

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

佳作

030424

由兩個全等形構造的衍伸圖形之性質研究

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者： 國二 陳家睿 國一 顏廷翰 國二 鍾一玄	指導老師： 蕭偉智
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：面積不變量、對稱、等腰三角形

摘要

本研究源於 2016 年數學雜誌 *Crux Mathematicorum* 的一個三角形定性問題[1]，我們將這個問題進行推廣且創新探討其定量與定性性質。我們先討論任意三角形與任意凸四邊形、凹四邊形，分別針對不同連線情形下的兩個衍伸圖形的有向面積之和與有向面積之差進行完整討論，再巧妙利用平移不變性處理行列式級數和，最後給出一般化的不變量關係式與刻劃其幾何意義。此外，我們也特殊化探討其衍伸圖形恆為正三角形、正方形等有趣優美的定性性質。最後，系統性推廣到平面上任意封閉的凸四邊形、凹多邊形，先給出不同連線方式之間的重要輪換對稱性質，再分為奇多邊形與偶多邊形進行討論而得出任意連線構造的衍伸圖形之有向面積不變量的一般式。

壹、前言

一、研究動機與文獻探討

Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc 於 2016 年九月提出一個十分有趣的平面三角形幾何問題[1]，如下所示。其中為了本文研究方便，我們更改了原本問題中的點名稱，但並不影響原始問題。

Consider triangle $A_1A_2A_3$ and let P be any point in the plane. Let points B_1, B_2, B_3 be reflections of points A_1, A_2, A_3 in P , respectively. Construct the 3 triangles $A_1B_2C_1, A_2B_3C_2$ and $A_3B_1C_3$ outwardly as the given diagram indicates:

Show that $C_1C_2C_3$ is an equilateral triangle.

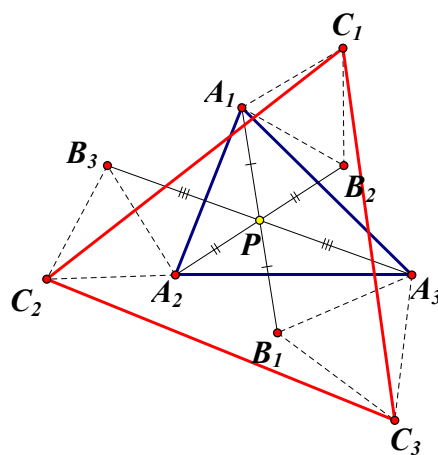


圖 1： $\triangle C_1C_2C_3$ 為正三角形。

此題目漏敘述一個條件，即 $\triangle A_1B_2C_1$ 、 $\triangle A_2B_3C_2$ 與 $\triangle A_3B_1C_3$ 皆為正三角形。在此條件下，我們可利用向量的概念來處理此問題即可得出證明。

考慮向量 $\overrightarrow{C_3C_2} = \overrightarrow{C_3B_1} + \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2C_2}$ 以及 $\overrightarrow{C_3C_1} = \overrightarrow{C_3A_3} + \overrightarrow{A_3B_2} + \overrightarrow{B_2C_1}$ 。比較 $\overrightarrow{C_3B_1}$ 與 $\overrightarrow{C_3A_3}$ ，可得兩向量長度 $|\overrightarrow{C_3B_1}| = |\overrightarrow{C_3A_3}|$ 且夾角為 60 度；再比較 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 與 $\overrightarrow{B_2C_1}$ ，因

為四邊形 $A_1B_2B_1A_2$ 是平行四邊形（對角線互相平分），可得向量 $\overrightarrow{B_1A_2} = \overrightarrow{B_2A_1}$ ，又因為 $\triangle A_1B_2C_1$ 是正三角形，所以兩向量長度 $|\overrightarrow{B_1A_2}| = |\overrightarrow{B_2C_1}|$ 且夾角為 60 度；同理可得，兩向量長度 $|\overrightarrow{A_2C_2}| = |\overrightarrow{A_3B_2}|$ 且夾角為 60 度。因此，兩向量長度 $|\overrightarrow{C_3C_2}| = |\overrightarrow{C_3B_1}|$ 且夾角為 60 度，同理可得兩向量 $|\overrightarrow{C_2C_3}| = |\overrightarrow{C_2C_1}|$ 且夾角為 60 度，故 $\triangle C_1C_2C_3$ 是正三角形。

若將 $\overline{A_1B_2}$ 、 $\overline{A_2B_3}$ 與 $\overline{A_3B_1}$ 為邊構造的正三角形換個方向，如下圖所示， $\triangle A_1B_2D_1$ 、 $\triangle A_2B_3D_2$ 與 $\triangle A_3B_1D_3$ 的頂點皆為順時鐘方向的正三角形時，我們仿照上述的向量證明，可得出 $\triangle D_1D_2D_3$ 是正三角形。有趣的是，以上性質皆與 P 的位置無關。

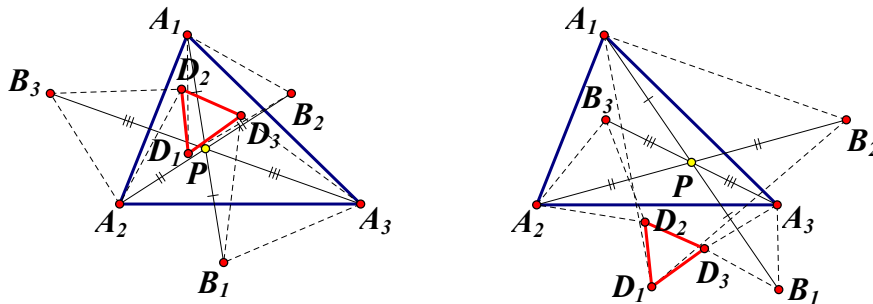


圖2： $\triangle D_1D_2D_3$ 為正三角形。

再計算兩個正三角形面積 $\triangle C_1C_2C_3 - \triangle D_1D_2D_3$ 以及 $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$ ，可得到驚喜的不變量： $\frac{\triangle C_1C_2C_3 - \triangle D_1D_2D_3}{\triangle A_1A_2A_3} = 3$ ，以及 $\frac{\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3}{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ （下文有證明此性質）。

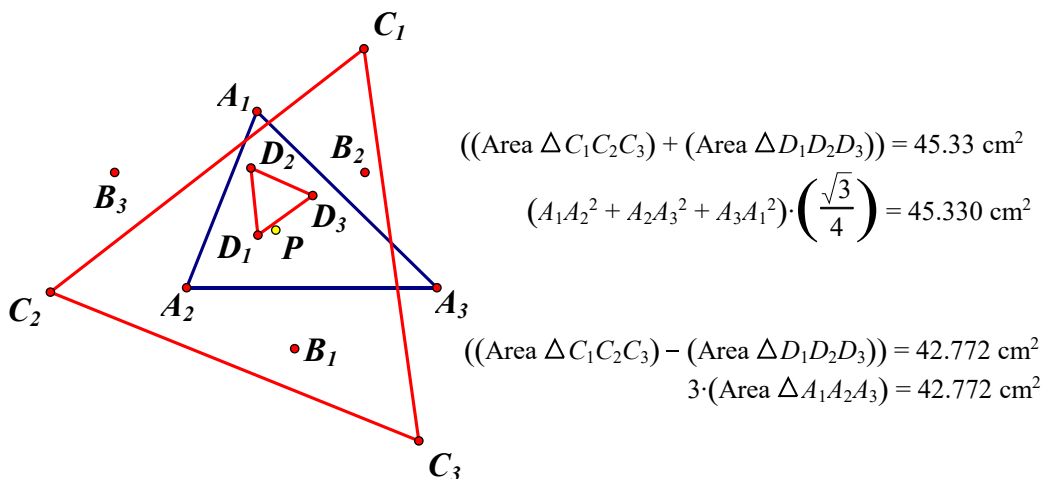


圖3： $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$ 的面積不變量。

我們發現的面積不變量是原始題目沒有發現的！尤其是 $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2)$ 十分有趣！它的幾何意義是正 $\triangle C_1C_2C_3$ 與正 $\triangle D_1D_2D_3$ 的面積總和為以三邊為邊長構造的三個正三角形面積總和。

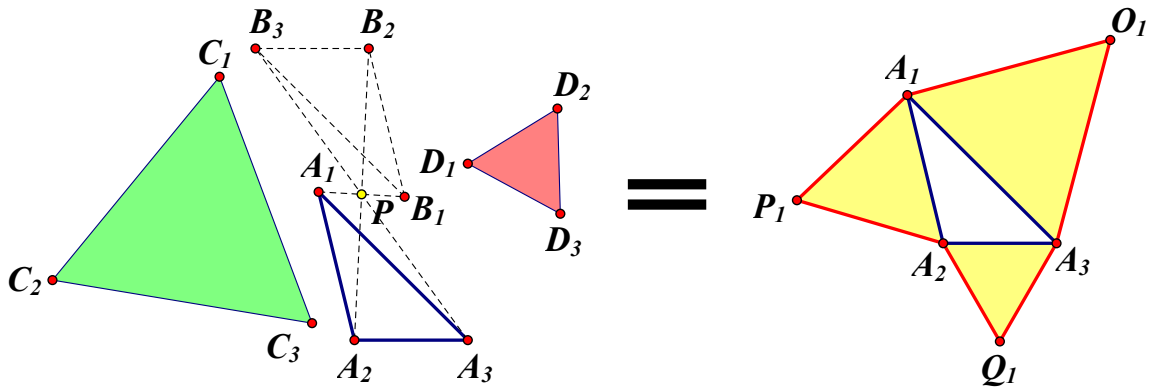


圖4： $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$ 的面積幾何意義。

二、本研究預計的推廣探究方向

因為點 B_1 、 B_2 、 B_3 分別是點 A_1 、 A_2 、 A_3 關於 P 點為點對稱中心的對稱點，因此 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ 為全等形且互為點對稱圖形，所以我們把這個問題看作由兩個全等形構造的衍伸圖形 $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$ 的性質。

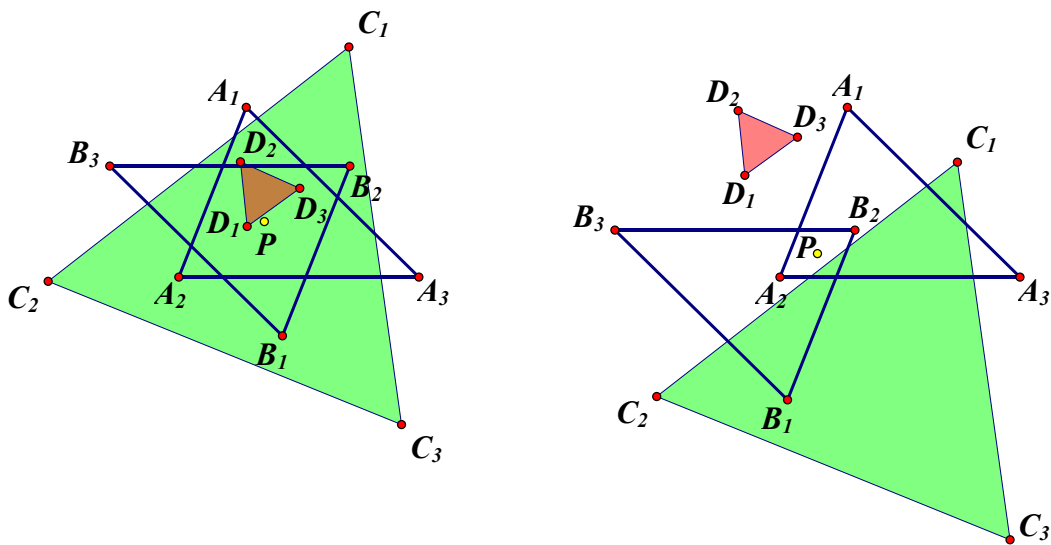


圖5：全等形構造的衍伸圖形。

針對這個有趣的問題，我們發現其發展性很高，除了將三角形推廣到任意凸凹多邊形多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與多邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 以外，還有兩個一般化推廣探究方向：

第一，不同的頂點連線方式 $\overline{A_k B_{k+m}}$ (共有 n 種)；

第二，第二，以 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 為底邊且底角為 θ 來逆時鐘構造等腰 $\triangle A_k B_{k+m} C_k$ 以及順時鐘構造等腰 $\triangle A_k B_{k+m} D_k$ 。

平面上有兩個全等多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，考慮不同頂點的連線 $\overline{A_kB_{k+m}}$ ($k = 1, 2, \dots, n$ 且 $m = 0, 1, \dots, n-1$)，並以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 為底邊構造底角為 θ 的等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ 與 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ ，探討其衍伸的多邊形 $C_1C_2C_3 \dots C_n$ 與多邊形 $D_1D_2D_3 \dots D_n$ 的定性性質與定量性質。

三、研究目的

(一) 平面上給定任意點對稱的 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $B_1B_2B_3$ ，探究以下項目：

1. 特殊化：以 $\overline{A_kB_k}$ 為邊，構造正三角形所得出的衍伸圖形 $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$ 的定性與定量性質。其餘兩種情形 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 亦同理。
2. 一般化：以 $\overline{A_kB_k}$ 為邊且底角為 θ 構造等腰三角形所得出的衍伸圖形 $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$ 的定性與定量性質。其餘兩種情形 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 亦同理。

(二) 平面上給定任意點對稱的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ ，探究以下兩個項目：

1. 一般化：以 $\overline{A_kB_k}$ 為邊且底角為 θ ，構造等腰三角形所得出的衍伸圖形四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 的定性與定量性質。其餘三種情形 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 與 $\overline{A_kB_{k+3}}$ 亦同理。
2. 特殊化：探討四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為平行四邊形，其衍伸圖形四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與 $D_1D_2D_3D_4$ 的定性與定量性質。

(三) 一般化平面上給定任意點對稱的凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 為底邊，並以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 構造底角為 θ ($0 < \theta < 90^\circ$) 的任意等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ (頂點逆時鐘) 與 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ (頂點順時鐘)，探討其衍伸多邊形 $C_1C_2C_3 \dots C_n$ 與 $D_1D_2D_3 \dots D_n$ 的定性與定量性質。

(四) 延伸平面上給定任意「旋轉 90 度」的凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 為底邊，並以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 構造底角為 θ ($0 < \theta < 90^\circ$) 的任意等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ (頂點逆時鐘) 與 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ (頂點順時鐘)，探討其衍伸多邊形 $C_1C_2C_3 \dots C_n$ 與 $D_1D_2D_3 \dots D_n$ 的定性與定量性質。

貳、研究架構

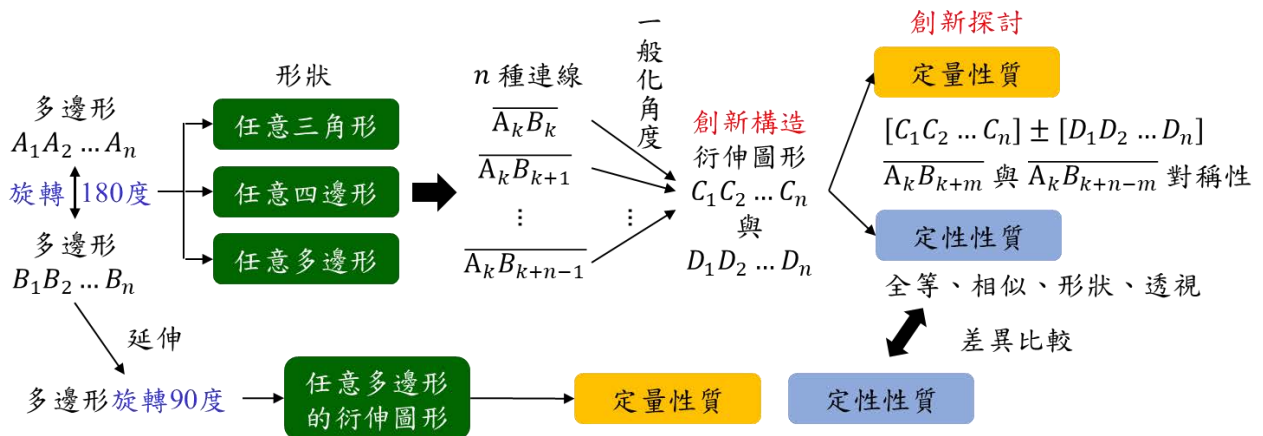


圖6：研究架構圖。

參、研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體。

肆、預備知識

符號 1. (有向面積) 約定本文中平面上封閉凸(凹)多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的有向面積以符號 $[P_1P_2P_3 \dots P_n]$ 表示，頂點逆時鐘方向，有向面積為正；順時鐘方向為，有向面積為負。此外，本文將多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 簡稱為多邊形 P 。

預備定理 2. (測量師公式) [2] 平面上封閉凸(凹)多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的頂點坐標為 $P_k(x_k, y_k)$ ，則其有向面積為

$$[P_1P_2P_3 \dots P_n] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$

其中， $x_{n+k} = x_k$ 、 $y_{n+k} = y_k$ 。

預備性質 3. (平移不變性)

(1) 行列式的級數和 $\sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m+h} \end{vmatrix}$ 。

(1) 行列式的級數和 $\sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m+h} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m} \end{vmatrix}$ 。

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 、 $h = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

伍、研究過程與結果

平面上有全等的凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，我們約定其頂點坐標 $A_k(x_k, y_k)$ 方向為逆時鐘，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

因為多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 為點對稱圖形，注意到對稱中心 P 點不影響性質。不失一般性，假設 $P(0, 0)$ ，此時可得坐標 $B_k(-x_k, -y_k)$ ，這樣可以大大簡化接下來的證明過程。

先討論以 \overline{PQ} 底邊構造底角為 θ 的等腰 $\triangle PQC$ 與 $\triangle PQD$ 的 C 點與 D 點坐標。

性質1. 若點坐標 $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ ，則可得等腰三角形的頂點 C 與 D 點的坐標

$$C\left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) - \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) + \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)\right)$$

$$D\left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) + \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) - \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)\right)$$

證明：如圖，令 \overline{PQ} 中點為 M ，過 P 作鉛垂線，過 Q 作水平線，兩線交於 R 點。過 C 作鉛垂線，過 M 作水平線，兩線交於 N 點，可得出 $\triangle QPR \sim \triangle CMN$ (AA 相似)。

考慮 $\frac{\overline{CM}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CM}}{2 \times \overline{QM}} = \frac{1}{2} \times \tan \theta$ ，所以 $\overline{MN} = \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P)$ 、 $\overline{CN} = \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)$ 。

故 C 點坐標為

$$C\left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) - \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) + \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)\right)$$

同理可得 D 點坐標為

$$D\left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) + \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) - \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)\right)$$

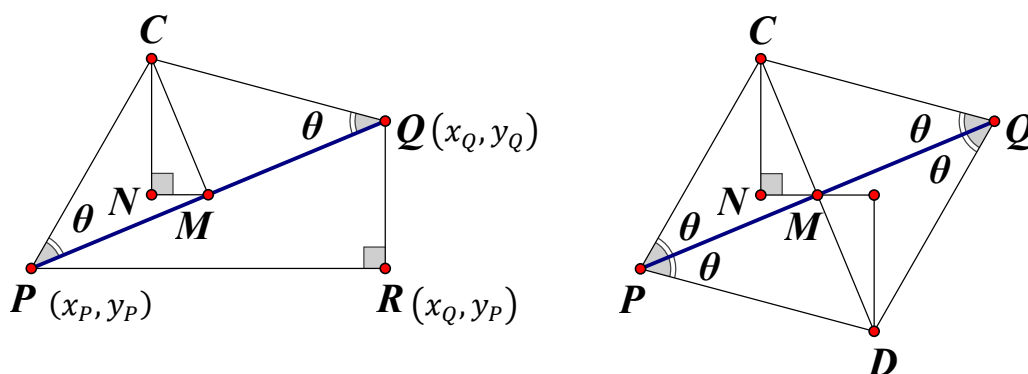


圖7：等腰三角形的頂點坐標。

□

一、點對稱的 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ 構造的衍伸圖形

(一) 以 $\overline{A_kB_k}$ 為底邊且底角 $\theta = 60^\circ$ 構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ ，以 $\overline{A_kB_k}$ 為邊構造正 $\triangle A_kB_kC_k$ (順時鐘方向) 與正 $\triangle A_kB_kD_k$ (逆時鐘方向)。

已知 $A_k(x_k, y_k)$ 與 $B_k(-x_k, -y_k)$ ，根據性質1，當 $\theta = 60^\circ$ 時，我們可得出坐標：
 $C_k(\sqrt{3}y_k, -\sqrt{3}x_k)$ 與 $D_k(-\sqrt{3}y_k, \sqrt{3}x_k)$ 。

以 $\overline{A_kB_k}$ 為底邊構造正 $\triangle A_kB_kC_k$ 與 $\triangle A_kB_kD_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質2. (1) $\triangle C_1C_2C_3 \cong \triangle D_1D_2D_3$ 且 $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ 。

(2) 面積不變量 $\frac{[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 0$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 6$ 。

證明：因為 $C_k(\sqrt{3}y_k, -\sqrt{3}x_k)$ ，所以

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(\sqrt{3}(y_1 - y_2))^2 + (-\sqrt{3}(x_1 - x_2))^2} = \sqrt{3} \times \overline{A_1A_2}$$

同理可得 $\overline{C_2C_3} = \sqrt{3} \times \overline{A_2A_3}$ 與 $\overline{C_3C_1} = \sqrt{3} \times \overline{A_3A_1}$ 。同樣的方法也可得出 $\overline{D_1D_2} = \sqrt{3} \times \overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{D_2D_3} = \sqrt{3} \times \overline{A_2A_3}$ 與 $\overline{D_3D_1} = \sqrt{3} \times \overline{A_3A_1}$ ，所以 $\triangle C_1C_2C_3 \cong \triangle D_1D_2D_3$ (SSS 全等) 且 $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ 。

透過全等與相似則可得出 $\triangle C_1C_2C_3 = \triangle D_1D_2D_3 = 3 \triangle A_1A_2A_3$ ，故有面積不變量

$$\frac{[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 0 \text{ 且 } \frac{[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 6$$

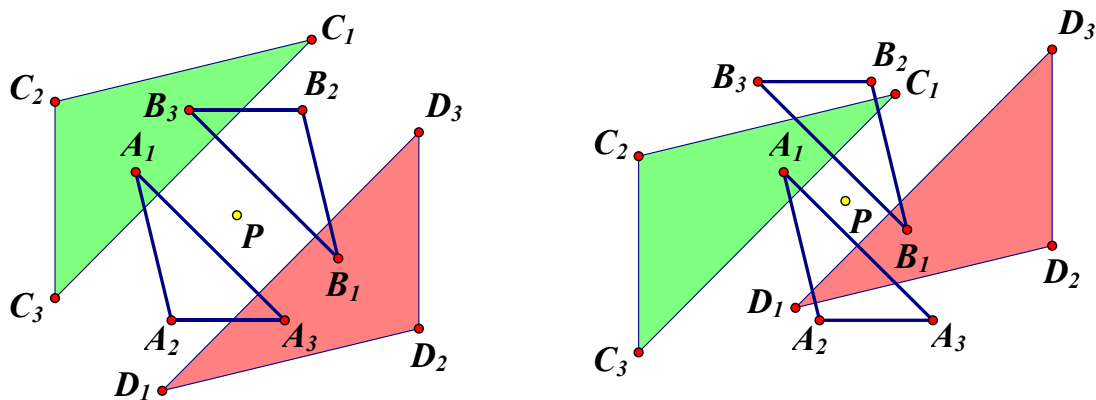


圖8：以 $\overline{A_kB_k}$ 為邊構造的衍伸圖形。

□

(二) 以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 為底邊且底角 $\theta = 60^\circ$ 構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 與 $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 為邊構造正 $\triangle A_k B_{k+1} C_k$ (順時鐘方向) 與正 $\triangle A_k B_{k+1} D_k$ (逆時鐘方向)。

已知 $A_k(x_k, y_k)$ 與 $B_{k+1}(-x_{k+1}, -y_{k+1})$ ，根據性質1，當 $\theta = 60^\circ$ 時，可得出坐標：

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+1} - x_k) \right).$$

$$D_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+1} - x_k) \right).$$

以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 為底邊構造正 $\triangle A_k B_{k+1} C_k$ 與 $\triangle A_k B_{k+1} D_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質3. (1) $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。

(2) 面積 $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 且 $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 3$ 。

證明：因為 $C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_k - x_{k+1}) \right)$ ，所以

$$\overline{C_k C_{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left((x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}) - \sqrt{3}(-y_k + y_{k+2}) \right)^2 + \left((y_k - 2y_{k+1} + y_{k+2}) + \sqrt{3}(-x_k + x_{k+2}) \right)^2}$$

利用平方差計算 $\overline{C_1 C_2}^2 - \overline{C_2 C_3}^2$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(3(-x_2 + x_3) - \sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) \right) \left((2x_1 - x_2 - x_3) - \sqrt{3}(-y_2 + y_3) \right) + \right.$$

$$\left. \left(3(-y_2 + y_3) + \sqrt{3}(-2x_1 + x_2 + x_3) \right) \left((2y_1 - y_2 - y_3) + \sqrt{3}(-x_2 + x_3) \right) \right).$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(3(-x_2 + x_3) - \sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) \right) \left((2x_1 - x_2 - x_3) - \sqrt{3}(-y_2 + y_3) \right) + \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{3}(-y_2 + y_3) - (2x_1 - x_2 - x_3) \right) \left(-\sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) + 3(-x_2 + x_3) \right) \right).$$

$$= 0$$

所以 $\overline{C_1 C_2} = \overline{C_2 C_3}$ ，同理可得 $\overline{C_2 C_3} = \overline{C_3 C_1}$ 。對於對稱構造的 D_k 點，同樣方法也可以得出 $\overline{D_1 D_2} = \overline{D_2 D_3} = \overline{D_3 D_1}$ 。因此 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形

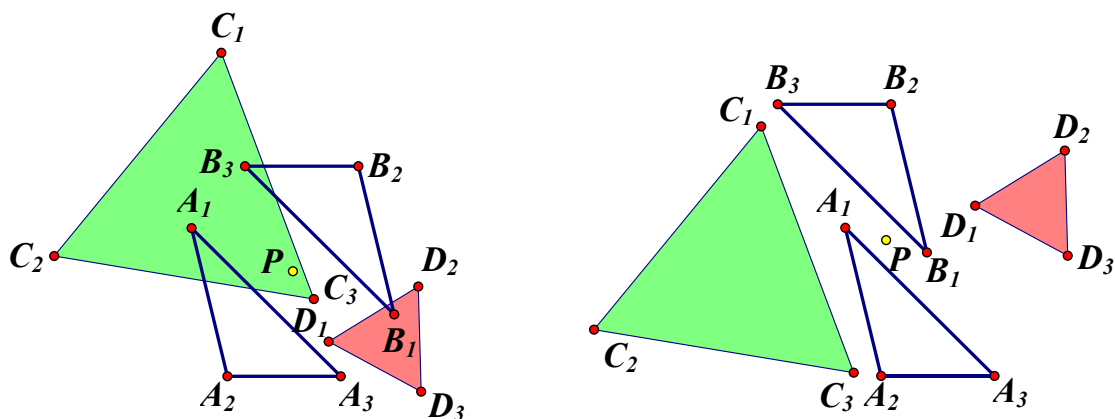


圖9：以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 為邊構造的衍伸圖形（必為正三角形）。

接下來討論面積，因為頂點 D_1 、 D_2 、 D_3 恆為順時鐘方向，考慮有向面積可得

有向面積 $A[C_1 C_2 C_3] - A[D_1 D_2 D_3]$

$$= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \sqrt{3}(y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \sqrt{3}(y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \sqrt{3}(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \sqrt{3}(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \sqrt{3}(y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \sqrt{3}(y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \sqrt{3}(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \sqrt{3}(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix}.$$

利用行列式基本運算性質進行拆解可得

$$\begin{aligned} & A[C_1 C_2 C_3] - A[D_1 D_2 D_3] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 \left(\begin{vmatrix} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right). \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 (2x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+2} + 2y_{k+1}^2 - 2y_k y_{k+2}). \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2) \quad (\text{因為 } \sum_{k=1}^3 x_{k+1}^2 = \sum_{k=1}^3 x_{k+2}^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_1}^2 + \overline{A_3 A_2}^2). \end{aligned}$$

利用相同方式我們可得出面積 $A[C_1 C_2 C_3] + A[D_1 D_2 D_3] = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} = 3[A_1 A_2 A_3]$

□

(三) 以 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為底邊且底角 $\theta = 60^\circ$ 構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 與 $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為邊構造正 $\triangle A_k B_{k+2} C_k$ （順時鐘方向）與正 $\triangle A_k B_{k+2} D_k$ （逆時鐘方向）。

已知 $A_k(x_k, y_k)$ 與 $B_{k+2}(-x_{k+2}, -y_{k+2})$ ，根據性質1，當 $\theta = 60^\circ$ 時，可得出坐標：

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+2} - x_k) \right).$$

$$D_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+2} - x_k) \right).$$

以 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為底邊構造正 $\triangle A_k B_{k+2} C_k$ 與 $\triangle A_k B_{k+2} D_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質4. (1) $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。

(2) 面積 $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ 且 $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 3$ 。

證明：因為以 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為邊構造的衍伸形為 x_k 與 x_{k+2} 的組合 (y_k 與 y_{k+2} 的組合)，當 $k = 1, 2, 3$ 時，根據預備性質3可得 x_k 與 x_{k+2} 的組合運算等同 x_{k+1} 與 x_{k+3} ($x_{k+3} = x_k$) 的組合運算，此時結果就與性質3相同。注意到，因為性質3是 x_k 與 x_{k+1} 的組合運算，這裡的性質4是 x_{k+1} 與 x_k 的組合運算，兩者方向相反，所以在有向面積下，反而有向面積 $[C_1 C_2 C_3]$ 為負且 $[D_1 D_2 D_3]$ 為正，如下圖所示。

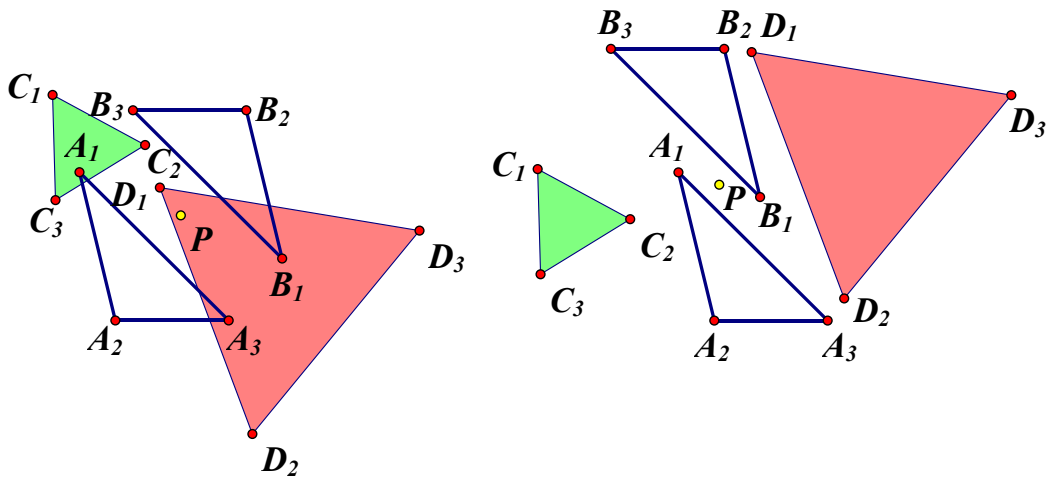


圖10：以 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為邊構造的衍伸圖形（必為正三角形）。

□

【幾何意義】在性質3與性質4中，我們發現的結果十分有趣！

$$\triangle C_1 C_2 C_3 + \triangle D_1 D_2 D_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_1}^2)$$

它的幾何意義是「正 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與正 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 的面積總和等於『以三邊為邊長構造的三個正三角形面積總和』」。

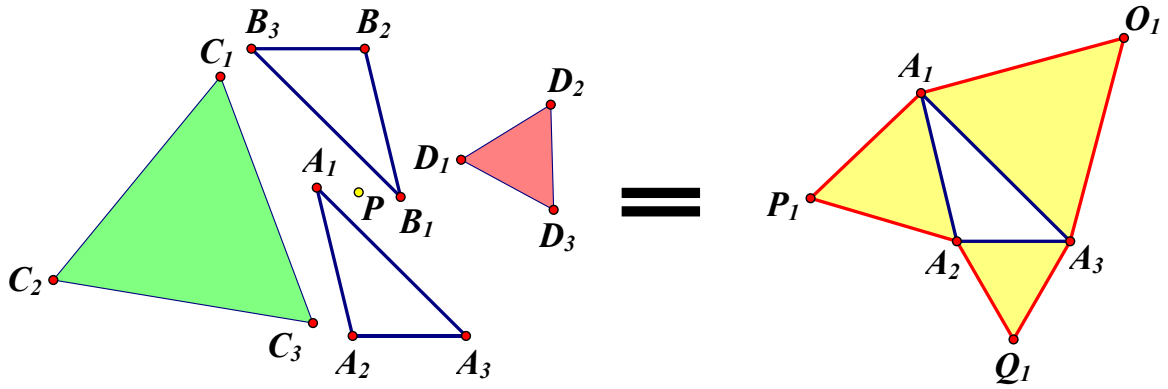


圖11： $\theta = 60^\circ$ 時， $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$ 的面積幾何意義。

(四) 一般化：分別以 $\overline{A_kB_k}$ 、 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 為底邊且底角 θ 構造的衍伸圖形

我們將探討角度一般化的情形。對於任意點對稱的 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ ，以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 為底邊且底角為 θ 來構造等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ (順時鐘方向) 與 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ (逆時鐘方向)，其中 $k = 1, 2, 3$ 且 $m = 0, 1, 2$ 。

已知 $A_k(x_k, y_k)$ 與 $B_{k+m}(-x_{k+m}, -y_{k+m})$ ，根據性質 1，我們有坐標：

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

定理5. (1) 當 $m = 0$ 時， $\frac{[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 0$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 2 \tan^2 \theta$ 。

(2) 當 $m = 1$ 時， $\frac{[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]}{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2} = \frac{\tan \theta}{4}$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$ 。

(3) 當 $m = 2$ 時， $\frac{[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]}{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2} = -\frac{\tan \theta}{4}$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$ 。

證明：

1. 當 $m = 0$ 時， $C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)$ 、 $D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$ ，所以可得 $\triangle C_1C_2C_3 \cong \triangle D_1D_2D_3$ 且 $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$ ，縮放比率為 $\tan \theta$ ，因此我們可以得出

$$[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3] = 2 \tan^2 \theta \times [A_1A_2A_3] \text{ 且 } [C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = 0。$$

2. 因為 $k = 1, 2, 3$ ，所以 $m = 1$ 與 $m = 2$ 根據預備性質 3 可發現對稱輪轉，我們只需要證明其中一個即可。以下證明 $m = 1$ 的情形。

先討論有向面積 $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \left(\left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| - \right. \\
&\quad \left. \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^3 \left(\left| \begin{array}{cc} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^3 (2x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+2} + 2y_{k+1}^2 - 2y_k y_{k+2}). \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_1}^2 + \overline{A_3 A_2}^2).
\end{aligned}$$

再討論 $[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]$ 的面積

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \left(\left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| + \right. \\
&\quad \left. \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 2 \left(\left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & y_{k+1} - y_{k+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+1}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \left(3 \times \left| \begin{array}{cc} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{array} \right| - \tan^2 \theta \times \left| \begin{array}{cc} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{4} \times (6 \Delta A_1 A_2 A_3 - \tan^2 \theta (-2 \Delta A_1 A_2 A_3)) = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2} \times \Delta A_1 A_2 A_3.
\end{aligned}$$

□

【幾何意義】 在定理 8，我們同樣給出以下有向面積不變量的幾何意義。

$$\left| \frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_1}^2} \right| = \frac{\tan \theta}{4} (\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_1}^2)$$

當 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 的頂點方向相反時（一個順時鐘方向，另一個逆時鐘方向），則 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 的面積總和等於「以三邊為底邊構造的三個底角為 θ 的等腰三角形面積總和」。

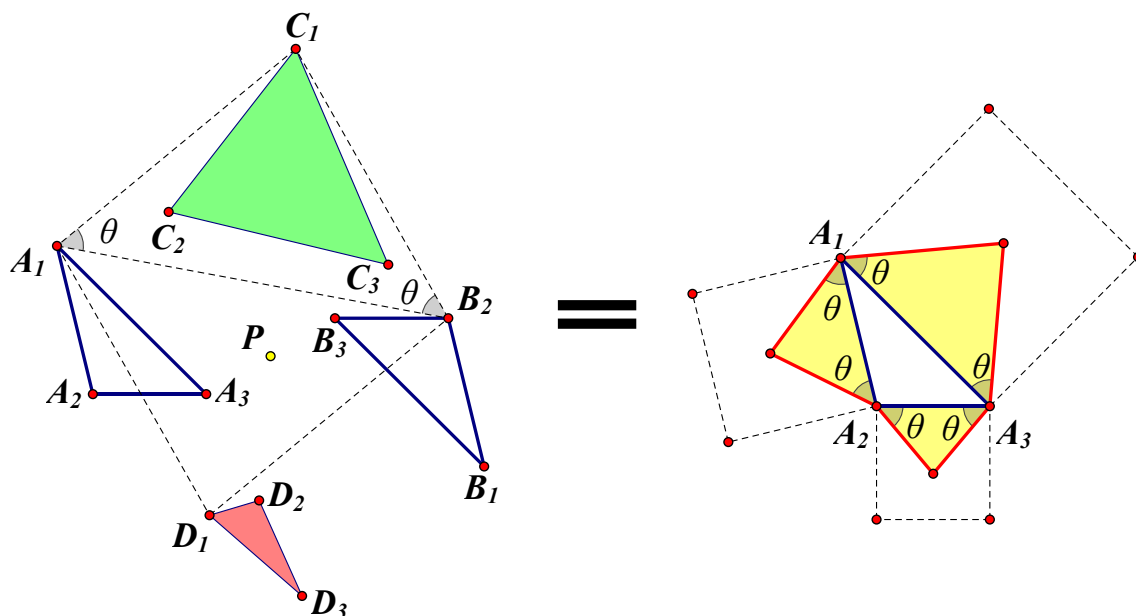


圖12：一般化 $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$ 的面積幾何意義。

□

二、點對稱的凸(凹)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 構造的衍伸圖形

(一) 分別以 $\overline{A_kB_k}$ 、 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 、 $\overline{A_kB_{k+3}}$ 為底邊且底角 θ 構造的衍伸圖形

我們接續推廣四邊形一般化的情形。對於任意點對稱的凸(凹)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ ，以 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 為底邊且底角為 θ 來構造等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ (順時鐘方向) 與 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ (逆時鐘方向)，其中 $k = 1, 2, 3$ 且 $m = 0, 1, 2$ 。根據性質1，我們有坐標：

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

定理6. 當 $m = 0$ ($\overline{A_kB_k}$ 連線) 時

- (1) 全等與相似：四邊形 $C_1C_2C_3C_4 \cong$ 四邊形 $D_1D_2D_3D_4 \sim$ 四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。
- (2) 有向面積不變量 $\frac{[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 0$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 2\tan^2\theta$ 。
- (3) P 點為兩組對應的四邊形的透視中心。

證明：在四邊形 $\overline{A_kB_k}$ 連線的情況下，可得出 $C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)$ 、

$D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$ ，即可證明全等及相似。又 C_k 點與 D_k 點對稱於 $P(0,0)$ ，

因此 P 為四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_3D_4D_1D_2$ 的透視中心，也是四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 的透視中心，如下圖所示。

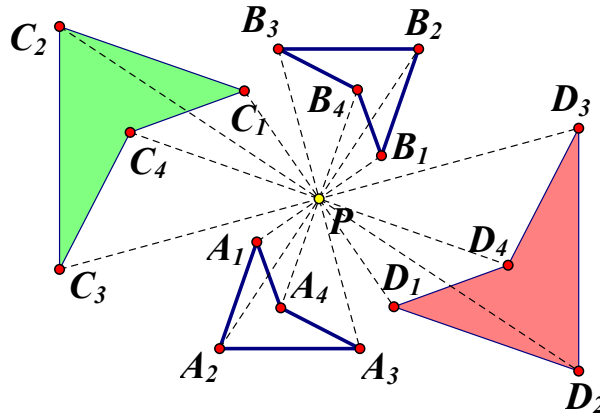


圖13： P 點為透視中心且相似。

□

定理7. (1) 當 $m = 1$ ($\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線) 時

$$\frac{[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = \frac{\tan \theta}{4} \quad \text{且} \quad \frac{[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta .$$

(2) 當 $m = 3$ ($\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線) 時

$$\frac{[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = -\frac{\tan \theta}{4} \quad \text{且} \quad \frac{[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta .$$

證明：在四邊形下，因為 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線與 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線是對稱可輪換，所以我們僅須證明 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線情形即可。

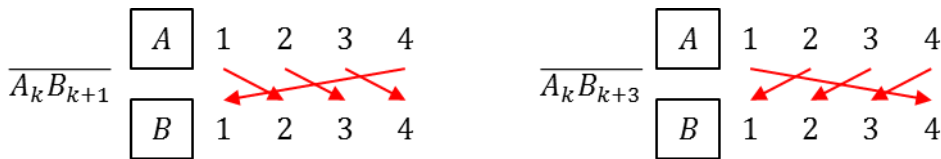


圖14： $\overline{A_k B_{k+1}}$ 與 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 的對稱輪換。

先討論有向面積 $[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left(\begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} - \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ & = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^4 \left(\begin{vmatrix} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) . \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^4 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2).$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \overline{A_3 A_1}^2 + \overline{A_4 A_2}^2).$$

再討論有向面積 $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left(\begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 2 \left(\begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+1}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \left(2 \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} - 2 \tan^2 \theta \times \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times (4 \times [A_1 A_2 A_3 A_4] - \tan^2 \theta (-4 \times [A_1 A_2 A_3 A_4])) = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4]. \end{aligned}$$

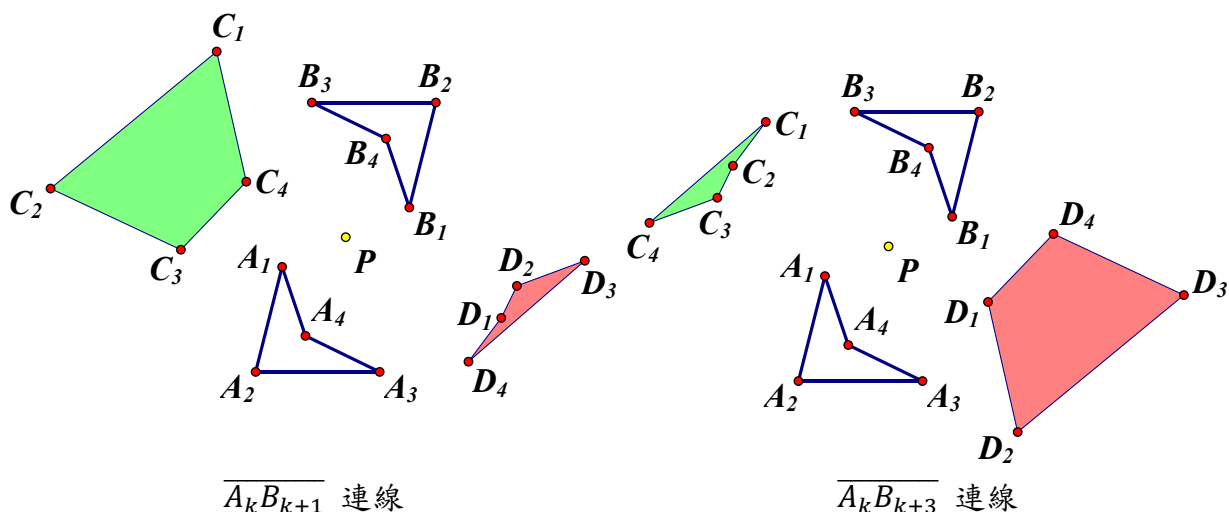


圖 15： $A[C_1 C_2 C_3 C_4] \pm A[D_1 D_2 D_3 D_4]$ 面積不變量。

□

【幾何意義】

當四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的頂點方向相反時（一個順時鐘方向，另一個逆時鐘方向），則四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的面積總和等於「分別以四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的對角線作為一菱形的對角線且其所平分的內角為 2θ 的菱形面積總和」。如下圖，四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 +$ 四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4 =$ 菱形 $A_1 E_2 A_3 E_4 +$ 菱形 $F_1 A_2 F_3 A_4$ 。

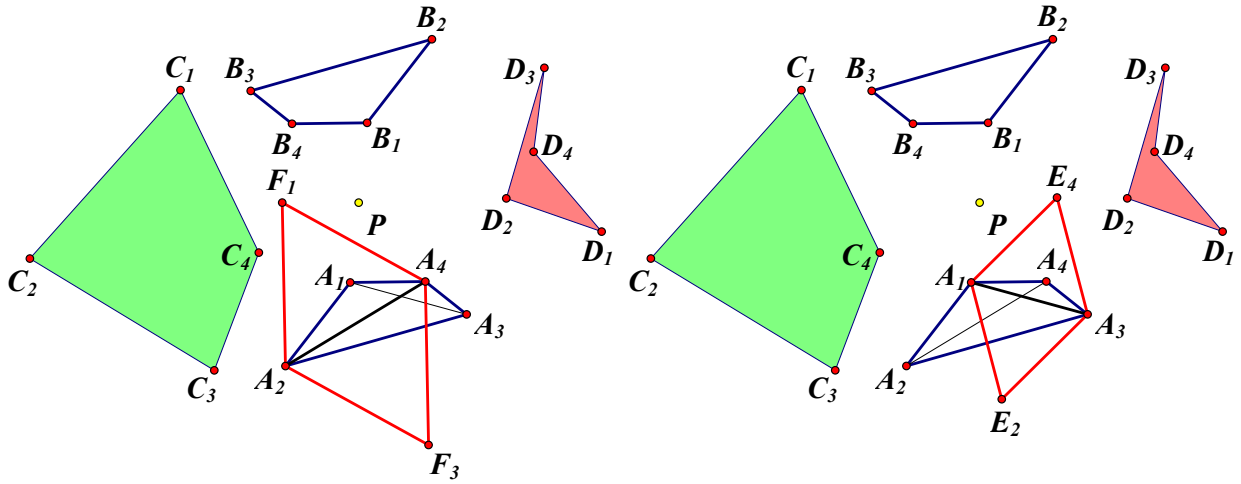


圖16：四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ + 四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 的面積幾何意義。

接下來討論 $\overline{A_kB_{k+2}}$ 。結果很有趣！此時四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 恆全等且為點對稱圖形，點 C_k 點與 D_{k+2} 對稱於 P 點（也是點 A_k 與 B_k 的對稱中心）。

值得一提的是，對於任意角度 θ ，四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 有向面積恆等於四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有向面積，也就是說四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 有向面積恆為定值，不受角度 θ 影響，這一點與前面發現的結果非常不一樣！

定理8. 當 $m = 2$ ($\overline{A_kB_{k+2}}$ 連線) 時

- (1) P 點為兩組對應的四邊形的透視中心。
- (2) 有向面積 $[C_1C_2C_3C_4] = [D_1D_2D_3D_4] = [A_1A_2A_3A_4]$ 。

證明：考慮點 C_k 與 D_{k+2} 坐標：

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+2}) \right).$$

$$D_{k+2} \left(\frac{1}{2}(x_{k+2} - x_{k+4}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_{k+2} - y_{k+4}), \frac{1}{2}(y_{k+2} - y_{k+4}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_{k+2} - x_{k+4}) \right).$$

注意到， $x_{k+4} = x_k$ 、 $y_{k+4} = y_k$ ，所以 C_k 點與 D_{k+2} 點對稱於 $P(0,0)$ ，因此 P 為四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_3D_4D_1D_2$ 的透視中心，也是四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 的透視中心，如下圖所示。

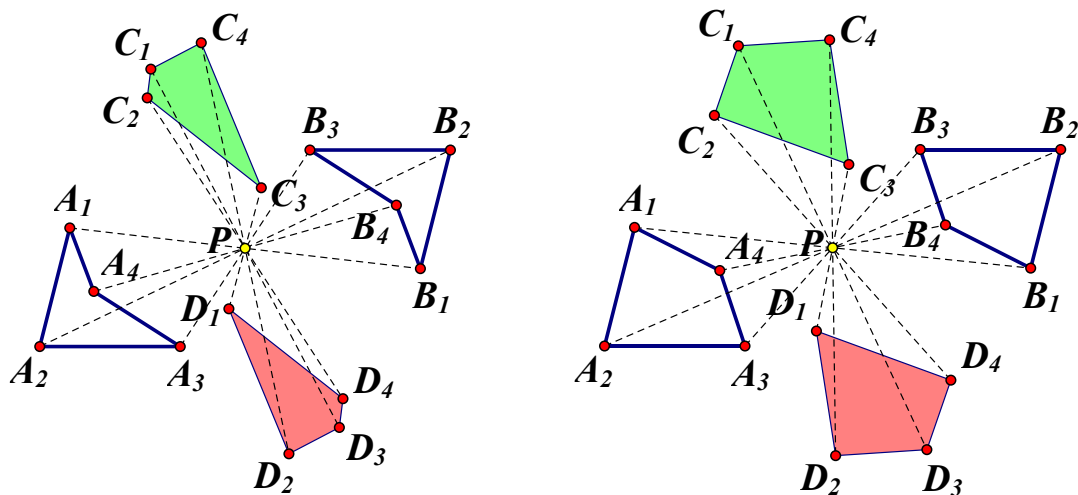


圖17：P 點為透視中心。

我們繼續討論有向面積

$$[C_1C_2C_3C_4] = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} + \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & x_{k+1} - x_{k+3} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ y_k - y_{k+2} - \tan \theta (x_k + x_{k+2}) & y_{k+1} - y_{k+3} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix}$$

注意到， $\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+2}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix} = 0$

$$\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & x_{k+1} - x_{k+3} \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+2}) & y_{k+1} - y_{k+3} \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_{k+1} - x_{k+3} & \tan \theta (y_{k+2} + y_{k+4}) \\ y_{k+1} - y_{k+3} & -\tan \theta (x_{k+2} + x_{k+4}) \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ y_k - y_{k+2} & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } [C_1C_2C_3C_4] &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} & x_{k+1} - x_{k+3} \\ y_k - y_{k+2} & y_{k+1} - y_{k+3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left(4 \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \right) = [A_1A_2A_3A_4]. \end{aligned}$$

同理可得 $[D_1D_2D_3D_4] = [A_1A_2A_3A_4]$

有趣的是，四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ ($D_1D_2D_3D_4$) 有向面積恆為定值，不受角度 θ 的影響。

□

(二) 特殊化：四邊形的衍伸圖形為正方形

我們好奇衍伸圖形四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 何時為特殊四邊形呢？

性質9. $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線 ($\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線)

若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為平行四邊形且 $\theta = 45^\circ$ ，則四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 恆為正方形。

證明：

因為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為平行四邊形，令坐標 $A_1(x_1, y_1)$ 、 $A_2(x_2, y_2)$ 和 $A_3(x_3, y_3)$ ，則 $A_4(x_3 + x_1 - x_2, y_3 + y_1 - y_2)$ 。當 $\theta = 45^\circ$ ，以下只須討論 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線即可 ($\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線為對稱可輪換)。由性質 1 可得出坐標：

$$C_1\left(\frac{x_1-x_2}{2} + \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}\right), C_2\left(\frac{x_2-x_3}{2} + \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2-y_3}{2} - \frac{x_2+x_3}{2}\right).$$

$$C_3\left(\frac{-x_1+x_2}{2} + \frac{y_1-y_2+2y_3}{2}, \frac{-y_1+y_2}{2} - \frac{x_1-x_2+2x_3}{2}\right), C_4\left(\frac{-x_2+x_3}{2} + \frac{2y_1-y_2+y_3}{2}, \frac{-y_2+y_3}{2} - \frac{2x_1-x_2+x_3}{2}\right).$$

1. 考慮 $\overline{C_1 C_2}^2 - \overline{C_2 C_3}^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\left((-x_1 + 2x_2 - x_3) + (-y_1 + y_3)\right)^2 + \left((-y_1 + 2y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)\right)^2 - \left((-x_1 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3)\right)^2 - \left((-y_1 + y_3) + (-x_1 + 2x_2 - x_3)\right)^2\right) = 0.$$

再考慮斜率 $\overline{C_1 C_2} = \frac{-y_1+2y_2-y_3+x_1-x_3}{-x_1+2x_2-x_3-y_1+y_3}$ 、斜率 $\overline{C_2 C_3} = \frac{-x_1+2x_2-x_3-y_1+y_3}{y_1-2y_2+y_3-x_1+x_3}$ ，相乘等於 -1 ，即

$$\overline{C_1 C_2} \perp \overline{C_2 C_3}.$$

2. 同理，當 A_1 點坐標由另外三點表示時，可得 $\overline{C_2 C_3} = \overline{C_3 C_4}$ 且 $\overline{C_2 C_3} \perp \overline{C_3 C_4}$ ；當 A_2 點坐標由另外三點表示時，可得 $\overline{C_3 C_4} = \overline{C_4 C_1}$ 且 $\overline{C_3 C_4} \perp \overline{C_4 C_1}$ ；當 A_3 點坐標由另外三點表示時，可得 $\overline{C_4 C_1} = \overline{C_1 C_2}$ 且 $\overline{C_4 C_1} \perp \overline{C_1 C_2}$ 。

3. 對於四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 亦可用相同方法得出其為正方形。

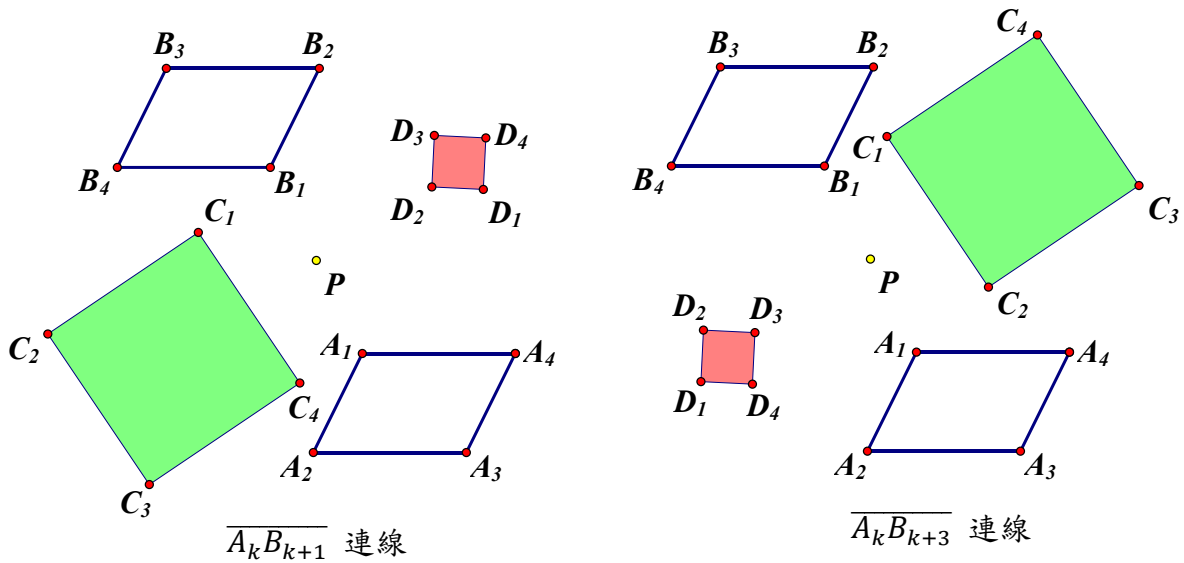


圖18：四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 恆為正方形。

□

我們將三角形與四邊形的定量與定性性質整理，如下表。

表1：三角形的衍伸圖形性質 ($k = 1, 2, 3$)

連線方式	有向面積 (定量性質)	形狀 (定性性質)
$\overline{A_k B_k}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0.$ (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 2 \tan^2 \theta.$	當 θ 為任意角度時，恆有 (1) $\triangle C_1 C_2 C_3 \cong \triangle D_1 D_2 D_3.$ (2) $\triangle C_1 C_2 C_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3.$
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：以 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 的各邊為底邊作底角為 θ 的等腰三角形的面積總和) (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{A[\triangle A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}.$	當 θ 為 60 度時，恆有 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。
$\overline{A_k B_{k+2}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：如同 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線) (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}.$	當 θ 為 60 度時，恆有 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。

表2：四邊形的衍伸圖形性質 ($k = 1, 2, 3, 4$)

連線方式	有向面積 (定量性質)	形狀 (定性性質)
$\overline{A_k B_k}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 0.$ (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 2 \tan^2 \theta.$	當 θ 為任意角度時，恆有 (1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 \cong$ 四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4.$ (2) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 \sim$ 四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4.$ (3) P 點為兩組對應的四邊形的透視中心。
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{A_1 A_3^2 + A_2 A_4^2 + A_3 A_1^2 + A_4 A_2^2} = \frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：分別以四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的對角線作為一菱形的對角線且其所平分的內角為 2θ ，此兩菱形的兩個面積總和) (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 1 + \tan^2 \theta.$	當四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形且 θ 為 45 度時，恆有四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 恆為正方形。
$\overline{A_k B_{k+2}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 0.$	當 θ 為任意角度時，恆有 (1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 \cong$ 四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4.$

$$(2) \frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 2.$$

形 $D_1D_2D_3D_4$ 。
 (2) P 點為兩組對應的四邊形的透視中心。

$$(1) \frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_1^2+A_4A_2^2} = -\frac{\tan\theta}{4}.$$

$\overline{A_kB_{k+3}}$ (幾何意義：如同 $\overline{A_kB_{k+1}}$ 連線)

當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為平行四邊形且 θ 為 45 度時，恆有四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 與四邊形 $D_1D_2D_3D_4$ 恆為正方形。

$$(2) \frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2\theta.$$

三、點對稱的凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與多邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 構造的衍伸圖形

透過觀察三角形與四邊形的一般化結果，我們發現其結構不同，因此要推廣到任意凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 時，必須分為奇邊形與偶邊形來討論。

任意凸(凹)多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與多邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 的連線種類 $\overline{A_kB_{k+m}}$ 共有 n 種 ($m = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$)，於是我們先刻劃對稱性質，這樣可以降低討論的數量。

定理10. 對於任意凸(凹)多邊形， $\overline{A_kB_{k+m}}$ 連線與 $\overline{A_kB_{k+n-m}}$ 連線衍伸圖形的對稱性

- (1) $\overline{A_kB_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積 $[C_1C_2C_3 \dots C_n] + [D_1D_2D_3 \dots D_n]$ 等於 $\overline{A_kB_{k+n-m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積 $[C_1C_2C_3 \dots C_n] + [D_1D_2D_3 \dots D_n]$ 。
- (2) $\overline{A_kB_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積 $[C_1C_2C_3 \dots C_n] - [D_1D_2D_3 \dots D_n]$ 等於 $\overline{A_kB_{k+n-m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積 $-([C_1C_2C_3 \dots C_n] - [D_1D_2D_3 \dots D_n])$ 。

證明：

如下圖， $\overline{A_kB_{k+m}}$ 的連線下依序有 $\overline{A_1B_{1+m}}$ 、 $\overline{A_2B_{2+m}}$ 、 \dots 、 $\overline{A_{n-m}B_{(n-m)+m}}$ 、 $\overline{A_{n-m+1}B_1}$ 、 $\overline{A_{n-m+2}B_2}$ 、 \dots 、 $\overline{A_{(n-m)+n}B_{n-m}}$ ，依據定義逆時鐘構造等腰 $\triangle A_kB_{k+m}C_k$ 並且順時鐘構造等腰 $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ 。

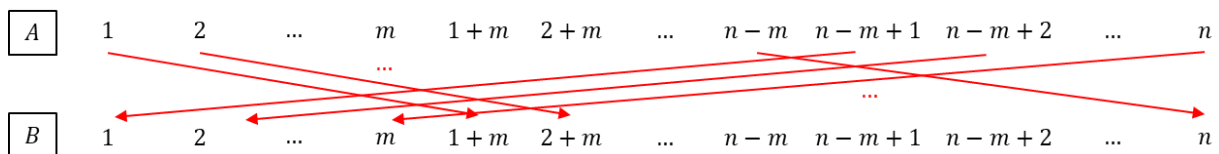


圖19： $\overline{A_kB_{k+m}}$ 連線示意圖。

如下圖，再考慮 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 的連線下依序有 $\overline{A_1 B_{1+n-m}}$ 、 $\overline{A_2 B_{2+n-m}}$ 、 \dots 、 $\overline{A_m B_{m+n-m}}$ 、 $\overline{A_{m+1} B_1}$ 、 $\overline{A_{n-m+2} B_2}$ 、 \dots 、 $\overline{A_n B_{n-m}}$ ，依據定義逆時鐘構造等腰 $\triangle A_k B_{k+m} C_k$ 並且順時鐘構造等腰 $\triangle A_k B_{k+m} D_k$ 。

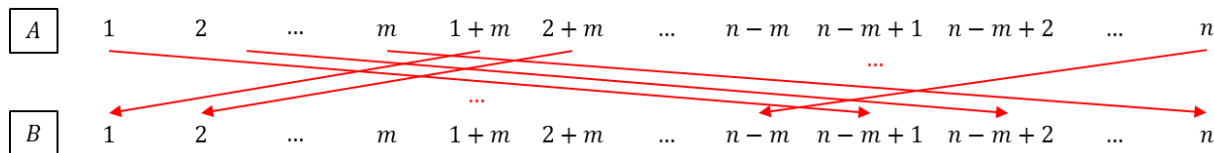


圖20： $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線示意圖。

又因為任意凸（凹）多邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ 與 $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 為點對稱圖形，根據上圖的連線方式可得 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 的連線下的衍伸多邊形 $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$ 會全等於 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 的連線下的衍伸多邊形 $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$ ，反之亦然，因此可得 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積與 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積關係式。

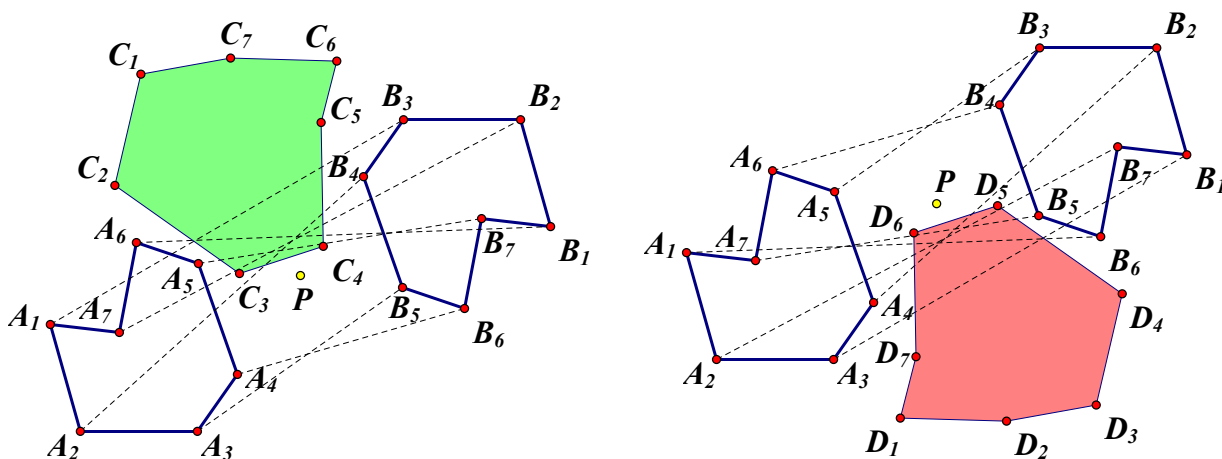


圖21： $\overline{A_k B_{k+m}}$ 與 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線的 C 圖與 D 圖全等。

□

(一) 一般化奇邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}$ 之衍伸圖形的性質

定理11. 對於任意凸（凹）奇邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}$ ， $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積

$$(1) [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} (-2x_k x_{k+m+1} - 2y_k y_{k+m+1} + 2x_{k+1} x_{k+m} + 2y_{k+1} y_{k+m}).$$

其中， $m = 0, 1, 2, \dots, i$ 。（註： $m = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 2i$ ，結果為前式的相反數）

當 $m = 0, 1, 2i$ 時，有特殊的幾何刻劃。

$$(2) \quad [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] \\ = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(2(1 + \tan^2 \theta) \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + (1 - \tan^2 \theta) \times \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \right).$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, 2i$ 。

根據 $m - 1$ 、 $m + 1$ 與 $2i + 1$ 的互質情形可分為四種情形。

證明：

1. 先討論有向面積 $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$

$$\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(\begin{vmatrix} x_k - x_{k+m} + \tan \theta (y_k + y_{k+m}) & x_{k+1} - x_{k+m+1} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+m+1}) \\ y_k - y_{k+m} - \tan \theta (x_k + x_{k+m}) & y_{k+1} - y_{k+m+1} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+m+1}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k - x_{k+m} - \tan \theta (y_k + y_{k+m}) & x_{k+1} - x_{k+m+1} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+m+1}) \\ y_k - y_{k+m} + \tan \theta (x_k + x_{k+m}) & y_{k+1} - y_{k+m+1} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+m+1}) \end{vmatrix} \right) \\ = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(\begin{vmatrix} y_k + y_{k+m} & x_{k+1} - x_{k+m+1} \\ -(x_k + x_{k+m}) & y_{k+1} - y_{k+m+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k - x_{k+m} & y_{k+1} + y_{k+m+1} \\ y_k - y_{k+m} & -(x_{k+1} + x_{k+m+1}) \end{vmatrix} \right) \\ = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} (-2x_k x_{k+m+1} - 2y_k y_{k+m+1} + 2x_{k+1} x_{k+m} + 2y_{k+1} y_{k+m}).$$

我們發現 m 等於以下特殊值時，會出現比較有趣的結論：

(1) 當 $m = 0$ 時，可得出 $C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)$ 、 $D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$

即可證明全等、相似與透視，再得 $A[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - A[D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] = 0$ 。

(2) 當 $m = 1$ 時，

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] \\ = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} (-2x_k x_{k+2} - 2y_k y_{k+2} + 2x_{k+1} x_{k+1} + 2y_{k+1} y_{k+1}). \\ = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} (2x_k^2 - 2x_k x_{k+2} + 2y_k^2 - 2y_k y_{k+2}). \\ = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2). \\ = \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i+1} A_2}^2).$$

根據定理13，我們也可得出 $m = 2i$ 時，

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] = -\frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i+1} A_2}^2).$$

2. 再討論有向面積 $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$

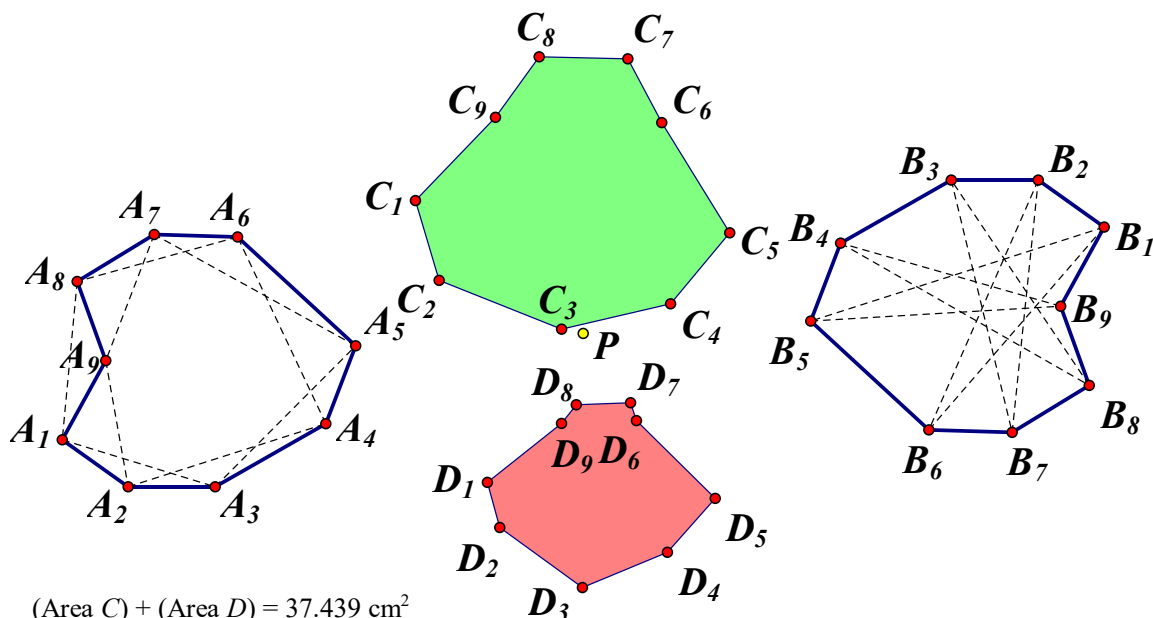
$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(\begin{vmatrix} x_k - x_{k+m} & x_{k+1} - x_{k+m+1} \\ y_k - y_{k+m} & y_{k+1} - y_{k+m+1} \end{vmatrix} - \tan^2 \theta \begin{vmatrix} y_k + y_{k+m} & y_{k+1} + y_{k+m+1} \\ x_k + x_{k+m} & x_{k+1} + x_{k+m+1} \end{vmatrix} \right).$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_{k+m} & x_{k+1} \\ -y_{k+m} & y_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & -x_{k+m+1} \\ y_k & -y_{k+m+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_{k+m} & -x_{k+m+1} \\ -y_{k+m} & -y_{k+m+1} \end{vmatrix} - \right. \\
&\tan^2 \theta \left(\begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{k+m} & y_{k+1} \\ x_{k+m} & x_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_k & y_{k+m+1} \\ x_k & x_{k+m+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{k+m} & y_{k+m+1} \\ x_{k+m} & x_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \left. \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(2(1 + \tan^2 \theta) \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + (1 - \tan^2 \theta) \times \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \right).
\end{aligned}$$

我們需分四種情形討論：

(1) 當 $m-1$ 、 $m+1$ 與 $2i+1$ 三者互質時，

$$\begin{aligned}
&[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] \\
&= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times ([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+3}] - \\
&[A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m+1}]).
\end{aligned}$$



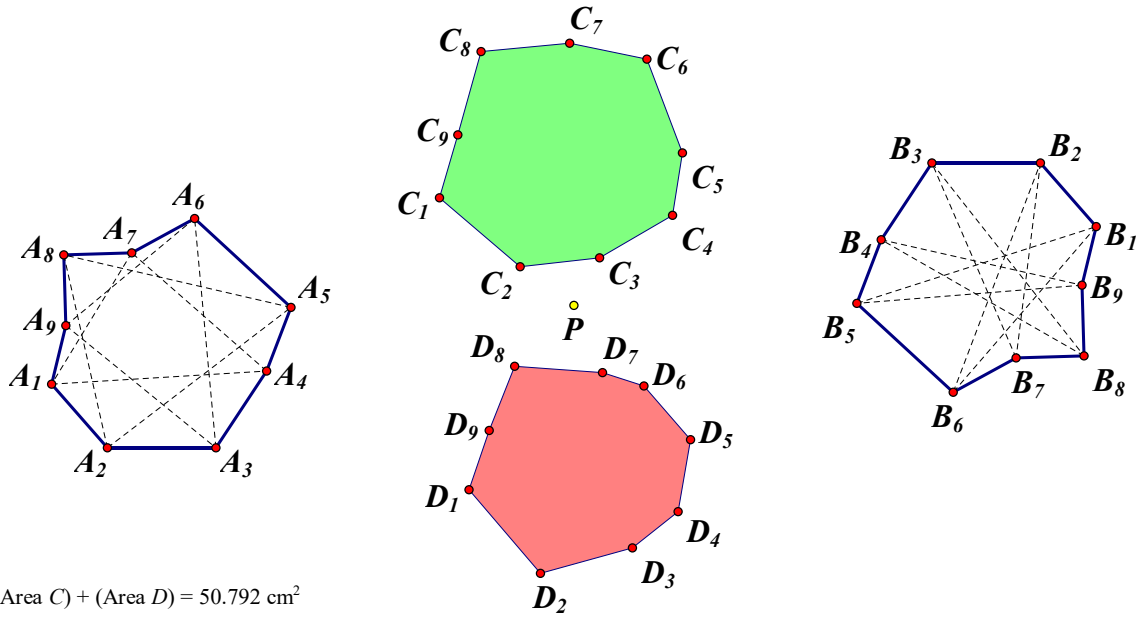
$$(\text{Area } C) + (\text{Area } D) = 37.439 \text{ cm}^2$$

$$((1 + \tan(\theta^2)) \cdot A) + (0.5 \cdot ((1 - \tan(\theta^2))) \cdot (A_1 A_3 A_5 A_7 A_9 A_2 A_4 A_6 A_8 - A_1 A_5 A_9 A_4 A_8 A_3 A_7 A_2 A_6)) = 37.439 \text{ cm}^2$$

圖22：以九邊形且 $m=3$ 為例。

(2) 當 $m-1$ 與 $2i+1$ 不互質，且 $m+1$ 與 $2i+1$ 互質時，頂點 A_1 、 A_m 、 A_{2m-1} 、 \dots 、 A_{2i-m+3} 的圖形會變成非一筆畫的角星圖形。

$$\begin{aligned}
&[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] \\
&= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times \left(([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+3}] + \right. \\
&[A_2 A_{m+1} A_{2m} \dots A_{2i-m+4}] + [A_3 A_{m+2} A_{2m+1} \dots A_{2i-m+5}] + \dots + \\
&[A_{m-1} A_{2m-2} A_{3m-3} \dots A_{2i+1}]) - [A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m+1}]).
\end{aligned}$$



$$(Area C) + (Area D) = 50.792 \text{ cm}^2$$

$$((1 + \tan(\theta)^2) \cdot A) + (0.5 \cdot ((1 - \tan(\theta)^2)) \cdot ((Area \Delta A_1 A_4 A_7) + (Area \Delta A_2 A_5 A_8) + (Area \Delta A_3 A_6 A_9) + A_1 A_6 A_2 A_7 A_3 A_4 A_8 A_9 A_5)) = 50.792 \text{ cm}^2$$

圖23：以九邊形且 $m = 4$ 為例。

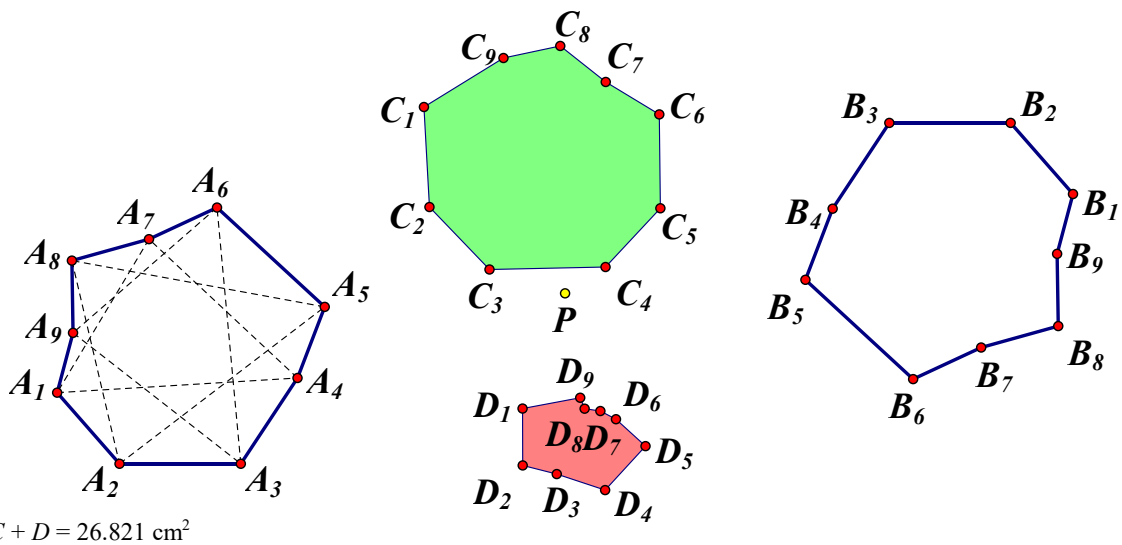
- (3) 當 $m + 1$ 與 $2i + 1$ 不互質，且 $m - 1$ 與 $2i + 1$ 互質時，頂點 A_1 、 A_{m+2} 、 A_{2m+3} 、 \dots 、 A_{2i-m+1} 的圖形會變成非一筆畫的角星圖形。

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$$

$$= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times ([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+3}] -$$

$$([A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m+1}] + [A_2 A_{m+3} A_{2m+4} \dots A_{2i-m+2}] +$$

$$[A_3 A_{m+4} A_{2m+5} \dots A_{2i-m+3}] + \dots + [A_{m+1} A_{2m+2} A_{3m+3} \dots A_{2i+1}])).$$



$$C + D = 26.821 \text{ cm}^2$$

$$((1 + \tan(\theta)^2) \cdot A) + (0.5 \cdot ((1 - \tan(\theta)^2)) \cdot (A - (Area \Delta A_1 A_4 A_7) - (Area \Delta A_2 A_5 A_8) - (Area \Delta A_3 A_6 A_9))) = 26.821 \text{ cm}^2$$

圖24：以九邊形且 $m = 2$ 為例。

(4) 當 $m-1$ 與 $2i+1$ 不互質，且 $m+1$ 與 $2i+1$ 不互質時，

$$\begin{aligned}
& [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] \\
&= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times (([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+3}] + \\
& [A_2 A_{m+1} A_{2m} \dots A_{2i-m+4}] + [A_3 A_{m+2} A_{2m+1} \dots A_{2i-m+5}] + \dots + \\
& [A_{m-1} A_{2m-2} A_{3m-3} \dots A_{2i+1}]) - ([A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m+1}] + \\
& [A_2 A_{m+3} A_{2m+4} \dots A_{2i-m+2}] + [A_3 A_{m+4} A_{2m+5} \dots A_{2i-m+3}] + \dots + \\
& [A_{m+1} A_{2m+2} A_{3m+3} \dots A_{2i+1}])).
\end{aligned}$$

□

(二) 一般化偶邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}$ 之衍伸圖形的性質

最後，我們推廣至偶邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}$ 之衍伸圖形 $C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}$ 與 $D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}$ ，證明方法與奇邊形類似，所以我們在以下定理中稍微簡化其過程。

定理12. 對於任意凸（凹）偶邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}$ ， $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積

$$(1) [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}]$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i} (-2x_k x_{k+m+1} - 2y_k y_{k+m+1} + 2x_{k+1} x_{k+m} + 2y_{k+1} y_{k+m}).$$

其中， $m = 0, 1, 2, \dots, i$ 。（註： $m = i, i+1, i+2, \dots, 2i-1$ ，結果為前式的相反數）

當 $m = 0, 1, i, 2i-1$ 時，有特殊的幾何刻劃。

$$(2) [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i} \left(2(1 + \tan^2 \theta) \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + (1 - \tan^2 \theta) \times \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \right).$$

其中 $m = 0, 1, \dots, 2i-1$ 。根據 $m-1$ 、 $m+1$ 與 $2i$ 的互質情形可分為四種情形。

證明：

$$\begin{aligned}
1. \text{ 先討論有向面積 } [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] &= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i} (-2x_k x_{k+m+1} - \\
& 2y_k y_{k+m+1} + 2x_{k+1} x_{k+m} + 2y_{k+1} y_{k+m}).
\end{aligned}$$

我們發現 m 等於以下特殊值時，會出現比較有趣的結論：

$$(1) \text{ 當 } m = 0 \text{ 時，可得出 } C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)、D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$$

即可證明全等及相似與透視，再得 $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = 0$ 。

(2) 當 $m = 1$ 時，

$$\begin{aligned} & [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - A[D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] \\ &= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i} ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2). \\ &= \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i} A_2}^2). \end{aligned}$$

根據定理13，我們也可得出 $m = 2i - 1$ 時，

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = -\frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i} A_2}^2).$$

(3) 當 $m = i$ 時，根據定理13可得在偶邊形下，多邊形 $C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}$ 全等於多邊形

$D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}$ ，故 $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = 0$ ，且注意到 C_k 與 D_{k+i} 點對稱於 P 點，即為透視性質，這一點與奇邊形不同，這是偶邊形獨有的性質。

2. 再討論有向面積 $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i} \left(2(1 + \tan^2 \theta) \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + (1 - \tan^2 \theta) \times \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \right)$.

(1) 當 $m - 1$ 、 $m + 1$ 與 $2i$ 三者互質時，

$$\begin{aligned} & [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times \\ & ([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+2}] - [A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m}]). \end{aligned}$$

(2) 當 $m - 1$ 與 $2i$ 不互質，且 $m + 1$ 與 $2i$ 互質時，

$$\begin{aligned} & [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times \\ & (([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i+2-m}] + [A_2 A_{m+1} A_{2m} \dots A_{2i+3-m}] + [A_3 A_{m+2} A_{2m+1} \dots A_{2i+4-m}] + \\ & \dots + [A_{m-1} A_{2m-2} A_{3m-3} \dots A_{2i}]) - [A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m}]). \end{aligned}$$

(3) 當 $m + 1$ 與 $2i$ 不互質，且 $m - 1$ 與 $2i$ 互質時，

$$\begin{aligned} & [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i+1}] + \\ & \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \times ([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i-m+3}] - ([A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m}] + \\ & [A_2 A_{m+3} A_{2m+4} \dots A_{2i-m+1}] + [A_3 A_{m+4} A_{2m+5} \dots A_{2i-m+2}] + \dots + \\ & [A_{m+1} A_{2m+2} A_{3m+3} \dots A_{2i}])). \end{aligned}$$

(4) 當 $m - 1$ 與 $2i$ 不互質，且 $m + 1$ 與 $2i$ 不互質時，

$$\begin{aligned}
& [C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_{2i}] + \frac{1}{2}(1 - \tan^2 \theta) \times \\
& \left(([A_1 A_m A_{2m-1} \dots A_{2i+2-m}] + [A_2 A_{m+1} A_{2m} \dots A_{2i+3-m}] + [A_3 A_{m+2} A_{2m+1} \dots A_{2i+4-m}] + \right. \\
& \dots + [A_{m-1} A_{2m-2} A_{3m-3} \dots A_{2i}]) - ([A_1 A_{m+2} A_{2m+3} \dots A_{2i-m}] + \\
& [A_2 A_{m+3} A_{2m+4} \dots A_{2i-m+1}] + [A_3 A_{m+4} A_{2m+5} \dots A_{2i-m+2}] + \dots + \\
& \left. [A_{m+1} A_{2m+2} A_{3m+3} \dots A_{2i}]) \right).
\end{aligned}$$

□

四、 延伸至旋轉 90 度的全等凸 (凹) 多邊形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ 與多邊形

$B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 構造的衍伸圖形

前面討論了線對稱 (即旋轉 180 度) 的兩個全等形, 接下來我們延伸探討另外一個設定: 「旋轉 90 度的兩個全等形」, 因為其對應頂點坐標的 x 坐標與 y 坐標會顛倒, 且其中一個正負性質也會顛倒。這樣的設定下的衍伸圖形 C 和 D 將出現更多有趣的性質。

考慮平面上有凸 (凹) 多邊形

$A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, 我們約定其頂點坐標

$A_k(x_k, y_k)$ 方向為逆時鐘, 其中 $k =$

$1, 2, 3, \dots, n$, 其全等的多邊形

$B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 滿足有向角 $\angle A_k P B_k =$

90° 。不失一般性, 假設 $P(0, 0)$, 可得坐

標 $B_k(-y_k, x_k)$ 。

再以 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 為底邊且底角為 θ 來

構造等腰 $\triangle A_k B_{k+m} C_k$ (順時鐘方向) 與

$\triangle A_k B_{k+m} D_k$ (逆時鐘方向), 其中 $m =$

$0, 1, 2, \dots, k-1$ 。根據性質 1, 我們得出有以下 C_k 與 D_k 的坐標。

$$C_k \left(\frac{1}{2}(x_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(y_k - x_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k + x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(x_k + y_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left(\frac{1}{2}(x_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(y_k - x_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k + x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(x_k + y_{k+m}) \right).$$

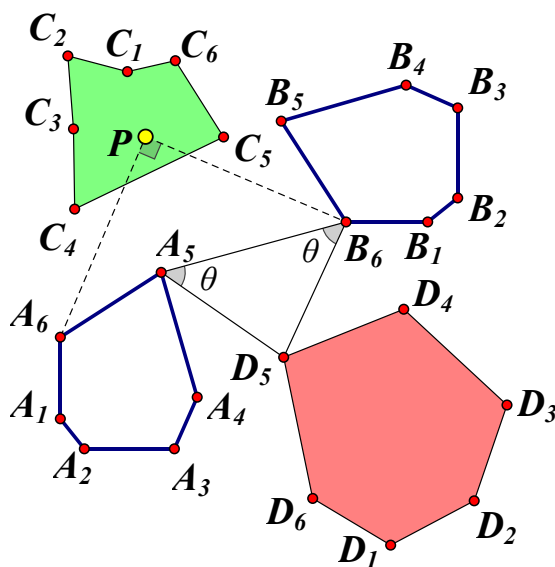


圖 25: 旋轉 90 度的全等多邊形 A 與 B 。

定理13. 對於任意凸（凹）多邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與旋轉 90 度的多邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，

$\overline{A_kB_{k+m}}$ 連線的衍伸圖形之有向面積

$$(1) [C_1C_2C_3 \dots C_n] - [D_1D_2D_3 \dots D_n] = \frac{\tan \theta}{2} \sum_{k=1}^n \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right).$$

$$(2) [C_1C_2C_3 \dots C_n] + [D_1D_2D_3 \dots D_n] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3 \dots A_n] + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (1 - \tan^2 \theta) (x_k x_{k+m+1} - x_{k+1} x_{k+m} + y_k y_{k+m+1} - y_{k+1} y_{k+m}).$$

證明：如前方式利用測量師有向面積公式證明，此處省略過其過程。 □

根據頂點坐標與定理13可證明三角形、四邊形的衍伸圖形之性質。有趣的是，旋轉 90 度下的衍伸圖形（表3與表4）與旋轉 180 度下的衍伸圖形（表1與表2）性質不相同。

表3：旋轉 90 度下的全等三角形的衍伸圖形性質（ $k = 1, 2, 3$ ）

連線方式	有向面積（定量性質）	形狀（定性性質）
$\overline{A_kB_k}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = -2 \tan \theta [A_1A_2A_3]$. (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ (3) $= (1 + \tan^2 \theta) [A_1A_2A_3]$.	$\triangle C_1C_2C_3$ 、 $\triangle D_1D_2D_3$ 、 $\triangle A_1A_2A_3$ 三者恆相似。
$\overline{A_kB_{k+1}}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = \tan \theta [A_1A_2A_3]$. (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3]$ $+ \frac{\tan^2 \theta - 1}{8} \times (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_1}^2)$.	若 $\triangle A_1A_2A_3$ 為直角三角形（ $\angle A_2 = 90^\circ$ ）時，則恆有 $\overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2}$ 。 註：這是旋轉 90 度獨有。
$\overline{A_kB_{k+2}}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = \tan \theta [A_1A_2A_3]$. (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3]$ $+ \frac{1 - \tan^2 \theta}{8} \times (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_1}^2)$.	若 $\triangle A_1A_2A_3$ 為直角三角形（ $\angle A_2 = 90^\circ$ ）時，則恆有 $\overline{C_2C_3} = \overline{D_2D_3}$ 。 註：這是旋轉 90 度獨有。

表4：旋轉 90 度下的全等四邊形的衍伸圖形性質（ $k = 1, 2, 3, 4$ ）

連線方式	有向面積（定量性質）	形狀（定性性質）
$\overline{A_kB_k}$	(1) $[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]$ $= -2 \tan \theta [A_1A_2A_3A_4]$. (2) $[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) [A_1A_2A_3A_4]$.	(1) 四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 、 $D_1D_2D_3D_4$ 、 $A_1A_2A_3A_4$ 三者恆相似 (2) 四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 的對角線交點 S 與 $D_1D_2D_3D_4$ 的對角線交點 T 與旋轉中心 P 三點共線且有

		向線段比 $\overline{PS}:\overline{PT} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$ ，其比值可以寫成 $\tan(45^\circ - \theta)$ 。
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4] = 0$. (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4] +$ $\frac{\tan^2 \theta - 1}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2)$.	(1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 不全等但恆面積相等。 (2) 對於任意角 θ ，當四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形時，恆有四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 恆為平行邊形。
$\overline{A_k B_{k+2}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= 2 \tan \theta [A_1 A_2 A_3 A_4]$. (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4]$.	四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 的對角線交點 S 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的對角線交點 T 與旋轉中心 P 三點共線且有向線段比 $\overline{PS}:\overline{PT} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$ ，其比值可以寫成 $\tan(45^\circ - \theta)$ 。
$\overline{A_k B_{k+3}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4] = 0$ (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_3 A_2 A_4] +$ $\frac{1 - \tan^2 \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2)$.	(1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 不全等但恆面積相等 (2) 四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形且 θ 為任意角時，恆有四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 恆為平行邊形

陸、 結論

一、 對於任意兩全等三角形，以底角 θ 構造的衍伸圖形性質

以 $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線進行分類，分別給出其衍伸圖形 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 和 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 的定性性質與幾何意義（見表 1），也給出 $\triangle C_1 C_2 C_3$ 和 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 有向面積和與有向面積差的一般式，其中一般式只與底角 θ 有關，並不受對稱點 P 位置影響。

二、 對於任意兩全等四邊形，以底角 θ 構造的衍伸圖形性質

以連線 $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 進行分類，分別給出其衍伸圖形四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的定性性質、幾何意義與有向面積和與有向面積差的一般式（見表 2）。值得一提的是，我們發現 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線與 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線的衍伸圖形有對稱輪轉性，其中初始四邊形為平行四邊形且 θ 為 45 度時，其衍伸圖形恆為正方形。

三、 一般化：兩全等凸（凹）奇邊形或偶邊形的之衍伸圖形性質

我們先證明了任意凸(凹)多邊形 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線與 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線衍伸圖形的對稱性, 利用對稱性可將須探討的數量減半, 再以 $\overline{A_k B_{k+m}}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) 連線方式進行一般化的衍伸圖形, 根據 $m-1$ 、 $m+1$ 與 n 的互質情形分成四種情形, 給出衍伸圖形的有向面積和與有向面積差的一般式。有趣的是, 在奇邊形, 發現 $m = 0, 1, 2i$ 的情形下, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$ 有特殊幾何意義; 在偶邊

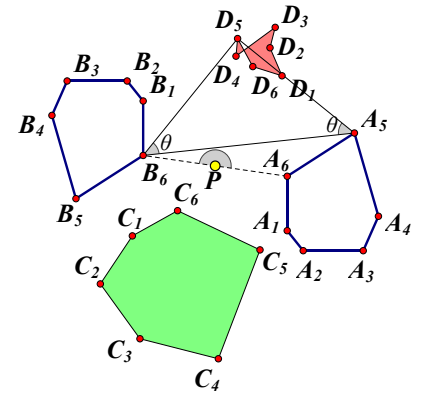


圖 26：旋轉 180 度。

形, 發現 $m = 0, 1, i, 2i-1$ 的情形下, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}]$ 有特殊幾何意義。

四、延伸：旋轉 90 度的兩全等凸(凹)奇邊形或偶邊形之衍伸圖形性質

延伸探討「旋轉 90 度的兩個全等形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ 與 $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 構造的衍伸圖形 $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$ 與 $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$ 。我們同樣給出有向面積和與差的不變量一般式。在定性性質部分, 旋轉 90 度下的四邊形 $\overline{A_k B_k}$ 連線、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線構造的衍伸圖形雖然沒有定理 11 和定理 12 的透視性質, 但是我們卻發現兩個衍伸圖形的對角線交點 S 和 T 與旋轉中心 P 點恆共線的有趣性質, 其有向比例常數 $\overline{PS}:\overline{PT} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$ 非常漂亮。

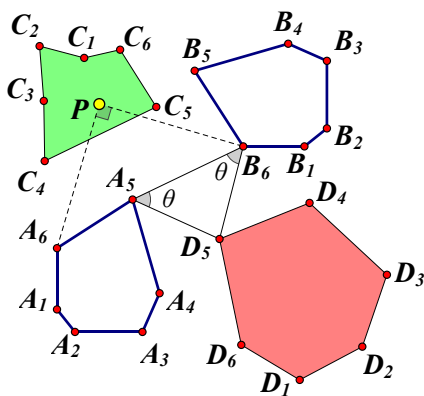


圖 27：旋轉 90 度。

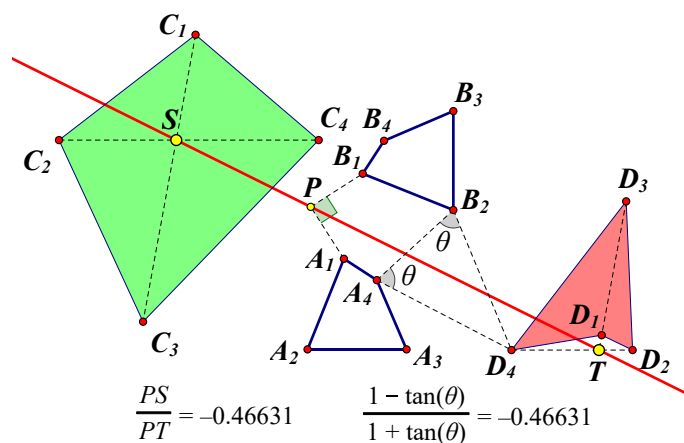


圖 28：衍伸圖形對角線交點性質。

柒、參考文獻

- [1] Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc (2016). Problem 4167. *Crux Mathematicorum*, 42 (7), 314.
- [2] Bart Braden (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, 17 (4), 326–337. Available at http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma063.pdf

【評語】 030424

本作品探討兩個全等形構造的衍伸圖形之定性及定量的研究，由三角形開始再推廣到四邊形及多邊形，作品數學論述清晰，生動有趣。作品將求面積的問題轉換成計算行列式值的問題，藉助行列式值的一些性質，作者們對這個一般化的問題給出了結果，想法很有創意，分析問題的手法也頗具巧思，十分難得。對於 $n \geq 5, m \neq 0, 1, n-1$ 的情況，好像沒有太漂亮的結果，是不是有可能有些隱藏的好性質還沒有被找到？如果針對這一部份能給出更漂亮的結果會很棒。另外，也可以嘗試不以等腰三角形為基礎，是否也可得到類似性的結果。

作品簡報

由兩個全等形構造的 衍伸圖形之性質研究

組別：國中組

科別：數學科

壹、前言

D. T. Oai and L. Giugiuc (2016)

Crux mathematicorum

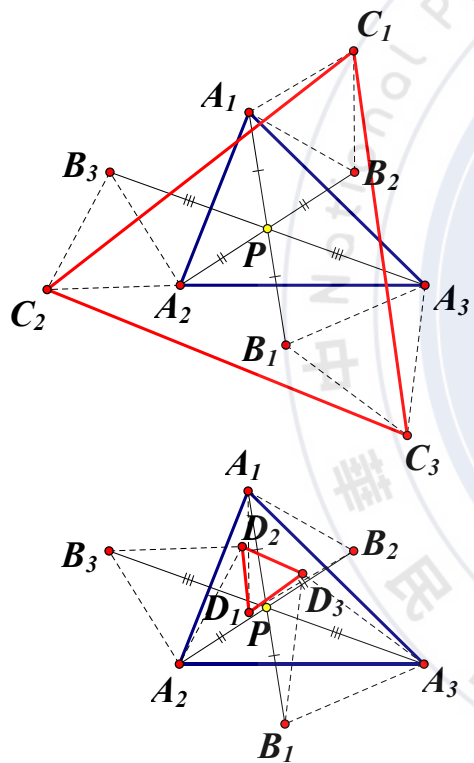


圖1：原始問題

我們的推廣與研究目的

創新探討 **定量** 與 **定性** 性質：

- ① 形狀：任意凸（凹）多邊形
- ② 連線： $A_k B_k$ 、 $A_k B_{k+1}$ 、 \dots 、 $A_k B_{k+n-1}$
- ③ 角度：構造底角為 θ 的等腰三角形
逆時鐘構造 $\triangle A_k B_{k+m} C_k$
順時鐘構造 $\triangle A_k B_{k+m} D_k$
- ④ 衍伸圖形 $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$ 、 $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$

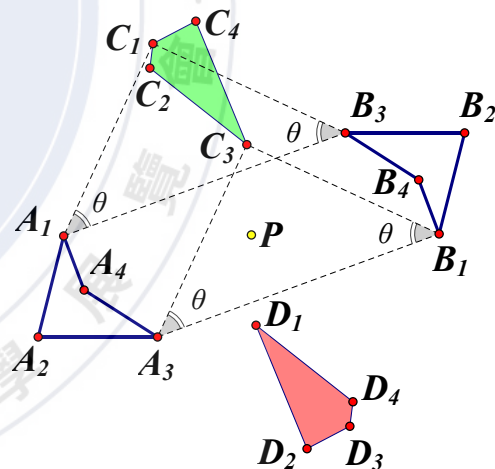


圖2：本研究推廣方向

貳、預備知識

本文將凸（凹）多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 簡稱為多邊形 P 。

符號1. 約定凸（凹）多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的有向面積以 $[P_1P_2P_3 \dots P_n]$ 表示，頂點逆時鐘方向時，面積為正；順時鐘方向為時，面積為負。

預備定理2. (測量師公式) 凸（凹）邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的頂點坐標為 $P_k(x_k, y_k)$ ，則其有向面積為

$$[P_1P_2P_3 \dots P_n] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}.$$

預備性質3. (平移不變性)

$$(1) \text{ 級數和 } \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m+h} \end{vmatrix}.$$

$$(2) \text{ 級數和 } \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m+h} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m} \end{vmatrix}.$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 、 $h = 1, 2, 3, \dots, n$ 、 $x_{k+n} = x_k$ 、 $y_{k+n} = y_k$

參、研究過程與結果

一、建構底角為 θ 的等腰三角形頂點 C 點與 D 點坐標

性質1. 若點坐標 $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ ，則可得頂點 C 與 D 點的坐標

$$C \left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) - \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) + \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right).$$

$$D \left(\frac{1}{2}(x_Q + x_P) + \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) - \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right).$$

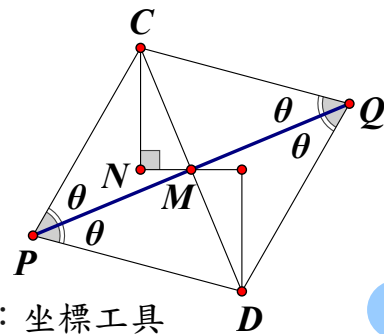


圖3：坐標工具

二、三角形： $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle B_1B_2B_3$ 構造的衍伸圖形性質

(一) $\theta = 60^\circ$ 構造的衍伸圖形

$\overline{A_k B_k}$ 連線

性質2.

- $\triangle C_1C_2C_3 \cong \triangle D_1D_2D_3$
 $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$
- $\frac{[C_1C_2C_3]-[D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 0$
 $\frac{[C_1C_2C_3]+[D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 6$

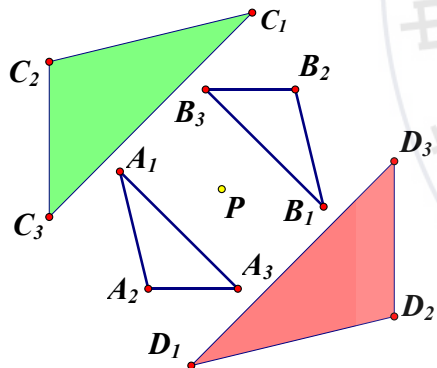


圖4： $\overline{A_k B_k}$ 連線

$\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線

性質3.

- $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$
 恆為正三角形
- $\frac{[C_1C_2C_3]-[D_1D_2D_3]}{A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 $\frac{[C_1C_2C_3]+[D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 3$

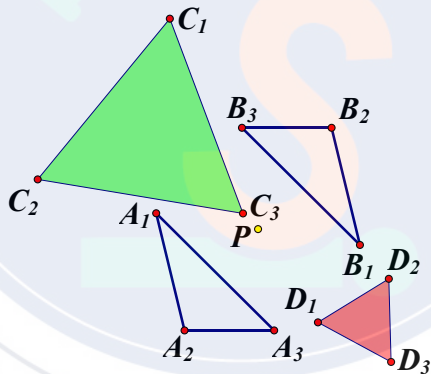


圖5： $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線

$\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線

性質4.

- $\triangle C_1C_2C_3$ 與 $\triangle D_1D_2D_3$
 恆為正三角形。
- $\frac{[C_1C_2C_3]-[D_1D_2D_3]}{A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$
 $\frac{[C_1C_2C_3]+[D_1D_2D_3]}{[A_1A_2A_3]} = 3$

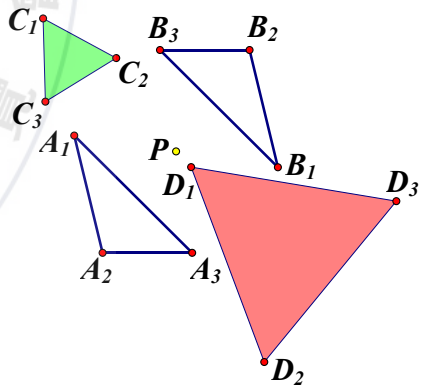


圖6： $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線

(二)一般化：以 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 為底邊且一般化底角 θ

定理5. (1)當 $m = 0$, $\Delta C_1 C_2 C_3 \cong \Delta D_1 D_2 D_3$ 且 $\Delta C_1 C_2 C_3 \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

$$\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0, \quad \frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 2 \tan^2 \theta$$

(2)當 $m = 1$, $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\tan \theta}{4}$, $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$

(3)當 $m = 2$, $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\tan \theta}{4}$, $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$

(三)幾何意義：以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 為底邊且一般化底角 θ

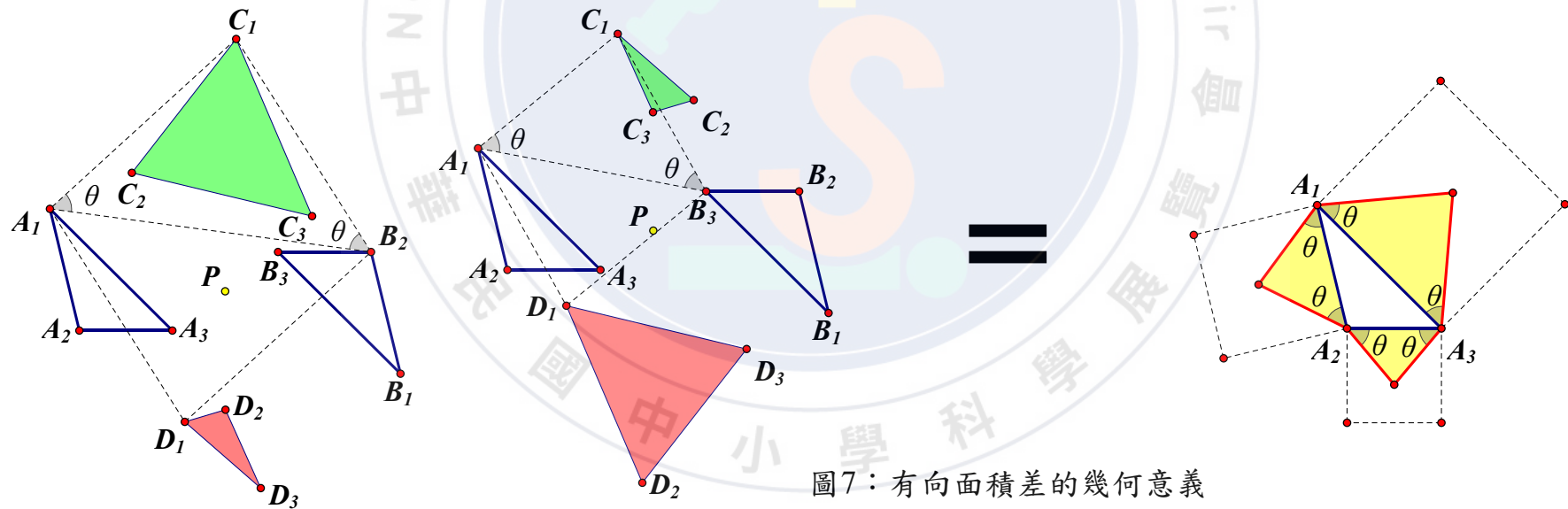


圖7：有向面積差的幾何意義

三、凸（凹）四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的衍伸圖形性質

當多邊形的邊數增加後，發現不少有趣性質，其中定理 7 的幾何意義與定理 8 的透都是異於三角形的研究結果。

定理 6.

當 $m = 0$ 時，【定性】四邊形 $C_1C_2C_3C_4 \cong D_1D_2D_3D_4 \sim A_1A_2A_3A_4$

【定量】有向面積不變量 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 0$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 2 \tan^2 \theta$

定理 7. (對稱)

當 $m = 1$ 時，【定量】 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = \frac{\tan \theta}{4}$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta$

當 $m = 3$ 時，【定量】 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = -\frac{\tan \theta}{4}$ 且 $\frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta$



圖 8：對稱輪換示意圖

定理8. (透視)

當 $m = 2$ 時, 【定性】 P 點為兩組對應的全等四邊形的透視中心

【定量】 有向面積不變量 $[C_1C_2C_3C_4] = [D_1D_2D_3D_4] = [A_1A_2A_3A_4]$

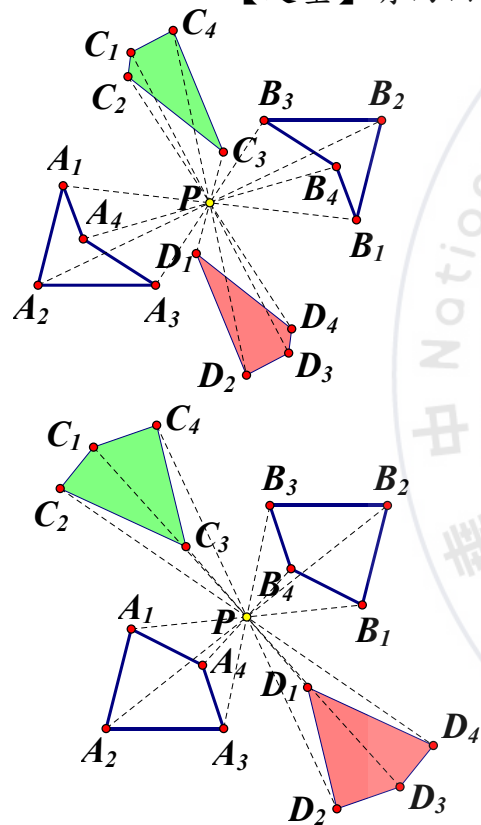


圖9: $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線的透視

$\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 連線的幾何意義

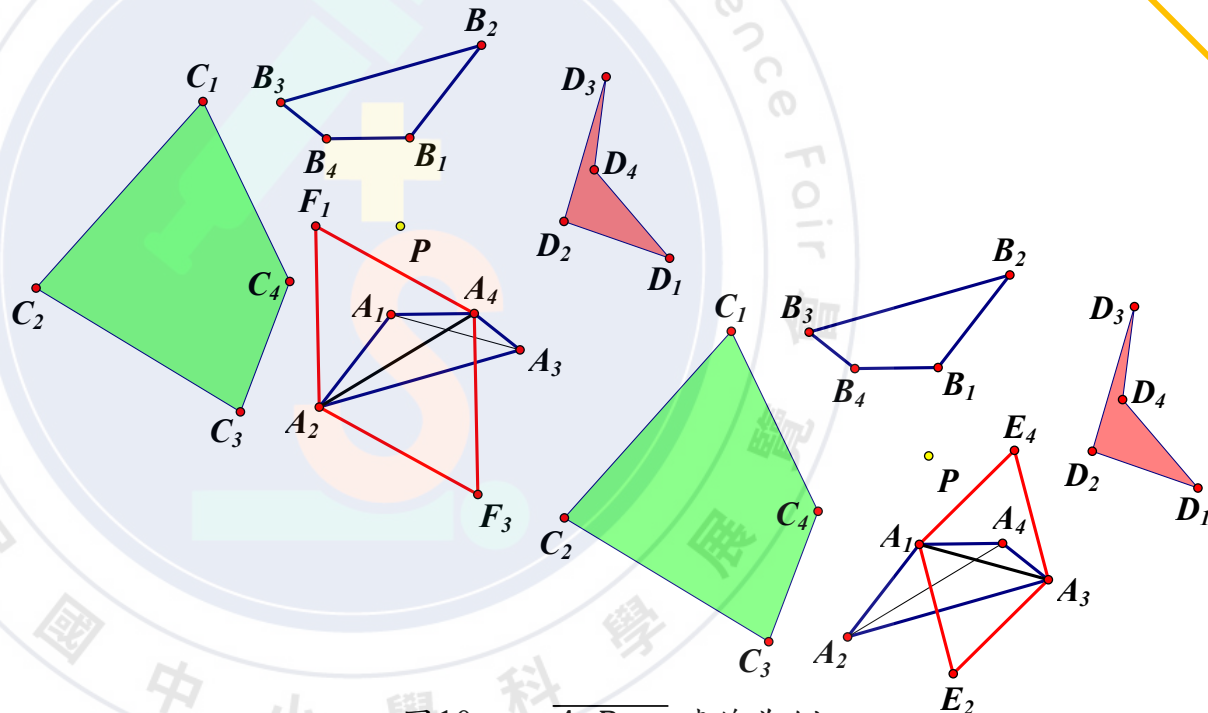


圖10: 以 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線為例

四、一般化：凸（凹） n 邊形構造的衍伸圖形性質

定理9. (對稱) 對於任意凸（凹）多邊形， $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線與 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線構造的衍伸圖形具有對稱性。

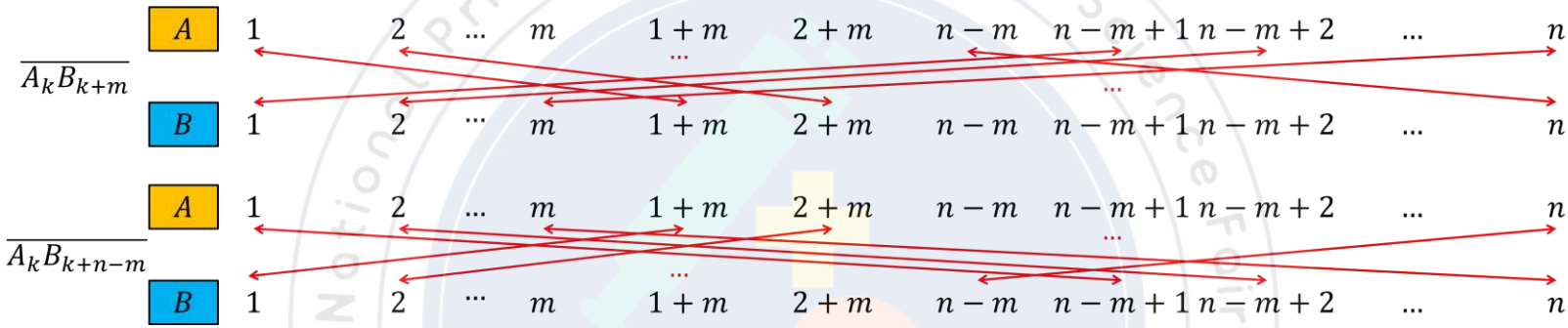


圖11：一般化對稱輪換性

$$\begin{aligned} & \overline{A_k B_{k+m}} \\ & [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] \\ & \overline{A_k B_{k+n-m}} \quad \parallel \\ & [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] \\ & \overline{A_k B_{k+m}} \\ & [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] \\ & \overline{A_k B_{k+n-m}} \quad \parallel \\ & -([C_1 C_2 C_3 \dots C_n] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_n]) \end{aligned}$$

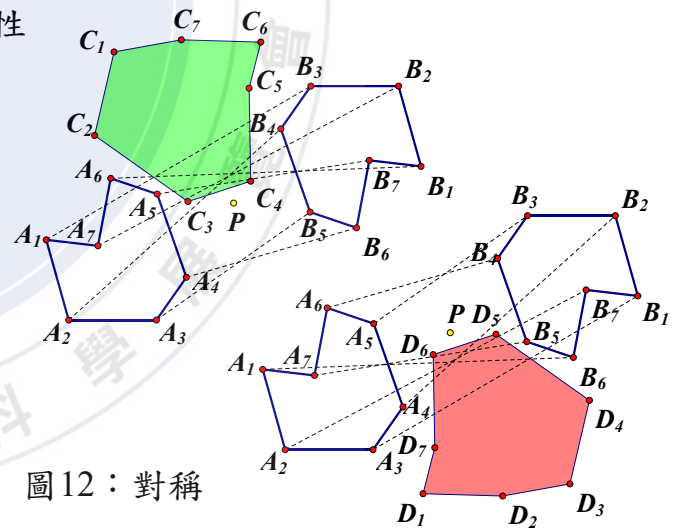


圖12：對稱

定理 10. (一般化奇邊形) $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} (-2x_k x_{k+m+1} - 2y_k y_{k+m+1} + 2x_{k+1} x_{k+m} + 2y_{k+1} y_{k+m}).$$

① 當 $m = 0$, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] = 0$.

(定性性質：多邊形 C 全等於多邊形 D 且與原多邊形 A 相似)

② 當 $m = 1$, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] = \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i+1} A_2}^2)$.

③ 當 $m = 2i$, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}] = \frac{-\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \dots + \overline{A_{2i+1} A_2}^2)$.

$$[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i+1}] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i+1}]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2i+1} \left(2(1 + \tan^2 \theta) \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} + (1 - \tan^2 \theta) \times \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right) \right).$$

根據 $m - 1$ 、 $m + 1$ 與 $2i + 1$ 的互質可分四種情形 (芒星與角星)。

定理 11. (一般化偶邊形) $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線

我們給出有向面積和與差的一般式 (詳閱報告書)

其中與奇邊形不同的是

當 $m = i$, $[C_1 C_2 C_3 \dots C_{2i}] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_{2i}] = 0$.

(定性性質：多邊形 C 全等於 D ，但與原多邊形 A 不相似，

注意到 C_k 與 D_{k+i} 點對稱於 P 點，即為透視性質)

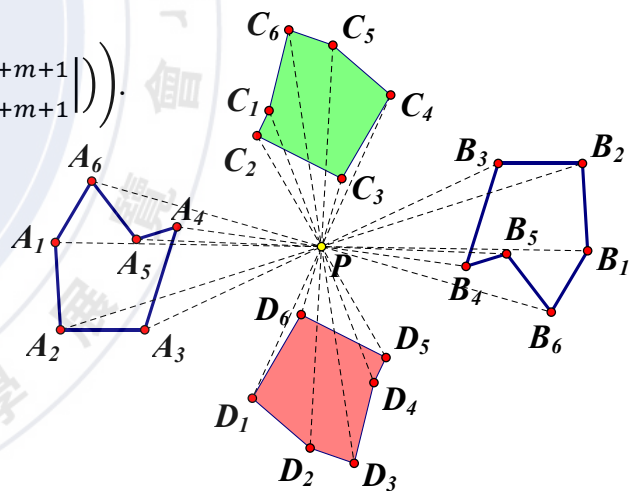
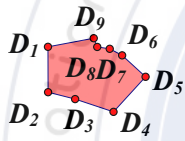
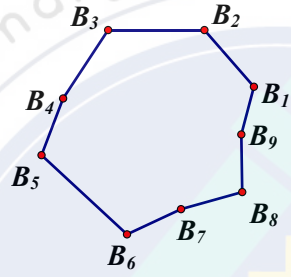
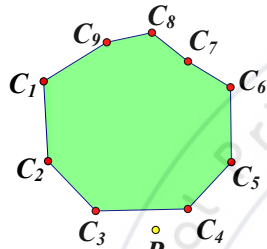
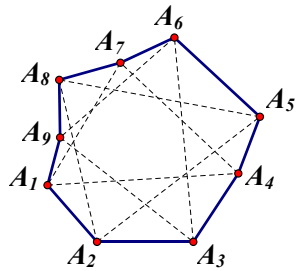


圖 13：全等與透視

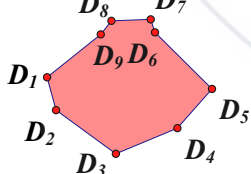
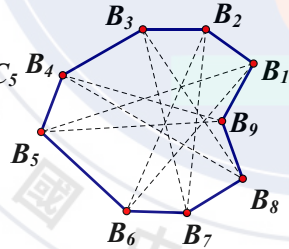
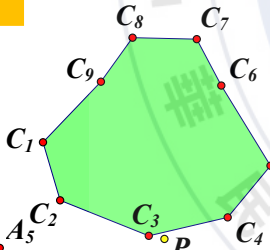
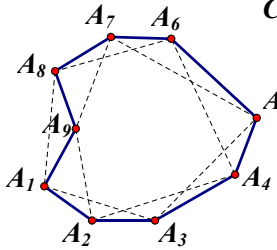
$$(i, m) = (4, 2)$$



$$\begin{aligned}
 & [C_1 C_2 C_3 \dots C_9] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_9] \\
 &= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_9] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \\
 &\quad \times ([A_1 A_2 A_3 \dots A_9] - [A_1 A_4 A_7] - [A_2 A_5 A_8] - [A_3 A_6 A_9])
 \end{aligned}$$

圖14：有向面積不變量為芒星與角星

$$(i, m) = (4, 3)$$



$$\begin{aligned}
 & [C_1 C_2 C_3 \dots C_9] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_9] \\
 &= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_9] + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \theta) \\
 &\quad \times ([A_1 A_3 A_5 A_7 A_9 A_2 A_4 A_6 A_8] \\
 &\quad - [A_1 A_5 A_9 A_4 A_8 A_3 A_7 A_2 A_6])
 \end{aligned}$$

圖15：有向面積不變量為芒星

五、延伸：旋轉 90 度的兩原始多邊形構造的衍伸圖形性質

定理 12. (一般化 n 邊形) $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線

$$(1) [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] \\ = \frac{\tan \theta}{2} \sum_{k=1}^n \left(\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right).$$

$$(2) [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] \\ = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_n] \\ + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (1 - \tan^2 \theta) ((x_k x_{k+m+1} - x_{k+1} x_{k+m} + y_k y_{k+m+1} - y_{k+1} y_{k+m})).$$

以下為三角形與四邊形有趣的定性性質，可參閱報告書第 28、29 頁。

直角三角形

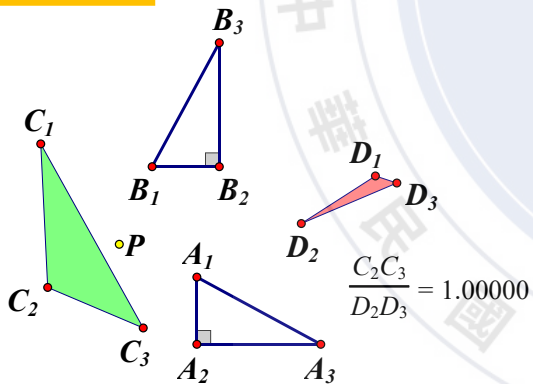


圖17：直角三角形

任意四邊形

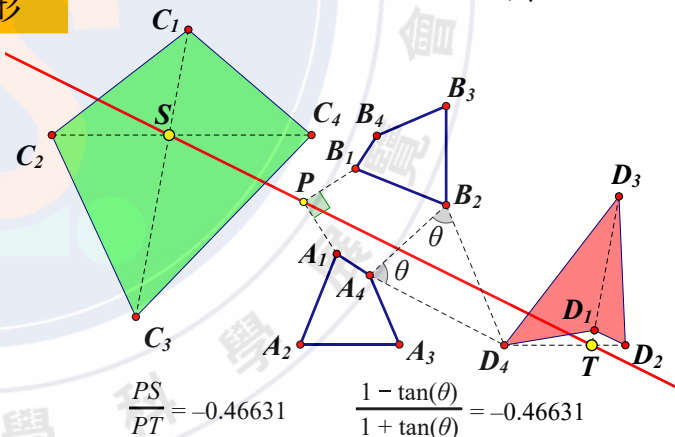


圖18：對角線交點共線

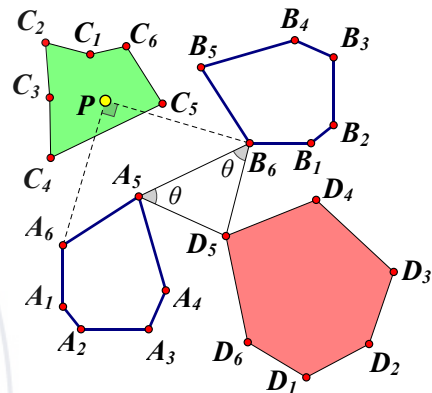


圖16：A、B 旋轉 90 度

肆、結論

一、任意三角形的衍伸圖形性質探究

以 $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線進行分類，我們特殊化討論 60 度的情形，發現不少有趣性質。隨後一般化角度，分別給出其衍伸圖形 $\Delta C_1 C_2 C_3$ 和 $\Delta D_1 D_2 D_3$ 的定性性質與幾何意義，我們也給出有向面積和與差的一般式。

二、任意凸（凹）四邊形的衍伸圖形性質探究

以連線 $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$ 進行分類，直接針對一般化角度探討，我們分別給出其衍伸圖形四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的定性性質與幾何意義（異於三角形），以及給出有向面積和與有向面積差的一般式。值得一提的是，我們發現異於三角形的 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 連線的透視性質。

三、一般化任意凸（凹）多邊形的衍伸圖形性質探究

我們先給出了重要的 $\overline{A_k B_{k+m}}$ 連線與 $\overline{A_k B_{k+n-m}}$ 連線下的衍伸圖形的對稱性，利用此性質可將探討的數量減半。再給出有向面積和與有向面積差的一般式。有趣的是，發現當 m 為特定值時，我們也給出有向面積差的特殊幾何意義。

伍、參考文獻

- [1] Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc (2016). Problem 4167. *Crux Mathematicorum*, 42 (7), 314.
- [2] Bart Braden (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, 17 (4), 326–337.