中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050404

多邊形與西姆松線的研究與深入探討

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 陳雲淇 高二 李書帆 高二 黃威瑀	謝先皓

關鍵詞：多邊形、西姆松線、尖辦線

摘要

西姆松線是三角形外接圓上一點對三邊作垂足，三垂足共線所得之線，而我們成功將其推廣到多邊形，發現了當圓上一點 P 對圓內接 n 邊形做了(n-2)次垂足後，最後 n 點會共線，而我們將其定義為多邊形西姆松線。我們結合了純幾何和歸納法證明其正確性，此方法也是我們所想出的特殊證法，我們還使用解析幾何的手法求出該線在坐標平面上的通式。在已知三角形西姆松線的軌跡會形成三尖瓣線的前提下，我們利用解析幾何的方式證出了三角形之九點圓為該三尖瓣線的內切圓，並成功找出三尖瓣線方程式通式，而我們也發現 n 邊形西姆松線的軌跡亦會形成 n 尖瓣線，但會因多邊形形狀的不同而產生扭曲。

壹、研究動機

一開始接觸到西姆松定理是在學校的讀書會中，當時的我們知道了簡單的三角形和一點能構成一個美妙的定理，於是我們試想：將此方法套用到圓內接多邊形會有甚麼結果？會和三角有類似的性質嗎？在查詢許多資料後發現尚未有人討論過此問題，而之前的報告只有得出三角形西姆松線在複數平面上的方程式通式，卻沒有給出座標平面上的方程式，這也讓我們覺得疑惑，抱持著好奇心與熱情的我們便開始此次研究。

貳、研究目的

一、探討圓內接多邊形做多次垂足所得圖形之規律

二、探討多邊形西姆松線於坐標平面上之方程式通式

三、探討一動點 P 在圓上移動，其對三邊作垂足形成所有西姆松線之軌跡與尖瓣線的關聯。

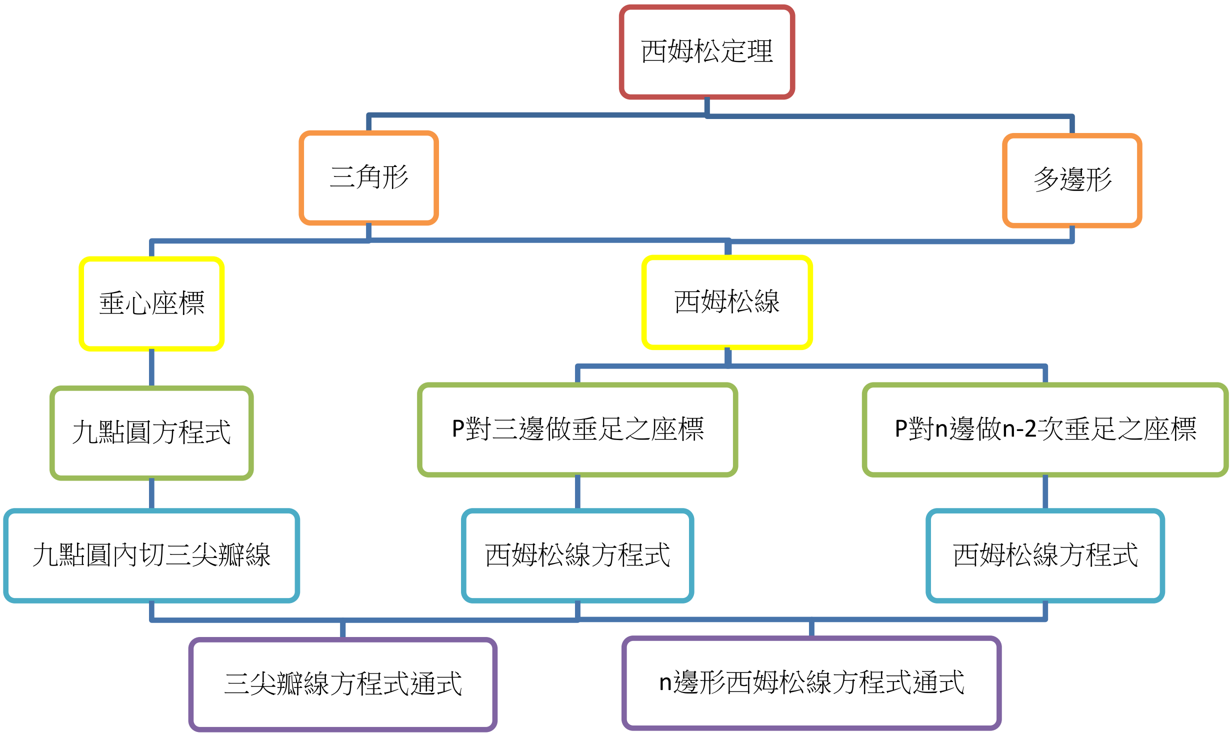
四、研究九點圓與三尖瓣線之間的關係

參、研究設備及器材

紙、筆、黑板、白板、筆記型電腦、geogebra 動態繪圖軟體、文書處理軟體 word2007、Latex 文件編輯程式

肆、研究過程與方法

一、 研究圖架構



二、文獻探討

(一) 1799 年，蘇格蘭數學家 William Wallace(1768-1843)首先提出關於西姆松線的概念，即一三角形外接圓上一點 P 對其三邊做垂足，此三垂足會共線(如圖 1)。此定理以另一位蘇格蘭數學家 Robert Simson(1687-1768)命名。

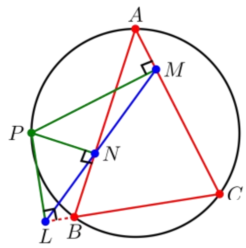


圖 1

(二) 2012 年，俄羅斯數學家 Olga Radko 發表了” The Perpendicular Bisector Construction, the Isoptic point, and the Simson Line of a Quadrilateral” ，對四邊形的西姆松線做定義：

1. 給定任意四點(非共圓) A_1、B_1、C_1、D_1形成四邊形 Q1，對四邊作中垂線得 A_2、B_2、C_2、D_2 形成一個新四邊形 Q2(如圖 2)，以相同的方法可得四邊形 Q3(如圖 3)、Q4(如圖 4)…。

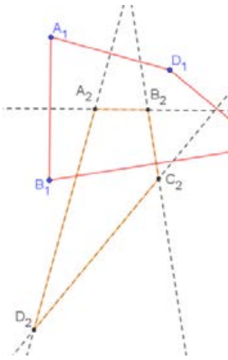


圖 2

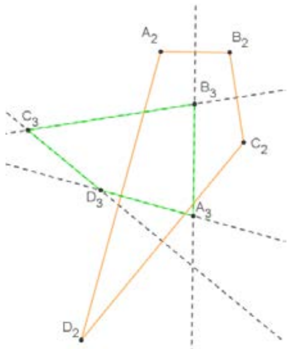


圖 3

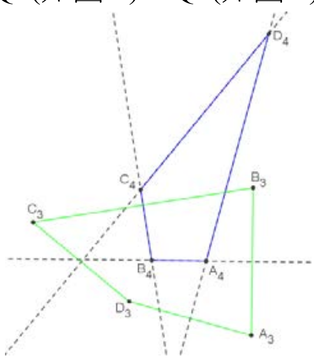


圖 4

2. 將(A_1,A_3)、(B_1,B_3)、(C_1,C_3)、(D_1,D_3)相連，此四線段會交於一點 W，(A_2,A_4)、(B_2,B_4)、(C_2,C_4)、(D_2,D_4)四線段同樣也交於 W 點(如圖 5)。

3. 以A_1、C_1、W做一圓，B_1、D_1、W做另一圓，兩圓交另一點於 S(如圖 6)

4. 以 S 對 Q1 四邊作垂足，此四點共線(如圖 7)。

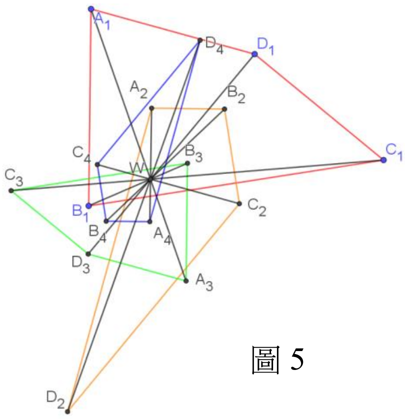


圖 5

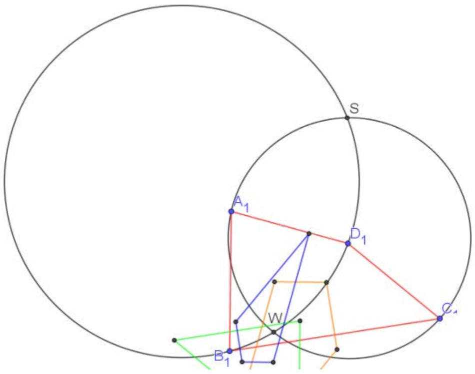


圖 6

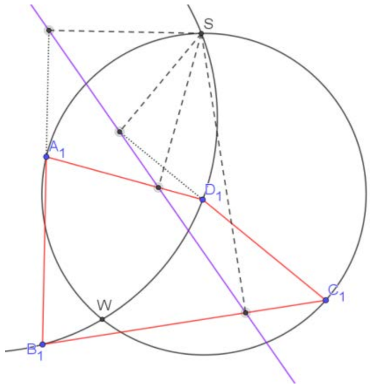


圖 7

(三) 2017 年，保加利亞數學家 Todor Zaharinov 提出了西姆松線在複數平面的方程式:

給定單位圓及圓上四點 A(a),B(b),C(c),P(p)，則 P 對 ΔABC 之西姆松線方程式為：

$$2abc\bar{z}-2pz+p^2+(a+b+c)p-(bc+ca+ab)-\frac{abc}{p}=0$$

三、預備定理

➢ **定理 1　　西姆松定理**

給定 ΔABC 及平面上一點 P。若 P 在此三角形的外接圓上，則 P 對三邊作的垂足會共線(如圖 8)，而此條線稱為西姆松線。而 P 在圓上移動一圈時，所有西姆松線所包絡出的區域為三尖瓣線，即三尖瓣線任一處的切線皆可對應到一條三角形的西姆松線(如圖 9)。

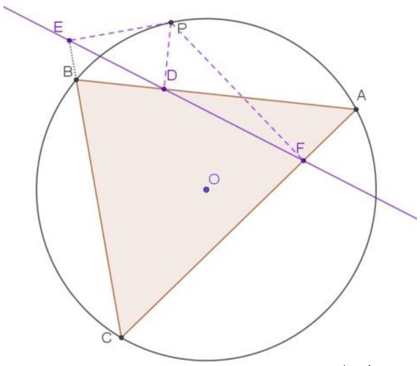


圖 8

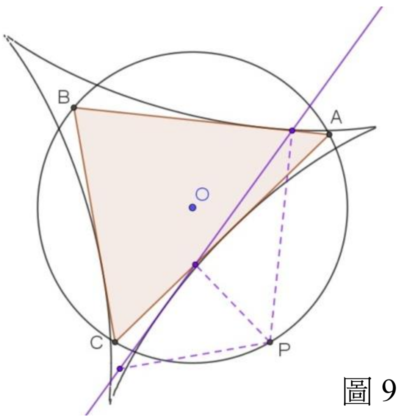


圖 9

➢ **定理 2　九點圓定理**

三角形的九點圓為通過該三角形各邊中點、三垂足、三頂點與垂心的中點共九個點的圓(如圖 10)，且九點圓圓心為三角形的外心與垂心的中點、半徑為外接圓半徑的一半。

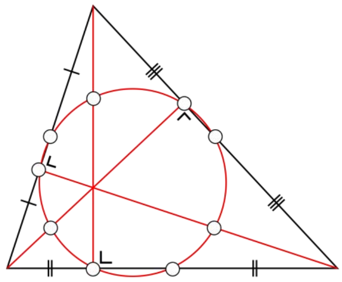


圖 10

若我們將三角形置於單位圓上，令三頂點座標 A(cosθ$_1$,sinθ$_1$),B(cosθ$_2$,sinθ$_2$),C(cosθ$_3$,sinθ$_3$)垂心座標 H、九點圓圓心 I，由垂心向量公式即九點圓定理我們可以得出垂心與九點圓圓心之座標：

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow H(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3,\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3)$$

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

$$\Rightarrow I(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})$$

➢ **定理 3　圓內螺線**

給定一大圓，若有另一個半徑為其 $\frac{1}{n+1}$ (n≥2)倍的小圓在其內部滾動，則小圓圓周上的一定點在滾動時劃出的軌跡就是一條內擺線（圓內螺線）。其參數方程式為：

$$\begin{cases} x=\cos\theta+\frac{1}{n}\cos n\theta \\ y=\sin\theta+\frac{1}{n}\sin n\theta \end{cases}$$

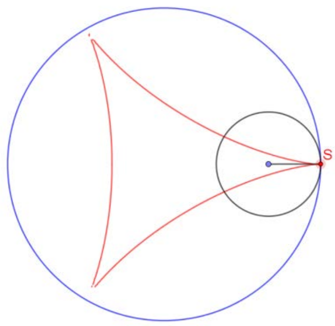


圖 11

➢ **定理 4　三尖瓣線&三尖瓣線方程式**

即 n=2 時圓內螺線所形成的內擺線。(如圖 11)

而其方程式為：

$$(x^2+y^2)^2+\frac{9}{2}(x^2+y^2)-\frac{27}{16}=4(x^3-3xy^2)$$

四、名詞解釋

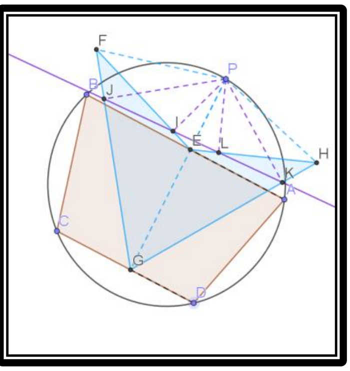
(一) 做 x 次垂足：給定圓內接 n 邊形(A$_1$、A$_2$、A$_3$、⋯、A$_n$) (n≥3)及圓上一點 P，則 P 對$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$作垂足依序得到 B$_1$、B$_2$、⋯、B$_n$ 並依照順序相連得到新 n 邊形，重複 x 次。

(二) n 邊形西姆松線：給定圓內接 n 邊形(n≥3)及圓上一點 P，則以 P 對 n 邊做 n-2 次垂足，此 n 個垂足相連所形成的線。

(三) 包絡區域：每條線所切出的封閉有限面積的圖形。

五、研究過程

定理 5.1. 一圓內接四邊形 ABCD，圓上一點 P。P 對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$做垂足得四邊形 EFGH，再對$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{EH}$做垂足 I、J、K、L，此四點共線。



〈證明 1〉

1.證明 I、J、L 共線：

∠PIJ=180°-∠PFJ(P、F、I、J 共圓)=180°-∠PFG(F、G、J 共線)

=180°-∠PCG(P、C、F、G 共圓)=180°-∠PCD(C、D、G 共線)

=∠PAD(P、A、C、D 共圓)

=180°-∠PAH(A、D、H 共線)=180°-∠PEH(P、A、E、H 共圓)

=180°-∠PEL(E、H、L 共線)=180°-∠PIL(P、E、I、L 共圓)

⇒∠PIJ+∠PIL=180°⇒ I、J、L 共線

2.證明 I、K、L 共線：

∠PLI=∠PEI(P、E、I、L 共圓)=∠PEF(E、F、I 共線)

=∠PBF(P、B、E、F 共圓)=180°-∠PBC(B、C、F 共線)

=∠PDC(P、B、C、D 共圓)

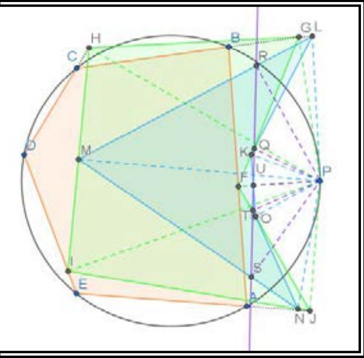
=∠PDG(C、D、G 共線)=∠PHG(P、D、G、H 共圓)

=∠PHK(G、H、K 共線)=180°-∠PLK(P、H、K、L 共圓)

⇒∠PLI+∠PLK=180°⇒ I、K、L 共線

綜合 1、2⇒I、J、K、L 共線

定理 5.2. 一圓內接五邊形 ABCDE，圓上一點 P。P 對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$做垂足得五邊形 FGHIJ，再對$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HI}$、$\overline{IJ}$、$\overline{FJ}$做垂足得五邊形 KLMNO，再對$\overline{KL}$、$\overline{LM}$、$\overline{MN}$、$\overline{NO}$、$\overline{KO}$做垂足得 Q、R、S、T、U ，此五點共線。



〈**證明 1**〉

1.證明 R、Q、U 共線：

∠PQR=180°-∠PLR(P、Q、L、R 共圓)=180°-∠PLM(L、R、M 共線)

=180°-∠PHM(P、L、H、M 共圓)=180°-∠PHI(H、M、I 共線)

=180°-∠PDI(P、H、D、I 共圓)=180°-∠PDE(D、I、E 共線)

=∠PAE(P、A、D、E 共圓)

=180°-∠PAJ(A、E、J 共線)=180°-∠PFJ(P、A、F、J 共圓)

=180°-∠PFO(F、J、O 共線)=180°-∠PKO(P、F、K、O 共圓)

=180°-∠PKU(K、O、U 共線)=180°-∠PQU(P、K、Q、U 共圓)

⇒∠PQR+∠PQU=180°⇒R、Q、U 共線

2.證明 Q、U、T 共線：

∠PUQ=∠PKQ(P、K、Q、U 共圓)=∠PKL(K、Q、L 共線)

=∠PGL(P、K、G、L 共圓)=180°-∠PGH(G、L、H 共線)

=∠PCH(P、G、C、H 共圓)=180°-∠PCD(C、H、D 共線)

=∠PED(P、C、D、E 共圓)

=∠PEI(D、I、E 共線)=∠PJI(P、I、E、J 共圓)

=∠PJN(I、N、J 共線)=180°-∠PON(P、N、J、O 共圓)

=∠POT(N、T、O 共線)=180°-∠PUT(P、T、O、U 共圓)

⇒∠PUQ+∠PUT=180°⇒Q、U、T 共線

3.證明 U、T、S 共線：

∠PTU=∠POU(P、T、O、U 共圓)=∠POK(K、O、U 共線)

=∠PFK(P、F、K、O 共圓)=∠PFG(F、K、G 共線)

=∠PBG(P、F、B、G 共圓)=180°-∠PBC(B、G、C 共線)

$=\angle PDC$(P、B、C、D 共圓)

$=\angle PDH$(C、H、D 共線)$=\angle PIH$(P、H、D、I 共圓)

$=\angle PIM$(H、M、I 共線)$=\angle PNM$(P、M、I、N 共圓)

$=\angle PNS$(M、S、N 共線)$=180°-\angle PTS$(P、S、N、T 共圓)

$\Rightarrow\angle PTU+\angle PTS=180°\Rightarrow$U、T、S 共線

綜合 1、2、3⇒Q、R、S、T、U 共線

但當我們推到 n 邊形時，卻遇到瓶頸，原因是雖可以不失一般性假設 P 的位置，但在推導過程我們發現角度會因點的位置不同而發生改變，進而影響推導過程(即無法確定任兩個角是相等或互補)，因此我們尋找了其他作法。

經過一番努力我們終於找出了一種使用三角形西姆松定理的證法：

〈定理 1.1.證明 2〉

1. 先定義點座標：

A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1分別為 P 對於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$作垂足。A_2、B_2、C_2、D_2分別為 P 對於$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1D_1}$、$\overline{D_1A_1}$的垂足。

2. 我們不失一般性的假設 P 在弧 AB 上，將圓內接四邊形 ABCD 每次取三點行成 ΔABC、ΔABD、ΔACD、ΔBCD(如圖 12)，由 P 點對這四個三角形做出四條西姆松線(如圖 13)分別為$(A_1B_1E_1)$、$(A_1F_1D_1)$、$(E_1C_1D_1)$、$(B_1C_1F_1)$，此四條直線所形成的包絡區域即為 P 對四邊形作一次垂足所得到的圖形。

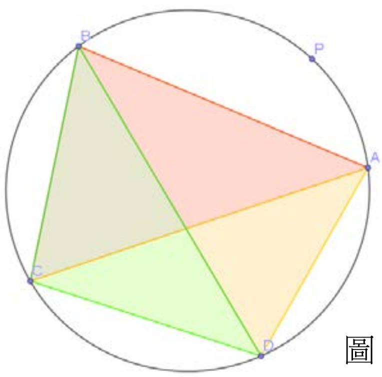


圖 12

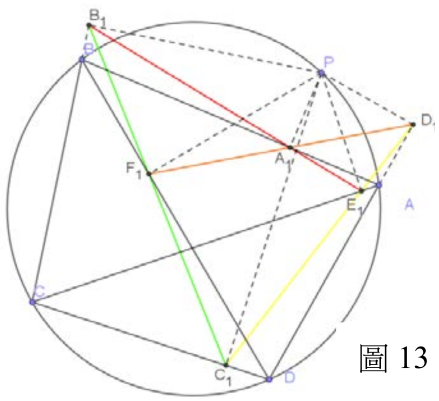


圖 13

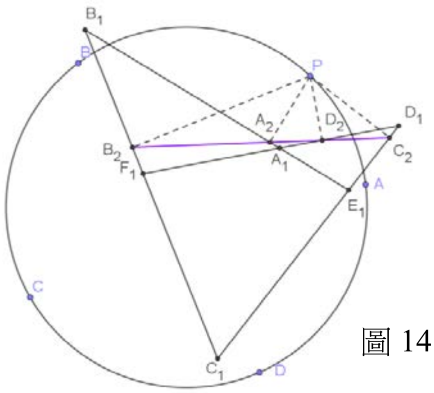


圖 14

3. 再由 P 點對這四條直線作垂足，得到A_2、B_2、C_2、D_2(如圖 14)。

4. A_2、B_2、C_2、D_2四點共線證明(如圖 15):

(1)證明 P、A_1、D_1、E_1、A 共圓：

PA_1垂直 AB 於A_1 （$\angle PA_1A$=90°)，PD_1垂直 AD 於D_1($\angle PD_1A$=90°)，PE_1垂直 AC 於E_1($\angle PE_1A$=90°)，因此 P、A_1、D_1、E_1、A 五點共圓且 PA 為直徑。

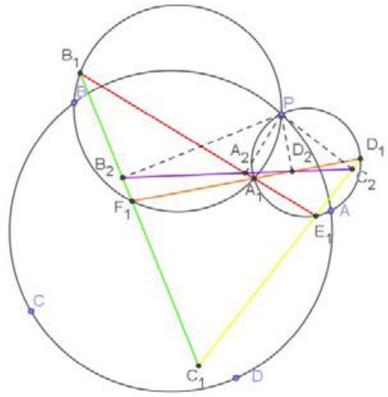


圖 15

(2)已知A_2、C_2、D_2為 P 對 $\Delta A_1D_1E_1$的垂足，又 P、A_1、D_1、E_1共圓，因此A_2、C_2、D_2共線於 P 對 $\Delta A_1D_1E_1$所作出的西姆松線。

(3)證明 P、A_1、B_1、F_1、B 共圓：

PA_1垂直 AB 於A_1($\angle PA_1B$=90°)，PB_1垂直 BC 於B_1($\angle PB_1B$=90°)，PF_1垂直 BD 於F_1($\angle PF_1B$=90°)，因此 P、A_1、B_1、F_1、B 五點共圓且 PB 為直徑。

(4)已知A_2、B_2、D_2為 P 對 $\Delta A_1B_1F_1$的垂足，又 P、A_1、B_1、F_1共圓，因此A_2、B_2、D_2共線於 P 對 $\Delta A_1B_1F_1$所作出的西姆松線。

故A_2、B_2、C_2、D_2四點共線，得證。

附註：事實上在四點A_2、B_2、C_2、D_2中任取三點都可以找出一個由三條三角形西姆松線所圍出的三角形使得該三點為 P 對於此三角形的垂足，再根據西姆松定理即可證明三點共線(如圖 16)。

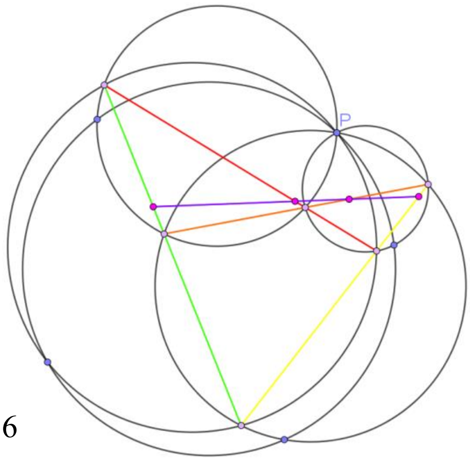


圖 16

〈定理 1.2.證明 2〉

1. 先定義點座標：

A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1、G_1、H_1、I_1、J_1分別為 P 對於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$、$\overline{AD}$、$\overline{CE}$、$\overline{BD}$、$\overline{AC}$、$\overline{BE}$做垂足。A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2、G_2、H_2、I_2、J_2分別為 P 對於$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1D_1}$、$\overline{D_1E_1}$、$\overline{A_1E_1}$、$\overline{C_1F_1}$、$\overline{F_1H_1}$、$\overline{B_1G_1}$、$\overline{E_1G_1}$、$\overline{D_1H_1}$作垂足。而A_3、B_3、C_3、D_3、E_3分別為 P 對於$\overline{A_2B_2}$、$\overline{B_2C_2}$、$\overline{C_2D_2}$、$\overline{D_2E_2}$、$\overline{A_2E_2}$作垂足。

2. 我們不失一般性的假設 P 在弧 AB 上，將圓內接五邊形 ABCDE 每次取四點形成五個四邊形 ABCD、ABCE、ABDE、ACDE、BCDE(如圖 17)，由 P 點對這五個四邊形做垂足得到五個鏢形，分別為$A_1B_1C_1F_1$、$A_1B_1G_1E_1$、$A_1H_1D_1E_1$、$I_1C_1D_1E_1$、$B_1C_1D_1J_1$ (如圖 18)。

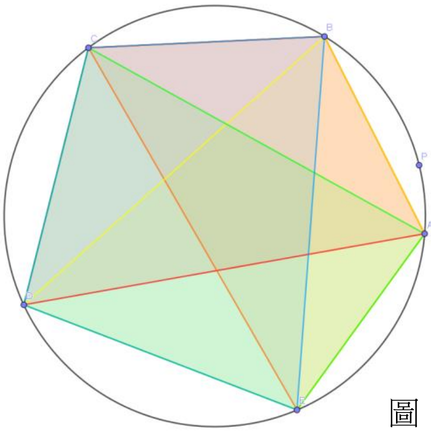


圖 17

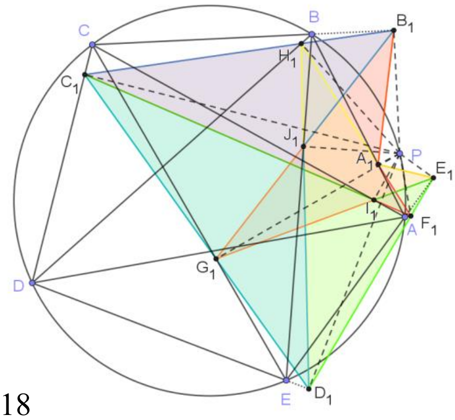


圖 18

3. 根據西姆松定理可得出十條三點共線，分別為$(A_1B_1I_1)$、$(B_1C_1H_1)$、$(C_1F_1I_1)$、$(A_1F_1H_1)$、$(B_1G_1J_1)$、$(E_1G_1I_1)$、$(A_1E_1J_1)$、$(D_1H_1J_1)$、$(D_1E_1F_1)$、$(C_1D_1G_1)$。

4. 接者對五個鏢形作垂足，會得到五條四邊形的西姆松線(如圖 19)。分別為$(A_2B_2G_2F_2)$、$(A_2H_2I_2E_2)$、$(G_2J_2D_2E_2)$、$(F_2C_2D_2I_2)$、$(H_2B_2C_2J_2)$，此五條直線所形成的包絡區域即為 P 對五邊形做兩次垂足所得到的圖形。

5. 再由 P 點對這五條直線做垂足，得到A_3、B_3、C_3、D_3、E_3 (如圖 20)。

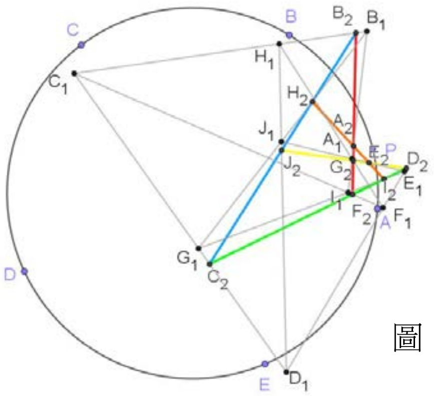


圖 19

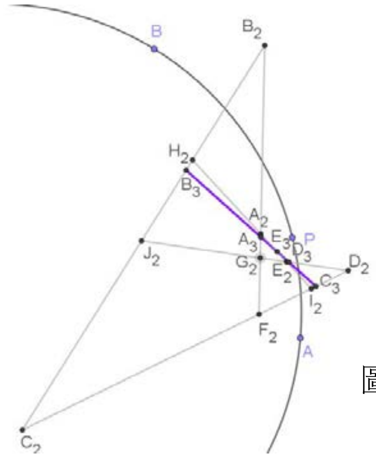


圖 20

6. A_3、B_3、C_3、D_3、E_3五點共線證明(如圖 21)：

(1)證明 P、A_2、B_2、H_2、B_1共圓：

PA_2垂直A_1B_1於A_2($\angle PA_2B_1$=90°)，PB_2垂直B_1C_1於B_2($\angle PB_2B_1$=90°)，PH_2垂直B_1G_1於H_2($\angle PH_2B_1$=90°)，因此 P、A_2、B_2、H_2、B_1五點共圓且 PB_1為直徑。

(2)已知A_3、B_3、E_3為 P 對 $\Delta A_2B_2H_2$的垂足，又 P、A_2、B_2、H_2共圓，因此A_3、B_3、E_3共線於 P 對 $\Delta A_2B_2F_2$所作出的西姆松線。

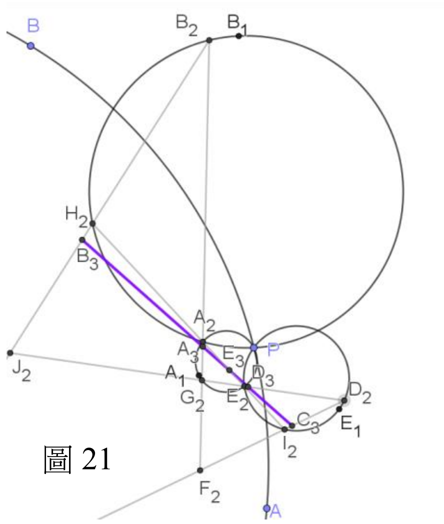


圖 21

(3)證明 P、A_2、E_2、G_2、A_1共圓：

PA_2垂直A_1B_1於A_2($\angle PA_2A_1=90°$)，PE_2垂直A_1E_1於E_2 ($\angle PE_2A_1=90°$)，PG_2垂直A_1F_1於G_2($\angle PG_2A_1=90°$)，因此 P、A_2、E_2、G_2、A_1五點共圓且 PA_1為直徑。

(4)已知A_3、D_3、E_3為 P 對 $\Delta A_2E_2G_2$的垂足，又 P、A_2、E_2、G_2共圓，

因此A_3、D_3、E_3共線於 P 對 $\Delta A_2E_2G_2$所作出的西姆松線。

(5)證明 P、D_2、E_2、I_2、E_1共圓：

PD_2垂直D_1E_1於D_2($\angle PD_2E_1=90°$)，PE_2垂直A_1E_1於E_2($\angle PE_2E_1=90°$)，

PI_2垂直E_1G_1於I_2($\angle PI_2E_1=90°$)，因此 P、D_2、E_2、I_2、E_1五點共圓且 PE_1為直徑。

(6)已知C_3、D_3、E_3為 P 對 $\Delta D_2E_2I_2$的垂足，又 P、D_2、E_2、I_2共圓，

因此C_3、D_3、E_3共線於 P 對 $\Delta D_2E_2I_2$所作出的西姆松線。

故A_3、B_3、C_3、D_3、E_3五點共線，得證。

附註：事實上在五點A_3、B_3、C_3、D_3、E_3中任取三點都可以找出一個由三條四邊形西姆松線所圍出的三角形使得該三點為 P 對於此三角形的垂足，再根據西姆松定理即可證明三點共線(如圖 22)。

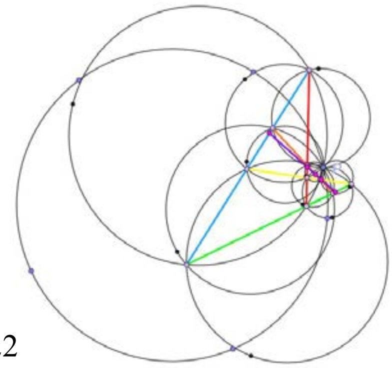


圖 22

定理 1.3. 一圓內接 n 邊形(n≥3)，對其做 n-2 次垂足後，此 n 點共線。

〈證明〉

(1)由前面的證明可知，「由 P 點對 n 邊形做 n-2 次垂足，可得到 n 點共線」在 n=4 以及 n=5 時皆成立。

(2)假設 n=k-1 也滿足此敘述。

(3)將圓內接 k 邊形每次取 k-1 點形成 k 個 k-1 邊形，由步驟(2)的假設可知 P 點對這 k 個 k-1 邊形作 k-3 次垂足得到 k 條 k-1 邊形的西姆松線。

(4)由 P 點對這 k 條西姆松線作垂足可得到 k 個點

(5)選取步驟(3)中 k 條 k-1 邊形西姆松線中的三條，這三條直線會圍出一個封閉的三角形 S，則 P 點對 S 的三邊作垂足，此三垂足為步驟(4)所得出的 k 個點中的其中三點，接著仿照前面

所述的圓內接四邊形與圓內接五邊形的證明方式可以證明出 P 點在 S 的外接圓上，即三垂足會共線，此直線為 P 點對 S 作出的西姆松線。

(6)我們共可以取出 C_3^k 個三角形，皆可證明由步驟(4)所得到的 k 個點中，任三點共線，故我們可以得到該 k 點共線。

(7)根據數學歸納法，故得證。

在證明共線的過程中，我們也想利用代數方法，即座標化，來證明其正確性，在搜尋網路文章後只找到了複數平面的西姆松方程式。在我們運用幾何證明的方式證完共線後，我們發現 n 邊形的西姆松線與 n-1 邊形的西姆松線是有所關聯的，因此我們猜測西姆松線方程式應該不會那麼複雜，或許能找出其中的規律，因此我們開始尋找座標平面上的西姆松線方程式。

引理 2.1. 單位圓上，令 $A(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$B(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,$C(\cos\theta_3,\sin\theta_3)$,$P(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$，D,E,F 分別為過 P 垂直交於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，則：

$$D\left(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}\right)$$
$$E\left(\frac{\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2}\right)$$
$$F\left(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2}\right)$$

〈證明〉

AB 直線方程式：

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\sin\theta_2-\sin\theta_1}{\cos\theta_2-\cos\theta_1}(x-\cos\theta_1)+\sin\theta_1 \\
&= \frac{\sin\theta_2-\sin\theta_1}{\cos\theta_2-\cos\theta_1}x+\frac{\sin\theta_1(\cos\theta_2-\cos\theta_1)-\cos\theta_1(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\cos\theta_2-\cos\theta_1} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{-2\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}x+\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{-2\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} \\
&= -\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}x+\frac{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}
\end{aligned}$$

過 P 垂直 AB 方程式：

$$\begin{aligned}
y &= \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}(x-\cos\theta_0)+\sin\theta_0 \\
&= \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}x-\frac{\cos\theta_0\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}+\frac{\sin\theta_0\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \\
&= \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}x-\frac{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_0)}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}
\end{aligned}$$

兩方程式解交點：

$$x=\frac{\frac{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_0)}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}}{\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_0)\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}{\frac{1}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}$$

$$=\frac{\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}+\frac{\cos\theta_2+\cos\theta_1}{2}$$

$$=\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}$$

$$y=\frac{\frac{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}-\frac{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_0)}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}{\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_0)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}{\frac{1}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\theta_2-\sin(-\theta_1)}{2}-\frac{\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)+\sin(-\theta_0)}{2}$$

$$=\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}$$

同理可以得到 E,F 座標

定理 2.1. 過三垂足 D,E,F 之方程式為：

$$\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

〈**證明**〉

先求出方程式斜率：

$$\frac{\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2}-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}}{\frac{\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2}-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2}}$$

$$=\frac{(\sin\theta_3+\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0))-(\sin\theta_1+\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_0))}{(\cos\theta_3+\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0))-(\cos\theta_1+\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_0))}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta_3+\theta_1+\theta_2-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_3+\theta_0-\theta_1-\theta_2}{2}-2\sin\frac{\theta_3+\theta_1+\theta_2-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_0-\theta_2-\theta_3}{2}}{2\cos\frac{\theta_3+\theta_1+\theta_2-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_3+\theta_0-\theta_1-\theta_2}{2}-2\cos\frac{\theta_3+\theta_1+\theta_2-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_0-\theta_2-\theta_3}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta_3+\theta_0-\theta_1-\theta_2}{2}(-2\sin\frac{\theta_0-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2})}{2\cos\frac{\theta_3+\theta_1+\theta_2-\theta_0}{2}(-2\sin\frac{\theta_0-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2})}$$

$$=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}$$

根據點斜式可以將方程式寫成：

$$y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2}=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2})$$

常數項化簡：

$$\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2}-\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2})$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2})-\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_3-\theta_0)}{2})}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_0-\theta_2-\theta_3}{2}+\sin\frac{\theta_3+\theta_0-\theta_1-\theta_2}{2}+\sin\frac{3\theta_0-\theta_1-\theta_2-\theta_3}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_2-\theta_0}{2}}{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=\frac{-(2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}+2\cos\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_0}{2})}{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}\quad\ldots(1)$$

令 $\alpha=\frac{\theta_1-\theta_0}{2},\beta=\frac{\theta_2-\theta_0}{2},\gamma=\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$:

$$(1)=-\frac{\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)+\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=-\frac{\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha+\cos\beta\sin\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}=-\frac{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}-\theta_0)-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=-\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_0-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\sin\theta_0}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}+\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=-\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_0+\sin\theta_0+\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

因此原點斜式可改寫成：

$$y=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}x-\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_0+\sin\theta_0+\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$\Rightarrow y-\sin\theta_0=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(x-\cos\theta_0)+\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(x-\cos\theta_0)-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}(y-\sin\theta_0)=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

我們做出三角形西姆松線的方程式，且形式非常整齊，而我們有了三角形西姆松線方程式後便可繼續推導四邊形、五邊形的西姆松線方程式，以下是其推導過程：

引理 2.2. 單位圓上，令 A($\cos\theta_1,\sin\theta_1$),B($\cos\theta_2,\sin\theta_2$),C($\cos\theta_3,\sin\theta_3$), D($\cos\theta_4,\sin\theta_4$), P($\cos\theta_0,\sin\theta_0$)，則四邊形 ABCD 之二次垂足座標為：

$$I(2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$
$$J(2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$
$$K(2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$
$$L(2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_4-\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_4-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$

〈證明〉

由引理 2.1.，運用相同手法我們可以得出四邊形 4 個一次垂足座標：

$$E(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)}{2})$$
$$F(\frac{\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_0-\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_0-\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_0)}{2})$$
$$G(\frac{\cos\theta_3+\cos\theta_4+\cos\theta_0-\cos(\theta_3+\theta_4-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_3+\sin\theta_4+\sin\theta_0-\sin(\theta_3+\theta_4-\theta_0)}{2})$$
$$H(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_4+\cos\theta_0-\cos(\theta_1+\theta_4-\theta_0)}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_4+\sin\theta_0-\sin(\theta_1+\theta_4-\theta_0)}{2})$$

由定理 1.1.證明二我們也可以知道 4 個一次垂足所形成的四邊形四邊分別為原四邊形 ABCD 任取 3 點形成三角形的 4 條西姆松線，因此我們可以得到 EF 直線方程式為：

$$\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

而過 P 垂直 EF 方程式：

$$\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=0$$

兩方程式解交點 I：

$$\frac{\sin^2(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})+\cos^2(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})}{\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})}(x-\cos\theta_0)=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

$$\Rightarrow x=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\cos\theta_0$$

$$\frac{\sin^2(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})+\cos^2(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})}{\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})}(x-\cos\theta_0)=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

$$\Rightarrow y=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\sin\theta_0$$

同理可得 J、K、L 座標。

定理 2.2. 四邊形西姆松線方程式為:

$$\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}$$

〈**證明**〉

四邊形西姆松線通過四邊形的二次垂足，由引理 2.2.求出的座標進行運算。

先化簡方程式之斜率：

$$\frac{(-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)-(-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)}{(2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}+\cos\theta_0)-(2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\cos\theta_0)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}-2\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}}{2\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}}$$

$$=\frac{(\sin\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3-2\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2})-(\sin\frac{\theta_2+\theta_3+2\theta_4-2\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2})}{(\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3+2\theta_4-2\theta_0}{2})-(\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3-2\theta_0}{2})}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3-2\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_2+\theta_3+2\theta_4-2\theta_0}{2}}{\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3-2\theta_0}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3+2\theta_4-2\theta_0}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}{-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}$$

$$=-\cot\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}$$

根據點斜式可以將方程式寫成：

$$y-(-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$

$$=-\cot\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}(x-(2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}+\cos\theta_0))$$

$$\Rightarrow\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)$$

$$=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}$$

$$-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}$$

常數項化簡：

$$
\begin{aligned}
&2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\\
&-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\\
=&-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\\
&(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})\\
=&-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}
\end{aligned}
$$

因此原點斜式可寫成:

$$\cos(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}$$

定理 2.3. 單位圓上，令 $A(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$B(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,$C(\cos\theta_3,\sin\theta_3)$,$D(\cos\theta_4,\sin\theta_4)$,$E(\cos\theta_5,\sin\theta_5)$,$P(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$，則五邊形西姆松線方程式為：

$$\sin(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_5-\theta_0}{2}$$

〈證明〉

由定理 1.2.證明 2 我們可以得出五邊形的二次垂足所形成的五邊形各邊皆為原五邊形 ABCDE 任取 4 點形成四邊形的 5 條四邊形西姆松線，因此五邊形的三次垂足座標為過 P 垂直五邊的方程式與四邊形西姆松線方程式的交點。令垂足座標 Z_1、Z_2(只需求兩點即可)：

$$\begin{cases}\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\\ \sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}+\cos\theta_0\\ y=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}+\sin\theta_0\end{cases}$$

$$Z_1(-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$

$$\begin{cases}\cos(\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)+\sin(\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\\ \sin(\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}+\cos\theta_0\\ y=-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}+\sin\theta_0\end{cases}$$

$$Z_2(-2\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_5-\theta_0}{2}\cos\tfrac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}+\cos\theta_0,-2\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_5-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}+\sin\theta_0)$$

而五邊形西姆松線即為通過 Z_1、Z_2 的方程式。

先化簡方程式之斜率：

$$\frac{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}}{2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}(\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-2\theta_0}{2})}{2\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}(\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2})}$$

$$=\frac{(\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}-\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-3\theta_0}{2})-(\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\theta_5-3\theta_0}{2})}{(\sin\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-3\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2})-(\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\theta_5-3\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_0}{2})}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\theta_5-3\theta_0}{2}-\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-3\theta_0}{2}}{\sin\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-3\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\theta_5-3\theta_0}{2}}=\frac{-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_1}{2}}{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_5}{2}}$$

$$=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}$$

根據點斜式可以將方程式寫成：

$$y+2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-\sin\theta_0$$

$$=\tan\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}(x+2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}-\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}(x-\cos\theta_0)-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}(y-\sin\theta_0)$$

$$=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}$$

$$-\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}$$

常數項化簡：

$$2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}$$

$$-\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}$$

$$=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}$$

$$(\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{3})$$

$$=-2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_5-\theta_0}{2}$$

因此原點斜式可改寫成：

$$\sin(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2})(x-\cos\theta_0)-\cos(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-3\theta_0}{2})(y-\sin\theta_0)=-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_5-\theta_0}{2}$$

證完了五邊形西姆松線方程式之後，我們發現三、四、五邊形西姆松方程式皆具有微妙的規律，因此我們開始試著尋找 n 邊形的西姆松線方程式通式。

定理 2.4. n 邊形西姆松線方程式(n≥3)為：

$$\cos(\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90n)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90n)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{n}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

〈**證明**〉

我們利用數學歸納法證明：

1.當 n=3 時：

$$\cos(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-270)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-270)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{3}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

$$\Rightarrow -\sin(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0)(x-\cos\theta_0)+\cos(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{3}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

$$\Rightarrow \sin(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0)(x-\cos\theta_0)-\cos(\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0)=2\prod_{i=1}^{3}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

成立。

2.設 n=k 時成立，即 k 邊形西姆松線方程式為：

$$\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

3.則 n=k+1 時：

(1) 由步驟 2.的 k 邊形西姆松線方程式我們可以求出第 k-1 次垂足之座標(只需求兩點即可)：

$$\begin{cases}\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\\ \sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(x-\cos\theta_0)-\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(y-\sin\theta_0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0\\ y=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0\end{cases}$$

$$Z_1(-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0,-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0)$$

$$\begin{cases}\cos(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\\ \sin(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(x-\cos\theta_0)-\cos(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)(y-\sin\theta_0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0\\ y=-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0\end{cases}$$

$$Z_2(-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0,-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0)$$

(2) 求出過 Z_1,Z_2 直線方程式：先求方程式之斜率：

$$\frac{(-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0)-(-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0)}{(-2\prod_{i=2}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0)-(-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0)}$$

$$=\frac{2\prod_{i=2}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})(\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)-\sin\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}\sin(\sum_{2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k))}{2\prod_{i=2}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})(\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)-\sin\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}\cos(\sum_{2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k))}$$

$$=\frac{(\cos(90k-\theta_0-\sum_{i=2}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2})-\cos(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k))-(\cos(90k-\theta_0-\sum_{i=2}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2})-\cos(\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k))}{(\sin(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin(90k-\theta_0-\sum_{i=2}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}))-(\sin(\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin(90k-\theta_0-\sum_{i=2}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}))}$$

$$=\frac{\cos(\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)-\cos(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)}{\sin(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)-\sin(\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)}$$

$$=\frac{-2\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\sin\frac{\theta_{k+1}-\theta_1}{2}}{2\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\sin\frac{\theta_1-\theta_{k+1}}{2}}=\tan(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)$$

$$=-\cot(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))$$

根據點斜式可將方程式改寫：

$$y-(-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin\theta_0)$$

$$=\cot(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))(x-(-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\cos\theta_0))$$

$$\Rightarrow\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))(y-\sin\theta_0)$$

$$=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))$$

$$-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))$$

再將常數項化簡：

$$-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))$$

$$-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))$$

$$=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

$$(\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))\cos(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k)+\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))\sin(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90k))$$

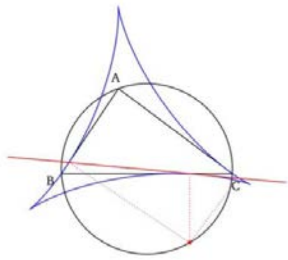
$$=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\cos(\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}-90)=-2\prod_{i=1}^{k}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})\sin\frac{\theta_{k+1}-\theta_0}{2}$$

$$=-2\prod_{i=1}^{k+1}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

因此方程式可寫成：

$$\cos(\sum_{i=1}^{k+1}\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{k+1}\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1))(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{k+1}\sin(\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2})$$

亦成立，故得證。



在證明 n 邊形西姆松線方程式的過程中，我們在查詢資料的過程中偶然看到一張圖顯示出此三尖瓣線任一點的切線恰好可對應到∆ABC 的一條西姆松線。在試著搜尋更多資料後，卻沒有找到更進一步的研究。因此我們心裡冒出兩個疑惑：「原本三尖瓣線方程式是將中心點架在(0,0)上，如果我們有西姆松線方程式，是不是就可以求廣義的三尖瓣線方程式？」、「n 尖瓣線的切線是否也會是 n 邊形西姆松線？」便繼續了我們的研究：

引理 3.1. 由所有西姆松線的包絡區域所形成之三尖瓣線，其內切圓為九點圓。

〈證明〉

從維基上找到的三尖瓣線方程式為：

$$(x^2+y^2)^2+\frac{9}{2}(x^2+y^2)-\frac{27}{16}=4(x^3-3xy^2)$$

我們利用 GGB 將所有西姆松線之集合所形成之三尖瓣線與方程式進行比較，發現當三角形的座標 A(cos0°,sin0°),B(cos120°,sin120°),C(cos240°,sin240°),方程式時會重疊。此時的九點圓圓心 I 座標為(0,0)，ABC 為正三角形，而三尖瓣線的三個尖點分別與正 x 軸夾 0°,120°,240°。在有了這些條件後我們便開始進行運算：

首先求出三尖瓣線方程式之斜率：

$$
\begin{aligned}
&F:(x^2+y^2)^2+\frac{9}{2}(x^2+y^2)-\frac{27}{16}=4(x^3-3xy^2)\\
\Rightarrow&\frac{\partial F}{\partial x}:2(x^2+y^2)(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+\frac{9}{2}(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=4(3x^2-3(y^2+2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}))\\
\Rightarrow&4x(x^2+y^2)+4y(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+9x+9y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=12x^2-12y^2-24xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
\Rightarrow&(4y(x^2+y^2)+9y+24xy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=12(x^2-y^2)-4x(x^2+y^2)-9x\\
\Rightarrow&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3(x^2-y^2)-x(x^2+y^2)-\frac{9}{4}x}{y(x^2+y^2)+\frac{9}{4}y+6xy}
\end{aligned}
$$

而三瓣中點與正 x 軸夾角分別為 60°,180°,300°分別求出其座標：

$$Z_1=(\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$$

$$Z_2=(\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 2\pi,\sin\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi)=(-\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}(\cos\pi,\sin\pi)$$

$$Z_3=(\cos\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{10\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{3})=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3})$$

將座標化成(rcosθ,rsinθ)後我們可以發現三瓣中點同時也位在九點圓上，我們令三尖瓣線切線方程式在 Z 點之方向向量為$\overrightarrow{L_Z}$ ，我們只需證明$\overrightarrow{IZ_1}\cdot\overrightarrow{L_{Z1}}=\overrightarrow{IZ_2}\cdot\overrightarrow{L_{Z2}}=\overrightarrow{LZ_3}\cdot\overrightarrow{L_{Z3}}=0$ 就可證明九點圓內切於三尖瓣線：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{IZ_1}\cdot\overrightarrow{L_{Z_1}}&=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{4}((\frac{1}{4})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2)+\frac{9}{4}(\frac{\sqrt{3}}{4})+6(\frac{1}{4})(\frac{\sqrt{3}}{4}),3((\frac{1}{4})^2-(\frac{\sqrt{3}}{4})^2)-\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2)-\frac{9}{4}(\frac{1}{4}))\\
&=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{9\sqrt{3}}{16}+\frac{6\sqrt{3}}{16},-\frac{6}{16}-\frac{1}{16}-\frac{9}{16})\\
&=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(\sqrt{3},-1)=0\\
\overrightarrow{IZ_2}\cdot\overrightarrow{L_{Z_2}}&=(-\frac{1}{2},0)\cdot(0((-\frac{1}{2})^2+0^2)+\frac{9}{4}(0)+6(-\frac{1}{2})(0),3((-\frac{1}{2})^2-0^2)-(-\frac{1}{2})((-\frac{1}{2})^2+0^2)-\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}))\\
&=(-\frac{1}{2},0)\cdot(0+0+0,\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{9}{8})\\
&=(-\frac{1}{2},0)\cdot(0,2)=0\\
\overrightarrow{IZ_3}\cdot\overrightarrow{L_{Z_3}}&=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{4}((\frac{1}{4})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{4})^2)+\frac{9}{4}(-\frac{\sqrt{3}}{4})+6(\frac{1}{4})(-\frac{\sqrt{3}}{4}),3((\frac{1}{4})^2-(-\frac{\sqrt{3}}{4})^2)-\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{4})^2)\\
&=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{9\sqrt{3}}{16}-\frac{6\sqrt{3}}{16},-\frac{6}{16}-\frac{1}{16}-\frac{9}{16})\\
&=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(-\sqrt{3},-1)=0
\end{aligned}
$$

引理 3.2. 單位圓上，令 $A(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$B(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,$C(\cos\theta_3,\sin\theta_3)$,$P(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$，則由所有西姆松線的包絡區域所形成之三尖瓣線與原三尖瓣線方程式之位移量與旋轉量為：

$$(\Delta x,\Delta y,\Delta\theta)=(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2},\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3})$$

〈證明〉

當西姆松線通過三尖瓣線之尖點時，同時也會通過九點圓圓心。將九點圓圓心座標帶入西姆松線方程式求此時的 θ_0：

$$\sin(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(\tfrac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}-\cos\theta_0)-\cos(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(\tfrac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}-\sin\theta_0)=2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

左式化簡：

$$\sin(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}-\cos\theta_0)-\cos(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2})(\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}-\sin\theta_0)$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3}(\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_i-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\sin\theta_i)-2(\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_0-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\cos\theta_0))$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_0-\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_0-\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_0-\theta_3}{2}-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2})$$

右式化簡：

$$2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

$$=(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2-2\theta_0}{2})\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

$$=\frac{1}{2}((\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_0-\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_0-\theta_1}{2})-(\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2}+\sin\frac{\theta_3+\theta_0-\theta_1-\theta_2}{2}))$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_0-\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_0-\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2})$$

左=右解 θ_0：

$$\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_0-\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_0-\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_0-\theta_3}{2}-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_0-\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_0-\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_5 3-\theta_0}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2})$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-3\theta_0}{2}=0,\pm\pi$$

$$\Rightarrow\theta_0=\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3},\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3\pm2\pi}{3}$$

三尖瓣線有三個尖點，所以解出來有三個 θ_0，但 3 個 θ_0 最後解出來的尖點座標皆相同(三點各差 120°)，所以我們只需帶入一個 θ_0 即可，考慮到$\pm\frac{2\pi}{3}$可能造成角度超過或小於 2π，因此我們取 $\theta_0=\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$ 代回原西姆松方程式：

$$\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(x-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3})-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(y-\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3})=-2\sin\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_3}{6}\sin\frac{2\theta_2-\theta_1-\theta_3}{6}\sin\frac{2\theta_3-\theta_1-\theta_2}{6}$$

左式常數項可消，右式常數項化簡：

$$
\begin{aligned}
&-2\sin\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_3}{6}\sin\frac{2\theta_2-\theta_1-\theta_3}{6}\sin\frac{2\theta_3-\theta_1-\theta_2}{6}\\
=&(\cos\frac{\theta_1+\theta_2-2\theta_3}{6}-\cos\frac{3\theta_1-3\theta_2}{6})\sin\frac{2\theta_3-\theta_1-\theta_2}{6}\\
=&\frac{1}{2}(\sin 0^\circ+\sin\frac{4\theta_3-2\theta_1-2\theta_2}{6})-(\sin\frac{2\theta_1-4\theta_2+2\theta_3}{6}+\sin\frac{-4\theta_1+2\theta_2+2\theta_3}{6})\\
=&\frac{1}{2}(\sin\frac{2\theta_3-\theta_1-\theta_2}{3}+\sin\frac{2\theta_2-\theta_1-\theta_3}{3}+\sin\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_3}{2})
\end{aligned}
$$

令 $\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}=\phi$ 則方程式可改寫為：

$$x\sin\phi-y\cos\phi=-\frac{1}{2}(\sin(\theta_1-\phi)+\sin(\theta_2-\phi)+\sin(\theta_3-\phi))$$

$$\Rightarrow x\sin\phi-y\cos\phi=-\frac{1}{2}(\sin\theta_1\cos\phi-\cos\theta_1\sin\phi+\sin\theta_2\cos\phi-\cos\theta_2\sin\phi+\sin\theta_3\cos\phi-\cos\theta_3\sin\phi)$$

$$\Rightarrow\sin\phi(x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2})-\cos\phi(y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})=0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2})-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})=0$$

接著與外接圓方程式解聯立：

$$
\begin{cases}
\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2})-\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}(y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})=0\\
(x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2})^2+(y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})^2=(\frac{3}{2})^2
\end{cases}
$$

令 $x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}=\alpha, y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}=\beta, \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}=\phi$ 則方程式可簡化為：

$$
\begin{cases}
\alpha\sin\phi-\beta\cos\phi=0\cdots(1)\\
\alpha^2+\beta^2=\frac{9}{4}\cdots(2)
\end{cases}
$$

由(1)式得 β=αtanφ 代入(2)式：

$$\alpha^2+\alpha^2\tan^2\phi=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\alpha^2\sec^2\phi=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\cos\phi$$

$$\Rightarrow x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}=\frac{3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}$$

由(2)式得 α=βcotφ 代入(1)式：

$$\beta^2\cot^2\phi+\beta^2=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\beta^2\csc^2\phi=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\beta=\frac{3}{2}\sin\phi$$

$$\Rightarrow y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}=\frac{3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}$$

所以我們可以得到交點座標：

$$(x,y)=(\frac{3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},\frac{3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2})$$

由外接圓圓心座標及半徑，我們可以發現座標是由原尖瓣線尖點經平移與旋轉而來，令平移和旋轉角度分別為(Δx,Δy,Δθ)，則：

〈證明〉 $$(\Delta x,\Delta y,\Delta\theta)=(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2},\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3})$$

定理 3. 由所有西姆松線的包絡區域所形成之三尖瓣線方程式為：

$$(X^2+Y^2)+\frac{9}{2}(X^2+Y^2)-\frac{27}{16}=4\cos3\phi(X^3-3XY^2)-4\sin3\phi(Y^3-3X^2Y)$$

其中：$X=x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_1+\cos\theta_3}{2},Y=y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2},\phi=\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$

已知原三尖瓣線之參數式為：

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\\ y=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\end{cases}$$

又，$(\Delta x,\Delta y,\Delta\theta)=(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2},\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3})$ 先對其做旋轉矩陣：

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} & -\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\\ \sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} & \cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=x\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}-y\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\\ y'=x\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+y\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}\end{cases}$$

再做平移得到新的參數式：

$$\begin{cases}x'=x\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}-y\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_1+\cos\theta_3}{2}\cdots(1)\\ y'=x\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+y\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}+\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}\cdots(2)\end{cases}$$

令 $\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_1+\cos\theta_3}{2}=\alpha,\ \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}=\beta,\ \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}=\phi$

$$\frac{(1)}{\sin\phi}+\frac{(2)}{\cos\phi}\Rightarrow\frac{x'}{\sin\phi}+\frac{y'}{\cos\phi}=x(\cot\phi+\tan\phi)+\frac{\alpha}{\sin\phi}+\frac{\beta}{\cos\phi}$$

$$\Rightarrow\frac{x'-\alpha}{\sin\phi}+\frac{y'-\beta}{\cos\phi}=\frac{x}{\sin\phi\cos\phi}$$

$$\Rightarrow x=(x'-\alpha)\cos\phi+(y'-\beta)\sin\phi$$

$$\frac{(2)}{\sin\phi}-\frac{(1)}{\cos\phi}\Rightarrow\frac{y'}{\sin\phi}-\frac{x'}{\cos\phi}=y(\cot\phi+\tan\phi)+\frac{\beta}{\sin\phi}-\frac{\alpha}{\cos\phi}$$

$$\Rightarrow\frac{y'-\beta}{\sin\phi}-\frac{x'-\alpha}{\cos\phi}=\frac{y}{\sin\phi\cos\phi}$$

$$\Rightarrow y=(y'-\beta)\cos\phi-(x'-\alpha)\sin\phi$$

再令 $x'-\alpha=X$, $y'-\beta=Y$，將 x,y 以 X,Y 表示後丟回原三尖瓣線方程式：

$$((X\cos\phi+Y\sin\phi)^2+(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)^2+\frac{9}{2}((X\cos\phi+Y\sin\phi)^2+(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)-\frac{27}{16}$$
$$=4((X\cos\phi+Y\sin\phi)^3-3(X\cos\phi+Y\sin\phi)(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)$$

先化簡左式：

$$(X\cos\phi+Y\sin\phi)^2+(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2$$
$$=X^2\cos^2\phi+2XY\cos\phi\sin\phi+Y^2\sin^2\phi+Y^2\cos^2\phi-2XY\cos\phi\sin\phi+X^2\sin^2\phi$$
$$=X^2+Y^2$$

$$\Rightarrow((X\cos\phi+Y\sin\phi)^2+(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)^2+\frac{9}{2}((X\cos\phi+Y\sin\phi)^2+(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)-\frac{27}{16}$$
$$=(X^2+Y^2)+\frac{9}{2}(X^2+Y^2)-\frac{27}{16}$$

再化簡右式：

$$4((X\cos\phi+Y\sin\phi)^3-3(X\cos\phi+Y\sin\phi)(Y\cos\phi-X\sin\phi)^2)$$
$$=4((X^3\cos^3\phi+3X^2Y\cos^2\phi\sin\phi+3XY^2\cos\phi\sin^2\phi+Y^3\sin^3\phi)$$
$$-3(XY^2\cos^3\phi-2X^2Y\cos^2\phi\sin\phi+X^3\sin^2\phi\cos\phi+Y^2\sin\phi\cos^2\phi-2XY^2\sin^2\phi\cos\phi+X^2Y\sin^3\phi))$$
$$=4(X^3(\cos^3\phi-3\sin^2\phi\cos\phi)+3X^2Y(3\sin\phi\cos^2\phi-\sin^3\phi)+3XY^2(3sin^2\phi\cos\phi-\cos^3\phi)+Y^3(\sin^3\phi-3\sin\phi\cos^2\phi))$$
$$=4(X^3\cos3\phi+3X^2Y\sin3\phi-3XY^2\cos3\phi-Y^3\sin3\phi)$$
$$=4\cos3\phi(X^3-3XY^2)-4\sin3\phi(Y^3-3X^2Y)$$

左右式統整：

$$(X^2+Y^2)+\frac{9}{2}(X^2+Y^2)-\frac{27}{16}=4\cos3\phi(X^3-3XY^2)-4\sin3\phi(Y^3-3X^2Y)$$

故得證。

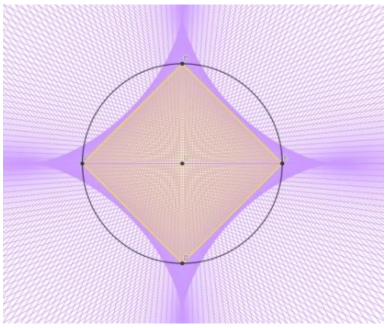
伍、研究結果

西姆松定理	BEFORE	圓上一點 P 對圓內接三角形三邊作垂足，三垂足共線。
	AFTER	圓上一點 P 對圓內接 n 邊形做(n-2)次垂足，此 n 點共線。
西姆松線方程式	BEFORE	複數平面的方程式，給定單位圓、圓上三點 A(a),B(b),C(c)及一圓上動點 P(p)，則 P 對 ΔABC 之西姆松線方程式為： $2abc\bar{z}-2pz+p^2+(a+b+c)p-(bc+ca+ab)-\frac{abc}{p}=0$
	AFTER	座標平面的方程式通式，給定單位圓、圓上 n(n≥3)點 $A_1(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$A_2(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,⋯,$A_n(\cos\theta_n,\sin\theta_n)$及一圓上動點 $P(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$，則 P 對 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 之西姆松線方程式為： $\cos(\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i-\theta_0}{3}2+\theta_0-90n)(x-\cos\theta_0)+\sin(\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90n)(y-\sin\theta_0)$ $=-2\prod_{i=1}^{n}\sin(\frac{\theta_i-\theta_0}{2})$
三尖瓣線方程式	BEFORE	給定一大圓及一半徑為大圓1/2倍的小圓，則小圓在大圓內滾動時圓周上一定點劃出的軌跡為三尖瓣線，其方程式為： $(x^2+y^2)^2+\frac{9}{2}(x^2+y^2)-\frac{27}{16}=4(x^3-3xy^2)$
	AFTER	給定單位圓、圓上三點 $A(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,$B(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$,$C(\cos\theta_3,\sin\theta_3)$及一圓上一點 $P(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$，則 P 對 ΔABC 之所有西姆松線所包絡出的區域為三尖瓣線，其方程式為： $(X^2+Y^2)^2+\frac{9}{2}(X^2+Y^2)-\frac{27}{16}=4\cos 3\phi(X^3-3XY^2)-4\sin 3\phi(Y^3-3X^2Y)$ 其中 $X=x-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2},Y=y-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2},\phi=\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$
n 尖瓣線	BEFORE	給出了參數式通式：$\begin{cases}x=\cos\theta+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\\y=\sin\theta-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta\end{cases}$
	AFTER	定義了廣義的 n 尖瓣線，即任意 n 邊形所有西姆松線所包絡出的圖形，並推測其中心點座標： $(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{2^{n-2}},\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i}{2^{n-2}})$

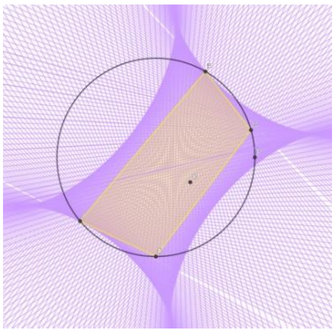
陸、討論

在已知所有三角形西姆松線所包絡的區域為三尖瓣線的情況下，我們試著跑多邊形的西姆松線是否也會有這特性：

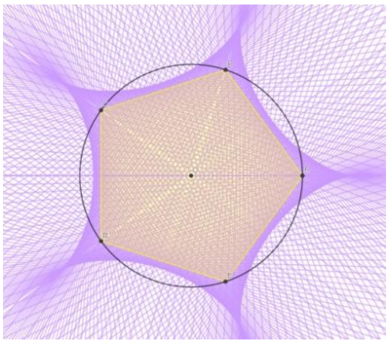
正四邊形：



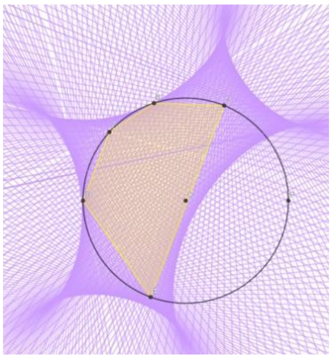
任意四邊形：



正五邊形：



任意五邊形：



可以發現跑出來的結果與三角形非常的不同，並非任意多邊形之西姆松線所形成的尖瓣線皆相同，在經過多次的跑圖、猜測與計算後我們有了幾個推論：

推論 1. 正 n 邊形所有西姆松線所包絡的區域為正 n 尖瓣線。

〈證明〉

我們已知 n 邊形所有西姆松線所包絡的區域為 n 尖瓣線，卻不知如何將其一一對應，最終決定先朝正 n 邊形下手。在已知正 n 邊形及正 n 尖瓣線皆有 n 條對稱軸的情況下，若兩圖形 n 條對稱軸皆相等，即可證明兩圖形相對應。

n 尖瓣線參數式：

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta \\ y = \sin\theta - \frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta \end{cases}$$

正 n 邊形對稱軸方程式 L_n：

$$y = \tan\frac{2k\pi}{n}x, k = 1, 2, \cdots, n$$

我們令參數 $\theta=\frac{2k\pi}{n} \pm \varphi$，檢查$\pm\varphi$兩點是否對稱於 L_n。令兩點 P_1、P_2：

$$P_1(x,y) = (\cos(\frac{2k\pi}{n}+\phi) + \frac{\cos((n-1)(\frac{2k\pi}{n}+\phi))}{n-1}, \sin(\frac{2k\pi}{n}+\phi) - \frac{\sin((n-1)(\frac{2k\pi}{n}+\phi))}{n-1})$$

$$P_2(x',y') = (\cos(\frac{2k\pi}{n}-\phi) + \frac{\cos((n-1)(\frac{2k\pi}{n}-\phi))}{n-1}, \sin(\frac{2k\pi}{n}-\phi) - \frac{\sin((n-1)(\frac{2k\pi}{n}-\phi))}{n-1})$$

座標化簡：

$$x=\cos(\frac{2k\pi}{n}+\phi)+\frac{\cos((n-1)(\frac{2k\pi}{n}+\phi))}{n-1}$$

$$=(\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)+\frac{1}{n-1}(\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n}\cos\phi-\sin\frac{2k(n-1)\pi}{n}\sin\phi)$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi+\frac{1}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{1}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

$$=\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

$$y=\sin(\frac{2k\pi}{n}+\phi)-\frac{\sin((n-1)(\frac{2k\pi}{n}+\phi))}{n-1}$$

$$=(\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)-\frac{1}{n-1}(\sin\frac{2k(n-1)\pi}{n}\cos\phi+\cos\frac{2k(n-1)\pi}{n}\sin\phi)$$

$$=\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi+\frac{1}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{1}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

$$=\frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

$$x'=\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos(-\phi)-\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin(-\phi)$$

$$=\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

$$y'=\frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos(-\phi)+\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin(-\phi)$$

$$=\frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi$$

令 P_1'(x",y")為 P_1 以 L_n 為鏡射軸經鏡射變換號的座標點：

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{4k\pi}{n} & \sin\frac{4k\pi}{n}\\ \sin\frac{4k\pi}{n} & -\cos\frac{4k\pi}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi\\ \frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{4k\pi}{n}(\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)+\sin\frac{4k\pi}{n}(\frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)\\ \sin\frac{4k\pi}{n}(\frac{n}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\phi-\frac{n-2}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)-\cos\frac{4k\pi}{n}(\frac{n}{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\phi+\frac{n-2}{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\phi)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{n}{n-1}\cos\phi(\cos\frac{4k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+\sin\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n})+\frac{n-2}{n-1}\sin\phi(\sin\frac{4k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}-\cos\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n})\\ \frac{n}{n-1}\cos\phi(\sin\frac{4k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}-\cos\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n})-\frac{n-2}{n-1}\sin\phi(\cos\frac{4k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+\sin\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n})\end{bmatrix}$$

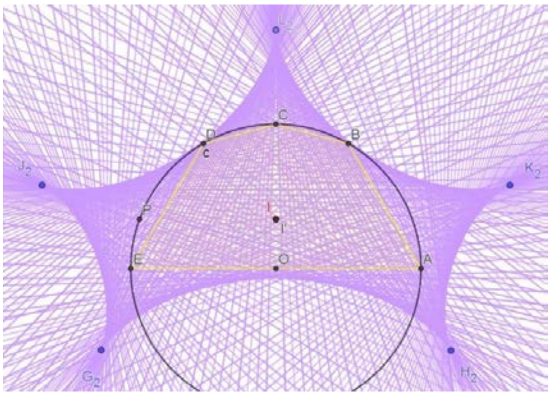
$$=\begin{bmatrix}\frac{n}{n-1}\cos\phi\cos\frac{2k\pi}{n}+\frac{n-2}{n-1}\sin\phi\sin\frac{2k\pi}{n}\\ \frac{n}{n-1}\cos\phi\sin\frac{2k\pi}{n}-\frac{n-2}{n-1}\sin\phi\cos\frac{2k\pi}{n}\end{bmatrix}$$

可以發現 P_1'與 P_2 重合，故 P_1、P_2 對稱於 L_n。

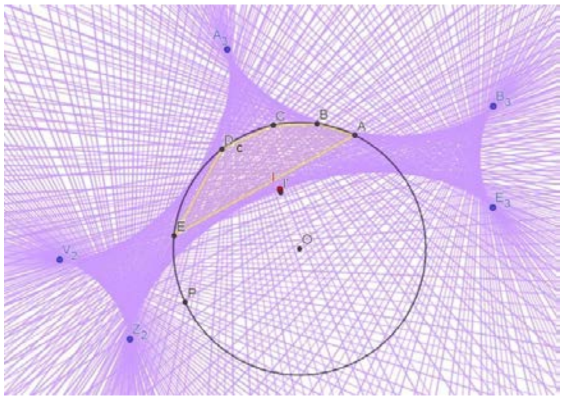
推論 2. n 尖瓣線幾合中心座標為：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{2^{n-2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i}{2^{n-2}}\right)$$

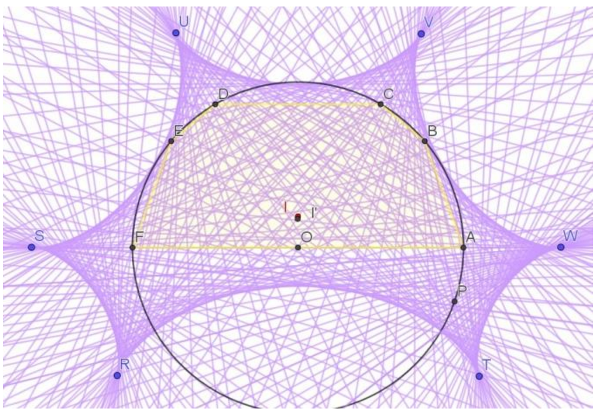
在已知三尖瓣線的幾合中心座標為三角形三點座標相加除以 2 後，我們試著猜測 n 尖瓣線的中心點座標是否也與原 n 邊形的座標有關，而經過 GGB 後我們認為與我們的猜測是相符的，我們令尖瓣線中心點為尖點相加除以 5，紅色點 I 為我們猜測的中心點座標，灰色點 I'為實際的中心點座標，可以發現兩個點是非常接近的，所以我們認為此猜測並無誤，且同樣可套用在已知的三尖瓣線中薪點上，但目前我們尚未找出找出有效的方法證明。



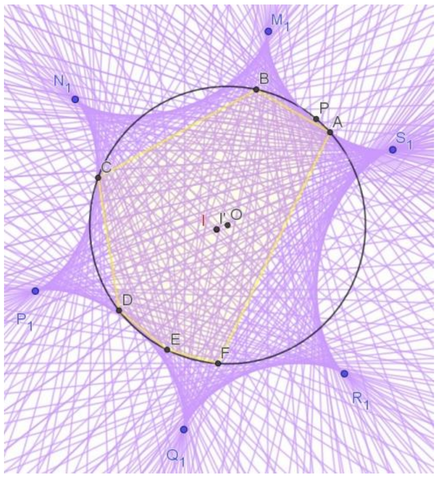
對稱五邊形



任意五邊形



對稱六邊形



任意六邊形

柒、結論

我們從最基本的西姆松定理，進而延伸到多邊形，利用 GGB 做圖後發現到圓內接多邊形之外接圓上任一點對該多邊形每一邊做垂足並經過一定次數的操作後，這些垂足會共線，而且圖形的變化是具有規律性的，這和之前找到的文獻中定義的多邊形西姆松線有所不同，而該文獻中所定義的多邊形西姆松線僅限於四邊形，於是我們試著用自己定義的多邊形西姆松線推廣到任意圓內接多邊形，並以幾何方法證明之，且這與之前的文獻相比更貼近原本西姆松線的定義。除此之外，我們也將三角形、圓、與西姆松線丟到平面直角座標上，運用解析幾何的方法求出其方程式通式，同時由 P 對 n 邊形作 n-2 次垂足得到的 n 個垂足兩兩連線的斜率相等也再次驗證了 n 個垂足共線的正確性。

在未來我們希望能再多朝多邊形尖瓣線下手，因並非每種 n 邊形對應到的尖瓣線都是相同的，所以並無法找出其尖瓣線的通式。不過正 n 邊形所有西姆松線的包絡圖形為正 n 尖瓣線，因此希望未來我們能夠找出用以表示任意正 n 邊形與其尖瓣線關聯性之方程式、及對任意 n 邊形，其中心點座標是否和其尖瓣線方程有關。

捌、未來展望

在進入全國科展後，為了精進我們的報告，我們重新上網搜尋相關資料，以不同的關鍵字搜尋，赫然發現一篇在 1961 由數學家 Zylbertrest 所發表的論文，對西姆松線做廣義的定義，同樣的將其推到多邊形上並提出了(n-2)次垂足共線的證明。但在證明方式上，他是從原本的 n 個點座標，依各種共線來將等角一個一個向(n-2)次垂足座標推進，並一一探討圓上 n 個點在不同位置時，各次垂足所在的位置會有所不同的情況。

與我們的作品相比較，他的方法與我們的證明 1 相似，但我認為我們的證明 2 成功地找出了 n 邊形與 n+1 邊形的西姆松線是有所關連，並由歸納法證明出的結果更加漂亮。而在西姆松線方程式的部分，我們同樣將座標架設在單位圓上，並推出第 n-2 次垂足座標並求出通過這些點的方程式，看似形式上稍有不同，但經過化簡兩條方程式是相等的。我們雖然對此結果感到惋惜，本以為這是個創新的發現，但或許與數學家的論文相比較有相同的結果對我們來說也是種很大的肯定，我們求出的證明甚至略勝一籌。

而在未來我們會努力朝多尖瓣線的方程式以及其相關定理著手研究，目前有看到一篇針對四邊形的西姆松線所包絡出的區域的圖形做討論，發現其為四尖瓣線並求出了其方程式的通式，這給我們一絲希望，或許求出任意 n 尖瓣線方程式是可行的，待我們擁有足夠的背景知識後，相信有機會能求出任意 n 尖瓣線方程式通式。

玖、參考資料

1. Olga Radko and Emmanuel Tsukerman, The Perpendicular Bisector Construction, the Isoptic point, and the Simson Line of a Quadrilateral, *Forum Geometricorum Volume 12 (2012)161–189.* https://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201214.pdf
2. E. T. Steller, Envelopes of Zylbertrest-Lines, *The Mathematical Gazette Vol.45 , No.369(Oct.,1965), pp.279-284.* https://www.jstor.org/stable/3612850
3. D. G. Tahta, The Simson Line, *The Mathematical Gazette Vol.45, No.354(Dec.,1961), pp.352-358.* https://www.jstor.org/stable/3614098
4. Todor Zaharinov, The Simson Triangle and Its Properties, *Forum Geometricorum Volume 17(2017)373–381.* https://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201736.pdf
5. S. Zylbertrest, A Generalisation of Simson's Theorem, *The Mathematical Gazette Vol.45, No.351(Feb.,1961), pp.30-37.* https://www.jstor.org/stable/3614768
6. Simson line-Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line

【評語】050404

本件作品是探討如何把三邊形的西姆松線推廣至 n 邊形的西姆松線。作者們的想法主要是推廣 2012 年俄羅斯數學家 Olga Radko 的想法，並得到了 n 邊形的西姆松線之方程式。此外，作者們也定義廣義的 n 尖瓣線，並推廣了 3 尖瓣線至 n 尖瓣線。可惜只能做出正多邊形的狀況，成果相對比較有限。

作品簡報

多邊形與西姆松線的研究與深入探討

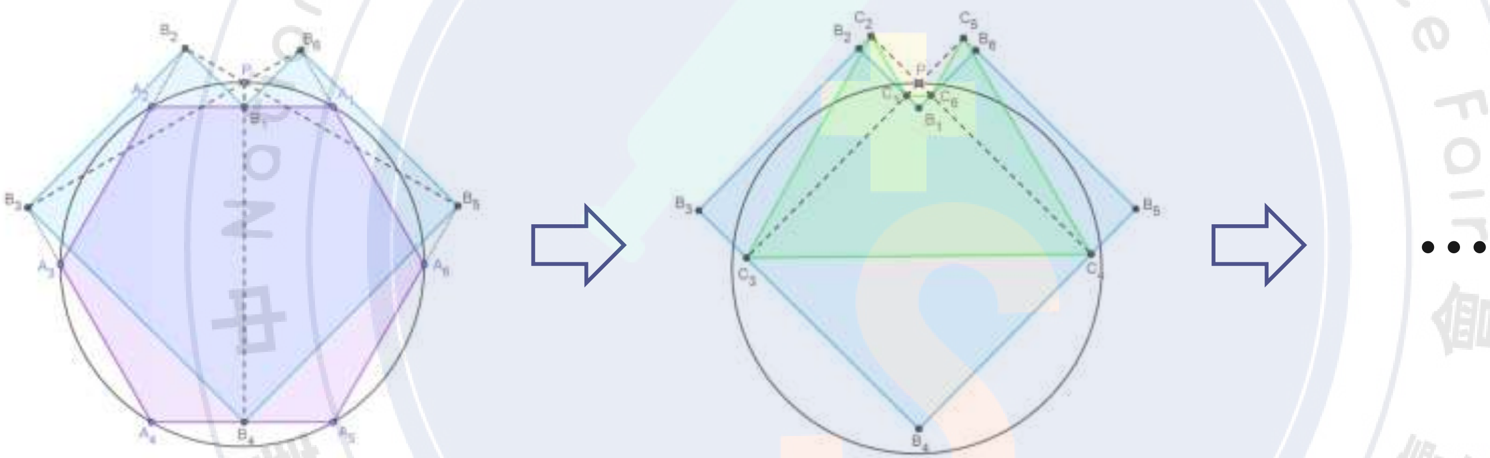
高中組 數學科

研究流程


西姆松定理
n=3
九點圓&三尖瓣線
三尖瓣線方程式
西姆松線方程式
n邊形西姆松線方程式通式
西姆松線方程式
n>3
n邊形西姆松定理&證明
n尖瓣線
中心點推測

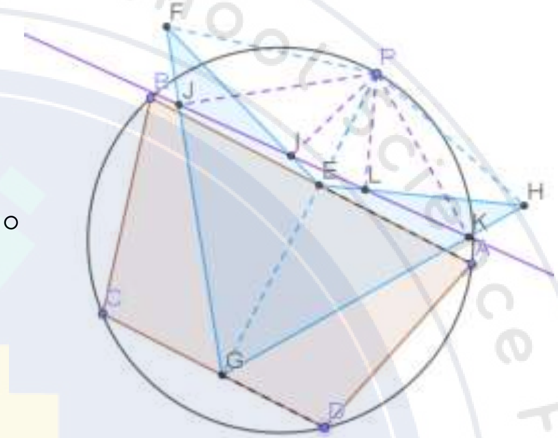
名詞解釋

- 做x次垂足：給定圓內接n邊形(A1、A2、A3、...、An) (n>3)及圓上一點P，則P對A_1A_2、A_2A_3、...、$A_{n-1}A_n$、A_nA_1作垂足依序得到B1、B2、...、Bn並依照順序相連得到新n邊形，重複x次。



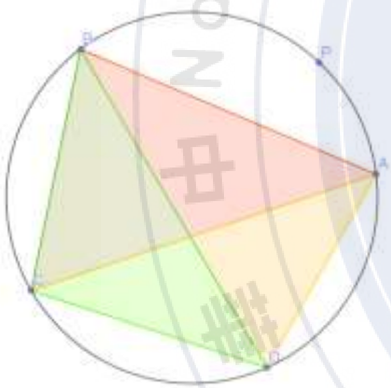
- n邊形西姆松線：給定圓內接n邊形(n≥3)及圓上一點P，則以P對n邊做n-2次垂足，此n個垂足相連所形成的線。
- 包絡區域：每條線所切出的封閉有限面積的圖形。

多邊形西姆松線



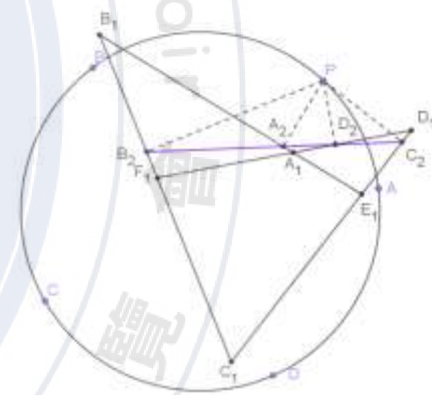
四邊形做2次垂足後此4點會共線。

pf



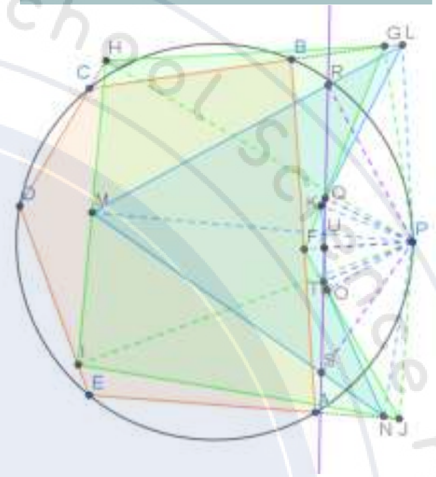
將四邊形分割成
4個三角形

分別對4個三角形做垂足
得4條西姆松線

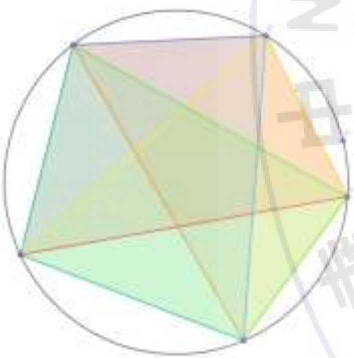


對4條西姆松線作垂足

五邊形做3次垂足後此5點會共線。

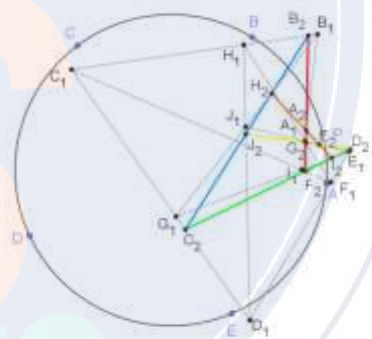


pf



將五邊形分割成
5個四邊形

分別對5個四邊形
做垂足得4個鏢形



對5個鏢形作垂足
得5條四邊形西姆松線

對5條四邊形
西姆松線做垂足

西姆松線方程式通式

三角形西姆松線：

$$\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\right)(x-\cos\theta_0)-\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_0}{2}\right)(y-\sin\theta_0)=2\sin\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_0}{2}$$

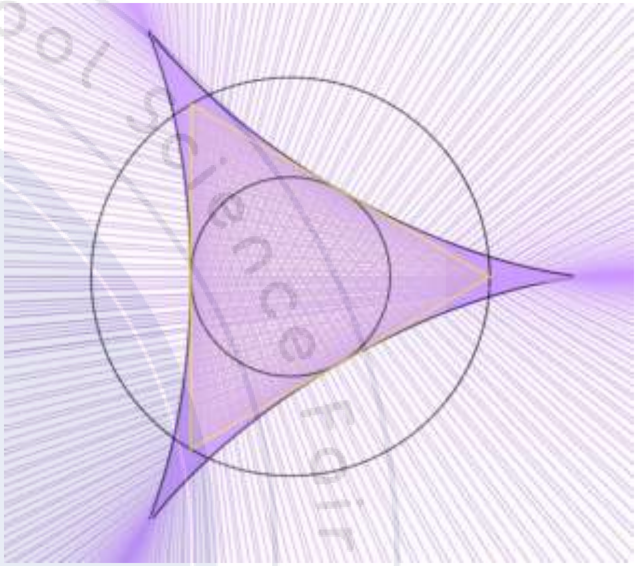
四邊形西姆松線方程式：

$$\cos\left(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\right)(x-\cos\theta_0)+\sin\left(\tfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta_0}{2}\right)(y-\sin\theta_0)=-2\sin\tfrac{\theta_1-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3-\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_4-\theta_0}{2}$$

n邊形西姆松線方程式通式：

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1)\right)(x-\cos\theta_0)+\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2}+\theta_0-90(k+1)\right)(y-\sin\theta_0)=-2\prod_{i=1}^{k+1}\sin\left(\tfrac{\theta_i-\theta_0}{2}\right)$$

三尖瓣線內切九點圓



1. 三尖瓣線方程式偏微分求斜率：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3(x^2-y^2)-x(x^2+y^2)-\frac{9}{4}x}{y(x^2+y^2)+\frac{9}{4}y+6xy}$$

2. 求出三瓣中點座標：

$$Z_1=(\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$$

$$Z_2=(\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 2\pi,\sin\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi)=(-\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}(\cos\pi,\sin\pi)$$

$$Z_3=(\cos\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{10\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{3})=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3})$$

3. 圓心指向三瓣中點之向量與三瓣中點之切線方向向量做內積，其值為0，故得證。

三尖瓣線方程式

平移量與旋轉量：

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta) = (\frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3}{2}, \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3}{2}, \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3})$$

變數變換：

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} - y\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} + \frac{\cos\theta_1+\cos\theta_1+\cos\theta_3}{2} \cdots (1) \\ y' = x\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} + y\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3} + \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2} \cdots (2) \end{cases}$$

帶回原方程式並化簡：

$$(X^2+Y^2)^2 + \frac{9}{2}(X^2+Y^2) - \frac{27}{16} = 4\cos 3\phi(X^3 - 3XY^2) - 4\sin 3\phi(Y^3 - 3X^2Y)$$

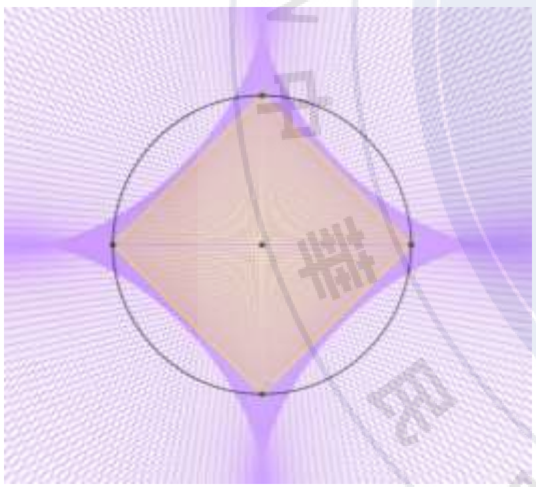
其中 $X = x - \frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{2}, Y = y - \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}{2}, \phi = \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{3}$

多尖瓣線討論

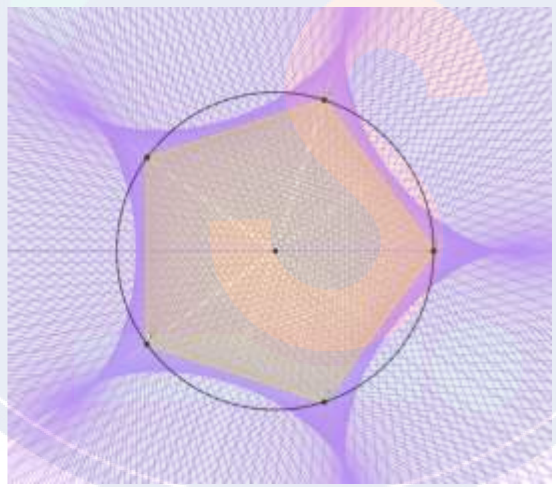
n尖瓣線參數式：

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta \\ y = \sin\theta - \frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta \end{cases}$$

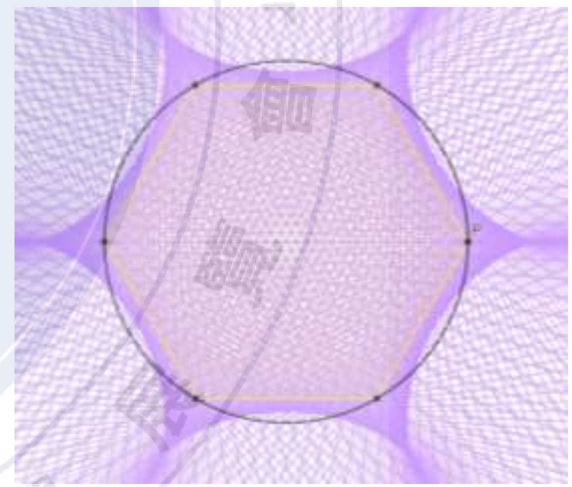
不同n邊形西姆松線的軌跡所形成的包絡區域：



正四邊形



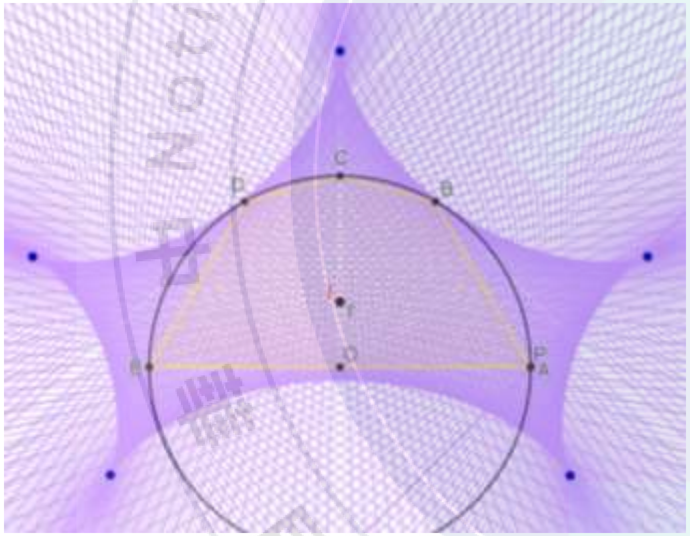
正五邊形



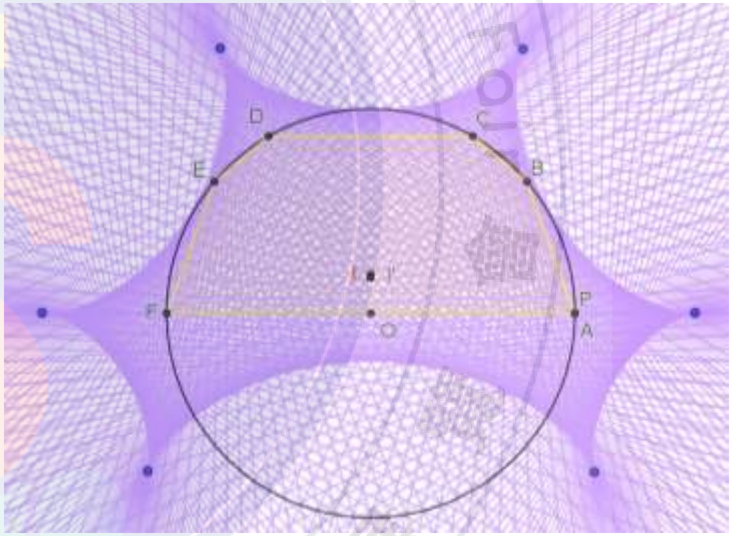
正六邊形

廣義n尖瓣線中心點座標猜測：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{2^{n-2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i}{2^{n-2}}\right)$$



五邊形



六邊形

紅點I ：猜測中心點座標
灰點I’：實際中心點座標

結論

1. 西姆松定理：給定圓內接三角形級原上一點P，則P對三邊作垂足，此三點共線。

⇒廣義西姆松定理：給定圓內接n邊形及圓上一點P，則P對此n邊做(n-2)次垂足，此n點共線。

2. 複數平面的西姆松線方程式：$2abc\bar{z} - 2pz + p^2 + (a+b+c)p - (bc+ca+ab) - \frac{abc}{p} = 0$

⇒ 座標平面的n邊形西姆松線方程式

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i - \theta_0}{3} 2 + \theta_0 - 90n\right)(x - \cos\theta_0) + \sin\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i - \theta_0}{2} + \theta_0 - 90n\right)(y - \sin\theta_0)$$

$$= -2\prod_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_0}{2}\right)$$

3. 中心點為(0,0)的三尖瓣線方程式：$(x^2+y^2)^2 + \frac{9}{2}(x^2+y^2) - \frac{27}{16} = 4(x^3 - 3xy^2)$

⇒ 任意中心點的三尖瓣線方程式：$(X^2+Y^2)^2 + \frac{9}{2}(X^2+Y^2) - \frac{27}{16} = 4\cos 3\phi(X^3 - 3XY^2) - 4\sin 3\phi(Y^3 - 3X^2Y)$

其中 $X = x - \frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3}{2}, Y = y - \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3}{2}, \phi = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3}$

4. 正n尖瓣線參數式：$\begin{cases} x = \cos\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta \\ y = \sin\theta - \frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta \end{cases}$ ⇒ 廣義n尖瓣線及其中心點 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{2^{n-2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i}{2^{n-2}}\right)$

未來展望

在未來朝多邊形尖瓣線下手，因並非每種 n 邊形對應到的尖瓣線都是相同的，所以並無法找出其尖瓣線的通式。不過正　n 邊形所有西姆松線的包絡圖形為正 n 尖瓣線，因此希望未來我們能夠找出用以表示任意正 n 邊形與其尖瓣線關聯性之方程式、及對任意 n 邊形，其中心點座標是否和其尖瓣線方程有關。

參考資料

1.Olga Radko and Emmanuel Tsukerman, The Perpendicular Bisector Construction, the Isoptic point, and the Simson Line of a Quadrilateral, Forum Geometricorum Volume 12 (2012)161–189. https://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201214.pdf

2. Todor Zaharinov, The Simson Triangle and Its Properties, Forum Geometricorum Volume 17(2017)373–381. https://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201736.pdf

3. Simson line-Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line