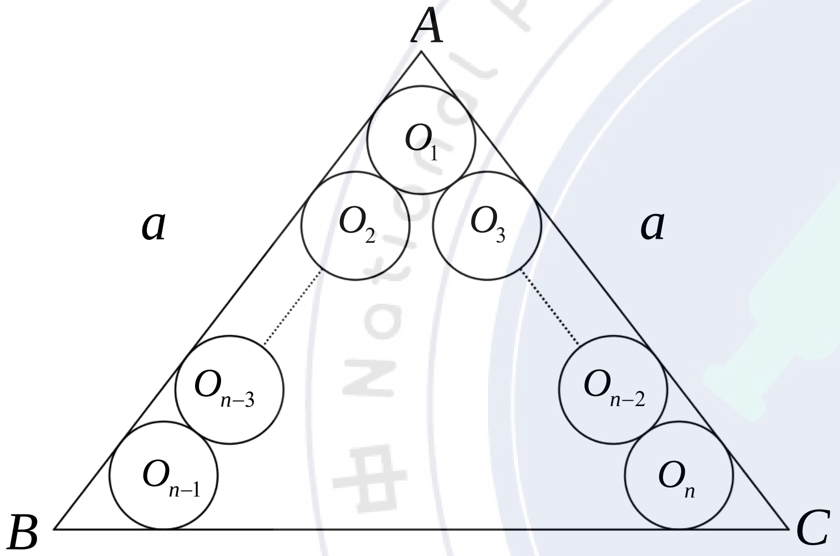
$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{2}{(1+\sin^2\alpha)}(\sin\alpha+1)(\sin\alpha-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(\sin\alpha-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$



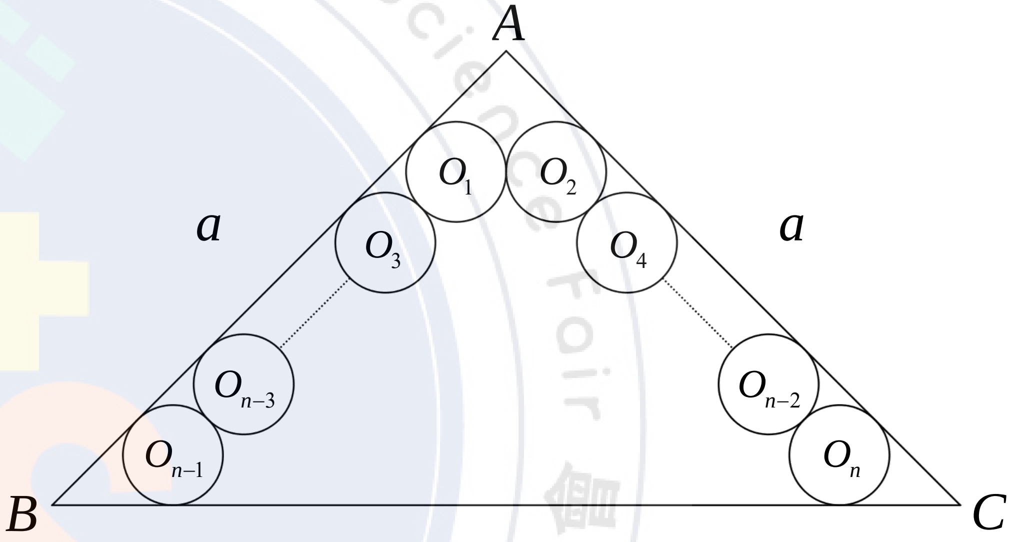
後半部的證明：令一階導數為零，配合GeoGebra的畫圖得出待求的函數在一階導數為零時為函數最大值。

等腰三角形內相切多等圓之探討

一、腰切 n 等圓



腰切奇圓



腰切偶圓

【定理4】

腰切奇圓最大半徑 $r = a \cdot \dfrac{\phi^{\frac{5}{2}}}{1+(n-1)\phi^{\frac{5}{2}}}$，其中 $\phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

最適三角形三邊比 $=1:1:(\sqrt{5}-1)$。

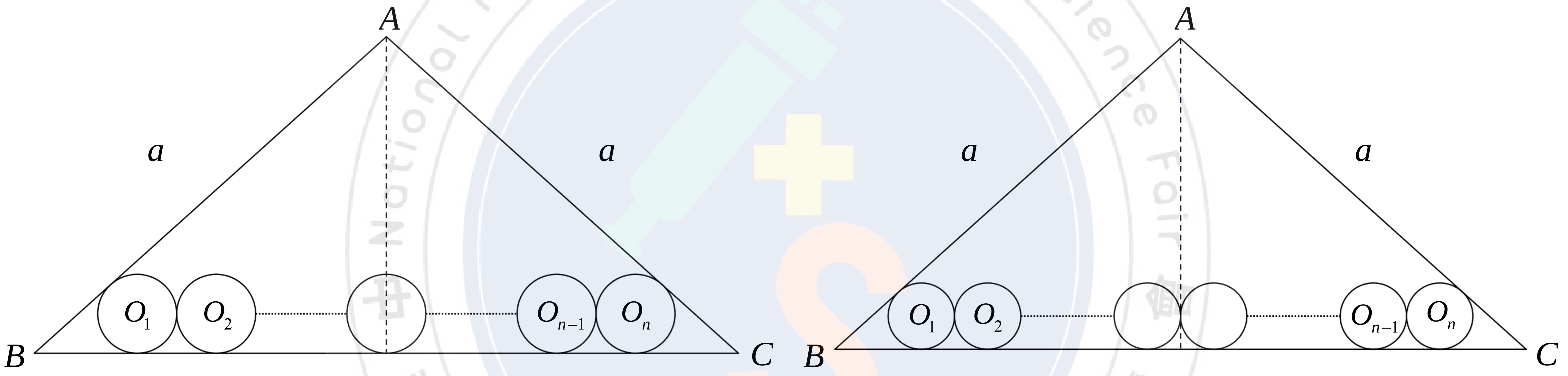
【定理5】

腰切偶圓最大半徑 $r = \dfrac{a}{2\sqrt{2}+n}$。

最適三角形為等腰直角三角形。

等腰三角形內相切多等圓之探討

二、底切 n 等圓



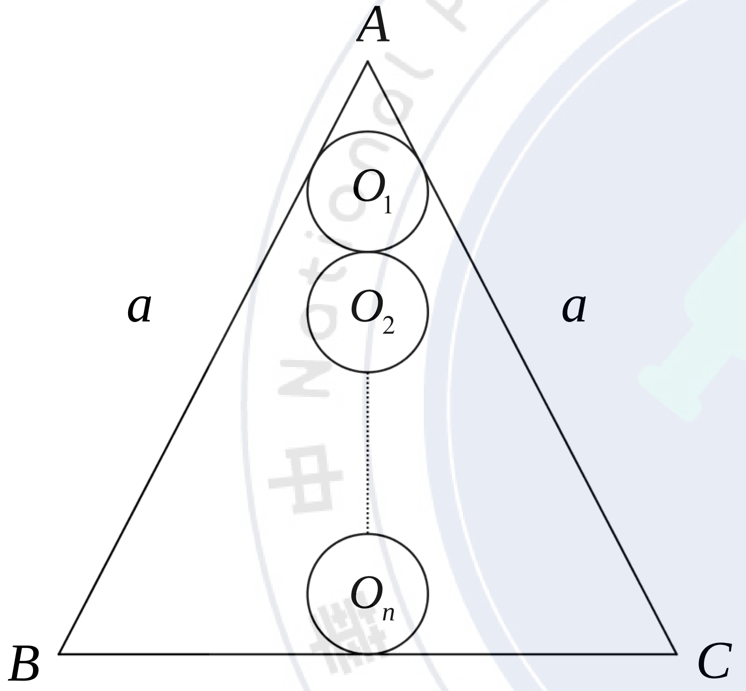
【定理6】底切 n 等圓之最適三角形的頂角大小滿足 $\cos A=\sin^3\frac{A}{2}-(n-1)\cos^3\frac{A}{2}$。

說明：

將底切奇圓、偶圓的半徑與腰長、角度的關係計算後得到的關係式皆為 $r=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1}$。

等腰三角形內相切多等圓之探討

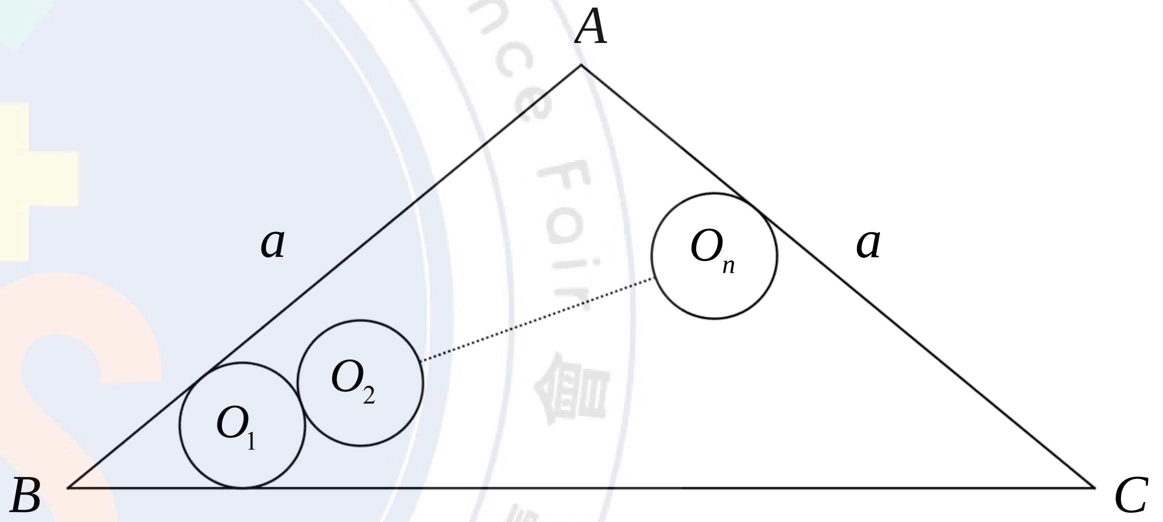
三、高上相切 n 等圓



【定理7】高上相切 n 等圓之最適三角形的

頂角大小滿足 $\cos A = (2n-1)\sin^3\dfrac{A}{2}$ 。

四、底角角平分線上相切 n 等圓



【定理8】

底角角平分線上相切 n 等圓之最適三角形的

底角滿足 $\cos B = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}(n-1)(7\sin\dfrac{B}{2} - \sin\dfrac{7B}{2}) - \cos 2B}$ 。

延伸研究：等腰三角形內相切多等圓不同排列比較

一、腰切 n 等圓與其他三種排列

1. 取 n 為奇數、腰切奇圓半徑 $r=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\sin a+(n-1)\sin\alpha\cos\alpha}$

令底切 n 等圓半徑為 r_1，$r_1=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+(n-1)\cos\alpha+1}$

高上相切 n 等圓半徑為 r_2，$r_2=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{(2n-1)\sin\alpha+1}$

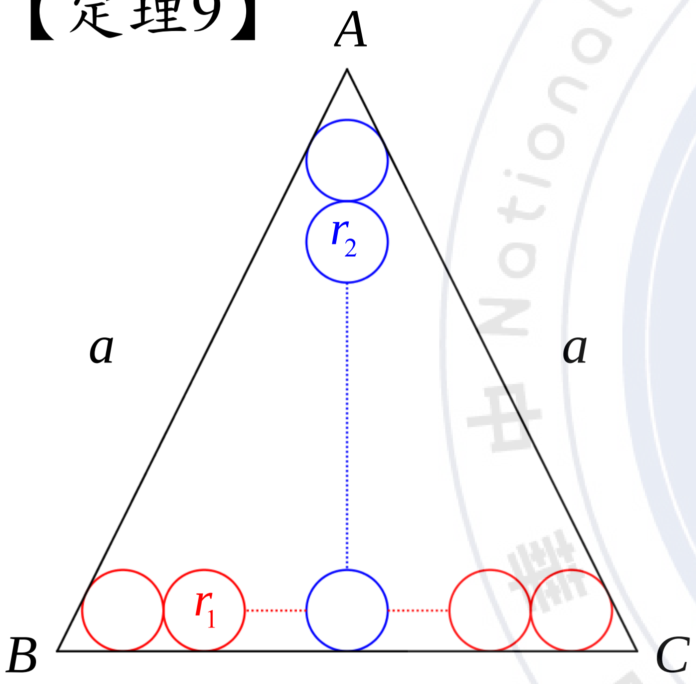
底角角平分線上相切 n 等圓半徑為 r_3，$r_3=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin 2B}{1+\cos B+(n-1)\sin\dfrac{3B}{2}}$

2. 從幾何上思考可看出腰切 n 等圓恆大於其他排列的圓半徑，在研究內給出代數證明腰切奇圓恆大於其他排列的圓半徑。

延伸研究：等腰三角形內相切多等圓不同排列比較

二、底切 n 等圓、高上相切 n 等圓、底角角平分線上相切 n 等圓

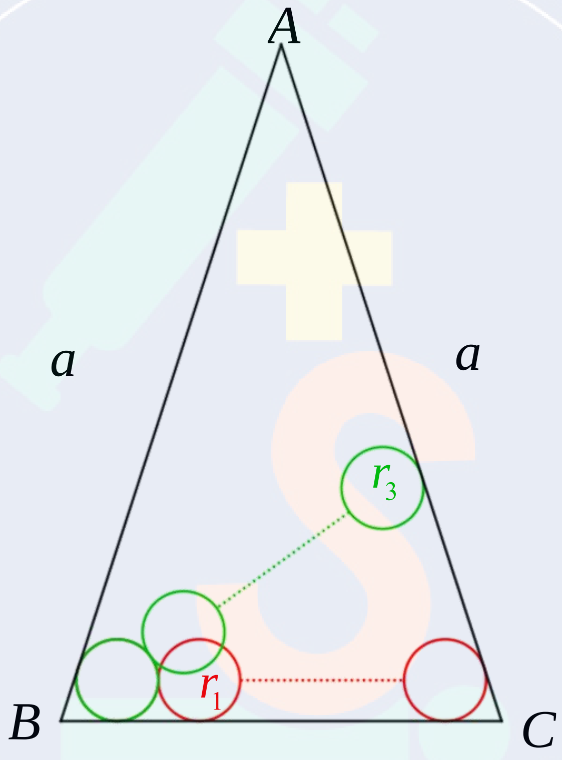
【定理9】



當 $r_1=r_2$ 時：

$\tan A=\frac{4}{3}$，三邊比$=\sqrt{5}:\sqrt{5}:2$

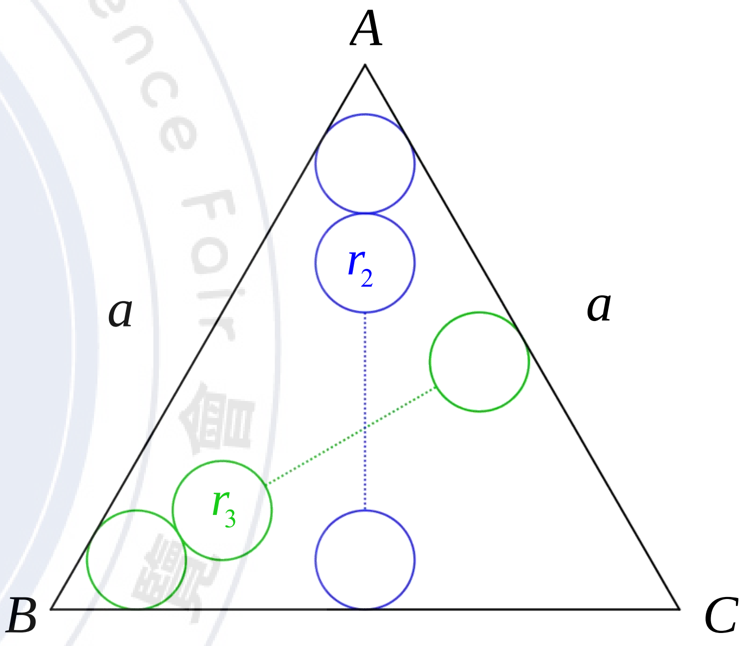
$$r_1=r_2=\frac{2a}{2\sqrt{5}n-\sqrt{5}+5}$$



當 $r_1=r_3$ 時：

該三角形為銳角黃金三角形

$$r_1=r_3=a\cdot\frac{\phi^2\sqrt{2-\phi}}{2+2\phi(n-1)\sqrt{2-\phi}},\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



當 $r_2=r_3$ 時：

該三角形為正三角形

$$r_2=r_3=\frac{\sqrt{3}\,a}{4n+2}$$

未來展望

一、希望將來能夠將底角角平分線上相切 n 等圓之最適三角形 $\angle B$ 滿足的關係化簡至較簡易的關係式。

二、若將二維的三角形多圓之不同排列推廣至三維的三角錐多球的不同排列，在某些特殊的三角錐是否亦可以找到最大內切球，又是否可以將多個內切球排列於三角錐內？

參考資料

一、2011年APMO初選試題。取自：https://yadismath.blogspot.com/2020/07/apmo.html

二、陳一理(2019)。新觀念數學叢書16微分。建興文化事業有限公司

三、陳一理(2020)。新觀念數學叢書6三角函數。建興文化事業有限公司。

四、李維歐(Mario Livio)著，邱宏義譯(2014)。黃金比例1.618...世界上最美的數字。臺北市：遠流。

五、陳俐安、陳品璇(2011)。共邊三角形的內切圓。中華民國第51屆中小學科學展覽會。