中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030425

虛境探定數

學校名稱：澎湖縣立將澳國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳佳欣	陳筱楚
國二 俞信安	陳裕傑

關鍵詞：魔術、猜數字

摘要

從撲克牌魔術中，發現了數字 1~9 的號碼牌利用 3*3 的排列方式，找出三組三位數值總和之數字和分別為 9、18、27，可以藉由與 9 的倍數之差距猜出覆蓋的數字牌，並將此方法加以發展到數字 1~6 的號碼牌利用 2*3 及 3*2 的排列方式，找出其數值總和之數字和並猜出覆蓋的數字牌。

壹、 研究動機

在某次上課的時候，老師變了一個撲克牌的魔術，魔術名稱為九牌蓋一，是將數字 1 到 9 的數字排成九宮格，再任意蓋一張牌，將形成的數值總和之數字和告訴老師，老師居然能猜出覆蓋的那張牌的數字，我們覺得很驚訝，經過老師講解後，發現數值總和之數字和與 9 的倍數有關聯，於是我們開始想探討數字 1~6 以 2*3 及 3*2 的排列方式，嘗試找出數值總和之數字和與 6 的倍數的關係並找出猜數方法。

貳、 研究目的

一、探討數字 1~9 以 3*3 排列方式的數值總和之數字和與 9 的倍數關係並驗證猜數方法

二、探討數字 1~6 以 2*3 排列方式的數值總和之數字和與 6 的倍數關係並找出猜數方法

三、探討數字 1~6 以 3*2 排列方式的數值總和之數字和與 6 的倍數關係並找出猜數方法

參、 研究設備及器材

紙、筆、撲克牌、計算機、電腦

肆、 研究過程或方法

一、探討數字 1~9 以 3*3 排列方式的數值總和之數字和與 9 的倍數關係

(一)魔術規則

將數字 1~9 的撲克牌，隨機排成 3*3 的三位數，任意將一張牌覆蓋，將三組三位數相加(覆蓋的那張牌假設為 0)，將數值加總後之數字和告訴猜數者，其數字和與 9 的倍數差距即為覆蓋的數字牌。

(二)以 3*3 排列方式形成的數值總和之數字和

本研究從 3*3 的排列組合中，依序以代數表示(如表 1)，並將計算數值總和時分為兩個部份，第一部份為不覆蓋數字牌的數值總和，第二部分為覆蓋數字牌的數值總和。

表 1　以代數表示 3*3 的排列組合方式

a	b	c
d	e	f
g	h	i

三組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100(a+d+g)+10(b+e+h)+c+f+i$

數值總和之百位數字為 $a+d+g$，十位數字為 $b+e+h$，個位數字為 $c+f+i$，其數值總和之數字和設為一般式為 $a+d+g+b+e+h+c+f+i$，本研究發現數值在加總時會有進位的可能，以下將是否進位因素加入考量中，探討數字和與 9 的倍數關係。

二、探討數字 1~6 以 2*3 排列方式的數值總和之數字和與 6 的倍數關係

本研究從 2*3 的排列組合中，依序以代數表示(如表 2)，並將計算數值總和時分為兩個部份，第一部份為不覆蓋數字牌的數值總和，第二部分為覆蓋數字牌的數值總和。

表 2　以代數表示 2*3 的排列組合方式

a	b
c	d
e	f

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

$=10(a+c+e)+b+d+f$

數值總和之十位數字為 $a+c+e$，個位數字為 $b+d+f$，其數值總和之數字和設為一般式為 $a+c+e+b+d+f$，本研究發現數值在加總時會有進位的可能，以下將是否進位因素加入考量中，探討數字和與 6 的倍數關係。

三、探討數字 1~6 以 3*2 排列方式的數值總和之數字和與 6 的倍數關係

本研究從 3*2 的排列組合中，依序以代數表示(如表 3)，並將計算數值總和時分為兩個部份，第一部份為不覆蓋數字牌的數值總和，第二部分為覆蓋數字牌的數值總和。

表 3　以代數表示 3*2 的排列組合方式

a	b	c
d	e	f

兩組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100(a+d)+10(b+e)+c+f$

數值總和之百位數字為 $a+d$，十位數字為 $b+e$，個位數字為 $c+f$，其數值總和之數字和設為一般式為 $a+d+b+e+c+f$，本研究發現數值在加總時會有進位的可能，以下將是否進位因素加入考量中，探討數字和與 6 的倍數關係。

伍、　研究結果

一、以 3*3 排列方式的數值總和之數字和與 9 的倍數關係

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和

不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為 27、18 或 9。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表 4 所列

表 4　以 3*3 排列方式覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	26、17、8
2	25、16、7
3	24、15、6
4	23、14、5
5	22、13、4
6	21、12、3
7	20、11、2
8	19、10、1
9	18、9

二、以 2*3 排列方式的數值總和之數字和與 6 的倍數關係

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和

不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為 12 或 3。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表 5 所列

表 5　以 2*3 排列方式覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	11、2
2	10、1
3	9、18
4	8、17
5	7、16
6	6、15

三、數字 1~6 以 3*2 的數值總和之數字和與 6 的倍數關係

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和

不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為 21 或 12。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表 6 所列

表 6　以 3*2 排列方式覆蓋數字牌的數值總和之數字和

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	20、11
2	19、10
3	18、9
4	17、8
5	16、7
6	15、6

陸、　討論

一、以 3*3 排列方式的數值總和之數字和與 9 的倍數關係

在康軒版國中數學第 2 冊課本中學習到數字 9 的倍數判別法，若數值總和之數字和被 9 整除，其數值即為 9 的倍數；本研究將以 a~i 代表數字 1~9 排成 3*3 的格式如 p2.之表 1，將其形成的三組三位數加總，其數值總和之數字和恰為數字 1~9 的總和 45，無論怎麼排列所形成的數值必定為 9 的倍數。

其數學式為

$100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100(a+d+g)+10(b+e+h)+c+f+i$

$=99*(a+d+g)+1*(a+d+g)+9*(b+e+h)+1*(b+e+h)+c+f+i$

$=99*(a+d+g)+9*(b+e+h)+1*(a+d+g+b+e+h+c+f+i)$

由於 $a+d+g+b+e+h+c+f+i$ 為 1~9 的數字總和

數值總和之數字和為 $1*(a+d+g+b+e+h+c+f+i)=45$

(一)本研究針對 3 種數值進位可能分析

本研究發現以 3*3 排列方式在加總時有 3 種數字進位的可能(3*3 的排列方式並不存在無進位之情形)，會使個位數、十位數、百位數的數值超過 10 並分別進位到十位數、百位數及千位數，進而影響數值總和之數字和；以下針對 3 種可能進行分析，數字以代數表示如 p2.之表 1。

1、三個位數均進位 1 次

三組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100*10+100(a+d+g-10)+100+10(b+e+h-10)+10+(c+f+i-10)$

$=1000+100(a+d+g-10+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $a+d+g-10+1$，十位數字為 $b+e+h-10+1$，個位數字為 $c+f+i-10$，則數值總和之數字和如下頁

數值總和之數字和$=1+a+d+g-10+1+b+e+h-10+1+c+f+i-10$

$=(a+d+g+b+e+h+c+f+i)$[1]$+1-9-9-10$

$=45+1-9-9-10$

$=18$

2、當有一個位數進位 2 次，其餘兩位數進位 1 次

本研究發現以 3*3 排列方式在加總時，無論將進位 2 次的位數設為百位、十位或個位數，其餘兩個位數進位 1 次，其數值總和之數字和均為 9，以下針對此種可能進行分析，數字以代數表示如 p2.之表 1。

(1)百位數進位 2 次，十位數和個位數進位 1 次

三組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100*20+100(a+d+g-20)+100+10(b+e+h-10)+10+(c+f+i-10)$

$=2000+100(a+d+g-20+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$

數值總和之千位數字為 2，百位數字為 $a+d+g-20+1$，十位數字為 $b+e+h-10+1$，個位數字為 $c+f+i-10$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和$=2+a+d+g-20+1+b+e+h-10+1+c+f+i-10$

$=(a+d+g+b+e+h+c+f+i)+2-19-9-10$

$=45+2-19-9-10$

$=9$

(2)本研究以上述方式，將進位 2 次的位數改為十位或個位數，其餘兩個位數進位 1 次，所得之數值總和之數字和亦為 9。

3、當有兩個位數進位 1 次，另外一個位數無需進位

本研究發現以 3*3 排列方式在加總時，將其中兩個位數進位 1 次的位數，另外一個位數不會有進位的可能，其數值總和之數字和均為 27，以下針對此種可能進行分析，數字以代數表示如 p2.之表 1。

[1]代表數字 1~9 的總和

(1)百位數和十位數進位 1 次，個位數無需進位

三組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100*10+100(a+d+g-10)+100+10(b+e+h-10)+(c+f+i)$

$=1000+100(a+d+g-10+1)+10(b+e+h-10)+(c+f+i)$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $a+d+g-10+1$，十位數字為 $b+e+h-10$，個位數字為 $c+f+i$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和$=1+a+d+g-10+1+b+e+h-10+c+f+i$

$=1+(a+d+g+b+e+h+c+f+i)-9-10$

$=1+45-9-10$

$=27$

(2)本研究以上述方式，將其他兩個位數進位 1 次，其餘一個位數無需進位時，所得之數值總和之數字和亦為 27。

(二)3*3 排列方式的猜數方法

1、三個位數均進位 1 次

三組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

假設 a 為 0 $=100*10+100(0+d+g-10)+100+10(b+e+h-10)+10+(c+f+i-10)$

$=1000+100(0+d+g-10+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $0+d+g-10+1$，十位數字為 $b+e+h-10+1$，個位數字為 $c+f+i-10$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和$=1+0+d+g-9+b+e+h-10+1+c+f+i-10$

$=(0+d+g+b+e+h+c+f+i)$[2]$+1-9-9-10$

$=(45-a)$[3]$+1-9-9-10$

$=18-a$

[2]代表代數 a~i 中將 a 設為 0 的數字總和

[3]代表數字 1~9 的數字和減去 a 的總和

2、當有一個位數進位 2 次，其他兩位數進位 1 次

(1)百位數進位 2 次，十位數和個位數進位 1 次

三組數值總和＝$100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

假設 a 為 0　＝$100*20+100(0+d+g-20)+100+10(b+e+h-10)+10+(c+f+i-10)$

＝$2000+100(0+d+g-20+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$

數值總和之千位數字為 2，百位數字為 $0+d+g-20+1$，十位數字為 $b+e+h-10+1$，個位數字為 $c+f+i-10$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和＝$2+0+d+g-20+1+b+e+h-10+1+c+f+i-10$

＝$(0+d+g+b+e+h+c+f+i)+2-19-9-10$

＝$(45-a)+2-19-9-10$

＝$9-a$

(2)本研究以上述方式，將進位 2 次的位數改為十位或個位數，其餘兩個位數進位 1 次，所得之數值總和之數字和亦為 $9-a$。

3、當有兩個位數進位 1 次，另外一個位數不進位

(1)百位數和十位數進位 1 次，個位數無需進位

三組數值總和＝$100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

假設 a 為 0　＝$100*10+100(0+d+g-10)+100+10(b+e+h-10)+(c+f+i)$

＝$1000+100(0+d+g-10+1)+10(b+e+h-10)+(c+f+i)$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $0+d+g-10+1$，十位數字為 $b+e+h-10$，個位數字為 $c+f+i$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和＝$1+0+d+g-10+1+b+e+h-10+c+f+i$

＝$(0+d+g+b+e+h+c+f+i)+1-9-10$

＝$(45-a)+1-9-10$

＝$27-a$

(2)本研究以上述方式，將兩個位數進位 1 次，其餘一個位數無需進位時，所得之數值總和之數字和亦為 $27-a$。

本研究以上述數學式進行驗證，當數值總和之數字和為 1~8 時，以 9 作為猜數標準、當數值總和之數字和為 9~17 時，以 18 作為猜數標準、當數值總和之數字和為 18~26 時，以 27 作為猜數標準，猜數者只需用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

二、以 2*3 排列方式的數值總和之數字和及猜數方法

(一)本研究針對 4 種數值進位可能分析

本研究發現以 2*3 排列方式在加總時會有 4 種數值進位的可能，會使個位數、十位數數值超過 10 並分別進位到十位數及百位數，以下針對 4 種可能進行分析，數字以代數表示如 p2.之表 2。

1、無需進位

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

$=10(a+c+e)+b+d+f$

數值總和之十位數字為 $a+c+e$，個位數字為 $b+d+f$，其數值總和之數字和如下

數值總和之數字和$=(a+c+e+b+d+f)$[4]

$=1+2+3+4+5+6=21$

若十位數 $a+c+e<10$，則個位數 $b+d+f>11$⇨個位數進位

若個位數 $b+d+f<10$，則十位數 $a+c+e>11$⇨十位數進位

所以在不覆蓋數字牌的狀況下，不存在無需進位之可能性，但當覆蓋數字 3、4、5、6 時，有可能會使數值的十位及個位數字均不需進位，產生無需進位的狀況，其結果如下頁表 7 所示

[4]代表數字 1~6 的總和

表 7　覆蓋數字 3、4、5、6 時無需進位之結果

十位數		個位數
a	$c+e$	$b+d+f$
3	9	9
4	9	8
	8	9
5	9	7
	8	8
	7	9
6	9	6
	8	7
	7	8
	6	9

2、十位數及個位數均需要進位

三組數值總和 $=10a+b+10c+d+10e+f$

$=10(a+c+e)+b+d+f$

$=10*10+10(a+c+e-10)+10+(b+d+f-10)$

$=100*1+10(a+c+e-10+1)+(b+d+f-10)$

數值總和之百位數字為 1，十位數字為 $a+c+e-10+1$，個位數字為 $b+d+f-10$，則數值總和數字和如下

數值總和數字和 $=1+a+c+e-10+1+b+d+f-10$

$=(a+c+e+b+d+f)+1-9-10$

$=1+2+3+4+5+6+1-9-10$

$=21+1-9-10$

$=3$

當覆蓋數字 1、2 時，會使得數值的十位及個位數字產生均需要進位的狀況，其結果如表 8 所示

表 8　覆蓋數字 1、2 時個位數及十位數皆進位之結果

十位數		個位數
a	$c+e$	$b+d+f$
1	10、9	10、11
2	9	10

3、十位數或個位數單獨進位

(1)數值的十位數需要進位的情形

$$\begin{aligned}\text{三組數值總和} &= 10a+b+10c+d+10e+f \\ &= 10(a+c+e)+b+d+f \\ &= 10*10+10(a+c+e-10)+b+d+f \\ &= 100*1+10(a+c+e-10)+b+d+f\end{aligned}$$

數值總和之百位數字為 1，十位數字為 $a+c+e-10$，個位數字為 $b+d+f$，則數值總和之數字和如下

$$\begin{aligned}\text{數值總和之數字和} &= 1+a+c+e-10+b+d+f \\ &= (a+c+e+b+d+f)+1-10 \\ &= 1+2+3+4+5+6+1-10 \\ &= 12\end{aligned}$$

(2)數值的個位數需要進位的情形

$$\begin{aligned}\text{三組數值總和} &= 10a+b+10c+d+10e+f \\ &= 10(a+c+e)+b+d+f \\ &= 10(a+c+e)+10+(b+d+f-10) \\ &= 10(a+c+e+1)+(b+d+f-10)\end{aligned}$$

數值總和之十位數字為 $a+c+e+1$，個位數字為 $b+d+f-10$，則數值總和之數字和如下

數值總和之數字和 $=a+c+e+1+b+d+f-10$

$=(a+c+e+b+d+f)+1-10$

$=1+2+3+4+5+6+1-10$

$=12$

當覆蓋數字牌的狀況下，會存在單獨一個位數進位之可能性，其結果如表 9 所示

表 9　覆蓋數字 1~6 時需進位之結果

十位數		個位數	進位結果
a	$c+e$	$b+d+f$	
1	≥11	≤9	十位數進位
	≤8	≥12	個位數進位
2	≥10	≤9	十位數進位
	≤8	≥11	個位數進位
3	≥10	≤8	十位數進位
	≤8	≥10	個位數進位
4	≥10	≤7	十位數進位
	≤7	≥10	個位數進位
5	≥10	≤6	十位數進位
	≤6	≥10	個位數進位
6	≥10	≤5	十位數進位
	≤5	≥10	個位數進位

4、綜上所述整理成結果如表 10 所示

表 10　4 種數值進位的可能情形的數值總和之數字和結果(2*3)

編號	覆蓋數字	可能情形	數值總和之數字和
1	3、4、5、6	無需進位	21
2	1、2	十位數及個位數均需要進位	3
3	1~6	十位數需要進位	12
4	1~6	個位數需要進位	12

(二)2*3 排列方式的猜數方法

本研究以上述驗證數學式將數字 1~6 覆蓋，推估所形成的數值總和之數字和，數字以代數表示如 p2.之表 2。

1、數值總和之數字和為 15~18 時

當覆蓋數字 3、4、5、6 時，會使得數值的十位及個位數字產生均不需進位的狀況，所形成的數學式如下

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

假設 a 為 0　$=10(a+c+e)+b+d+f$

$=10(0+c+e)+b+d+f$

$=10(0+c+e)+b+d+f$

數值總和之十位數字為 $0+c+e$，個位數字為 $b+d+f$，則數值總和之數字和如下

數值總和之數字和$=(0+c+e+b+d+f)$[5]

$=(21-a$)[6]

依上述，若 a 為 3~6 時，數值總和之數字和則為 18~15，若分別假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 21 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

[5]代表 a~f 中將 a 設為 0 的數字總和
[6]代表數字 1~6 的數字和減去 a 的總和

2、數值總和之數字和為 1、2 時

當覆蓋數字 1、2 時，會使得數值的十位及個位數字產生均需要進位的狀況，所形成的數學式如下

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

假設 a 為 0 $=10(a+c+e)+b+d+f$

$=10(0+c+e)+b+d+f$

$=100+10(0+c+e-10+1)+(b+d+f-10)$

數值總和之百位數字為 1，十位數字為 $0+c+e-10+1$，個位數字為 $b+d+f-10$，則數值總和數字和如下

數值總和之數字和$=1+0+c+e-10+1+b+d+f-10$

$=(0+c+e+b+d+f)+1-9-10$

$=(21-a)+1-9-10$

$=3-a$

當覆蓋數字為 1、2 時，數值總和之數字和為 2、1，若分別假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 3 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

3、數值總和之數字和為 6~11 時

(1)十位數需要進位之情形

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

假設 a 為 0 $=10(a+c+e)+b+d+f$

$=100+10(0+c+e-10)+b+d+f$

數值總和之百位數字為 1，十位數字為 $0+c+e-10$，個位數字為 $b+d+f$，數值總和數字和如下

數值總和之數字和$=1+0+c+e-10+b+d+f$

$=(0+c+e+b+d+f)+1-10$

$=(21-a)+1-10$

$=12-a$

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和之數字和分別為 11、10、9、8、7、6，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 12 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

(2)個位數需要進位之情形

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

假設 a 為 0　$=10(a+c+e)+b+d+f$

$=10(0+c+e)+10*1+(b+d+f-10)$

$=10(0+c+e+1)+(b+d+f-10)$

數值總和之十位數字為 $0+c+e+1$，個位數字為 $b+d+f-10$，則數值總和之數字和如下

數值總和數字和$=0+c+e+1+b+d+f-10$

$=(0+c+e+b+d+f)+1-10$

$=(21-a)+1-10$

$=12-a$

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和數字和分別為 11、10、9、8、7、6，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 12 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

4、將上述 1~3 的結果整理成表 11 所示

表 11　4 種數值進位可能的猜數標準及數值總和之數字和(2*3)

編號	可能情形	猜數標準	數值總和之數字和
1	無需進位	21	$21-a$
2	十位數及個位數均需要進位	3	$3-a$
3	十位數需要進位	12	$12-a$
4	個位數需要進位	12	$12-a$

5、數值總和之數字和為 3、4、5、12、13、14 時

當覆蓋數字為 1~6 時，以表 12 的可能情形計算，其數值總和之數字和不可能為 3、4、5、12、13、14

(1)無需進位

當數值總和之數字和分別為 3、4、5、12、13、14 時，則覆蓋數字牌利用 $21-a$ 計算分別為 18、17、16、9、8、7，但本研究使用之數字為 1~6，故不合理

(2)十位數及個位數均需要進位

當數值總和之數字和分別為 3、4、5、12、13、14 時，則覆蓋數字牌利用 $3-a$ 計算分別為 0、－1、－2、－9、－10、－11，但本研究使用之數字為 1~6，故不合理

(3)數值的十位數或個位數需要進位

當數值總和之數字和分別為 3、4、5、12、13、14 時，則覆蓋數字牌利用 $12-a$ 計算分別為 9、8、7、0、－1、－2，但本研究使用之數字為 1~6，故不合理

三、以 3*2 排列方式的數值總和之數字和及猜數方法

(一)本研究針對 4 種數值進位可能分析

本研究發現以 3*2 排列方式在加總時會有數字進位的可能會使個位數、十位數、百位數數值超過 10 並進位到十位數、百位數、千位數，以下針對有無進位進行分析，數字以代數表示 p3.表 3。

1、無需進位

兩組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100(a+d)+10(b+e)+c+f$

數值總和之百位數字為 $a+d$，十位數字為 $b+e$，個位數字為 $c+f$，數值總和之數字和如下

數值總和數字和 $=(a+d+b+e+c+f)$[7]

$=1+2+3+4+5+6$

$=21$

[7]代表數字 1~6 的總和

2、需要進位

本研究發現兩組三位數的數值在加總進位時，一旦有一個位數進位，其他二個位數便無法進位，因此分別將個位數、十位數及百位數的進位情形加以分析

(1)百位數需要進位

兩組數值總和＝$100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100*10+100(a+d-10)+10\ (b+e)+c+f$

$=1000*1+100(a+d-10)+10(b+e)+c+f$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $a+d-10$，十位數字為 $b+e$，個位數字為 $c+f$，數值總和數字和如下

數值總和之數字和＝$1+a+d-10+b+e+c+f$

$=(a+d+b+e+c+f)+1-10$

$=21+1-10$

$=12$

(2)十位數需要進位

兩組數值總和＝$100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100(a+d\ )+100+10\ (b+e-10)+c+f$

$=100(a+d+1)+10(b+e-10)+c+f$

數值總和之百位數字為 $a+d+1$，十位數字為 $b+e-10$，個位數字為 $c+f$，數值總和數字和如下

數值總和之數字和＝$a+d+1+b+e-10+c+f$

$=(a+d+b+e+c+f)+1-10$

$=21+1-10$

$=12$

(3)個位數需要進位

兩組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100(a+d)+10(b+e)+10+(c+f-10)$

$=100(a+d)+10(b+e+1)+(c+f-10)$

數值總和之百位數字為 $a+d$，十位數字為 $b+e+1$，個位數字為 $c+f-10$，數值總和數字和如下

數值總和之數字和$=a+d+b+e+1+c+f-10$

$=(a+d+b+e+c+f)+1-10$

$=21+1-10$

$=12$

(4)綜上所述整理成結果如表 12 所示

表 12　4 種數值進位可能的數值總和之數字和結果(3*2)

編號	可能情形	數值總和之數字和
1	無需進位	21
2	百位數需要進位	12
3	十位數需要進位	12
4	個位數需要進位	12

(二)3*2 排列方式的猜數方法

本研究以上述驗證數學式將數字 1~6 覆蓋，推估所形成的數值總和之數字和，數字以代數表示 p3.之表 3)

1、數值總和之數字和為 15~20 時

兩組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f$

假設 a 為 0　　$=100(a+d)+10(b+e)+c+f$

$=100(0+d)+10(b+e)+c+f$

數值總和之百位數字為 $0+d$，十位數字為 $b+e$，個位數字為 $c+f$，數值總和數字和如下

數值總和之數字和 $=(0+d+b+e+c+f)$[8]

$=(21-a)$[9]

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和數字和則為 20、19、18、17、16、15，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 21 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

2、數值總和之數字和為 6~11 時

(1)百位數需要進位

兩組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f$

假設 a 為 0 $=100*10+100(a+d-10)+10(b+e)+c+f$

$=1000*1+100(0+d-10)+10(b+e)+c+f$

數值總和之千位數字為 1，百位數字為 $0+d-10$，十位數字為 $b+e$，個位數字為 $c+f$，數值總和數字和如下

數值總和數字和 $=1+0+d-10+b+e+c+f$

$=(0+d+b+e+c+f)+1-10$

$=(21-a)+1-10$

$=12-a$

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和數字和則為 11、10、9、8、7、6，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 12 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

(2)十位數需要進位

兩組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f$

假設 a 為 0 $=100(a+d)+10*1+10(b+e-10)+c+f$

$=100(0+d)+100*1+10(b+e-10)+c+f$

$=100(0+d+1)+10(b+e-10)+c+f$

[8]代表 a~f 中將 a 設為 0 的數字總和
[9]代表數字 1~6 的數字和減去 a 的總和

數值總和之百位數字為 $0+d+1$，十位數字為 $b+e-10$，個位數字為 $c+f$，數值總和數字和如下

數值總和數字和 $=0+d+1+b+e-10+c+f$

$=(0+d+b+e+c+f)+1-10$

$=(21-a)+1-10$

$=12-a$

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和數字和則為 11、10、9、8、7、6，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 12 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

(3)數值的個位數需要進位

兩組數值總和 $=100a+10b+c+100d+10e+f$

假設 a 為 0 $\quad =100(a+d)+10*1+10(b+e-10)+c+f$

$=100(0+d)+10(b+e)+10*1+(c+f-10)$

$=100(0+d)+10(b+e+1)+(c+f-10)$

數值總和之百位數字為 $0+d$，十位數字為 $b+e+1$，個位數字為 $c+f-10$，數值總和數字和如下

數值總和數字和 $=0+d+b+e+1+c+f-10$

$=(0+d+b+e+c+f)+1-10$

$=(21-a)+1-10$

$=12-a$

當 a 為 1、2、3、4、5、6 時，數值總和數字和則為 11、10、9、8、7、6，若假設 b、c、d、e、f 為 0 亦可以上述驗證，猜數者只需用 12 減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

4、將上述 1~3 的結果整理成表 13 所示

表 13　4 種數值進位可能的猜數標準及數值總和之數字和(3*2)

編號	可能情形	猜數標準	數值總和之數字和
1	無需進位	21	$21-a$
2	百位數需要進位	12	$12-a$
3	十位數需要進位	12	$12-a$
4	個位數需要進位	12	$12-a$

5、當數值總和之數字和為 1、2、3、4、5、12、13、14

當覆蓋數字牌為 1~6 時，以表 14 的可能情形計算，其數值總和之數字和不可能為 1、2、3、4、5、12、13、14

(1)無需進位

當數值總和之數字和分別為 1、2、3、4、5、12、13、14 時，則覆蓋數字牌利用 $21-a$ 計算分別為 20、19、18、17、16、9、8、7，但本研究使用之數字為 1~6，故不合理

(2)百位數、十位數或個位數需要進位

當數值總和之數字和分別為 1、2、3、4、5、12、13、14 時，則覆蓋數字牌利用 $12-a$ 計算分別為 11、10、9、8、7、0、－1、－2，但本研究使用之數字為 1~6，故不合理

柒、　結論

一、本研究在 3*3 的格式中推導出不覆蓋數字牌的數值總和之數字和分別為 9、18、27，均為 9 的倍數，在操作魔術時只要以 9 的倍數作為猜數標準即可猜出覆蓋的數字牌。

二、本研究在 2*3 的格式中推導出不覆蓋數字牌的數值總和之數字和分別為 3、12、21，只有 12 是 6 的倍數，數值加總時進位與否會產生不同的數值結果，因此在操作魔術時，當猜數者提供的數值總和之數字和為 1 或 2 時，以 3 作為猜數標準，當猜數者提供的數值總和之數字和為 6~11 時，以 12 作為猜數標準；當猜數者提供的數值總和之數字和為 15~18，以 21 作為猜數標準，用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數值總和之數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

三、本研究在 2*3 的格式中，不可能出現數值總和之數字和為 3、4、5、12、13、14 這 6 組數字。

四、本研究在 3*2 的格式中推導出不覆蓋數字牌的數值總和之數字和分別為 12、21，只有 12 是 6 的倍數，數值加總時進位與否會產生不同的數值結果，因此在操作魔術時，當猜數者提供的數值總和之數字和為 15~20 時，以 21 作為猜數標準，當猜數者提供的數值總和之數字和為 6~11 時，以 12 作為猜數標準，用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數值總和之數字和即可猜出覆蓋的數字牌。

五、本研究在 3*2 的格式中，不可能出現數值總和之數字和為 1、2、3、4、5、12、13、14 這 8 組數字。

捌、 參考文獻

一、小益的布拉格廣場。九牌蓋一。https://blog.xuite.net/davishung7/davis7/494114819

二、國中數學課本第 1 冊第二章。康軒文教。

【評語】030425

本作品討論的是：將 1~9 排成 3 個三位數，擦去其中一個數字，再將數字加總，由加總後所得數字的各個位數的數字和，猜出原本所擦去的數字是多少這樣的猜數字問題。問題很有趣。作者們聰明的看到了這個問題和判斷一個數字是不是9的倍數這樣的問題是相關的，並藉助國中階段所學到的判斷 9 的倍數的方法，針對原本的問題給出了完整的解答。對於一些可能的變形問題，也做了討論。說明的很仔細，解釋的也很清楚，值得鼓勵。此外，懂得運用數的和及倍數關係設計出有趣的數學遊戲，對於應用於數學教學上也可以有不錯的效果，學生可藉玩此遊戲學到數的特性，未來可針對例如 9 的倍數設計更多類似的遊戲，在教學上應有很大用處。有點比較美中不足的是，沒有注意到判斷一個數是否為 9 的倍數的方法其實也可以用來計算一個數字除以 9 的餘數。如果有看到這一點，應該可以利用這樣的性質來簡化猜數字的規則，說明也應該會更加的精簡。透過這樣的概念，也應該可以變化出更多種猜數字的玩法。如果能針對玩法的各種可能變化再多作著墨會更好。

作品簡報

虛境探定數

摘要

從撲克牌魔術中，發現了數字1~9的號碼牌利用3*3的排列方式，找出三組三位數值總和之數字和分別為9、18、27，可以藉由與9的倍數之差距猜出覆蓋的數字牌，將此方法加以發展到數字1~6的號碼牌利用2*3及3*2的排列方式，找出其數值總和之數字和並猜出覆蓋的數字牌。

研究動機

在某次上課時，老師變了一個魔術，是將數字1到9的數字排成九宮格，再任意蓋一張牌，將形成的數值總和之數字和告訴老師，老師居然能猜出覆蓋的那張牌的數字，經過老師講解後，發現數值總和之數字和與9的倍數有關聯，於是我們想探討數字1~6以2*3及3*2的排列方式，嘗試找出數值總和之數字和與6的倍數的關係並找出猜數方法。

研究目的

一、探討數字1~9以3*3排列方式的數值總和之數字和與9的倍數關係並驗證猜數方法

二、探討數字1~6以2*3排列方式的數值總和之數字和與6的倍數關係並找出猜數方法

三、探討數字1~6以3*2排列方式的數值總和之數字和與6的倍數關係並找出猜數方法

研究過程或方法

一、3*3排列方式

a	b	c
d	e	f
g	h	i

三組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f+100g+10h+i$

$=100(a+d+g)+10(b+e+h)+c+f+i$

數值總和之數字和設為一般式為$a+d+g+b+e+h+c+f+i$

二、2*3排列方式

a	b
c	d
e	f

三組數值總和$=10a+b+10c+d+10e+f$

$=10(a+c+e)+b+d+f$

數值總和之數字和設為一般式為$a+c+e+b+d+f$

三、3*2排列方式

a	b	c
d	e	f

兩組數值總和$=100a+10b+c+100d+10e+f$

$=100(a+d)+10(b+e)+c+f$

數值總和之數字和設為一般式為$a+d+b+e+c+f$

由於數值在加總時會有進位的可能，因此將是否進位因素加入三種不同排列方式中

研究結果

一、3*3排列方式

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為27、18或9。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表1所示。

表1　覆蓋數字牌的數值總和之數字和(3*3)

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	26、17、8
2	25、16、7
3	24、15、6
4	23、14、5
5	22、13、4
6	21、12、3
7	20、11、2
8	19、10、1
9	18、9

二、2*3排列方式

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為21、12或3。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表2所示。

表2　覆蓋數字牌的數值總和之數字和(2*3)

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	11、2
2	10、1
3	9、18
4	8、17
5	7、16
6	6、15

三、3*2排列方式

(一)不覆蓋數字牌的數值總和之數字和恰為21或12。

(二)覆蓋數字牌的數值總和之數字和如表3所示。

表3　覆蓋數字牌的數值總和之數字和(3*2)

覆蓋數字	數值總和之數字和
1	20、11
2	19、10
3	18、9
4	17、8
5	16、7
6	15、6

討論

一、3*3排列方式

(一)本研究針對3種數值進位可能分析

表4　3種數值進位的可能情形的數值總和之數字和結果

編號	可能情形	數值總和	數字和
1	三個位數均進位1次	$1000+100(a+d+g-10+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$	18
2	當有一個位數進位2次，其餘兩位數進位1次	$2000+100(a+d+g-20+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$	9
		$1000+100(a+d+g-10+2)+10(b+e+h-20+1)+(c+f+i-10)$	
		$1000+100(a+d+g-10+1)+10(b+e+h-10+2)+(c+f+i-20)$	
3	當有兩個位數進位1次，另外一個位數無需進位	$1000+100(a+d+g-10+1)+10(b+e+h-10)+(c+f+i)$	27
		$1000+100(a+d+g-10)+10(b+e+h+1)+(c+f+i-10)$	
		$100(a+d+g+1)+10(b+e+h-10+1)+(c+f+i-10)$	

(二)3*3排列方式的猜數方法

表5　3種數值進位可能的猜數標準及數值總和之數字和(3*3)

編號	可能情形	猜數標準	覆蓋a後數值總和之數字和
1	三個位數均進位1次	18	$18-a$
2	當有一個位數進位2次，其餘兩位數進位1次	9	$9-a$
3	當有兩個位數進位1次，另外一個位數無需進位	27	$27-a$

當覆蓋a後數值總和之數字和為1~8時，以9作為猜數標準
當覆蓋a後數值總和之數字和為9~17時，以18作為猜數標準
當覆蓋a後數值總和之數字和為18~26時，以27作為猜數標準
猜數者只需用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌

二、2*3排列方式

(一)本研究針對4種數值進位可能分析

表6　4種數值進位的可能情形的數值總和之數字和結果(2*3)

編號	覆蓋數字	可能情形	數值總和	數字和
1	3、4、5、6	無需進位	$10(a+c+e)+b+d+f$	21
2	1、2	十位數及個位數均需要進位	$100*1+10(a+c+e-10+1)+(b+d+f-10)$	3
3	1~6	十位數需要進位	$100*1+10(a+c+e-10)+b+d+f$	12
4	1~6	個位數需要進位	$10(a+c+e+1)+(b+d+f-10)$	12

(二)2*3排列方式的猜數方法

表7　4種數值進位可能的猜數標準及數值總和之數字和(2*3)

編號	覆蓋數字牌(a)	可能情形	猜數標準	數值總和之數字和
1	3、4、5、6	無需進位	21	$21-a$
2	1、2	十位數及個位數均需要進位	3	$3-a$
3	1~6	十位數需要進位	12	$12-a$
4	1~6	個位數需要進位	12	$12-a$

1、猜數方法

當覆蓋a後數值總和之數字和為15、16、17、18時，以21作為猜數標準

當覆蓋a後數值總和之數字和為1、2時，以3作為猜數標準

當覆蓋a後數值總和之數字和為6~11時，以12作為猜數標準

猜數者只需用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌

2、不合理之情形

本研究利用表6的可能情形推算，當數值總和之數字和為3、4、5、12、13、14時覆蓋的數字牌，其結果整理如表8

表8　2*3排列方式數值總和之數字和不合理之情形

編號	可能情形	推算數字牌
1	無需進位	18、17、16、9、8、7
2	十位數及個位數均需要進位	0、－1、－2、－9、－10、－11
3	十位數或個位數需要進位	9、8、7、0、－1、－2

三、3*2排列方式

(一)本研究針對4種數值進位可能分析

表9　4種數值進位可能的數值總和之數字和結果(3*2)

編號	可能情形	數值總和	數值總和之數字和
1	無需進位	$100(a+d)+10(b+e)+c+f$	21
2	百位數需要進位	$1000*1+100(a+d-10)+10(b+e)+c+f$	12
3	十位數需要進位	$100(a+d+1)+10(b+e-10)+c+f$	12
4	個位數需要進位	$100(a+d)+10(b+e+1)+(c+f-10)$	12

(二)3*2排列方式的猜數方法

表10　4種數值進位可能的猜數標準數值總和之數字和結果(3*2)

編號	覆蓋數字(a)	可能情形	猜數標準	數值總和之數字和
1	1~6	無需進位	21	$21-a$
2	1~6	百位數需要進位	12	$12-a$
3	1~6	十位數需要進位	12	$12-a$
4	1~6	個位數需要進位	12	$12-a$

1、猜數方法

當覆蓋a後數值總和之數字和為15~20時，以21作為猜數標準

當覆蓋a後數值總和之數字和為6~11時，以12作為猜數標準

猜數者只需用對應的猜數標準減去被猜數者提供的數字和即可猜出覆蓋的數字牌

2、不合理之情形

本研究利用表10的可能情形推算，當數值總和之數字和為1、2、3、4、5、12、13、14時覆蓋的數字牌，其結果整理如表11

表11　3*2排列方式數值總和之數字和不合理之情形

編號	可能情形	推算數字牌
1	無需進位	20、19、18、17、16、9、8、7
2	百位數、十位數或個位數需要進位	11、10、9、8、7、0、－1、－2

結論

排列方式	猜數標準	可能出現數值總和之數字和	不可能出現數值總和之數字和
3*3	9	1~8	無
	18	9~17	
	27	18~26	
2*3	3	1、2	3、4、5、12、13、14
	12	6~11	
	21	15~18	
3*2	12	6~11	1、2、3、4、5、12、13、14
	21	15~20	

參考文獻

一、小益的布拉格廣場。九牌蓋一。
https://blog.xuite.net/davishung7/davis7/494114819
二、國中數學課本第1冊第二章。康軒文教。