中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050408

錐尋格點-利用高階線性遞迴數列解有心錐線上的格子點之探討

學校名稱：臺北市立內湖高級中學

作者：	指導老師：
高一　彭士鳴	林鳳美
高一　林士哲	蘇曉洳

關鍵詞：有心錐線上格子點、高階線性遞迴數列、二次剩餘

摘要

在坐標平面上，x, y 坐標均為整數的點稱為格子點，本文的研究是探討有心錐線(含圓、橢圓、雙曲線)上的格子點問題。

首先探討科學研習月刊中的一道數論問題：「你可以找到多少組正整數對 (x, y)，讓 x 的平方減 5 是 y 的倍數，y 的平方減 5 是 x 的倍數？」，特別感興趣於滿足上述條件的生成下一組解，此解可由盧卡斯數列的相鄰奇數項觀察出來，於是我們嘗試推廣至一般齊次線性遞迴數列的情形。進一步探討生成下一組解的遞迴關係、建構有心錐線方程式、此方程式有解的數論性質及計數格子點的個數。若由上述方式推導橢圓，在判斷數論性質上有難度，最後我們利用二次剩餘及歐拉-費馬定理來克服橢圓上的格子點問題。

壹、前言

在專題研究中，老師正研究科學研習月刊中「森棚教官的數學題」的一道數論問題：

「**你可以找到多少組正整數對** (x, y)**，讓** x^2-5 **是** y **的倍數，**y^2-5 **是** x **的倍數？**」

文中提到盧卡斯數列 $\{a_n\}$：$a_0=2, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\ge 2)$ 的相鄰奇數項均是滿足上述條件的解，**例如**：因為 $a_3=4, a_5=11, a_7=29$ 滿足 $a_3^2-5=a_1\times a_5$ 且 $a_5^2-5=a_3\times a_7$，由上述兩式知 (a_3, a_5) 及 (a_5, a_7) 均滿足上述條件的解，本研究**將** (a_5, a_7) **視為** (a_3, a_5) **的生成下一組解**，並且

$$\text{對於任意正整數 } n\text{，}\ a_{2n+1}^2-5=a_{2n-1}\times a_{2n+3}\text{。} \tag{1}$$

稱(1)式為**生成下一組解的遞迴關係**，簡稱為**生成遞迴關係**。想連接前一篇科展作品研究圓錐曲線，突發奇想利用生成遞迴關係建構有心錐線方程式，得到一些漂亮結果，如建構出有心錐線方程式必存在格子點，當時令我們驚喜，於是開始展開研究之路。

考慮更一般齊次線性遞迴數列的情形，(1)式中 5 改為任意整數 ℓ 探討，則生成遞迴關係

$$a_{2n+1}^2-\ell=a_{2n-1}\times a_{2n+3}\ \text{ 或 }\ a_{2n}^2-\ell=a_{2n-2}\times a_{2n+2}\ \text{或}\ a_n^2-\ell=a_{n-1}\times a_{n+1}\text{，其中 }\ell\ \textbf{為固定常數}\text{。} \tag{2}$$

由(2)式建構有心錐線(含圓、橢圓、雙曲線)方程式，本研究主要是探討有心錐線的標準形，為 $x^2+y^2=m_c$、$x^2+sy^2=m_e$ 及 $x^2-sy^2=m_h$，其中 s 為正整數，再由這些方程式探討有心錐線上的格子點問題。底下是我們的研究目的：

一、探討滿足數論問題中5改為ℓ的解(x,y)且探討由(x,y)的生成下一組解的充分條件。

二、探討二階整係數齊次線性遞迴數列中的生成遞迴關係，進一步探討ℓ值。

三、探討$k\ (\neq 2)$階整係數齊次線性遞迴數列中的生成遞迴關係，進一步探討ℓ值。

四、利用生成遞迴關係建構有心錐線方程式及探討錐線方程式中m_c, m_e, m_h的數論性質。

五、探討錐線上特定格子點的條件及其軌跡方程式，同時計數有心錐線上格子點的個數。

六、利用二次剩餘及歐拉-費馬定理探討圓及橢圓上的格子點問題。

貳、研究設備及器材

筆、紙、電腦、GeoGebra5.0 動態幾何繪圖板、Wolfram Mathematica 及 OEIS 網站。

參、研究過程或方法

一、名詞定義與預備知識

本研究先探討k階整係數齊次線性遞迴數列相鄰項滿足數論問題的解，求解時推導出**生成下一組解的遞迴關係**(簡稱為**生成遞迴關係**)，再由生成遞迴關係建構有心錐線方程式，再探討有心錐線上的格子點問題。

【定義 1】(k**階整係數齊次線性遞迴數列**，張福春[1]及[2])

給定一數列$\{a_n\}$，設存在k個整數$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$，其中$c_k \neq 0$且滿足兩條件：

(i) **(初始條件)** $a_0 = 0, a_1 = 1, a_i = \gamma_i$, 其中 $i = -1, -2, \cdots, -(k-1)$ 且γ_i為整數

(ii) **(遞迴關係)** $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geq k)$ (3)

則稱數列$\{a_n\}$為k**階整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱為k**階線性遞迴數列**。本作品為了方便論證，定義$a_0 = 0, a_1 = 1$，而$a_i = \gamma_i$是配合(3)式而求得，文中探討k階線性遞迴數列情形是否有生成下一組解，發現$k \geq 3$時，均是由二階線性遞迴數列轉換成k階線性遞迴數列情形，參見**定理 6**，所以**定義 1** 中初始條件為已知值僅有二個是違背k階線性遞迴數列的定義。

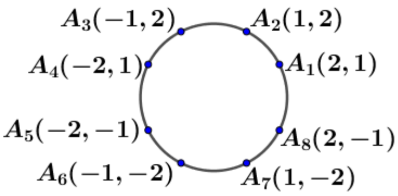
不失一般性，這裡談有心錐線方程式是以標準形為主，可令圓Ω_n、橢圓E_n、雙曲線H_n的方程式分別為$x^2 + y^2 = m_c$ 、 $x^2 + sy^2 = m_e$及$x^2 - sy^2 = m_h$ ，其中s為正整數。注意m_c, m_e, m_h值均與n有關，參見**性質 6~9**，其中Ω_n中的$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \cdots, \Omega_n$為同心圓、$\mathrm{E}_n$中的

$E_1,E_2,E_3,\cdots,E_n$ 為同心橢圓或 H_n 中的 $H_1,H_2,H_3,\cdots,H_n$ 為同心雙曲線，參見**定義 2**。

【定義 2】(同心有心錐線上的格子點，Keith Kendig[7])

設 (x,y) 為同心有心錐線方程式 $\Omega_n：x^2+y^2=m_c$ 、 $E_n：x^2+sy^2=m_e$ 或 $H_n：x^2-sy^2=m_h$ 上一點，其中 m_c,m_e,m_h 為非零整數且 s 為正整數，則稱 (x,y) 為**同心有心錐線** Ω_n, E_n, H_n **上的格子點**。**【註】**第六章主要談的橢圓方程式為 $E：x^2+sy^2=m_e$ ，此時 m_e 值均與 n 無關。

為了區分同心有心錐線中圓、橢圓及雙曲線上的格子點之個數分別記作 $N(m_c)$ 、 $N(m_e)$ 及 $N(m_h)$ ，參見圖 1 是圓方程式 $x^2+y^2=5$ ，圓上恰通過 8 個格子點，即 $N(m_c)=N(5)=8$ 。又方程式 $x^2+4y^2=4$ ，橢圓上恰通過 4 個格子點，即 $N(m_e)=N(4)=4$ 。



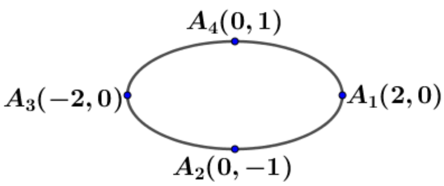


圖 1： $N(m_c)=N(5)=8$ 及 $N(m_e)=N(4)=4$

數學家**勒讓得** (Legendre) 與**高斯** (Gauss) 提出圓上的格子點之個數性質，參見**預備定理 1**。本作品利用**預備定理 1** 證明圓上格子點的個數，參見**定理 7** 及**定理 9**。

【預備定理 1】(計數圓上格子點的個數，游森棚[4])

給定圓方程式 $x^2+y^2=m$ ，設 $N_1(m)$ 與 $N_3(m)$ 分別為 m 的奇因數中模 4 餘 1 與模 4 餘 3 的個數，則圓上恰通過 $4\left[N_1(m)-N_3(m)\right]$ 個格子點，即 $N(m)=4\left[N_1(m)-N_3(m)\right]$ 。

例如：當 $m=5=1\times5$ 時，所以 $N_1(5)=2$ 且 $N_3(5)=0$ ，故 $N(5)=4(2-0)=8$ ，參見圖 1。 □

底下探討圓及雙曲線上的格子點問題時，會用到**預備定理 2~5** 來證明。

【預備定理 2】(因數線性組合定理，Underwood Dudley [8])

設 $u,v,r\in Z/\{0\}$ ，若 $r\,|\,u, r\,|\,v$ ，則對於任意整數 α,β ， $r\,|\,\alpha u+\beta v$ 。

【預備定理 3】(費馬平方和定理，Underwood Dudley [8])

設 p 為滿足 $x^2+y^2=p$ 的奇質數，則 $p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 。反之，也成立。

【預備定理 4】(佩爾方程式，Hendrik W. Lenstra Jr. [6])

給定二次方程式 H：$x^2 - sy^2 = 1$，(i)設 s 為完全平方數時，則 H 的正整數解為 $(x, y)=(\pm1,0)$ 。

(ii)設 s 不為完全平方數時，若 x_0, y_0 為 H 的一組正整數解且 $x_0+\sqrt{s}y_0$ 為型如 $x+\sqrt{s}y$ 的最小數，則 H 的全部正整數解 x, y 為 $x+\sqrt{s}y=\left(x_0+\sqrt{s}y_0\right)^n$ ，其中 n 為正整數。

【預備定理 5】(**滿足 $x^2 - sy^2 = 1$ 的解之遞迴性質**，Hendrik W. Lenstra Jr. [6])

設 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 為二次方程式 $x^2 - sy^2 = 1$ 的正整數解，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ ，則 $x_{n+1}=x_1x_n+sy_1y_n,\ y_{n+1}=x_ny_1+x_1y_n$ 。

本研究若以生成遞迴關係探討橢圓的情形，在判斷 m_e 的數論性質上有難度，最後利用**二次剩餘**及**歐拉-費馬定理**來克服橢圓上的格子點問題，會用到**定義 3~4** 及**預備定理 6~8**。

【定義 3】(**二次剩餘**，Courant, R. and Robbins, H. [5])

設 x, p 為非零整數，若 $x^2 \equiv u \pmod{p}$ 有解，則稱 u **為模 p 的二次剩餘**。

【定義 4】(**代數整數及黑格納數**，Underwood Dudley [8])

(i)設 $\alpha = a+b\sqrt{-d}$ 為複數，其中 d 為非平方數的正整數，若 α 為存在整係數的領導係數為 1 的多項式的根，則稱 α 為**代數整數** (algebraic integer)，所有代數整數構成一個環，記作 A 。

(ii)設 d 為非平方數的正整數，若考慮虛二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ 的整數環為**唯一分解整環**(本文稱為**唯一分解定理**)，其中整數環是指 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})\cap$ A ，稱此 d 為**黑格納數** (Heegner number)。

d 由數學家**高斯**發現，僅有 $1,2,3,7,11,18,43,67,167$ 等九個數。

【註】$\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 並非**唯一分解整環**，因為 $6=2\times3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ 。

【定義 5】(**勒讓德符號**，Courant, R. and Robbins, H. [5])

設 p 為奇質數且 u 為非零整數，若 $p \nmid u$ ，則**勒讓德符號**定義

$$\left(\frac{u}{p}\right)=\begin{cases} 1, & \text{若 } u \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩餘} \\ -1, & \text{若 } u \text{ 不是模 } p \text{ 的二次剩餘} \end{cases}。$$

【預備定理 6】(**歐拉-費馬定理**，Euler-Fermat Theorem，Underwood Dudley [8])

設 x, m 為正整數且 $\gcd(x,m)=1$ ，則(i) $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ ，其中 $\varphi(m)$ 為**歐拉函數**。(ii)若正整數

t 滿足 $x^t \equiv 1 \pmod{m}$ 且 t 是最小的一個，則 $t \mid \varphi(m)$ ，其中 $\varphi(m)$ 表示為不大於 m 且與 m 互質之正整數個數。

【註】**歐拉-費馬定理**中若 m 為質數，則 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，稱為**費馬小定理**。

【預備定理 7】(**二次剩餘的歐拉判別法**，**歐拉準則**，Courant, R. and Robbins, H. [5])

設 p 為奇質數且 $\gcd(a,p)=1$ ，則(i) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ 的充要條件為 a 為模 p 的二次剩餘。

(ii) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ 的充要條件為 a 為模 p 的非二次剩餘。

【預備定理 8】(**二次剩餘的勒讓德符號判別法**，Courant, R. and Robbins, H. [5])

設 $\left(\dfrac{u}{p}\right)$ 為勒讓德符號，則(i) $\left(\dfrac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv p \pmod{4}$ 。(ii) $\left(\dfrac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ 。

(iii)(**二次互反律**) 若 p 為奇質數，則 $\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$ 。

二、探討數論問題的解及生成下一組解性質

(一)數論問題的解之生成條件

若 (x,y) 為數論問題： $y \mid (x^2-\ell)$ 且 $x \mid (y^2-\ell)$ (4)

的解，則 x, y 的最大公因數有何條件呢？參見**定理 1**。將 x, y 的最大公因數記作 $\gcd(x,y)$ 。

【定理 1】(數論問題的解之生成條件)

設 $\gcd(x,y)=d$ ，其中 (x,y) 為(4)式的解，則 d 為所有 ℓ 的因數。

【證明】令 $d=\gcd(x,y)>0$ ，則 $d \mid x$ 且 $d \mid y$ ，又 $x \mid (y^2-\ell)$ 且 $y \mid (x^2-\ell)$ ，所以

由**預備定理 2** 知 $d \mid [(y^2-\ell)-y^2]$ 且 $d \mid [(x^2-\ell)-x^2]$，即 $d \mid -\ell$ ，

故 d 為所有 ℓ 的因數。因此， d 為所有 ℓ 的因數。

例如：當 $\ell=6$ 時， d 為所有 $\ell=6$ 的因數，故 $d=1,2,3,6$ 。底下可以找到解 (x,y) ：

若 $d=1$，則 $(x,y)=(5,19)$ 、 $(19,71)$ 、 $(71,265)$ 、 $(265,989)$ 、 $(989,3691)$ 等等。

若 $d=2$ ，則 $(x,y)=(10,94)$ 等等。若 $d=3$ ，則 $(x,y)=(15,219)$ 、 $(501,8655)$ 等等。

若 $d=6$ ，則 $(x,y)=(6,30)$ 、 $(30,894)$ 、 $(114,2598)$ 等等。 ■

由**定理 1**中例子發現$d=2,3,6$時，滿足(4)式的解(x,y)是離散的，很難判定下一個解，但$d=1$時，滿足(4)式的解(x,y)是數列形式的解。我們可以發現$5,19,71,265,989,3691$為二階線性遞迴數列$\{a_n\}$：$a_0=1,a_1=5,a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\ge 2)$，其中$(19,71)$可視為由$(5,19)$生成下一組解、$(71,265)$可視為由$(19,71)$生成下一組解，這種解的性質參見**定理 2**。

(二)由(x,y)生成下一組解

現在探討(4)式中由(x,y)生成的下一組整數解，其中$x<y$，先考慮$y\mid(x^2-\ell)$，可猜測下一組解可能為$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$，就來**證明：$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$為由$(x,y)$生成下一組解**，參見**定理 2**。

例如：當$(x,y)=(4,11)$且$\ell=5$時，由(x,y)生成的下一組正整數解為

$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)=\left(11,\dfrac{11^2-5}{4}\right)=(11,29)$。的確$(11,29)$滿足$11\mid(29^2-5)$且$29\mid(11^2-\ell)$。

若$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$為由$(x,y)$生成下一組解，則由(4)式知

$$\left(\frac{y^2-\ell}{x}\right)\Bigg|\left(y^2-\ell\right)\ \text{且}\ y\,\Bigg|\left(\left(\frac{y^2-\ell}{x}\right)^2-\ell\right)。$$

【定理 2】((x,y)生成下一組解的充分條件)

設(x,y)為(4)式的解，則(i)當$\gcd(x,y)=1$且ℓ為非零整數時，可由(x,y)生成下一組解為$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$。(ii)當$y=xt\ (t\in N)$且$\ell=0$時，可由$(x,y)$生成下一組解為$\left(y,\dfrac{y^2}{x}\right)$。

【證明】(i)$\left(\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)\Bigg|\left(y^2-\ell\right)$顯然成立。接著證明$y\,\Bigg|\left(\left(\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)^2-\ell\right)$。

因為$y\mid(x^2-\ell)$，令$x^2-\ell=ty\ (t\in N)$，則

$\left(\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)^2-\ell=\dfrac{y(y^3-2\ell y-\ell t)}{x^2}$。又$\gcd(x,y)=1$，故$y\,\Bigg|\left(\left(\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)^2-\ell\right)$。

因此，可由(x,y)生成下一組解為$\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$。

(ii)當$\ell=0$時，令$y=xt\ (t\in N)$且$\ell=0$，則顯然$y\,\Bigg|\left(\left(\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)^2-\ell\right)\Leftrightarrow y\,\Bigg|\left(\dfrac{y^4}{x^2}\right)$。 ■

三、利用 k 階線性遞迴數列來探討生成下一組解

(一)二階線性遞迴數列

由**定理 2** 知滿足(4)式的生成下一組解之充分條件為 $\gcd(x,y)=1$，注意費氏數列 $\{a_n\}:1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$，則可觀察到 $\gcd(a_0,a_1)=\gcd(a_1,a_2)=\cdots=\gcd(a_n,a_{n+1})=1$。

我們試著考慮 (a_1,a_2) 是由 (a_0,a_1) 所生成下一組解而得，即 $1^2-\ell=1\times 2$，求得 $\ell=-1$。

或考慮 (a_2,a_3) 是由 (a_1,a_2) 所生成下一組解而得，即 $2^2-\ell=1\times 3$，求得 $\ell=1$。

依照上述方式檢測，發現 ℓ 值會是 $-1,1,-1,1,\cdots$，會違背 ℓ 為固定常數，但若**將數列中的奇數項與偶數項分開來討論就能滿足 ℓ 為固定常數**。為了方便論證，令 $\{o_n\}$ 與 $\{e_n\}$ 分別為二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 中的奇數項與偶數項所成數列，分別簡稱**奇數數列** $\{o_n\}$ 及**偶數數列** $\{e_n\}$，同時對應 ℓ 值分別記作 ℓ_{odd} 與 ℓ_{even}。

例如：考慮費氏數列 $\{a_n\}:1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$，則

(i)奇數數列 $\{o_n\}$：$o_0=a_{-1}=1, o_1=a_1=1, o_2=a_3=2, o_3=a_5=5, o_4=a_7=13, o_5=a_9=34,\cdots$，可得到**生成遞迴關係為** $o_i^2-\ell_{odd}=o_{i-1}\times o_{i+1}$，其中 $0\le i\le n$ 且 $\ell_{odd}=-1$。

(ii)偶數數列 $\{e_n\}$：$e_0=a_0=0, e_1=a_2=1, e_2=a_4=3, e_3=a_6=8, e_4=a_8=21,\cdots$，可得到**生成遞迴關係為** $e_i^2-\ell_{even}=e_{i-1}\times e_{i+1}$，其中 $0\le i\le n$ 且 $\ell_{even}=1$。

進一步要推廣至**更一般二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 滿足生成遞迴關係為**

$$o_n^2-\ell_{odd}=o_{n-1}\times o_{n+1} \quad 及 \quad e_n^2-\ell_{even}=e_{n-1}\times e_{n+1} \tag{5}$$

的充分條件為何呢？那麼 ℓ_{odd} 與 ℓ_{even} 有何性質呢？參見**性質 1** 與**定理 3**。

【性質 1】設 $\{a_n\}$ 為二階線性遞迴數列，若 $\gcd\left(\gcd\left(a_n,a_{n+1}\right),c_2\right)=1$，則 $\gcd\left(a_n,a_{n+1}\right)=1$。

【證明】設 $\gcd\left(a_n,a_{n+1}\right)=d>1$，則 $d|a_n, d|a_{n+1}$。再由**預備定理 2** 知 $d\mid(a_{n+1}-c_1a_n)$，所以 $d\mid c_1a_{n-1}$，由於 $\gcd\left(\gcd\left(a_n,a_{n+1}\right),c_2\right)=1$，所以 $d\mid a_{n-1}$。

同理可推得 $d\mid a_{n-2}, d\mid a_{n-3}, d\mid a_{n-4},\cdots,, d\mid a_1$，故 $d\mid 1$，與假設矛盾，故得證。 ■

探討數列$\{o_n\}$與數列$\{e_n\}$的每個相鄰項是否滿足**性質 1**中互質性質呢？參見**定理 3**。

【定理 3】(奇數數列及偶數數列的二階線性遞迴關係)

設數列$\{e_n\}$與$\{o_n\}$分別為二階線性遞迴數列$\{a_n\}$的偶數數列及奇數數列，則

$$o_n=(c_1^2+2c_2)o_{n-1}-c_2^2o_{n-2} \quad 及 \quad e_n=(c_1^2+2c_2)e_{n-1}-c_2^2e_{n-2}\ 。$$

【證明】令$o_n=a_{2n-1}$與$e_n=a_{2n}$，其中$n\geq 1$，則由**定義 1**知

$o_n=a_{2n-1}=c_1a_{2n-2}+c_2a_{2n-3}$及$e_n=a_{2n}=c_1a_{2n-1}+c_2a_{2n-2}$，推得

$$\begin{aligned}o_n&=c_1a_{2n-2}+c_2a_{2n-3}=c_1\left(c_1a_{2n-3}+c_2a_{2n-4}\right)+c_2a_{2n-3}=c_1^2a_{2n-3}+c_1c_2a_{2n-4}+c_2a_{2n-3}\\&=c_1^2a_{2n-3}+c_2\left(a_{2n-3}-c_2a_{2n-5}\right)+c_2a_{2n-3}=(c_1^2+2c_2)a_{2n-3}-c_2^2a_{2n-5}=(c_1^2+2c_2)o_{n-1}-c_2^2o_{n-2}\end{aligned}$$

同理可證$e_n=(c_1^2+2c_2)e_{n-1}-c_2^2e_{n-2}$。故得證。 ■

【性質 2】(二階 Cassini 恆等式)

設數列$\{o_n\}$與$\{e_n\}$分別為二階線性遞迴數列$\{a_n\}$的奇數數列及偶數數列，則

(i)當$c_2=1$時，$\ell_{odd}=-c_1^2$；當$c_2=-1$時，$\ell_{odd}=c_1^2$。(ii)當$c_2=\pm1$時，$\ell_{even}=c_1^2$。

【證明】由**定理 3**知$o_n=(c_1^2+2c_2)o_{n-1}-c_2^2o_{n-2}$及$e_n=(c_1^2+2c_2)e_{n-1}-c_2^2e_{n-2}$。

(i) $\ell_{odd}=\begin{vmatrix}o_n & o_{n+1}\\ o_{n-1} & o_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}o_n & o_{n+1}-(c_1^2+2c_2)o_n\\ o_{n-1} & o_n-(c_1^2+2c_2)o_{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}o_n & -c_2^2o_{n-1}\\ o_{n+1} & -c_2^2o_{n-2}\end{vmatrix}=c_2^2\begin{vmatrix}o_{n-1} & o_n\\ o_{n-2} & o_{n-1}\end{vmatrix}$。

當$c_2=1$時，$o_0=o_1=1$、$o_2=c_1^2+1$，由**迭代過程**得

$$\ell_{odd}=o_n^2-o_{n-1}o_{n+1}=\begin{vmatrix}o_n & o_{n+1}\\ o_{n-1} & o_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}o_{n-1} & o_n\\ o_{n-2} & o_{n-1}\end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix}o_1 & o_2\\ o_0 & o_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & c_1^2+1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-c_1^2，故\ \ell_{odd}=-c_1^2\ 。$$

當$c_2=-1$時，$o_0=-1$、$o_1=1$、$o_2=c_1^2-1$，由**迭代過程**得

$$\ell_{odd}=o_n^2-o_{n-1}o_{n+1}=\begin{vmatrix}o_n & o_{n+1}\\ o_{n-1} & o_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}o_{n-1} & o_n\\ o_{n-2} & o_{n-1}\end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix}o_1 & o_2\\ o_0 & o_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & c_1^2-1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=c_1^2，故\ \ell_{odd}=c_1^2\ 。$$

(ii)仿照(i)的證明，由於$e_0=0$、$e_1=c_1$、$e_2=c_1^3+2c_1c_2$，得到

$$\ell_{even}=e_n^2-e_{n-1}e_{n+1}=c_2^2\begin{vmatrix}e_{n-1} & e_n\\ e_{n-2} & e_{n-1}\end{vmatrix}=\cdots=c_2^{2n}\begin{vmatrix}e_1 & e_2\\ e_0 & e_1\end{vmatrix}=c_2^{2n}\begin{vmatrix}c_1 & c_1^3+2c_1c_2\\ 0 & c_1\end{vmatrix}=c_1^2c_2^{2n}\ 。$$

當$c_2=\pm1$時，$\ell_{even}=c_1^2c_2^{2n}=c_1^2$，因此，$\ell_{even}=c_1^2$。 ■

【性質 3】(偶數數列及奇數數列中相鄰項互質性質)

設數列$\{e_n\}$與$\{o_n\}$分別為二階線性遞迴數列$\{a_n\}$的偶數數列及奇數數列，若$c_2=\pm1$，則

$$\gcd\left(o_n,o_{n+1}\right)=\gcd\left(e_n,e_{n+1}\right)=1 \text{。}$$

【證明】由於$c_2=\pm1$，所以由**定理 3** 知數列$\{e_n\}$與$\{o_n\}$均為二階線性遞迴數列且由**性質 1**

知$\gcd\left(\gcd\left(o_n,o_{n+1}\right),(\pm1)^2\right)=\gcd\left(\gcd\left(e_n,e_{n+1}\right),(\pm1)^2\right)=1$，因此，

$\gcd\left(o_n,o_{n+1}\right)=\gcd\left(e_n,e_{n+1}\right)=1$。 ■

【定理 4】(二階線性遞迴數列中的奇數數列及偶數數列之相鄰項生成下一組解)

設數列$\{e_n\}$與$\{o_n\}$分別為二階線性遞迴數列$\{a_n\}$的偶數數列及奇數數列，則

(i)當$c_2=1$時，(5)式成立且可由(o_{i-1},o_i)生成下一組解(o_i,o_{i+1})，其中$\ell_{odd}=-c_1^2$。

(ii)當$c_2=-1$時，(5)式成立且可由(o_{i-1},o_i)生成下一組解(o_i,o_{i+1})，其中$\ell_{odd}=c_1^2$。

(iii)當$c_2=\pm1$時，(5)式成立且可由(e_{i-1},e_i)生成下一組解(e_i,e_{i+1})，其中$\ell_{even}=c_1^2$。

【證明】(i)由**定理 3** 知當$c_2=1$時，$o_n=(c_1^2+2)o_{n-1}-o_{n-2}$。再由**性質 3** 知$\gcd(o_n,o_{n+1})=1$。

故由**定理 2** 與**性質 2** 知可由(o_{i-1},o_i)生成下一組解(o_i,o_{i+1})，其中$\ell_{odd}=-c_1^2$。

例如：若數列$\{a_n\}$：$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，則數列$\{o_n\}$的遞迴關係為$o_n=6o_{n-1}-o_{n-2}$，且

$$\ell_{odd}=o_2^2-o_1o_3=5^2-1\times29=-2^2\text{；}\ \ell_{odd}=o_3^2-o_2o_4=29^2-5\times169=-2^2\text{；}$$

故可由(o_{i-1},o_i)生成下一組解(o_i,o_{i+1})，其中$i=2,3,4$且$\ell_{odd}=-c_1^2=-4$。

(ii)(iii)仿照(i)來證明。

例如：若數列$\{a_n\}$：$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，則數列$\{o_n\}$的遞迴關係為$o_n=7o_{n-1}-o_{n-2}$，且

$$\ell_{odd}=o_2^2-o_1o_3=8^2-1\times55=3^2\text{；}\ \ell_{odd}=o_3^2-o_2o_4=55^2-8\times377=3^2\text{；}$$

故可由(o_{i-1},o_i)生成下一組解(o_i,o_{i+1})，其中$i=2,3,4$且$\ell_{odd}=c_1^2=9$。

例如：若數列$\{a_n\}$：$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，則數列$\{e_n\}$的遞迴關係為$e_n=7e_{n-1}-e_{n-2}$，且

$$\ell_{even}=e_2^2-e_1e_3=21^2-3\times144=3^2\text{；}\ \ell_{even}=e_3^2-e_2e_4=144^2-21\times987=3^2\text{；}$$

故可由(e_{i-1},e_i)生成下一組解(e_i,e_{i+1})，其中$i=1,2,3,4$且$\ell_{even}=c_1^2=9$。 ■

(二) $k(k \neq 2)$ 階線性遞迴數列

接著探討 $k(k \neq 2)$ 階情形是否有生成下一組解性質，先證明 $k=1$ 的情形。

【定理 5】(利用一階線性遞迴數列來探討生成下一組解)

設 $\{a_n\}$ 為一階線性遞迴數列，則可由 (a_{i-1}, a_i) 生成下一組解 (a_i, a_{i+1})，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 $\ell = 0$。

【證明】當 $k=1$ 時，數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n = c_1 a_{n-1}$，此數列為公比為 c_1 的等比數列。

若 $a_1 = 1$，則 $a_1 = 1, a_2 = c_1, a_3 = c_1^2, a_4 = c_1^3, a_5 = c_1^4, a_6 = c_1^5, \cdots$，所以 $a_n = c_1^{n-1}$。

代入 $a_n^2 - \ell = a_{n-1} \times a_{n+1}$ 得 $\left(c_1^{n-1}\right)^2 - \ell = c_1^{n-2} \times c_1^n$，因此，$\ell = 0$。 ■

接著考慮更一般 $k(\geq 3)$ 階線性遞迴數列的情形，參見**定理 6**。

【性質 4】(二階線性遞迴數列奇數數列及偶數數列可轉換三階線性遞迴關係)

設數列 $\{e_n\}$ 與 $\{o_n\}$ 分別為二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 的偶數數列及奇數數列，則

$$o_n = (c_1^2 + c_2)o_{n-1} + (c_1^2 c_2 + c_2^2)o_{n-2} - c_2^3 o_{n-3} \quad 及 \quad e_n = (c_1^2 + c_2)e_{n-1} + (c_1^2 c_2 + c_2^2)e_{n-2} - c_2^3 e_{n-3}。$$

【證明】可仿照**定理 3** 的證明。 ■

【定理 6】($k(\geq 3)$ 階線性遞迴數列中的相鄰項存在生成下一組解)

設 $\{a_n\}$ 為 $k(\geq 3)$ 階線性遞迴數列，則(i)當 $\gcd\left(\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}), c_k\right) = 1$ 時，$\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}) = 1$。(ii)存在有由 (o_{i-1}, o_i) 生成下一組解 (o_i, o_{i+1}) 及由 (e_{i-1}, e_i) 生成下一組解 (e_i, e_{i+1}) 的數列，其中 $1 \leq i \leq n$。

【證明】(i)仿照**性質 1** 證明，設 $\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}) = d > 1$，則 $d|a_n, d|a_{n+1}, \cdots, d \mid a_{n+k-1}$。

再由**預備定理 2** 知 $d \mid (a_{n+k-1} - c_1 a_{n+k-2} - c_2 a_{n+k-3} - \cdots - c_{k-1} a_n)$，所以 $d \mid c_k a_{n-1}$。

由於 $\gcd\left(\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}), c_k\right) = 1$，所以 $d \mid a_{n-1}$。同理可推得

$d \mid a_{n-2}, d \mid a_{n-3}, \cdots, d \mid a_1$，故 $d \mid 1$ 與假設矛盾，因此，$\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}) = 1$。

(ii)由(i)知 $\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}) = 1$，但當 $\gcd(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}) = 1$ 成立時，$\gcd(a_i, a_{i+1}) = 1$

不一定成立，其中$1 \le i \le n$。**例如**：三階線性遞迴數列$\{a_n\}$：$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}$為

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6, a_5 = 13, a_6 = 28, a_7 = 60, \cdots$$

由(i)知可得$\gcd(a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) = 1$，其中$1 \le i \le n$，但$\gcd(a_3, a_6) = 3, \gcd(a_6, a_7) = 4$。

可見$k(\ge 3)$階線性遞迴數列中要成立$\gcd(a_i, a_{i+1}) = 1$要成立，必須考慮特定係數。

由**性質 4**知二階線性遞迴數列$\{a_n\}$的偶數數列$\{e_n\}$及奇數數列$\{o_n\}$可轉換成三階遞迴關係為$o_n = (c_1^2 + c_2)o_{n-1} + (c_1^2 c_2 + c_2^2)o_{n-2} - c_2^3 o_{n-3}$及$e_n = (c_1^2 + c_2)e_{n-1} + (c_1^2 c_2 + c_2^2)e_{n-2} - c_2^3 e_{n-3}$。

同理可推得轉換成$k(\ge 4)$階線性遞迴關係。由**定理 4**知由二階線性遞迴數列的偶數數列$\{e_n\}$及奇數數列$\{o_n\}$有生成下一組解性質，故得證。 ■

四、探討圓上的格子點及特定格子點的軌跡方程式

(一)一階線性遞迴數列

現在利用一階線性遞迴數列的生成遞迴關係來建構圓$\Omega_n : x^2 + y^2 = m_c$，進一步探討圓上的格子點問題。當$n = 1$且$c_1 = \pm 1$時，即考慮圓$\Omega_1 : x^2 + y^2 = 2$，圓上僅有四個格子點$(\pm 1, \pm 1)$，底下結果是探討八個格子點的情形，所以底下結果是扣除$n = 1$且$c_1 = \pm 1$的情形。

【性質 5】(利用一階線性遞迴數列探討圓上至少八個格子點與m_c值性質)

設$\{a_n\}$為一階線性遞迴數列，則(i)$(\pm a_n, \pm a_{n+1})$或$(\pm a_{n+1}, \pm a_n)$為圓$\Omega_n : x^2 + y^2 = m_c$上的八個格子點，其中$m_c = c_1^{2n-2}(c_1^2 + 1)$。(ii)當$m_c$存在$4\omega + 3$型的質因數時，則質因數冪次方為偶數。

【證明】(i)由**定理 5**知**生成遞迴關係為**$a_n^2 - \ell = a_{n-1} \times a_{n+1}$或$a_{n+1}^2 - \ell = a_n \times a_{n+2}$，其中$\ell = 0$。

上述兩式相加得$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} + a_n \times a_{n+2}$ (6)

即$(\pm a_n, \pm a_{n+1})$或$(\pm a_{n+1}, \pm a_n)$為圓$\Omega_n : x^2 + y^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} + a_n \times a_{n+2}$上的八個格子點。

(ii)又$a_n = c_1 a_{n-1} = c_1^2 a_{n-2} = \cdots = c_1^{n-1} a_1 = c_1^{n-1}$，所以

$$m_c = a_{n-1} \times a_{n+1} + a_n \times a_{n-1} = c_1^{n-2} \times c_1^n + c_1^{n-1} \times c_1^{n+1} = c_1^{2n-2}(c_1^2 + 1)$$，故$m_c = c_1^{2n-2}(c_1^2 + 1)$。

例如：考慮$c_1=2$，當$n=1$時，則圓Ω_1：$x^2+y^2=c_1^{2n-2}(c_1^2+1)=2^0(4+1)=5$。

當$n=2$時，則圓Ω_2：$x^2+y^2=c_1^{2n-2}(c_1^2+1)=2^2(4+1)=20$。

對於**任意正整數**n，**圓**Ω_n**是指以圓心為**$(0,0)$**且半徑平方為**$c_1^{2n-2}(c_1^2+1)$**的同心圓**。

(iii)由於$c_1^2+1\equiv 1$或$2 \pmod 4$知c_1^2+1必不存在$4\omega+3$型的質因數，但若c_1^{2n-2}存在$4\omega+3$型的質因數，因為$2n-2$為偶數，則此質因數的冪次方為偶數。 ■

【定理 7】(利用一階線性遞迴數列探討圓上格子點的個數)

設圓Ω_n：$x^2+y^2=m_c$且$m_c=c_1^{2n-2}(c_1^2+1)$，若$m_c=2^\gamma\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$，其中$p_i,q_j$分別為$4\omega+1$型與$4\omega+3$型的相異質數($1\le i\le u,1\le j\le v$)且$\alpha_i,\gamma$為非負整數、$\beta_j$為偶數，則圓上格子點的個數為$N(m_c)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

【證明】現在要利用**預備定理 1**：$N(m_c)=4\left[N_1(m_c)-N_3(m_c)\right]$證明$N(m_c)$的另一個公式。

由**性質 5**知$m_c=c_1^{2n-2}(c_1^2+1)$，且當m_c存在$4\omega+3$型的相異質因數q_j時，則β_i為偶數。

令$A=\left\{h_a \middle| h_a \text{為由} p_1^{\kappa_1},p_2^{\kappa_2},p_3^{\kappa_3},\cdots,p_i^{\kappa_i},\cdots,p_u^{\kappa_u} \text{所有組成的因數，其中} \kappa_i=1,2,3,\cdots,\alpha_i\right\}$、

$B=\left\{h_b \middle| h_b \text{為由} q_1^{\lambda_1},q_2^{\lambda_2},q_3^{\lambda_3},\cdots,q_j^{\lambda_j},\cdots,q_v^{\lambda_v} \text{所有組成的因數，其中} \lambda_j=2,4,6,\cdots,\beta_j\right\}$、

$C=\left\{h_c \middle| h_c \text{為由} q_1^{\lambda_1},q_2^{\lambda_2},q_3^{\lambda_3},\cdots,q_j^{\lambda_j},\cdots,q_v^{\lambda_v} \text{所有組成的因數，其中} \lambda_j=1,3,5,\cdots,\beta_j-1\right\}$，

$D=\left\{h_ah_b \middle| h_a\in A \text{且} h_b\in B\right\}$且$E=\left\{h_ah_c \middle| h_a\in A \text{且} h_c\in C\right\}$，

則$h_a\equiv 1 \pmod 4$、$h_b\equiv 1 \pmod 4$、$h_c\equiv 3 \pmod 4$、$h_ah_b\equiv 1 \pmod 4$及$h_ah_c\equiv 3 \pmod 4$，

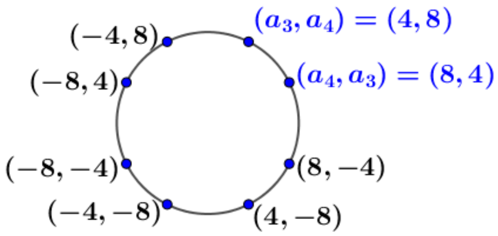
且$n(A)=\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$、$n(B)=n(C)$及$n(D)=n(E)$。

由**預備定理 1 的定義**知$N_1(m_c)=n(A)+n(B)+n(D)$且$N_3(m_c)=n(C)+n(E)$。

又$n(B)=n(C)$及$n(D)=n(E)$，故

$$N_1(m_c)-N_3(m_c)=\left[n(A)+n(B)+n(D)\right]-\left[n(C)+n(E)\right]=n(A)=\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1),$$

因此，圓上格子點的個數為 $N(m_c)=4\left[N_1(m_c)-N_3(m_c)\right]=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 。



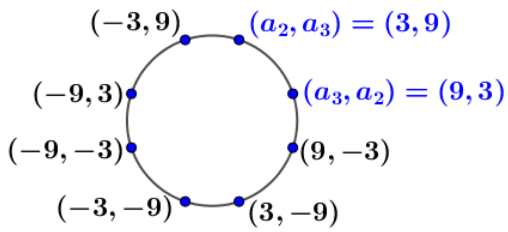


圖 2： $x^2+y^2=80$ 恰通過 8 個格子點　　圖 3： $x^2+y^2=90$ 恰通過 8 個格子點

例如：考慮 $c_1=2$ 且 $n=3$ ， $m_c=2^4\times5=80$ ，所以 $N(80)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)=4(1+1)=8$ ，故 $x^2+y^2=80$ 恰通過 8 個格子點，參見圖 2。考慮 $c_1=3$ 且 $n=2$ ， $m_c=3^2\times(2\times5)$ ，所以 $N(90)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)=4(1+1)=8$ ，故 $x^2+y^2=90$ 恰通過 8 個格子點，參見圖 3。 ■

(二)二階線性遞迴數列且 $c_2=1$

與上一節方式探討二階線性遞迴數列的情形，此時二階線性遞迴數列的生成遞迴關係是考慮(5)式中 $o_n^2-\ell_{odd}=o_{n-1}\times o_{n+1}$ 及 $e_n^2-\ell_{even}=e_{n-1}\times e_{n+1}$ ，上述兩式相加得到

$$o_n^2+e_n^2=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}+(\ell_{odd}+\ell_{even}) 。\tag{7}$$

(7)式可視 $(\pm o_n,\pm e_n)$ 與 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為圓 Ω_n ： $x^2+y^2=m_c$ 上的八個格子點，其中 $m_c=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}+(\ell_{odd}+\ell_{even})$ 。由**定理 4** 知**當 $c_2=1$ 時，** $\ell_{odd}+\ell_{even}=(-c_1^2)+c_1^2=0$ ，**這是為了簡化 m_c ，即** $m_c=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}$ ，底下我們先談 m_c 的性質。

若考慮費氏數列 $\{a_n\}$ ： $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ，則可觀察到

$n=1$ ： $o_0\times o_2+e_0\times e_2=1\times2+0\times3=2=a_3$ ； $n=2$ ： $o_1\times o_3+e_1\times e_3=1\times5+1\times8=13=a_7$ ；
$n=3$ ： $o_2\times o_4+e_2\times e_4=2\times13+3\times21=89=a_{11}$ ； $n=4$ ： $o_3\times o_5+e_3\times e_5=5\times34+8\times55=a_{15}$ ；
以此類推至任意正整數 n ， $m_c=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}=a_{4n-1}$ ，證明參見**性質 6**。

例如：考慮費氏數列，當 $n=1$ 時，則圓 Ω_1 ： $x^2+y^2=a_3=2$ ；

當 $n=2$ 時，則圓 $\Omega_2：x^2+y^2=a_7=13$；當 $n=3$ 時，則圓 $\Omega_3：x^2+y^2=a_{11}=89$。

對於任意正整數 n，圓 Ω_n 是指以圓心為 $(0,0)$ 且半徑平方為 a_{4n-1} 的同心圓。

【性質 6】(利用二階線性遞迴數列探討圓上至少八個格子點與 m_c 值性質)

設 $\{a_n\}$ 為二階線性遞迴數列，則 $(\pm a_n,\pm a_{n+1})$ 或 $(\pm a_{n+1},\pm a_n)$ 為圓 $\Omega_n：x^2+y^2=m_c$ 上的八個格子點，其中 $m_c=a_{4n-1}$。**【註】**扣除費氏數列中 $n=1$ 情形，僅四個格子點為 $(\pm1,\pm1)$。

【證明】由(7)式知 $(\pm o_n,\pm e_n)$ 與 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為圓 $\Omega_n：x^2+y^2=m_c$ 上的八個格子點，其中

$m_c = o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}+(\ell_{odd}+\ell_{even})$。

令 $o_n=a_{2n-1}$ 與 $e_n=a_{2n}$，其中 $n\geq1$，則 $o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}=a_{2n-2}\times a_{2n}+a_{2n-1}\times a_{2n+1}$。

由**定義 1** 與由**迭代過程**知

$$
\begin{aligned}
a_{4n-1} &= c_1a_{4n-2}+1\cdot a_{4n-3}\left(=a_2a_{4n-2}+a_1a_{4n-3}\right)\\
&= c_1\left(c_1a_{4n-3}+a_{4n-4}\right)+a_{4n-3}=\left(c_1^2+1\right)a_{4n-3}+c_1a_{4n-4}\left(=a_3a_{4n-3}+a_2a_{4n-4}\right)\\
&= \left(c_1^2+1\right)\left(c_1a_{4n-4}+a_{4n-5}\right)+c_1a_{4n-4}=\left(c_1^3+2c_1\right)a_{4n-4}+\left(c_1^2+1\right)a_{4n-5}\left(=a_4a_{4n-4}+a_3a_{4n-5}\right)\\
&= \cdots = a_{2n-2}a_{2n}+a_{2n-1}a_{2n+1}=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}
\end{aligned}
$$

因此，$m_c=o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}=a_{4n-1}$，其中 $n\geq1$。 ■

【定理 8】(二階線性遞迴數列的平方和-推廣費馬平方和定理與 m_c 值性質)

設 $\{a_n\}$ 為二階線性遞迴數列，則(i) $a_{2n-1}^2+a_{2n}^2=a_{4n-1}$。(ii)若 $p\,|\,a_{4n-1}$，其中 p 為質數，則圓 $\Omega_n：x^2+y^2=a_{4n-1}$ 有解的充要條件為 $p=2$ 或 $p=4\omega+1$。

【證明】(i)要證明 $a_{2n-1}^2+a_{2n}^2=a_{4n-1}$，先證當 $c_2=1$ 時，$a_{\alpha+\beta}=a_\alpha a_{\beta+1}+a_{\alpha-1}a_\beta$，其中 $\alpha,\beta\in N$。

由於 $a_{\alpha+\beta}=c_1a_{\alpha+\beta-1}+a_{\alpha+\beta-2}=a_2\cdot a_{\alpha+\beta-1}+a_1\cdot a_{\alpha+\beta-2}$ $(\because a_1=1, a_2=c_1)$ 且由**迭代過程**知

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha+\beta} &= a_2\cdot(c_1a_{\alpha+\beta-2}+a_{\alpha+\beta-3})+a_1\cdot a_{\alpha+\beta-2}=(a_1+c_1a_2)a_{\alpha+\beta-2}+a_2\cdot a_{\alpha+\beta-3}\\
&= a_3\cdot a_{\alpha+\beta-2}+a_2\cdot a_{\alpha+\beta-3}=\cdots=a_\alpha\cdot a_{\beta+1}+a_{\alpha-1}\cdot a_\beta
\end{aligned}
$$

所以 $a_{\alpha+\beta}=a_\alpha a_{\beta+1}+a_{\alpha-1}a_\beta$，推得 $a_{4n-1}=a_{2n+(2n-1)}=a_{2n}\cdot a_{2n}+a_{2n-1}\cdot a_{2n-1}=a_{2n}^2+a_{2n-1}^2$。

因此，$a_{2n-1}^2+a_{2n}^2=a_{4n-1}$。

(ii)由(i)知 $a_{2n-1}^2+a_{2n}^2=a_{4n-1}$，可知 $x^2+y^2=a_{4n-1}$ 上必存在格子點

為 (a_{2n-1},a_{2n}) 或 (a_{2n},a_{2n-1})，此時 $x^2+y^2=a_{4n-1}$ 有解，令 $p\,|\,a_{4n-1}$，其中 p 為質數，接著要

證明 $x^2+y^2=p$ 有解的充要條件為 $p=2$ 或 $p=4\omega+1$。

“**充分性**”因為任何整數的平方模 4 後只能同餘於 0 或 1，所以

$p=x^2+y^2\equiv 0$ 或 1 或 $2 \pmod 4$，但 p 為質數，故 $p=2$ 或 $p=4\omega+1$。

“**必要性**”已知 $p=2=1^2+1^2$，不妨設 $p>2$，由於 $p=4\omega+1$，所以存在一整數 μ 且

$0<|\mu|<\dfrac{p}{2}$ 使得 $\mu^2+1\equiv 0 \pmod p$，故存在一整數 x,y,μ_0 使得 $1\le\mu_0<p$ 且 $x^2+y^2=\mu_0 p$。

令 $\mu_0>1$，取正整數 e,f 且 $0<e,f<\dfrac{\mu_0}{2}$ 使得 $x\equiv e \pmod{\mu_0}$ 且 $y\equiv f \pmod{\mu_0}$，則

$0<e^2+f^2\le\dfrac{\mu_0^2}{2}$ 且 $x^2+y^2\equiv e^2+f^2 \pmod{\mu_0}$，即存在正整數 μ' 使得 $1\le\mu'<\dfrac{\mu_0}{2}$ 且

$e^2+f^2=\mu'\mu_0$，故 $\left(\mu_0 p\right)\left(\mu'\mu_0\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(e^2+f^2\right)=\left(ex+fy\right)^2+\left(ey-fx\right)^2$。

又 $ex+fy\equiv x^2+y^2 \pmod{\mu_0}\equiv\mu_0 p \pmod{\mu_0}\equiv 0 \pmod{\mu_0}$ 且

$ey-fx\equiv xy-yx \pmod{\mu_0}\equiv 0 \pmod{\mu_0}$，所以 $\left(\dfrac{ex+fy}{u_0}\right)^2+\left(\dfrac{ey-fx}{u_0}\right)^2=\mu' p$ 且 $1\le\mu'<\dfrac{\mu_0}{2}$

，與 μ_0 為最小正整數矛盾，故 $\mu_0=1$。因此，圓 Ω_n：$x^2+y^2=a_{4n-1}$ 有解的充要條件為

$p=2$ 或 $p=4\omega+1$。 ■

【定理 9】(利用二階線性遞迴數列探討圓上格子點的個數)

設圓 Ω_n：$x^2+y^2=a_{4n-1}$，其中 $n\ge 1$，若 $a_{4n-1}=2^{\gamma}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$，其中 p_i 為 $4\omega+1$ 型的相異質數 $(1\le i\le u)$ 且 α_i 為正整數且 γ 為非負整數，則 $N(m_c)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

【證明】由**定理 8** 知 $m_c=a_{4n-1}$ 中的奇質因數皆為 $4\omega+1$ 型的質數，不存在 $4\omega+3$ 型的

質數，所以 $N_3(m_c)=0$。因此，由**預備定理 1**：$N(m_c)=4N_1(a_{4n-1})=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。 ■

【定理 10】(利用二階線性遞迴數列探討圓上的特定格子點之軌跡方程式)

設$(\pm o_n,\pm e_n)$或$(\pm e_n,\pm o_n)$為圓Ω_n：$x^2+y^2=a_{4n-1}$上八個格子點，則(i)過(o_n,e_n)與$(-o_n,-e_n)$的軌跡方程式為雙曲線$x^2+c_1xy-y^2=1$。(ii)過$(o_n,-e_n)$與$(-o_n,e_n)$的軌跡方程式為雙曲線$x^2-c_1xy-y^2=1$。(iii)過(e_n,o_n)與$(-e_n,-o_n)$的軌跡方程式為雙曲線$x^2-c_1xy-y^2=-1$。(iv)過$(e_n,-o_n)$與$(-e_n,o_n)$的軌跡方程式為雙曲線$x^2+c_1xy-y^2=-1$，其中費氏數列中$n=1$時，其軌跡方程式為單位圓 $x^2+y^2=1$。

【證明】由**性質 6** 知$(\pm o_n,\pm e_n)$與$(\pm e_n,\pm o_n)$為圓Ω_n：$x^2+y^2=a_{4n-1}$上的八個格子點，但費氏數列中$n=1$情形，僅有四個格子點為$(\pm1,\pm1)$，決定一個單位圓。

(i)當格子點為$(\pm o_n,\pm e_n)$時，①考慮格子點(o_n,e_n)與$(-o_n,-e_n)$且由**迭代過程**可得

$$\begin{aligned}o_n^2+c_1o_ne_n-e_n^2&=o_n(o_n+c_1e_n)-e_n^2=o_no_{n+1}-e_n^2=\begin{vmatrix}o_n & e_n\\ e_n & o_{n+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{2n-1} & a_{2n}\\ a_{2n} & a_{2n+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{2n-1} & a_{2n-2}\\ a_{2n} & a_{2n-1}\end{vmatrix}\\&=(-1)\begin{vmatrix}a_{2n-2} & a_{2n-1}\\ a_{2n-1} & a_{2n}\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}a_{2n-3} & a_{2n-2}\\ a_{2n-2} & a_{2n-1}\end{vmatrix}=\cdots=(-1)^{2n}\begin{vmatrix}a_{-1} & a_0\\ a_0 & a_1\end{vmatrix}=(-1)^{2n}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\end{aligned} \tag{8}$$

所以格子點(o_n,e_n)與$(-o_n,-e_n)$在$x^2+c_1xy-y^2=1$上。

因此，由**二次曲線判定性質**知$\delta=c_1^2+4>0$，$x^2+c_1xy-y^2=1$的圖形為雙曲線。

例如：以$c_1=2$為例，參見圖 4 中雙曲線Γ_1。

(ii)考慮格子點$(o_n,-e_n)$與$(-o_n,e_n)$且由**迭代過程**及(8)式改為

$$o_n^2-c_1o_n(-e_n)-(-e_n)^2=o_n^2+c_1o_ne_n-e_n^2=o_n(o_n+c_1e_n)-e_n^2=o_no_{n+1}-e_n^2=1\text{。}$$

所以格子點$(o_n,-e_n)$與$(-o_n,e_n)$在$x^2-c_1xy-y^2=1$上。

因此，由**二次曲線判定性質**知$\delta=(-c_1)^2+4>0$，$x^2+c_1xy-y^2=1$的圖形為雙曲線。

例如：以$c_1=2$為例，參見圖 4 中雙曲線Γ_2。

(iii)考慮格子點(e_n,o_n)與$(-e_n,-o_n)$且仿照(i)證明可得$e_n^2-c_1o_ne_n-o_n^2=-1$ (9)

所以格子點(e_n,o_n)與$(-e_n,-o_n)$在$x^2-c_1xy-y^2=-1$上。

因此，由**二次曲線判定性質**知 $\delta=(-c_1)^2+4>0$ ， $x^2+c_1xy-y^2=1$ 的圖形為雙曲線。

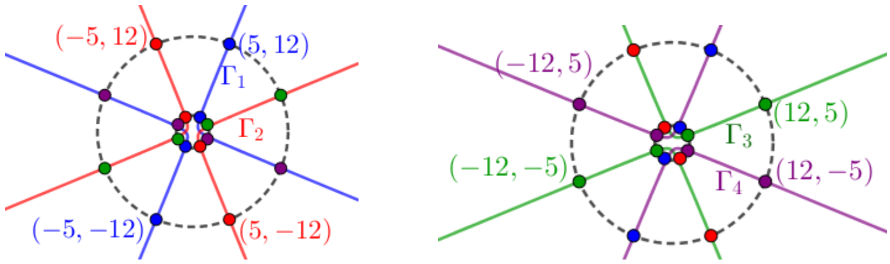


圖 4：過 $(\pm o_n, \pm e_n)$ 與 $(\pm e_n, \pm o_n)$ 的軌跡圖形

例如：以 $c_1=2$ 為例，參見圖 4 中雙曲線 Γ_3 。

(iv)考慮格子點 $(e_n, -o_n)$ 與 $(-e_n, o_n)$ 且由**迭代過程**及(8)式改為

$$e_n^2+c_1e_n(-o_n)-(-o_n)^2=e_n^2-c_1o_ne_n-o_n^2=e_n(e_n-c_1o_n)-o_n^2=e_ne_{n-1}-o_n^2=-1$$

所以格子點 $(e_n, -o_n)$ 與 $(-e_n, o_n)$ 在 $x^2+c_1xy-y^2=-1$ 上。

因此，由**二次曲線判定性質**知 $\delta=c_1^2+4>0$ ， $x^2+c_1xy-y^2=1$ 的圖形為雙曲線。

例如：以 $c_1=2$ 為例，參見圖 4 中雙曲線 Γ_4 。 ■

五、探討雙曲線上的格子點及特定格子點的軌跡方程式

同樣地利用一階或二階線性遞迴數列的生成遞迴關係來建構雙曲線 H_n：$x^2-sy^2=m_h$ ，進一步探討雙曲線 H_n 上的格子點問題。

(一)一階線性遞迴數列

【性質 7】(利用一階線性遞迴數列探討雙曲線上至少四個格子點且 m_h 值性質)

設 $\{a_n\}$ 為一階線性遞迴數列，則 $(\pm a_{n+1}, \pm a_n)$ 為雙曲線 H_n：$x^2-sy^2=m_h$ 上的四個格子點。

，其中 $m_h=c_1^{2n-2}(c_1^2-s)$ 。

【證明】由**定理 5** 知可由 (a_{i-1}, a_i) 生成下一組解 (a_i, a_{i+1}) ，其中 $1\le i\le n$ 且 $\ell=0$ ，

所以可考慮兩式 $a_n^2-\ell=a_{n-1}\times a_{n+1}$ 且 $a_{n+1}^2-\ell=a_n\times a_{n+2}$ ，其中 $\ell=0$ ，將第一式乘以 $(-s)$ 加

上第二式得 $a_{n+1}^2 - sa_n^2 = a_n \times a_{n+2} - sa_{n-1} \times a_{n+1}$ ，即

$(\pm a_{n+1}, \pm a_n)$ 為雙曲線 H_n ： $x^2 - sy^2 = a_n \times a_{n+2} - sa_{n-1} \times a_{n+1}$ 上的四個格子點。

又 $a_n = c_1 a_{n-1} = c_1^2 a_{n-2} = \cdots = c_1^{n-1} a_1 = c_1^{n-1}$ ，所以 $m_h = c_1^{n-1} \times c_1^{n+1} - sc_1^{n-2} \times c_1^n = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)$ 。

例如：考慮 $c_1 = 2, s = 2$ ，當 $n = 1$ 時，則雙曲線 H_1：$x^2 - 2y^2 = 2^0(4-2) = 3$ 。當 $n = 2$ 時，

則雙曲線 H_2：$x^2 - 2y^2 = 2^2(4-2) = 12$ 。 當 $n = 3$ 時，則雙曲線 H_3：$x^2 - 2y^2 = 48$ 。

對於任意正整數 n ，雙曲線 H_n 是指以中心為 $(0,0)$ 的同心雙曲線。 ■

【定理 11】(利用一階線性遞迴數列探討雙曲線上的格子點之個數)

設雙曲線 H_n：$x^2 - sy^2 = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)$ ，則(i)當 s 為完全平方數時，雙曲線 H_n 上有限個格子點。(ii)當 s 不為完全平方數時，雙曲線 H_n 上有無限多個格子點。

【證明】(i)當 s 是平方數時，由於 $x^2 - sy^2 = \left(x + \sqrt{s}y\right)\left(x - \sqrt{s}y\right)$ 且 $m_h(n)$ 分解成有 κ 組兩個連乘因數 d_i 與 e_i $(1 \le i \le \kappa)$ ，即 $m_h(n) = d_i e_i$ ，所以 $x + \sqrt{s}y = d_i, x - \sqrt{s}y = e_i$ 解聯立求得解有限，因此，雙曲線 H_n 上有限個格子點。

(ii)由**預備定理 4** 知滿足 $x^2 - sy^2 = 1$ 的解之遞迴性質且其解為無限多組解。

設 (x_i, y_i) 為雙曲線 H_n 方程式的任意一正整數解且 (u_j, v_j) 為 $x^2 - sy^2 = 1$ 的任意正整數解，其中 $i, j \in N$ ，則 $x_i^2 - sy_i^2 = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)$ 且 $u_j^2 - sv_j^2 = 1$，因為

$(x_i + y_i\sqrt{s})(u_j + v_j\sqrt{s}) = (x_i u_j + y_i v_j s) + (x_i v_j + y_i u_j)\sqrt{s}$ ，所以

$$\begin{aligned}(x_i u_j + sy_i v_j)^2 - s(x_i v_j + y_i u_j)^2 &= x_i^2(u_j^2 - sv_j^2) - sy_i^2(u_j^2 - sv_j^2) \\ &= x_i^2 \cdot 1 - sy_i^2 \cdot 1 = x_i^2 - sy_i^2 = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)\end{aligned}$$

故 $(x_i u_j + sy_i v_j)^2 - s(x_i v_j + y_i u_j)^2 = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)$ ，推得 $(x_i u_j + sy_i v_j, x_i v_j + y_i u_j)$ 為雙曲線 H_n 方程式的一正整數解。

因此，對於 i, j 為任意正整數，雙曲線 H_n 上有無限多個格子點。 ■

(二)二階線性遞迴數列且 $c_2=-1$

接著利用二階線性遞迴數列的生成遞迴關係(參見(5)式)建構雙曲線方程式為 $\mathrm{H}_n: x^2-sy^2=m_h$，若(5)式中第二式減第一式乘以平方數 s 得到

$$e_n^2-so_n^2=e_{n-1}\times e_{n+1}-so_{n-1}\times o_{n+1}+(\ell_{even}-s\ell_{odd}) \text{。} \tag{10}$$

(10)式可視 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為雙曲線 $\mathrm{H}_n: x^2-sy^2=m_h$ 上的四個格子點，其中

$m_h=e_{n-1}\times e_{n+1}-so_{n-1}\times o_{n+1}+(\ell_{even}-s\ell_{odd})$。為了方便論證，由**定理 4** 知當 $c_2=-1$ 且 $s=1$ 時，

$\ell_{even}-s\ell_{odd}=c_1^2-c_1^2=0$，即 $m_h=e_{n-1}\times e_{n+1}-o_{n-1}\times o_{n+1}$，底下就來談 m_h 的性質。

若考慮二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$：$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ 且 $s=1$，則可觀察到

奇數數列 $\{o_n\}$：$o_0=a_{-1}=-1, o_1=a_1=1, o_2=a_3=3, o_3=a_5=5, o_4=a_7=7, o_5=a_9=9,\cdots$

偶數數列 $\{e_n\}$：$e_0=a_0=0, e_1=a_2=2, e_2=a_4=4, e_3=a_6=6, e_4=a_8=8,\cdots$

$n=1, e_0\times e_2-o_0\times o_2=0\times 4-3\times(-1)=3=a_3$；$n=2, e_1\times e_3-o_1\times o_3=2\times 6-1\times 5=7=a_7$；

$n=3, e_2\times e_4-o_2\times o_4=4\times 8-3\times 7=11=a_{11}$；$n=4, e_3\times e_5-o_3\times o_5=6\times 10-5\times 9=15=a_{15}$；

以此類推至任意正整數 n，$m_h=a_{4n-1}$，其中 $n\geq 1$，證明參見**性質 8**。

例如：考慮二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$：$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ 且 $s=1$，

當 $n=1$ 時，則雙曲線 $\mathrm{H}_1: x^2-y^2=a_3=3$；當 $n=2$ 時，則雙曲線 $\mathrm{H}_2: x^2-y^2=a_7=7$。

對於任意正整數 n，雙曲線 $\mathrm{H}_n: x^2-y^2=a_{4n-1}$ 是指以中心為 $(0,0)$ 的同心雙曲線。

【性質 8】(利用二階線性遞迴數列探討雙曲線上至少四個格子點且 m_h 值性質)

設數列 $\{e_n\}$ 與 $\{o_n\}$ 分別為二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 的偶數數列及奇數數列，則 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為雙曲線 $\mathrm{H}_n: x^2-y^2=m_h$ 上的四個格子點，其中 $m_h=a_{4n-1}$。

【註】性質 8 中當 $s\neq 1$ 時，就沒有 $m_h=a_{4n-1}$ 此性質。

【證明】由(10)式知 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為雙曲線 $\mathrm{H}_n: x^2-y^2=m_h$ 上的四個格子點。

令 $o_n=a_{2n-1}$ 與 $e_n=a_{2n}$，其中 $n\geq 1$，則 $e_{n-1}\times e_{n+1}-o_{n-1}\times o_{n+1}=a_{2n-1}\times a_{2n+1}-a_{2n-2}\times a_{2n}$。

由**定義 1** 與由**迭代過程**知

$$
\begin{aligned}
a_{4n-1} &= c_1 a_{4n-2} - 1\cdot a_{4n-3}\left(= a_2 a_{4n-2} + a_1 a_{4n-3}\right)\\
&= c_1\left(c_1 a_{4n-3} - a_{4n-4}\right) - a_{4n-3} = \left(c_1^2-1\right)a_{4n-3} - c_1 a_{4n-4}\left(= a_3 a_{4n-3} - a_2 a_{4n-4}\right)\\
&= \left(c_1^2-1\right)\left(c_1 a_{4n-4} - a_{4n-5}\right) - c_1 a_{4n-4} = \left(c_1^3 - 2c_1\right)a_{4n-4} - \left(c_1^2+1\right)a_{4n-5}\left(= a_4 a_{4n-4} - a_3 a_{4n-5}\right)\\
&= \cdots = a_{2n-2}a_{2n} - a_{2n-1}a_{2n+1} = e_{n-1}\times e_{n+1} - o_{n-1}\times o_{n+1}
\end{aligned}
$$

因此，$m_h = a_{4n-1}$ 。 ■

【性質 9】(二階線性遞迴數列的平方差性質)

設 $\{a_n\}$ 為二階線性遞迴數列，則 $a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = a_{4n-1}$ 。

【證明】要證明 $a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = a_{4n-1}$ ，先證當 $c_2 = -1$ 時， $a_{\alpha+\beta} = a_\alpha a_{\beta+1} + a_{\alpha-1}a_\beta$ ，其中 $\alpha,\beta\in N$ 。

由於 $a_{\alpha+\beta} = c_1 a_{\alpha+\beta-1} - a_{\alpha+\beta-2} = a_2\cdot a_{\alpha+\beta-1} - a_1\cdot a_{\alpha+\beta-2}$ $(\because a_1 = 1, a_2 = c_1)$ 且由**迭代過程**知

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha+\beta} &= a_2\cdot(c_1 a_{\alpha+\beta-2} - a_{\alpha+\beta-3}) - a_1\cdot a_{\alpha+\beta-2} = (c_1 a_2 - a_1)a_{\alpha+\beta-2} - a_2\cdot a_{\alpha+\beta-3}\\
&= a_3\cdot a_{\alpha+\beta-2} - a_2\cdot a_{\alpha+\beta-3} = \cdots = a_\alpha\cdot a_{\beta+1} - a_{\alpha-1}\cdot a_\beta
\end{aligned}
$$

所以 $a_{\alpha+\beta} = a_\alpha a_{\beta+1} - a_{\alpha-1}a_\beta$ ，推得 $a_{4n-1} = a_{2n+(2n-1)} = a_{2n}\cdot a_{2n} - a_{2n-1}\cdot a_{2n-1} = a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2$ 。

因此， $a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2 = a_{4n-1}$ 。 ■

【定理 12】(利用二階線性遞迴數列探討雙曲線上的格子點之個數)

設雙曲線 H_n：$x^2 - sy^2 = m_h$ ，其中 $m_h = e_{n-1}\times e_{n+1} - so_{n-1}\times o_{n+1} + (\ell_{even} - s\ell_{odd})$ ，則(i)雙曲線 H_n 上至少有四個格子點 $(\pm e_n, \pm o_n)$ 。(ii)當 s 為完全平方數時，雙曲線 H_n 上有限個格子點。

(iii)當 s 不為完全平方數時，雙曲線 H_n 上有無限多個格子點。

【證明】仿照**性質 8** 及**定理 11** 來證明。 ■

【定理 13】(利用二階線性遞迴數列探討雙曲線上的特定格子點之軌跡方程式)

設 $(\pm e_n, \pm o_n)$ 為雙曲線 H_n：$x^2 - sy^2 = m_h$ 上四個格子點，(i)若 $c_1 = -2, c_2 = -1$ ，則過 $(\pm e_n, \pm o_n)$ 的

軌跡方程式為兩組兩相交直線 $x^4-2x^2y^2+y^4-2x^2-2y^2+1=0$ 。(ii)若 $|c_1|\geq 3$ ，則過 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$ 的軌跡方程式為雙曲線 $x^2-c_1xy+y^2=1$；過 $(e_n,-o_n)$ 與 $(-e_n,o_n)$ 的軌跡方程式為雙曲線 $x^2+c_1xy+y^2=1$ 。

【證明】由(10)式知 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為雙曲線 H_n：$x^2-sy^2=m_h$ 上四個的格子點。

(i)當 $c_1=2,c_2=-1$ 時，格子點 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 為 $(\pm(i+1),\pm i)$ ，其中 $1\leq i\leq n-1$ ，顯然其軌跡圖形為兩組兩相交直線，即 $(x+y-1)(x+y+1)(x-y+1)(x-y-1)=0$ ，故其軌跡方程式為

$$x^4-2x^2y^2+y^4-2x^2-2y^2+1=0 \text{ 。}$$

(ii)當格子點為 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 且 $|c_1|\geq 3$ 時，考慮格子點 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$ 且由**迭代過程**可得

$$e_n^2-c_1e_no_n+o_n^2=e_n^2-o_no_{n+1}=\begin{vmatrix} e_n & o_{n+1} \\ o_n & e_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{2n-1} & a_{2n} \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \qquad (11)$$

所以格子點 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$ 在 $x^2-c_1xy+y^2=1$ 上。

由**二次曲線判定性質**知 $\delta=(-c_1)^2-4>0$ ， $x^2+c_1xy-y^2=1$ 的圖形為雙曲線。

例如：以 $c_1=3$ 為例，參見圖 5 中雙曲線 Γ_1 。

②考慮格子點 $(e_n,-o_n)$ 與 $(-e_n,o_n)$ 且由**迭代過程**及(11)式可得 $e_n^2+c_1e_n(-o_n)+(-o_n)^2=1$ ，

所以格子點 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$ 在 $x^2+c_1xy+y^2=1$ 上。

由**二次曲線判定性質**知 $\delta=(c_1)^2+4>0$ ，所以 $x^2+c_1xy+y^2=1$ 的圖形為雙曲線。

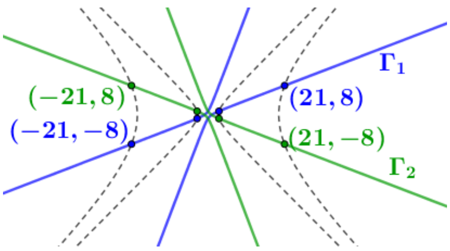


圖 5：過 $(\pm e_n,\pm o_n)$ 的軌跡圖形

由**二次曲線判定性質**知 $\delta=(c_1)^2+4>0$ ，所以 $x^2+c_1xy+y^2=1$ 的圖形為雙曲線。

例如：以 $c_1=3$ 為例，參見圖 5 中雙曲線 Γ_2 。 ■

六、探討圓及橢圓上的格子點問題

本研究在探討橢圓 E_n：$x^2+sy^2=m_e$ 時，s 是取黑格納數來探討。若採前二章方式來建構橢圓方程式，當 $s=2,3$ 時，可初略判斷 m_e 中質因數的類型，但對於其餘黑格納數，質因數的類型判斷上有難度，這裡利用**二次剩餘**及**歐拉-費馬定理**探討 m_e 中質因數的類型。

(一)圓及橢圓方程式有解性質

【定理 14】($-s$ 為模 p 的二次剩餘與 p 為特定質數性質)

設 p 為奇質數，(i)若 $-s$ 為模 p 的二次剩餘，其中 s 為黑格納數，則 p 為表 1 中**特定質數**。(ii)反之，若 p 為表 1 中**特定質數**，則 $-s$ 為模 p 的二次剩餘，其中 s 為黑格納數。

表 1： p 為特定質數

s	p 為特定質數	s	p 為特定質數
1	$p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)$	2	$p\equiv 1,3\,(\mathrm{mod}\ 8)$
3	$p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 6)$	7	$p\equiv 1,7,9,11,15,23,25\,(\mathrm{mod}\ 28)$
11	$p\equiv 1,3,5,9,15\,(\mathrm{mod}\ 22)$	19	$p\equiv 1,5,7,9,11,17,23,25,35\,(\mathrm{mod}\ 38)$
43	$p\equiv 9,11,13,15,17,21,23,25,31,41,47,53,57,59,67,79,83,81\,(\mathrm{mod}\ 86)$		
67	$p\equiv 13,15,17,23,29,37,47,59,71,73,83,89,103,127,131,149\,(\mathrm{mod}\ 134)$		
163	$p\equiv 41,43,47,53,71,83,97,113,131,151,167,173,179,197,251,281,307\,(\mathrm{mod}\ 326)$		

【證明】(i)設整數 x 使得 $x^2\equiv -s\ (\mathrm{mod}\ p)$，故由**歐拉-費馬定理**知 $x^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$。

$x^{p-1}=x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)}$，所以 $x^{p-1}=x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)}=\left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(-s\right)^{\frac{p-1}{2}}\ (\mathrm{mod}\ p)$，即 $\left(-s\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$。(12)

滿足(12)式的判定可推得表 1 中**特定質數**。

例如：考慮 $s=3$，當質數 $p=6\omega+1\,(\omega\in N\cup\{0\})$ 時，$\left(-3\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$。

當質數 $p=6\omega+5\,(\omega\in N\cup\{0\})$ 時，$\left(-3\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p)$ 不滿足 $\left(-3\right)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$。

故 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 6)$ 型的質數。

因此，若 $-s$ 為模 p 的二次剩餘，則 p 為**特定質數**。

(ii)由**預備定理 8-二次剩餘的勒讓德符號判別法**知若 p 為表 1 中**特定質數**，則 $-s$ 為模 p 的二次剩餘，其中 s 為黑格納數。

例如：考慮若 $p\equiv 1,7,9,11,15,23,25\,(\mathrm{mod}\ 28)$，則 -7 為模 p 的二次剩餘。

當 $p=28w+11$ 時，由**預備定理 8** 知

$$\left(\frac{-7}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{7}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{7}\right)(-1)^{\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}=(-1)^{2p-2}\left(\frac{p}{7}\right)\left(\frac{-7}{p}\right)$$
$$=(-1)^{56\omega+20}\left(\frac{28\omega+11}{7}\right)=\left(\frac{-3}{7}\right)=(-1)^{\frac{7-1}{2}}\times\left(\frac{7}{3}\right)(-1)^{\left(\frac{3-1}{2}\right)\left(\frac{7-1}{2}\right)}=1$$

可推得當 $p=28w+11$ 時，-7 為模 p 的二次剩餘。 ■

底下**定理 15** 中探討橢圓方程式的整數解<u>不包含</u>型如 $(t_1,0)$ 或 $(0,t_2)$ 的解 (x,y)，其中 t_1,t_2 為不為零的整數，則稱此解為**平凡解**。**例如**：$x^2+7y^2=7$ 的整數解為 $(0,\pm1)$；$x^2+7y^2=7^2$ 的整數解為 $(\pm7,0)$；$x^2+7y^2=7^3$ 的整數解為 $(0,\pm7)$。

【定理 15】(橢圓 $x^2+sy^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 解為正整數解性質)

設 x,y 為滿足 $\gcd(x,y)=1$ 的正整數，若橢圓 E: $x^2+sy^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 有整數解且 $p\nmid s$ 及 $\gcd(y,p)=1$，其中 p_i 為相異質數且 α_i 為非零整數 $1\le i\le u$，則 p_i 為表 1 中**特定質數**。

【證明】設 $p\in\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_u\}$，則 $x^2+sy^2\equiv0\ (\text{mod }p)$。又 $p\nmid s$ 且 $\gcd(y,p)=1$，所以存在正整數 κ 使得 $\kappa y\equiv1\ (\text{mod }p)$，得到

$(\kappa x)^2+s(\kappa y)^2\equiv(\kappa x)^2+s\cdot1\ (\text{mod }p)\equiv0\ (\text{mod }p)$，故 $(\kappa x)^2\equiv-s\ (\text{mod }p)$，即 $-s$ 為模 p 的二次剩餘，由**定理 14** 知 p 為表 1 中**特定質數**。

因此，若 $x^2+sy^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 有解，則 p_i 為表 1 中**特定質數**。 ■

(二)計數橢圓 E: $x^2+3y^2=m_e$ 上的格子點個數

底下就利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上的格子點且證明橢圓上格子點的個數。

【定理 16】(利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上格子點的個數(I))

設橢圓 E: $x^2+3y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$，其中 p_i 為 $6w+1$ 型的相異質數且 α_i 為非負整數，則橢圓 E 上格子點的個數為 $N\left(\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

【證明】先證明橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i^{\alpha_i}$ 上格子點的個數，再證明 E: $x^2+3y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 情形。

(i)由於 3 為**黑格納數**，所以在**定理 14** 中**特定質數**均滿足**唯一分解定理**。

例如：在**定理 14** 中**特定質數為** $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 6)$，如 $7=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=2^2+(\sqrt{3})^2$；

$13=(1+2\sqrt{3}i)(1-2\sqrt{3}i)$；$19=(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)$；$31=(2+3\sqrt{3}i)(2-3\sqrt{3}i)$；

$37=(5+2\sqrt{3}i)(5-2\sqrt{3}i)$；$43=(4+3\sqrt{3}i)(4-3\sqrt{3}i)$ 等等皆唯一分解。

可設 E: $x^2+3y^2=(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)=p_i$，則兩個複數 $x_1+y_1\sqrt{3}i$ 及 $x_1-y_1\sqrt{3}i$ 對應點為 $(x_1,y_1\sqrt{3})$ 及 $(x_1,-y_1\sqrt{3})$ 是在圓 E: $x^2+y^2=p_i$ 上。事實上，可視為 (x_1,y_1) 及 $(x_1,-y_1)$ 為橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i$ 上的格子點。接著由**複數乘法性質**知兩個複數 $x_1+y_1\sqrt{3}i$ 及 $x_1-y_1\sqrt{3}i$ 分別乘上 $1,-1$ 得到 $\pm x_1\pm y_1\sqrt{3}i$，即在複數平面上對應的格子點為 $(\pm x_1,\pm y_1\sqrt{3})$，同時 $(\pm x_1,\pm y_1)$ 均為橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i$ 上的格子點。故橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i$ 上格子點的個數為 $N\left(p_i^1\right)=2(\alpha_i+1)=2(1+1)=4$。

(ii)由於 p_i 均滿足**唯一分解定理**，可令 $(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)=p_i$，所以當考慮 p_i^2 時，

$p_i^2=(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)$，**將 p_i^2 中複數質因數 2 個一組分解成一組共軛複數為原則**：

$$p_i^2=\left[(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)\right]\left[(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)\right]=(x_1^2+3y_1^2)+0i \quad \text{或}$$

$$\begin{aligned}p_i^2&=(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)=(x_1+y_1\sqrt{3}i)^2(x_1-y_1\sqrt{3}i)^2\\&=\left[(x_1^2-3y_1^2)+2x_1y_1\sqrt{3}i\right]\left[(x_1^2-3y_1^2)-2x_1y_1\sqrt{3}i\right]\end{aligned}\text{。}$$

得到一個實數 $x_1^2+3y_1^2$ 及一組共軛複數為 $(x_1^2-3y_1^2)+2x_1y_1\sqrt{3}i$ 與 $(x_1^2-3y_1^2)-2x_1y_1\sqrt{3}i$，故共有三個相異複數且此個數與求 p_i^2 的正因數個數計算方式相等為 $2+1=3$ 個，接著將三個相異複數分別乘上 $1,-1$ 得到在橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i^2$ 上的格子點共有 $2(2+1)=6$ 個，故

$N\left(p_i^2\right)=2(\alpha_i+1)=2(2+1)=6$ 。

當考慮 p_i^3 時，**將 p_i^3 複數質因數 3 個一組分解成一組共軛複數為原則**：不論如何分解都不會有實數情形，得到二組共軛複數，故共有四個相異複數且此個數與求 p_i^3 的正因數個數計算方式相等為 $3+1=3$ 個。

接著將四個相異複數分別乘上 $1,-1$ 得到在橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i^2$ 上的格子點共有 $2(3+1)=8$ 個，故 $N\left(p_i^3\right)=2(\alpha_i+1)=2(3+1)=8$ 。

以此類推至任意正整數 α_i ，**將 $p_i^{\alpha_i}$ 複數質因數 α_i 個一組分解成一組共軛複數為原則下**，共有 (α_i+1) 個相異複數且此個數與求 $p_i^{\alpha_i}$ 的正因數個數計算方式相等，接著將 (α_i+1) 個相異複數分別乘上 $1,-1$ 得到在橢圓 E: $x^2+3y^2=p_i^{\alpha_i}$ 上的格子點共有 $2(\alpha_i+1)$ 個，故 $N\left(p_i^{\alpha_i}\right)=2(\alpha_i+1)$ 。

(iii)接著考慮 E: $x^2+3y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 的情形，對於所有 p_i 均滿足**唯一分解定理**，所以同樣地**將 $\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 複數質因數 $\sum_{i=1}^{u}\alpha_i$ 個一組分解成一組共軛複數為原則下**，共有 $\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 個相異複數且此個數與求 $\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 的正因數個數計算方式相等，接著將 $\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 個相異複數分別乘上 $1,-1$ 得到在橢圓 E: $x^2+3y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 上的格子點共有 $2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 個，因此，

$$N\left(\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1) \text{ 。} \qquad ■$$

【定理 17】(利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上格子點的個數(II))

設橢圓 E: $x^2+3y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ ，其中 p_i,q_j 分別為 $6w+1$ 型或 $6w+5$ 型的相異質數且 α_i 為非負整數、 β_j,γ 為偶數，

(i)若 $\gamma=0$ ，則橢圓 E 上格子點的個數為 $N\left(3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 。

(ii)若 $\gamma \neq 0$，則橢圓 E 上格子點的個數為 $N\left(2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

【證明】(i)若考慮 3^{λ} 及 $\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 分解成 $(x_1+y_1\sqrt{3}i)(x_1-y_1\sqrt{3}i)$，則分解為**實數**或**純虛數**。

例如：當橢圓 E: $x^2+3y^2=3^{\lambda}$ 時，由於

$$3^1=(0+\sqrt{3}i)(0-\sqrt{3}i), 3^2=(3+0i)(3-0i), 3^3=(0+3\sqrt{3}i)(0-3\sqrt{3}i), 3^4=(9+0i)(9-0i)$$

所以當 λ 為奇數時，共軛複數為 $\pm 3^{[\lambda/2]}i$，其中[ ]為高斯符號；當 λ 為偶數時，共軛複數為 $\pm 3^{\lambda/2}$。當橢圓 E: $x^2+3y^2=11^{\beta}$ 時，由於分解 11^{β} 共軛複數為 $\pm 11^{\beta/2}$。

由於分解為實數或純虛數，**不影響計算橢圓上格子點的個數**。

例如：當橢圓 E: $x^2+3y^2=7$ 時，格子點為 $(\pm 2,\pm 1)$，故橢圓上格子點的個數為 4。

當橢圓 E: $x^2+3y^2=3\times 7$ 時，格子點為 $(\pm 3,\pm 2)$，故橢圓上格子點的個數為 4。

當橢圓 E: $x^2+3y^2=7\times 11^2$ 時，格子點為 $(\pm 22,\pm 11)$，故橢圓上格子點的個數為 4。

故橢圓 E: $x^2+3y^2=3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 上格子點的個數與橢圓 E: $x^2+3y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 上格子點的個數相等，因此，由**定理 16** 知 $N\left(3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

(ii)若 $\gamma\neq 0$，則增加因數 2^{γ}，由於分解 2^{γ} 為共軛複數連乘時，皆存在一組共軛複數外，另外一組共軛複數及一個實數為 $2^{\gamma}=(2^{\gamma/2}+0i)(2^{\gamma/2}-0i)$，所以共有增加複數個數為 $2+1=3$。如此以來再考慮這些複數分別乘上 $1,-1$ 得到其餘複數，因此，

橢圓 E: $x^2+3y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 上的格子點之個數為

$$N\left(2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=N_2\left(2^{\gamma}\right)\times N_1\left(\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\right)=2\cdot 3\cdot\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)=6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$$ 。

例如：考慮橢圓 E: $x^2+3y^2=2^2\times 7$，由於 $2^2=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$ 或

$2^2=(2+0i)(2-0i)$ 且 $7=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$，考慮共軛複數連乘的形式，僅六種情形。

$$2^2\times 7=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$$
$$=\left[(1+\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\right]\left[(1-\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)\right] \quad \text{或} \quad \left[(1-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\right]\left[(1+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)\right]$$
$$=\left(-1+3\sqrt{3}i\right)\left(-1-3\sqrt{3}i\right) \quad \text{或} \quad \left(5-\sqrt{3}i\right)\left(5+\sqrt{3}i\right)$$

及 $7^2=(2+0i)(2-0i)(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=\left[2(2+\sqrt{3}i)\right]\left[2(2-\sqrt{3}i)\right]=\left(4+2\sqrt{3}i\right)\left(4-2\sqrt{3}i\right)$

又由 $-1\pm 3\sqrt{3}i$ 、 $5\pm\sqrt{3}i$ 及 $4\pm 2\sqrt{3}i$ 、分別乘上 $1,-1$ 得到 $\pm 1\pm 3\sqrt{3}i$ 、 $\pm 5\pm\sqrt{3}i$ 及 $\pm 4\pm 2\sqrt{3}i$ ，即在複數平面上對應的格子點為 $(\pm 1,\pm 3\sqrt{3})$ 、 $(\pm 5,\pm\sqrt{3})$ 及 $(\pm 4,\pm 2\sqrt{3})$ ，故 $(\pm 1,\pm 3)$ 、 $(\pm 5,\pm 1)$ 及 $(\pm 4,\pm 2)$ 為橢圓 E: $x^2+3y^2=2^2\times 7$ 上的 $6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)=6(1+1)=12$ 個格子點。 ■

(三)計數橢圓 E: $x^2+2y^2=m_e$ **上的格子點個數**

【定理 18】(利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上格子點的個數(I))

設橢圓 E: $x^2+2y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ ，其中 p_i 為 $8w+1$ 型或 $8w+3$ 型的相異質數且 α_i 為非負整數，則橢圓 E 上格子點的個數為 $N\left(\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 。

【證明】仿照**定理 16** 來證明。 ■

【定理 19】(利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上格子點的個數(II))

設橢圓 E: $x^2+2y^2=2^{\gamma}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ ，其中 p_i 為 $8w+1$ 型或 $8w+3$ 型的相異質數、 q_j 為 $8w+5$ 型或 $8w+7$ 型的相異質數且 α_i,γ 為非負整數、 β_j 為偶數，則橢圓 E 上格子點的個數為

$$N\left(2^{\gamma}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1) \text{ 。}$$

【證明】若考慮 $\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 分解成 $(x_1+y_1\sqrt{2}i)(x_1-y_1\sqrt{2}i)$ ，則分解共軛複數為實數。

例如：當橢圓 E: $x^2+2y^2=5^{\beta_j}$ 時，由於

$$5^2=(5+0i)(5-0i),5^4=(25+0i)(25-0i),5^6=(125+0i)(125-0i)$$

所以當橢圓E：$x^2+2y^2=q_j^{\beta_j}$ 時，分解 $q_j^{\beta_j}$ 共軛複數為實數 $\pm q_j^{\beta_j/2}$ ，所以不影響計算橢圓上格子點的個數。其次，考慮 2^γ 分解成 $(x_1+y_1\sqrt{2}i)(x_1-y_1\sqrt{2}i)$ ，則分解共軛複數為實數或純虛數。當 γ 為奇數時，共軛複數為 $\pm 2^{[\gamma/2]}i$ ，其中 $[\ ]$ 為高斯符號；當 γ 為偶數時，共軛複數為 $\pm 2^{[\gamma/2]}$ 。由於分解為實數或純虛數，不影響計算橢圓上格子點的個數。

例如：當橢圓E：$x^2+2y^2=17$ 時，格子點為 $(\pm3,\pm2)$ ，故橢圓上格子點的個數為 4 。

當橢圓E：$x^2+2y^2=17\times13^2$ 時，格子點為 $(\pm39,\pm26)$ ，故橢圓上格子點的個數為 4 。

當橢圓E：$x^2+2y^2=11\times13^2$ 時，格子點為 $(\pm39,\pm13)$ ，故橢圓上格子點的個數為 4 。

當橢圓E：$x^2+2y^2=2^2\times17$ 時，格子點為 $(\pm6,\pm4)$ ，故橢圓上格子點的個數為 4 。

故橢圓E：$x^2+2y^2=2^\gamma\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 上格子點的個數與橢圓E：$x^2+2y^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ 上格子點的個數相等，因此，由**定理 18** 知 $N\left(3^\lambda\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 。 ■

(四)計數橢圓E：$x^2+sy^2=m_e$ 上的格子點個數

注意到在表 1 中所有特定質數 p 中，當 $s=11,18,43,67,167$ 存在橢圓E：$x^2+sy^2=p$ 無整數解 x 與 y 。**例如**：當 $p=23,67,89,331$ 時，E：$x^2+11y^2=p$ 為無整數解 x 與 y ，有趣地，橢圓E：$x^2+11y^2=p^\alpha$ $(\alpha\geq2)$ 有整數解 x 與 y ，此時格子點的個數參見表 2，底下**定理 20** 中要扣除上述這些特定質數 p 。

表 2：橢圓E：$x^2+11y^2=p^\alpha$ $(\alpha\geq2)$ 上格子點的個數

α	格子點的個數	α	格子點的個數	α	格子點的個數	α	格子點的個數
1	0	7	4	2	2	8	6
3	4	9	8	4	2	10	6
5	4	11	8	6	6	12	10

【定理 20】(**利用複數平面的幾何意義來探討橢圓上格子點的個數**)

設橢圓E：$x^2+sy^2=\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}$ ，其中 s 為黑格納數，若 p_i 為表 1 中特定的相異質數且 α_i 為非負整數，則橢圓E上格子點的個數為 $N\left(\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\right)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 。

【**證明**】仿照**定理 16~19** 來證明。 ■

肆、研究結果

一、求原數論問題中 5 改 ℓ 的解，特別考慮由 (x,y) 生成下一組解的條件，參見**定理 1-2**。

二、探討由高階線性遞迴數列探討數論問題中生成下一組解的條件及 ℓ 值，參見**定理 3-6**。

三、利用一階或二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 滿足數論問題的生成遞迴關係來建構圓(或雙曲線)方程式，且探討圓(或雙曲線)上至少<u>八</u>(或<u>四</u>)個格子點及 m_c (或 m_h)、格子點個數、特定格子點軌跡方程式，參見**定理 7-10** 及**定理 11-13**。

四、利用**二次剩餘**、**歐拉-費馬定理**及**二次剩餘的勒讓德符號判別法**(**二次互反律**)探討圓及橢圓方程式有解的充要條件及 m_c,m_e 中質因數的數論性質，其中 s 為黑格納數來探討，進一步計數橢圓上格子點的個數，參見**定理 14-20**。

伍、結論與未來展望

本作品主要探討有心錐線上的格子點問題，首先遇到問題：如何建構存在格子點的有心錐線方程式呢？首先解一道數論問題的生成下一組解中推導出生成遞迴關係如(2)式、(5)式及(6)式，再由生成遞迴關係建構有心錐線方程式，特別生成遞迴關係是利用線性遞迴數列來表示且此方程式必存在整數解(必存在格子點)，再求得有心錐線方程式有解條件及 m_c,m_h,m_e 數論性質。令人驚喜，當考慮二階線性遞迴數列求得 $m_c=a_{4n-1}$ 及 $m_h=a_{4n-1}$，此時 m_c 中僅存在 2 與 $4\omega+1$ 型的質因數，正好與**費馬平方和定理**相呼應。忍不住好奇的問：$m_c=a_{4n-1}$ 中 $4\omega+1$ 型的質因數是否包含所有 $4\omega+1$ 型的質因數呢？以及 $m_h=a_{4n-1}$ 是否有進一步的數論性質呢？這些問題均值得繼續研究。

利用**二次剩餘**、**歐拉-費馬定理**及**二次剩餘的勒讓德符號判別法**探討圓及橢圓方程式 $x^2+sy^2=m_e$ 有解的充分條件及 m_c,m_e 中質因數的數論性質，這是一大突破！推導方程式有解時，m_c,m_e 中質因數為特定的質數參見**定理 14** 中表 1。注意**定理 14** 的逆定理是不成立，已經有探討出一些反例，至於嚴謹證明仍需要突破。本作品針對 s 為黑格納數探討計數有心錐線上的格子點之個數，主因**黑格納數滿足唯一分解定理**，協助計數圓或橢圓上格子點的個數，推導出結果參見表 3。表 3 中一部份結果如 q_j 的數論性質及不影響計數格子點的個數的

嚴謹證明，等待抽絲剝解，值得繼續研究。當然也好奇 s 不為黑格納數，是否有如同表 3 中的結果呢？我們肯定是存在的，此時 s 為何值及 p_i,q_j 的數論性質為何呢？繼續深入探討。

表 3：計數圓或橢圓 $x^2+sy^2=2^\gamma\times3^\lambda\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$ 上格子點的個數

s	2^γ ($s=3,\gamma$ 為偶數)	3^λ	$p_i^{\alpha_i}$	$q_j^{\beta_j},\beta_j$ 為偶數
1	實數或純虛數或共軛複數(不影響計數)		$4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數或純虛數(不影響計數)
2	實數或純虛數(不影響計數)		$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數(不影響計數)
3	實數或一組共軛複數 $\left[6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)\right]$	實數或純虛數(不影響計數)	$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數(不影響計數)
7	實數或一組共軛複數 $\left[2(\gamma-1)\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)\right]$		$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數(不影響計數)
其餘	實數(不影響計數)	$s=11$：實數或一組共軛複數(影響計數)；其餘 s：實數(不影響計數)	$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數(不影響計數)

陸、參考文獻資料

[1] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[3] 游森棚 (2014)。互相牽制。**科學研習月刊-森棚教官的數學題**。**56** (12)，54。

[4] 游森棚 (2019)。圓上的格子點。**科學研習月刊**。**591**(3)。

[5] Courant, R. and Robbins, H. (1996).*Quadratic Residues. 2nd ed.* Oxford, England: Oxford University Press, pp. 38-40.

[6] Hendrik W. Lenstra Jr. (2008). Solving the Pell equation. MSRI Publications.

[7] Keith Kendig. (2005). *Conics*. Cambridge University Press.

[8] Underwood Dudley (2008).*Elementary Number Theory* . W. H. FREEMAN AND COMPANY New York.

【評語】050408

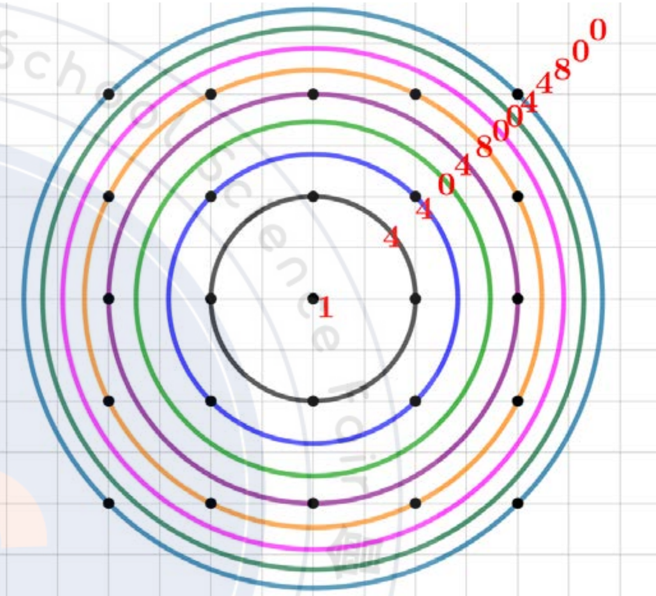
本作品的研究是探討有心錐線(包含圓，橢圓，雙曲線)上的格子點的問題。在此作品中，作者們利用了高階的線性遞迴數列以及數論中二次剩餘等知識。數學的深度是相當足夠的。作者使用了許多標準數論的方法與結果，可謂內容豐富。惟較少創新之處。

作品簡報

科別：數學科

組別：高級中等學校組

作品名稱：



$$x^2+y^2=0^2,1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots$$

錐尋格點—利用高階線性遞迴數列

解有心錐線上的格子點之探討

前言

研究動機

探討有心錐線上格子點問題

- 解一道數論問題，得到生成下一組解的遞迴關係，由生成遞迴關係建構有心錐線方程式及計數格子點的個數。
- 橢圓上的格子點問題若用生成遞迴關係來探討，判斷何種質因數有難度，利用二次剩餘及歐拉-費馬定理來證明。

研究問題

1. 如何利用線性遞迴數列解一道數論問題呢？
2. 如何建構有心錐線方程式呢？
3. 有心錐線方程式有解時，有何數論性質呢？
4. 如何計數格子點的個數呢？

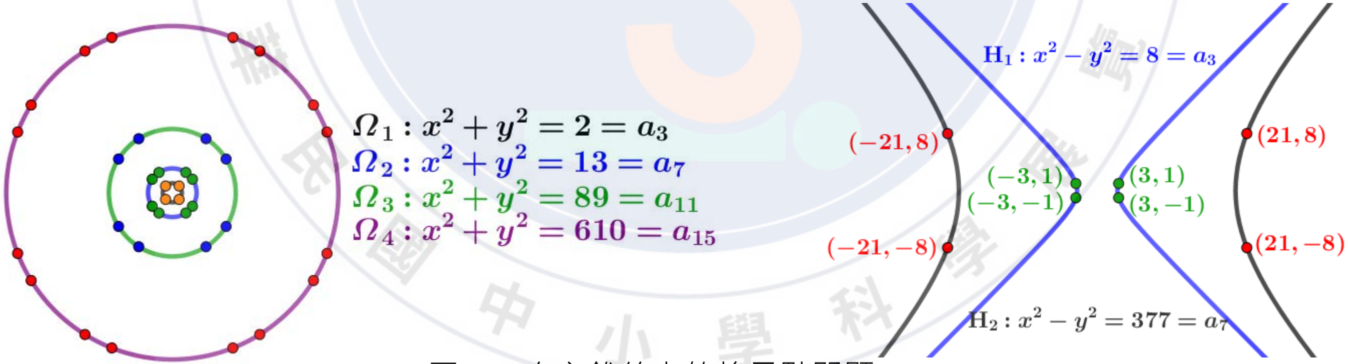


圖 1：有心錐線上的格子點問題

名詞定義

科學研習月刊-森棚教官的數學題的一道數論問題：

「你可以找到多少組正整數 (x, y)，讓 x^2-5 是 y 的倍數，y^2-5 是 x 的倍數？」

$$y \mid x^2-\ell,\ x \mid y^2-\ell \qquad (1)$$

盧卡斯數列：$a_0=2, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, \forall n \ge 2$ 中相鄰奇數項均滿足其解 $(x,y)=(a_{2n-1},a_{2n+1})$。

$$\begin{cases} 4^2-5=11=11\times 1 \\ 11^2-5=116=4\times 29 \end{cases} \Leftrightarrow a_{2n+1}^2-5=a_{2n-1}\times a_{2n+3}$$

推廣 k 階線性遞迴數列

$$a_{2n+1}^2-\ell=a_{2n-1}\times a_{2n+3} \qquad (2)$$

ℓ 為固定常數

(2)式是生成下一組解的遞迴關係，簡稱**生成遞迴關係**。

定義 1 (k 階整係數齊次線性遞迴數列)

給定一數列 $\{a_n\}$，若存在 $c_1, c_2, \ldots, c_k \in Z$、$c_k \ne 0$ 且滿足兩條件

(i) **初始條件**：$a_0=0, a_1=1, a_i=\gamma_i$，其中 $i=2,3,4,\cdots,k-1$ 且 $\gamma_i \in Z$。

(ii)**遞迴關係**：$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+c_3a_{n-3}+\cdots+c_ka_{n-k},\ n \ge k$

則此數列 $\{a_n\}$ 為 k 階整係數齊次線性遞迴數列，簡稱 k 階線性遞迴數列。

定義 2 (同心有心錐線上的格子點)

在坐標平面上，x, y坐標均為整數的點稱為**格子點** (lattice point)。 m_c, m_h, m_e與 n 有關

圓 $\Omega_n : x^2 + y^2 = m_c$ **雙曲線** $\mathrm{H}_n : x^2 - sy^2 = m_h$ **橢圓** $\mathrm{E}_n : x^2 + sy^2 = m_e$

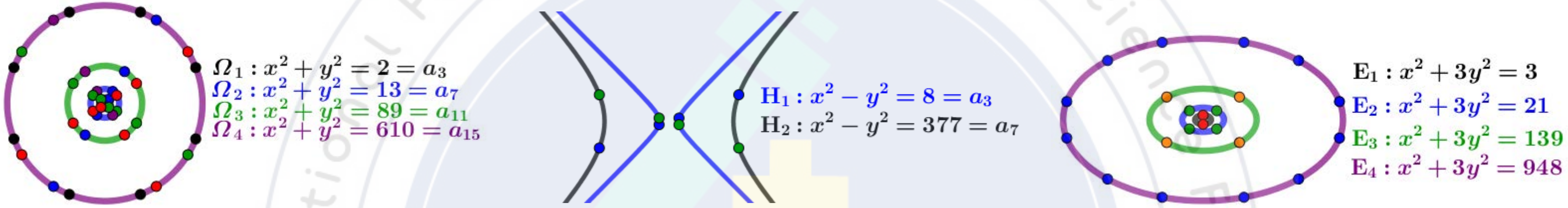


圖 2：同心有心錐線上的格子點

研究架構及研究方法

解數論問題 → **k 階線性遞迴數列**

- 一階
- 二階
- $k \geq 3$

→

- **奇數數列**
- **偶數數列**

- **生成下一組解**
- **生成遞迴關係**

建構錐線方程式

利用高階線性遞迴數列性質推導

- 建構有心錐線方程式
- 類費馬平方和定理(m_c, m_h, m_e 性質)
- 錐線上特定格子點的軌跡方程式
- 計數格子點個數

利用二次剩餘及歐拉-費馬定理推導

- 探討圓與橢圓方程式 $x^2 + sy^2 = m_c, m_e$ 有解必要條件，其中 s 為黑格納數
- 類費馬平方和定理(m_c, m_e 數論性質)
- 計數格子點個數

探討解(1)式及(2)式的生成下一組解

解數論問題　k 階線性遞迴數列

定理 1 (解(1)式及(2)式：生成條件及生成下一組解性質)

- 設 $\gcd(x,y)=d$，則 d 為所有 ℓ 的因數。
- 當 $y=c_1x$ 且 $\ell=0$ 時，
- 當 $\gcd(x,y)=1$ 且 $\ell\neq 0$ 時，

可由 (x,y) 生成下一組解為 $\left(y,\dfrac{y^2-\ell}{x}\right)$。

→ 包含所有情形的解

→ 線性遞迴數列的解

生成遞迴關係　$k=1$：$a_n^2-\ell=a_{n-1}\times a_{n+1}$ **(3)**　$k\neq 1$：

$\{o_n\}$：奇數數列　$o_n^2-\ell_{odd}=o_{n-1}\times o_{n+1}$

$\{e_n\}$：偶數數列　$e_n^2-\ell_{even}=e_{n-1}\times e_{n+1}$　**(4)**

定理 2 (一階線性遞迴數列中相鄰項生成下一組解)

- (a_{i-1},a_i) 生成下一組解 (a_i,a_{i+1}) 且 $\ell=0$。

定理 3 ($k\neq 1$ 階：奇偶數列相鄰項生成下一組解)

- 若 $c_2=\pm 1$，則 $\gcd(o_n,o_{n+1})=\gcd(e_n,e_{n+1})=1$。
- 僅有二階轉換成 k 階滿足互質性質。
- **奇數數列**：當 $c_2=1$ 時，$\ell_{odd}=-c_1^2$。
  當 $c_2=-1$時，$\ell_{odd}=c_1^2$。
- **偶數數列**：當 $c_2=\pm 1$時，$\ell_{even}=c_1^2$。

例如：

費氏數列　二階可轉換成三階

$o_n=3o_{n-1}-o_{n-2}\rightarrow o_n=2o_{n-1}+3o_{n-2}-o_{n-3}$

$e_n=3e_{n-1}-e_{n-2}\rightarrow e_n=2e_{n-1}+3e_{n-2}-e_{n-3}$

探討圓上的格子點問題

生成遞迴關係 ＞ 建構圓方程式 ＞ 計數格子點的個數

生成遞迴關係

$k=1$：$a_{n+1}^2+a_n^2=\underbrace{a_n\times a_{n+2}+a_{n-1}\times a_{n+1}}_{m_c}$ (5)

$k\neq 1$：$o_n^2+e_n^2=\underbrace{o_{n-1}\times o_{n+1}+e_{n-1}\times e_{n+1}}_{m_c}$ (6)

一階線性遞迴數列	二階線性遞迴數列($c_2=1$)
定理 4 •圓 $\Omega_n:x^2+y^2=m_c$，其中 $m_c=c_1^{2n-2}(c_1^2+1)$。 •至少包含八個格子點 $(\pm a_n,\pm a_{n+1})$及 $(\pm a_{n+1},\pm a_n)$。 •當 m_c 存在 $4\omega+3$ 型的質因數時，則 **質因數冪次方為偶數**。	**定理 5** •圓 $\Omega_n:x^2+y^2=m_c$，其中 $m_c=a_{4n-1}$。 •至少包含八個格子點 $(\pm o_n,\pm e_n)$及 $(\pm e_n,\pm o_n)$。 •若 $p\vert a_{4n-1}$，則 $\Omega_n:x^2+y^2=a_{4n-1}$ 有解的充要條件為 $p=2$ 或 $p=4\omega+1$型的質因數。

定理 6 (計數圓上格子點的個數)

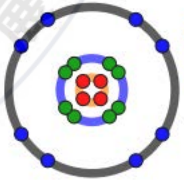
• $k=1$：$m_c=2^\gamma\times\prod_{i=1}^{u}\underset{p_i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)}{\underset{\uparrow}{p_i^{\alpha_i}}}\times\prod_{j=1}^{v}\underset{q_j\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)}{\underset{\uparrow}{q_j^{\beta_j}}}$，則 $N(m_c)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

• $k\neq 1$：$m_c=a_{4n-1}=2^\gamma\times\prod_{i=1}^{u}\underset{p_i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)}{\underset{\uparrow}{p_i^{\alpha_i}}}$

由預備定理 1證明

$N(m)=4[N_1(m)-N_3(m)]$

費氏數列



$\Omega_1:x^2+y^2=2=a_3$

$\Omega_2:x^2+y^2=13=a_7$

$\Omega_3:x^2+y^2=89=a_{11}$

圖 3：同心圓上的格子點

探討雙曲線上的格子點問題

生成遞迴關係　建構雙曲線方程式　計數格子點的個數

生成遞迴關係 $k=1: a_{n+1}^2 - s a_n^2 = \underbrace{a_n \times a_{n+2} - s a_{n-1} \times a_{n+1}}_{m_h}$ **(7)**　$k \neq 1: e_n^2 - o_n^2 = \underbrace{e_{n-1} \times e_{n+1} - s o_{n-1} \times o_{n+1}}_{m_h}$ **(8)**

一階線性遞迴數列	二階線性遞迴數列($c_2=-1$)
定理 7 •雙曲線 $H_n: x^2 - sy^2 = m_h$，其中 $m_h = c_1^{2n-2}(c_1^2 - s)$。 •至少包含四個格子點 $(\pm a_{n+1}, \pm a_n)$。	**定理 8**　取 $s=1$ •雙曲線 $H_n: x^2 - y^2 = m_h$，其中 $m_h = a_{4n-1}$。 •至少包含四個格子點 $(\pm e_n, \pm o_n)$。 • $a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = a_{4n-1}$

定理 9 (計數雙曲線上格子點的個數)

•若 s 為完全平方數時，雙曲線上**有限個格子點**。

•若 s 不為完全平方數時，雙曲線上**有無限多個格子點**。

佩爾方程式

- $x^2 - y^2 = 8$：格子點 $(\pm 3, \pm 1)$
- $x^2 - 2y^2 = 1$：格子點 (x, y) 滿足 $x + y\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$

$(3,2) \to (17,12) \to (99,70)$

數列 $\{a_n\}: a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

$a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2 = a_{4n-1}$

$a_4^2 - a_3^2 = a_7 \Leftrightarrow 21^2 - 8^2 = 377$

$a_6^2 - a_5^2 = a_{11} \Leftrightarrow 144^2 - 55^2 = 17711$

探討圓及雙曲線上特定格子點的軌跡方程式

定理 10 (圓上的特定格子點之軌跡方程式)

■過 (o_n,e_n) 與 $(-o_n,-e_n)$：雙曲線 $x^2+c_1xy-y^2=1$。

■過 $(o_n,-e_n)$與$(-o_n,e_n)$：雙曲線 $x^2-c_1xy-y^2=1$。

■過 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$：雙曲線 $x^2-c_1xy-y^2=-1$。

■過 $(e_n,-o_n)$與$(-e_n,o_n)$：雙曲線 $x^2+c_1xy-y^2=-1$。

例外：費氏數列

$(\pm1,\pm1)$

$n=1, x^2+y^2=1$

定理 11 (雙曲線上的特定格子點之軌跡方程式)

■ $c_1=-2, c_2=-1$：過 $(\pm e_n,\pm o_n)$：兩組兩相交直線 $x^4-2x^2y^2+y^4-2x^2-2y^2+1=0$。

■ $|c_1|\ge 3$：過 (e_n,o_n) 與 $(-e_n,-o_n)$：雙曲線 $x^2-c_1xy+y^2=1$。

■ $|c_1|\ge 3$：過 $(e_n,-o_n)$與$(-e_n,o_n)$：雙曲線 $x^2+c_1xy+y^2=1$。

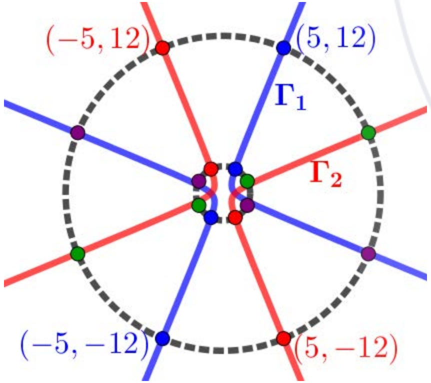


圖 4：圓上的特定格子點之軌跡方程式

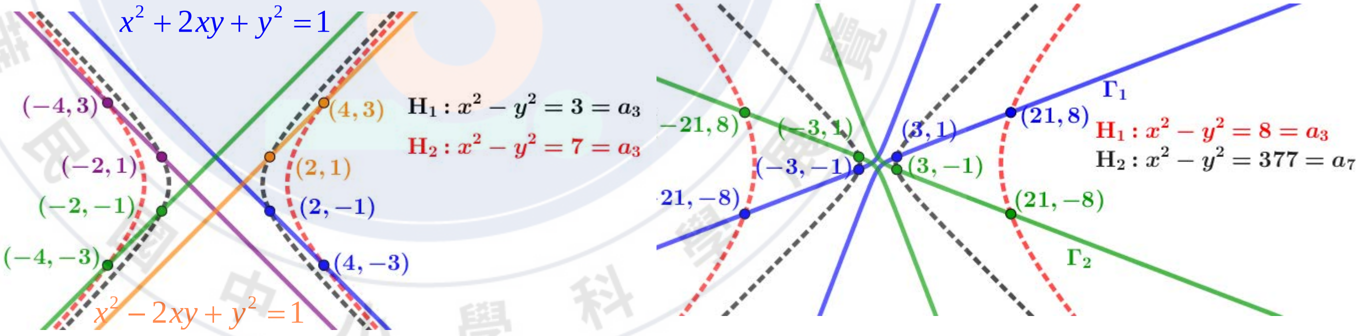


圖 5：雙曲線上的特定格子點之軌跡方程式

探討圓及橢圓上的格子點問題

二次剩餘 → 圓及橢圓方程式有解 → 計數格子點個數

定義 3 (二次剩餘) •設 x, p 為非負整數，若 $x^2 \equiv u \pmod{p}$ 有解，則稱 u **為模 p 的二次剩餘**。

定義 4 (代數整數及黑格納數)

- α 為存在整係數的領導係數為1的多項式之根，則稱 α 為**代數整數**，所有代數整數構成環記作A。
- **黑格納數**為非平方數的正整數，考慮虛二次域 $Q(\sqrt{-d})$ 的整數環為**唯一分解整環** (本文稱為**唯一分解定理**)，其中整數環是指 $Q(\sqrt{-d}) \cap \mathrm{A}$，此數包含 $1,2,3,7,11,19,43,67,163$。

定理 12 (圓或橢圓方程式有解必要條件)

$$x^2+1y^2=\prod_{i=1}^{u} p_i^{\alpha_i}, \qquad x^2+sy^2=\prod_{i=1}^{u} p_i^{\alpha_i}$$

- $x^2+\ 1y^2=m_c$ 有解：$p_i \equiv 1 \pmod{4}$。
- $x^2+\ 2y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 1,3 \pmod{8}$。
- $x^2+\ 3y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 1 \pmod{6}$。
- $x^2+\ 7y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 1,7,9,11,15,23,25 \pmod{28}$。
- $x^2+11y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 1,3,5,9,15 \pmod{22}$。
- $x^2+19y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 1,5,7,9,11,17,23,25,35 \pmod{38}$。
- $x^2+43y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 9,11,13,15,17,21,23,25,31,41,47,53,57,59,67,79,83,81 \pmod{86}$。
- $x^2+67y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 13,15,17,23,29,37,47,59,71,73,83,89,103,127,131,149 \pmod{134}$。
- $x^2+163y^2=m_e$ 有解：$p_i \equiv 41,43,47,53,71,83,97,113,131,151,167,173,179,197,251,281,307 \pmod{326}$。

勒讓德符號 $\left(\dfrac{u}{p}\right)=\begin{cases} 1, & \text{若}u\text{是模 }p\text{的二次剩餘} \\ -1, & \text{若}u\text{不是模 }p\text{的二次剩餘} \end{cases}$

二次剩餘的勒讓德符號判別法

- (歐拉準則) $\left(\dfrac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv p \pmod{4}, \left(\dfrac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$
- (二次互反律) $\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$

探討圓及橢圓上的格子點問題 $(s=1,2,3)$

二次剩餘 → 圓及橢圓方程式有解 → 計數格子點個數

定理 13 (計數橢圓上格子點的個數)

•設 $\Omega:\ x^2+y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u} \underset{\substack{\uparrow\\ p_i\equiv 1 \pmod 4}}{p_i^{\alpha_i}} \times\prod_{j=1}^{v} \underset{\substack{\uparrow\\ q_j\equiv 3 \pmod 4}}{q_j^{\beta_j}}$，則 $N(m_c)=4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

•設 $E:\ x^2+3y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u} \underset{\substack{\uparrow\\ p_i\equiv 1 \pmod 6}}{p_i^{\alpha_i}} \times\prod_{j=1}^{v} \underset{\substack{\uparrow\\ q_j\equiv 5 \pmod 6}}{q_j^{\beta_j}}$，若 $\gamma=0$，則 $N(m_e)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。若 $\gamma\neq 0$，則 $N(m_e)=6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

γ,β_j 偶數

•設 $E:\ x^2+2y^2=2^{\gamma}\times\prod_{i=1}^{u} \underset{\substack{\uparrow\\ p_i\equiv 1 \pmod 8\\ p_i\equiv 3 \pmod 8}}{p_i^{\alpha_i}} \times\prod_{j=1}^{v} \underset{\substack{\uparrow\\ q_j\equiv 5 \pmod 8\\ q_j\equiv 7 \pmod 8}}{q_j^{\beta_j}}$，則 $N(m_e)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

β_j 偶數

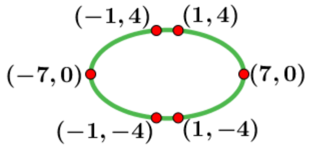


圖 6：橢圓上的格子點

複數平面的幾何意義來證明

橢圓 $E:\ x^2+3y^2=7^2$　唯一分解定理

共軛複數

$$7=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$$

$\times 1,-1$

複數對應格子點

$$7^2=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$$

$$=\left[(2+\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\right]\left[(2-\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)\right] \text{ 或 } \left[(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\right]\left[(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)\right]$$

$$=\left(1+4\sqrt{3}i\right)\left(1-4\sqrt{3}i\right)\to(1,4),(1,-4) \qquad \text{或} \qquad \left(7+0\cdot\sqrt{3}i\right)\left(7-0\cdot\sqrt{3}i\right)\to(7,0)$$

$(1,4)$　$(\pm 1,\pm 4)$
$(1,-4)$　$(\pm 7,0)$
$(7,0)$

共有 6 個

故三個($2+1$)，複數對應橢圓上的格子點為 $(1,4),(1,-4),(7,0)$

計數圓及橢圓上格子點個數(s為黑格納數)

$$x^2+y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j},\quad x^2+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{黑格納數}}}{s}y^2=2^{\gamma}\times 3^{\lambda}\times\prod_{i=1}^{u}p_i^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{v}q_j^{\beta_j}$$

m_c m_e

□ 圓及橢圓上格子點的個數

s	2^{γ} ($s=3,\gamma$ 偶數)	3^{λ}	$p_i^{\alpha_i}$	$q_j^{\beta_j},\beta_j$ 偶數
1	實數或純虛數或共軛複數 (不影響計數格子點的個數)		$4\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數或純虛數 (不影響計數)
2	實數或純虛數 (不影響計數格子點的個數)		$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數 (不影響計數)
3	實數或一組共軛複數 (影響計數格子點的個數)	實數或純虛數 (不影響計數格子點的個數)	$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 或 $6\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	實數 (不影響計數)

類推

定理 14 (計數橢圓上格子點的個數)

$$x^2+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{黑格納數}}}{s}y^2=\prod_{i=1}^{u}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{特定質數}}}{p_i^{\alpha_i}}$$

橢圓上格子點的個數為 $N(m_e)=2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$。

✓ 計數格子點的個數有三種：

(i) 平凡解：$(t_1,0)$ 或 $(0,t_2)$

(ii)格子點的個數為 $2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$

(iii) $x^2+sy^2=p$ 無正整數解如 $x^2+11y^2=23$

但 $x^2+sy^2=p^{\alpha}$ $(\alpha\neq 1)$ 有正整數解

定理 12 的逆定理不成立

結論與未來展望

✓利用高階線性遞迴數列解數論問題，得到生成遞迴關係，進而建構**有心錐線方程式-必存在格子點**。

✓**類費馬平方和定理**：

$$x^2+y^2=p \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=c_1^{2n-2}(c_1^2+1) \text{ 或 } x^2-sy^2=c_1^{2n-2}(c_1^2-s) \text{ 或 } x^2+sy^2=c_1^{2n-2}(c_1^2+s) \\ x^2+y^2=a_{4n-1} \text{ 或 } x^2-y^2=a_{4n-1} \end{array}$$

✓**特定格子點的軌跡方程式**：兩組兩相交直線及雙曲線。

✓有心錐線方程式$x^2+y^2=m_c, x^2+sy^2=m_e$有解必要條件為$m_c, m_e$中質因數為**特定質因數型**。

✓探討 s 為黑格納數時有心錐線上格子點的個數，底下猜測結果，未來要進一步探討。

s	2^{γ} $(s=3,\gamma$ 偶數$)$	3^{λ}	$p_i^{\alpha_i}$	$q_j^{\beta_j}, \beta_j$ 偶數
7	**實數或一組共軛複數(影響計數)**	**實數** (不影響計數)	$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ 或 $2(\gamma-1)\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$	**實數** (不影響計數)
其餘	**實數** (不影響計數)	$s=11$ **實數或一組共軛複數(影響計數)** $s=19,43,67,163$ **實數** (不影響計數)	$2\prod_{i=1}^{u}(\alpha_i+1)$ (還有其他情形)	**實數** (不影響計數)

參考文獻資料

[1] 游森棚 (2014)。互相牽制。**科學研習月刊-森棚教官的數學題**。**56** (12)，54。

[2] 游森棚 (2019)。圓上的格子點。**科學研習月刊**。第591期。

[3] Hardy, G. H. and Wright, E. M (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.* Oxford, England: Clarendon Press, pp. 67-68.

[4] Hendrik W. Lenstra, JR (2008). Solving the Pell equation. MSRI Publications.