中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030422

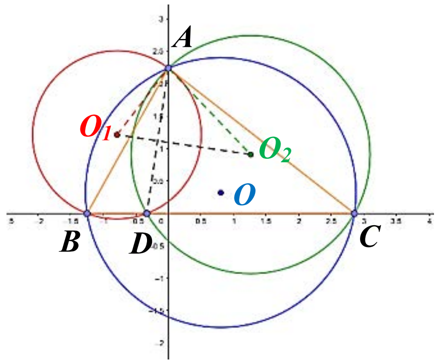
雙圓記 —探究共邊三角形的外接圓

學校名稱：彰化縣立彰興國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳偉群	賴姵伶
國二 鐘清元	徐可昕
國二 梁宸泰	

關鍵詞：共邊三角形、外接圓、圓錐曲線

摘要



這是一個歷時兩年半鑽研兩共邊三角形外接圓各種有趣關係的探究之旅，透過 *GeoGebra* 的輔助，經由(1)觀察圖形及數據形成猜想(2)幾何論證猜想為真的探究歷程。

我們首先探討兩共邊三角形外接圓的圓心位置、半徑、半徑和及連心線的關係，發現並證明出等腰三角形中圓心位置具特殊性、兩外接圓半徑和 R_1+R_2 與連心線$\overline{O_1O_2}$的長度都跟動點 D 的 x 坐標呈現函數關係且圖形為雙曲線的一支；據此討論出兩外接圓面積和與原三角形外接圓面積關係，同時發現$\Delta AO_1O_2\sim\Delta ABC$ 且 AO_1OO_2 四點共圓。在研究連心線時也發現，當動點 D 移動時，$\overline{O_1O_2}$的中點形成一條直線；每條連心線皆與以頂點 A 為焦點，$\overleftrightarrow{BC}$為準線的拋物線相切。最後得出若任意ΔABC 的頂點 A 到$\overline{BC}$的距離相等，連心線$\overline{O_1O_2}$所包絡出的拋物線皆全等。

壹、研究動機

原本單純好奇如果將三角形一分為二，各自做出外接圓，會出現什麼有趣的關係，而開始了我們對共邊三角形外接圓的第一次研究。「咦～好像是雙曲線耶」，沒想到從繪圖模擬的圖形驚喜的發現兩半徑和與動點 x 坐標存在的函數關係，也因為這個函數關係，啟發原本遇上瓶頸的我們，接著對外接圓面積進行探討。一路前進到鈍角三角形時，發現共邊三角形外接圓面積和與原外接圓間存在不同關係，再次卡關在如何確定這不同的關係。

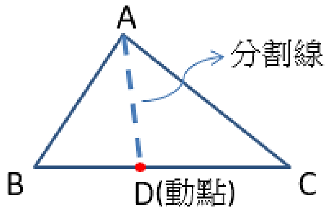
然而，關於鈍角三角形的未解問題實在讓人很想一探究竟，除此之外，就像水龍頭被打開，問題帶來新的問題，我們好奇的想繼續探究共邊三角形外接圓的連心線，看看還有沒有什麼特殊的關係尚未被發現，懷著探險挖寶的心情，開啟了「雙圓記」的篇章。

貳、研究目的

一、名詞解釋

為了溝通上的簡潔及順暢，我們將研究中會使用到的幾何描述先形成共識，方便討論，各種名詞說明如下：

圖 2-1-1 共邊三角形示意圖



（一）**動點**：本研究是以三角形某一頂點與其對邊上的任意一點(不含 B，C)相連做為分割線，將原三角形分割成兩個三角形,因為對邊上的這一點可以任意更動位置，將其稱為動點，如圖一中的 D 點（移動區間為 B、C 兩點之間）。

（二）**分割線**：將三角形某一頂點與其對邊上的任意一點（不包含 B、C）相連，可分割原三角形成為兩個三角形，此連線稱為分割線，如圖一中的$\overline{AD}$。

（三）**共邊三角形**：將三角形某一頂點與其對邊上的任意一點（不包含 B、C）相連，分割原三角形成為兩個三角形，這兩個三角形因為共用一個邊（此共用邊就是分割線），稱這兩個三角形為共邊三角形，如圖一中的ΔABD 與ΔACD 即為共邊三角形。

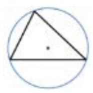
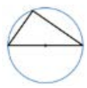
二、文獻探討

(一) 外心

國中數學第五冊介紹到三角形的外心、內心及重心，其中外心指的是三角形外接圓的圓心。三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，若以三角形的外心為圓心，外心到頂點的距離為半徑畫圓，則三頂點會落於此圓上，此圓即為三角形的外接圓。

任意三角形都有外心，其位置則因三角形種類不同而有所不同。當三角形為銳角三角形時，外心在三角形內部；當三角形為直角三角形時，外心在三角形的斜邊中點；當三角形為鈍角三角形時，外心在三角形外部。

表 2-2-1 三角形外心位置

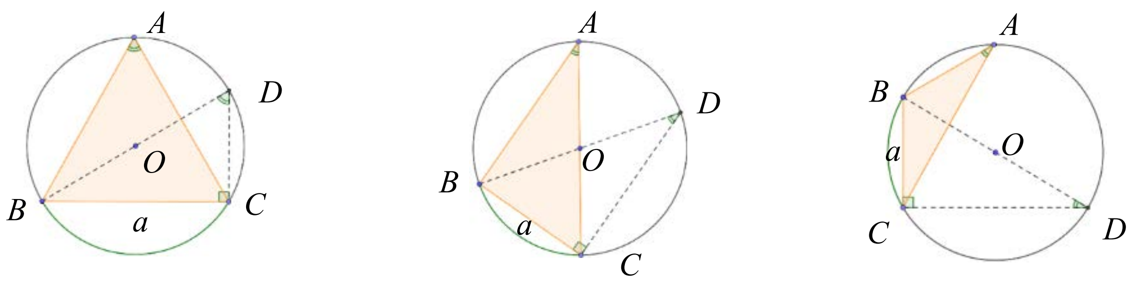
		
銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形

(二) 外接圓半徑

在國中階段，當三角形為直角三角形時，因為外心在三角形的斜邊中點，所以很容易得知其外接圓半徑為斜邊的一半，然而銳角三角形及鈍角三角形則不好討論。

老師建議我們可以透過自主學習與小組討論先認識高中三角函數單元裡的正弦定理，發現有了正弦定理對於求出任意三角形的外接圓半徑真是如虎添翼。正弦定理是指在一個三角形中，各邊和它所對角的正弦的比值相等，可以用底下的數學式表示。

表 2-2-2 正弦定理

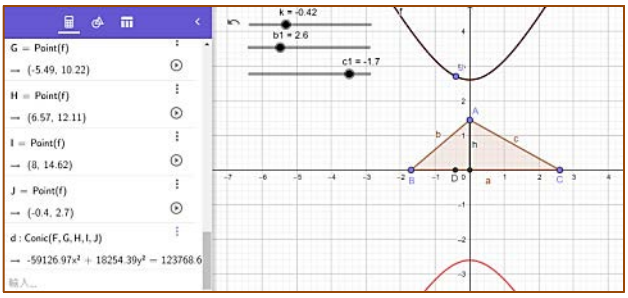
正弦定理
若ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊邊長分別為a、b、c，且ΔABC的外接圓半徑為R，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2\mathrm{R}$


有了正弦函數後，所有三角形的外接圓半徑都能求出，對於我們探討共邊三角形外接圓的關係真是太重要了。

(三) *GeoGebra* 數學軟體

<u>華羅庚</u>曾說：「數缺形時少直覺，形缺數時難入微」，我們利用 *GeoGebra* 這個數學軟體的協助發揮數與形的優勢，分析經過系統化分類的 30 種共邊三角形的外接圓，這個軟體能顯示圖形中的幾何量，也能根據設定的參數數據模擬出可能的函數圖形，成為我們尋找關係的得力助手。

圖 2-2-1 *GeoGebra* 數學軟體



(四) 歷屆科展相關研究

在尋找研究靈感時，我們先觀摩歷屆科展作品，第 51 屆高中組的作品—共邊三角形的內切圓，吸引了我們目光。這個研究是從一道很常見的求直角三角形內切圓半徑的題目出

發，把三角形一分為二，再分別做出內切圓，去探討內切圓半徑間的關係。這讓我們很驚訝，原來平常常見的數學題，只要增加一點改變，就可能是很有意思的研究主題。因為這份作品的啟發，加上看到內心很自然想到外心，於是決定看看共邊三角形外接圓是不是也能有什麼新的發現。

決定好研究主題，先搜尋了是否有相關的研究成果可以參考，發現歷屆全國科展有以下 4 件作品主題是關於三角形的五心：

表 2-2-3 歷屆相關科展整理

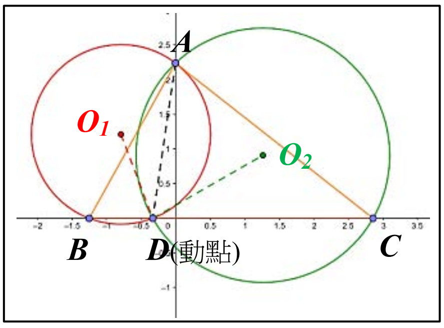
屆數	學習階段	主題	摘要	與研究問題相關之處
51	高中組	共邊三角形的內切圓	研究共邊三角形的內切圓半徑間的關係，以及何時內切圓半徑和呈最大值，並將此性質推廣到多圓的情形。	對共邊三角形內切圓的半徑關係
55	高中組	環「徑」變遷	探究一三角形與圖形內動點連成的各三角形外接圓半徑與原三角形外接圓半徑的關係，並找出各種三角形中的半徑和最小值與動點位置	三角形外接圓半徑與動點位置的關係
58	國中組	用“心”	探索任意三角形建構的旁心連線三角形、旁心三角形、及其向外做的正三角形五心、原三角形五心和兩者面積之間的關係。	三角形向外做三個相似三角形，各種不同心之連線三角形與外做三角形相似的情形。
61	國中組	圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究	討論給定任意圓內接三角形，如何在其三邊的延長線上分別取一點，使得這兩兩點的連線（共三條直線）都與圓相切	對於任意圓內接三角形，給出構造圓外切三角形的作圖方法

第 55 屆環「徑」變遷是尋找三角形與圖形內動點連成的三個三角形外接圓半徑與原三角形外接圓半徑的關係，然而當動點放置於邊上時，形成兩個共邊三角形外接圓的情況並未進行深入全面的探討，這讓我們更想去探尋這個尚未被深究的區塊。

三、研究問題

確立好研究主題之後，開始了長達兩年半的研究。起初我們主要探討兩個共邊三角形外接圓的圓心位置，半徑及半徑和的關係，設定(一)到(四)這四個研究問題，完成研究報告—外心狂想曲，並且參加縣賽。好奇心被激發的我們，還想繼續挑戰當時還無法

圖 2-3-1 共邊三角形及其外接圓



解決的問題，決定以更符合研究主題的「雙圓記」為名，並且把我們的研究焦點延伸到共邊三角形外接圓的連心線，增加(五)到(八)這四個研究問題，使探究共邊三角形外接圓的研究更為完整。

研究對象的條件設定是：給定任意ΔABC，動點 D 在$\overline{BC}$上，連接$\overline{AD}$，ΔABD 外接圓 O_1，半徑 R_1，ΔACD 外接圓 O_2，半徑 R_2。透過繪圖軟體的助攻，我們要探究的問題如下：

(一) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓圓心 O_1 與 O_2 的位置關係。

(二) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 與 R_2 的關係。

(三) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1、R_2 與邊長的關係。

(四) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑和 R_1+R_2 的最小值。

(五) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係。

(六) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$長度的變化。

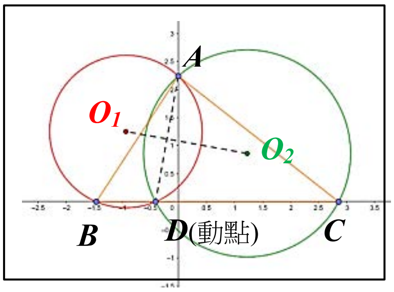
(七) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$中點的軌跡圖形。

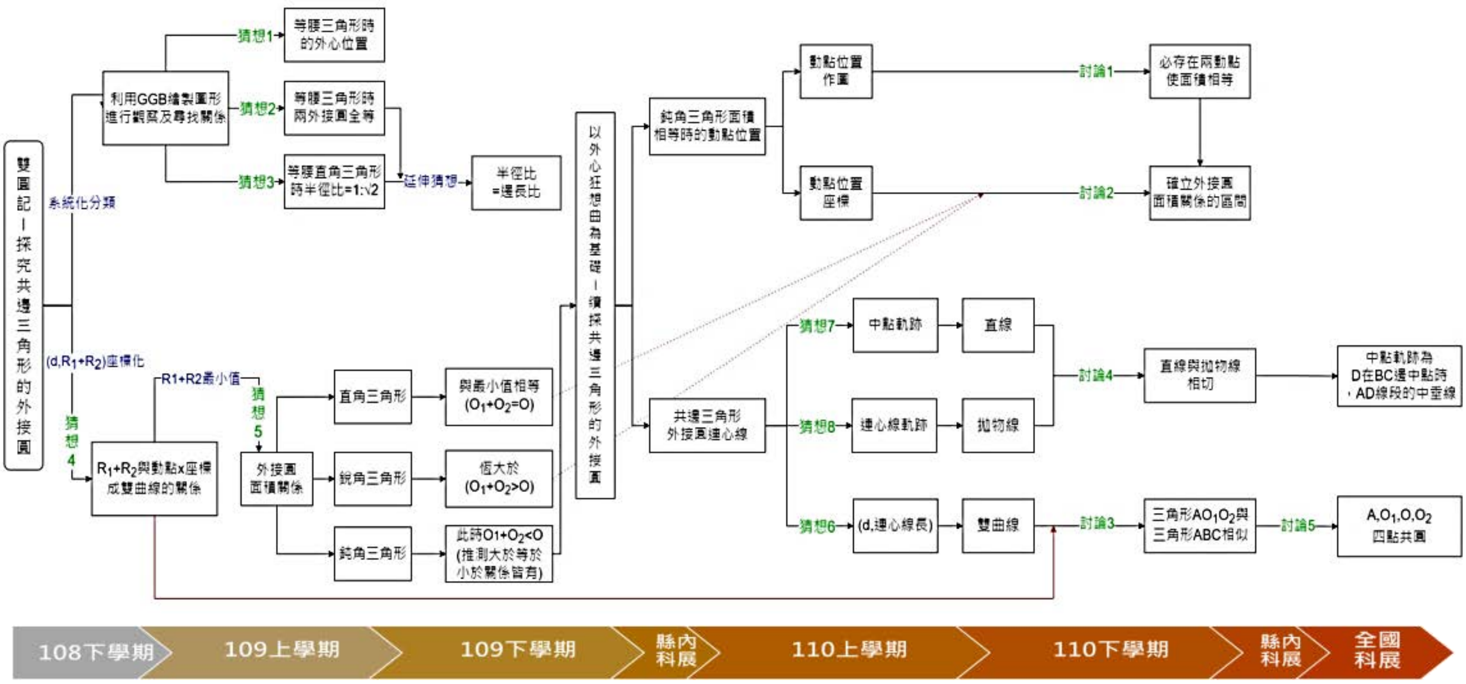
(八) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$包絡出的圖形。

圖 2-3-2 共邊三角形連心線示意圖



四、研究地圖



參、研究設備及器材

電腦、*GeoGebra* 數學軟體、紙筆、尺、圓規

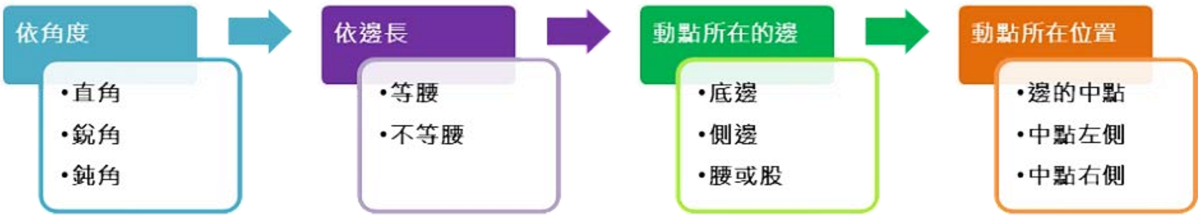
肆、研究過程或方法

一、共邊三角形系統化分類

我們決定先透過 *GeoGebra* 數學軟體（後續簡稱 *GGB*）的幫助，繪圖觀察共邊三角形外接圓可能存在的關係，為了有系統地探討，將需要繪製外接圓的共邊三角形進行分類。

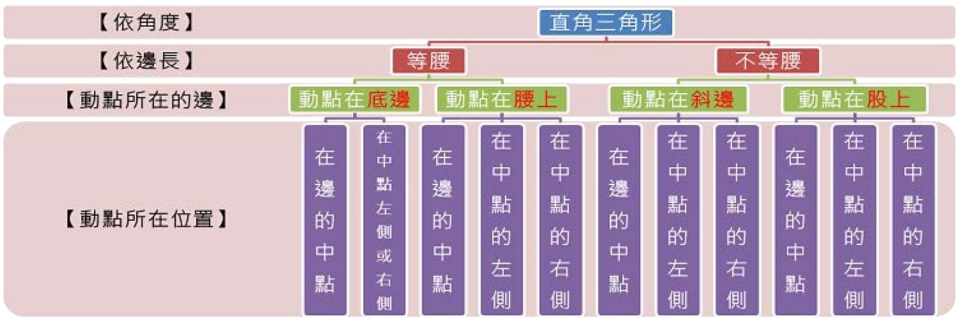
因為在直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形時，三角形的外心分別位於斜邊中點、三角形內部、三角形外部，故先依角度將三角形分成三大類，再依邊長關係分為等腰與不等腰。區分出三角形種類後，再依動點所在位置，進行更細的分類，分類流程圖如下所述：

圖 4-1-1 三角形分類流程圖



（一）直角三角形

圖 4-1-2 直角三角形繪圖分類情形

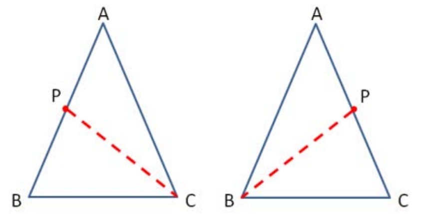
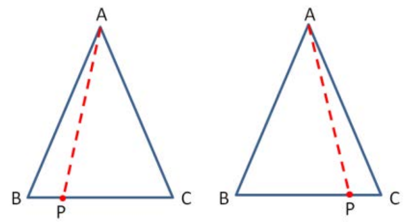


仔細思考，發現有些情況是重複的。如果依等腰或不等腰、動點可能落於三個邊以及動點在邊上中點或左側或右側這三種可能的位置，光是直角三角形就會有 $2\times3\times3=18$ 種情況，依此類推到銳角三角形及鈍角三角形，總共將出現 54 種需要考慮的情況。

不過，以具備「等腰」的條件來說，因為左右對稱，動點在左邊的腰上或右邊的腰上，其實圖形的關係是相同的，如下圖左；同樣的，動點是在底邊中點的左邊或者右邊，也具有相同的圖形關係，如下圖右。因此在分類流程圖中就將其合併，避免重複，讓訊息更為簡潔。

在直角三角形中，即使不具等腰的條件，動點在兩股上的情況也會相同，所以精簡之後只有 11 種需要繪製的情況。

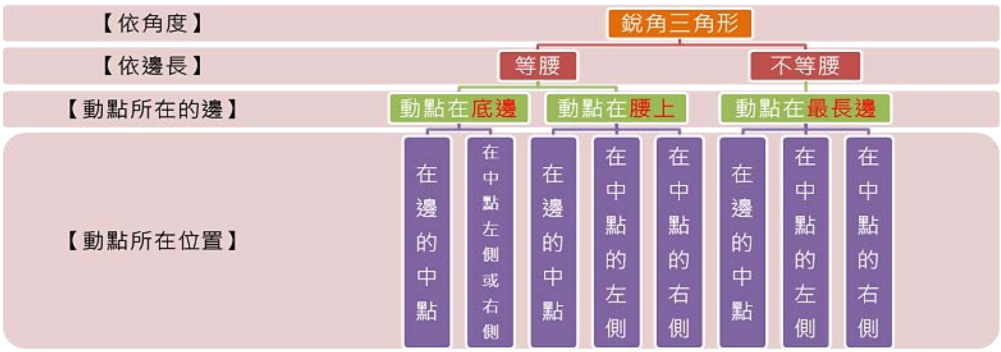
表 4-1-1 等腰三角形繪圖重複情形範例

	
動點在左邊的腰上或右邊的腰上	動點在底邊中點的左邊或者右邊
【圖左】	【圖右】

（二）銳角三角形

遵循前述的原則，銳角三角形時，不論動點在哪一個邊上，圖形會具備相同的關係，於是留下動點放在最長邊的情況，只需繪製 8 種情況的三角形。

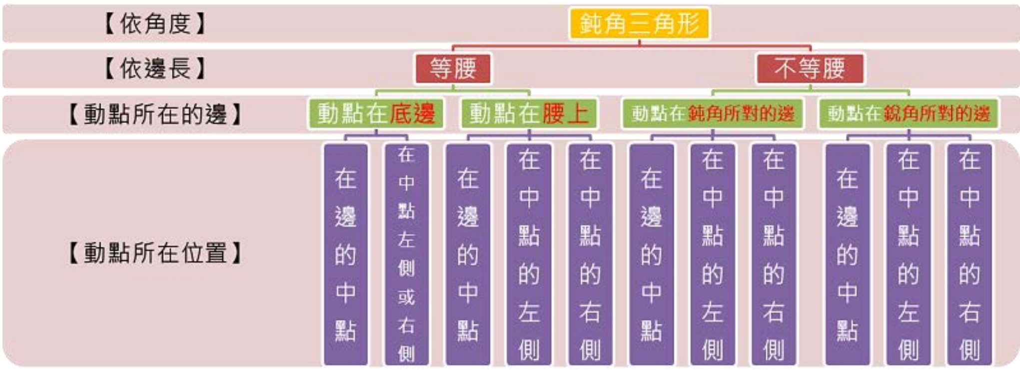
圖 4-1-3 銳角三角形繪圖分類情形



（三）鈍角三角形

鈍角三角形時，會有兩個銳角所對的邊，當動點在這兩個邊上時，圖形會具備相同的關係，於是將動點分為放在鈍角所對的邊及銳角所對的邊這兩種情況，再加上動點是位於邊的中點或中點左側或中點右側，需繪製 11 種情況的三角形。

圖 4-1-4 鈍角三角形繪圖分類情形

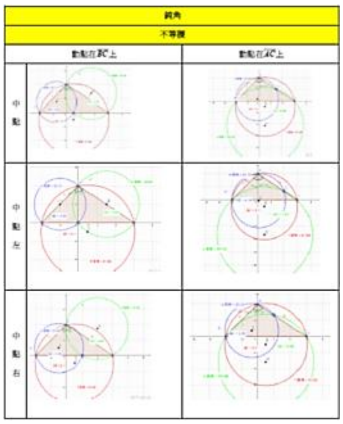


依照這樣的方式，**最後全部需要繪製的圖形，從 54 種大大縮減為 *11+8+11=30* 種**。

二、探究共邊三角形的外接圓

我們利用 *GGB* 畫出上述 *30* 種分割方式所形成的共邊三角形及其外接圓，除了觀察圖形，同時記錄外接圓半徑及面積的數據，進一步輔助關係的發現。此外，當動點在中點的左側及右側時，再各取了三組動點在不同位置的數據，增加尋找關係的線索。

表 4-2-1 實際繪圖及數據收集表



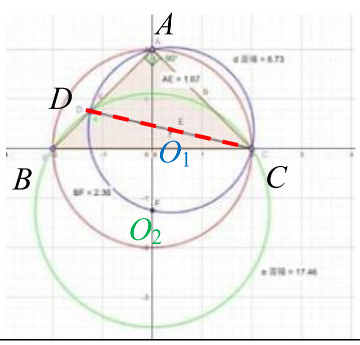
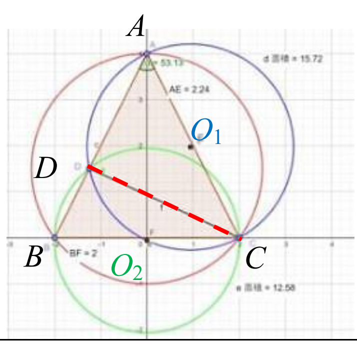
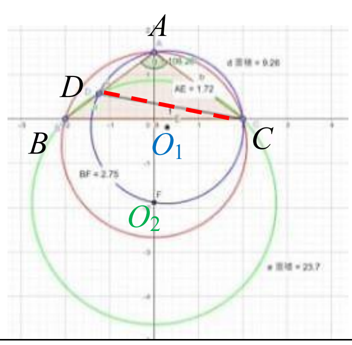
鈍角							
不等腰							
動點在$\overline{BC}$上							
位置	半徑			圓面積			關係
	r_1	r_2	R	O_1	O_2	O	
中點	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	O1<O2<O
中點左	2.83	3.61	5.1	25.13	40.84	81.68	離 B 點越近面積和先變小再變大
	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	
	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	
中點右	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	離 C 點越近面積和越大
	3.54	4.51	5.1	39.27	63.81	81.68	
	4	5.1	5.1	50.27	81.68	81.68	

紀錄表中我們統一將原三角形的外接圓稱為 O，半徑 R，共邊三角形則分為左右來看，左邊的三角形外接圓稱為 O_1，半徑 R_1，右邊的三角形外接圓稱為 O_2，半徑 R_2。根據 *GGB* 所畫出的圖形以及收集到的數據，我們猜測共邊三角形的外接圓可能存在以下幾種特殊關係，並透過幾何證明論證猜想為真，分述如後：

（一）探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓圓心 O_1 與 O_2 的位置關係

1.觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-2 等腰三角形其共邊三角形外接圓圓心位置觀察

		
等腰直角三角形 含底角之ΔCBD 外接圓圓心 O_2 含頂角之ΔCAD 外接圓圓心 O_1 **O_2落於圓 O_1（藍色圓）上**	**等腰**銳角三角形 含底角之ΔCBD 外接圓圓心 O_2 含頂角之ΔCAD 外接圓圓心 O_1 **O_2落於圓 O_1（藍色圓）上**	**等腰**鈍角三角形 含底角之ΔCBD 外接圓圓心 O_2 含頂角之ΔCAD 外接圓圓心 O_1 **O_2落於圓 O_1（藍色圓）上**

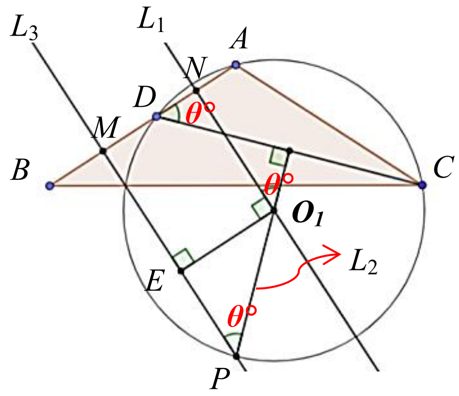
從圖形可以明顯看出，上圖中三個不同種類的等腰ΔABC，其共邊三角形外接圓的圓心位置具有特殊性，含底角之ΔCBD 外接圓圓心 O_2 落於含頂角之ΔCAD 外接圓 O_1 上。

2.幾何論證猜想為真

命題 1.1：任意等腰ΔABC，動點 D 位於其中一腰$\overline{AB}$，連接$\overline{CD}$，含頂角之ΔCAD 外接圓圓心為 O_1，含底角之ΔCBD 外接圓圓心為 O_2，則 O_2 落於圓 O_1 上

【證明】

圖 4-2-1 等腰三角形之共邊三角形外接圓圓心位置證明



假設有一等腰ΔABC，頂角為$\angle A$，$\overline{AB}$ 及$\overline{AC}$為其兩腰，$\overline{AB}$上有一動點 D，連接$\overline{CD}$，分割出共邊ΔCAD 及ΔCBD

1^0 作ΔCAD 的外接圓

取$\overline{AD}$的中點 N，過 N 作$\overline{AD}$的中垂線 L_1，與$\overline{CD}$中垂線 L_2 相交於 O_1 點，圓 O_1 即為ΔCAD 的外接圓，半徑為 R

2^0 證明圓 O_1 上的 P 點即為ΔCBD 外接圓之圓心 O_2

$\overline{CD}$中垂線 L_2 過 O_1 點，交圓 O_1 於 P 點

過 P 點作平行 L_1 之直線 L_3，交$\overline{AB}$於 M

假設$\overline{AD}=n$，$\overline{BD}=m$，圓 O_1 半徑$=R$，$\angle ADC=\theta°$

在ΔCAD 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta°}=\dfrac{m+n}{\sin\theta°}=2R$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{2R}=\sin\theta°$$

在ΔEPO_1 中，若 $\overline{O_1E}\perp L_3$

$$\Rightarrow \overline{O_1E}=R\cdot\sin\theta°=R\cdot\frac{m+n}{2R}=\frac{m+n}{2}$$

$$\because\ \overline{DM}=\overline{MN}-\overline{DN}=\overline{O_1E}-\overline{DN}=\frac{m+n}{2}-\frac{n}{2}=\frac{m}{2}$$

$\therefore$ M 為$\overline{BD}$的中點 $\Rightarrow$ L_3 為$\overline{BD}$的中垂線

$\Rightarrow P$ 為ΔCBD 兩邊中垂線 L_2 及 L_3 交點

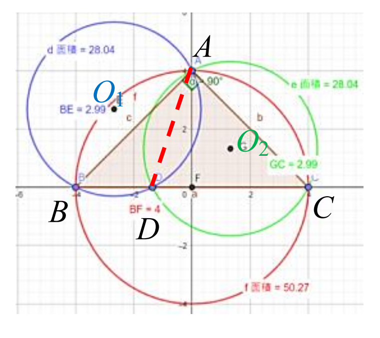
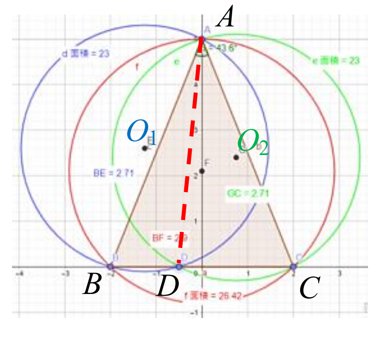
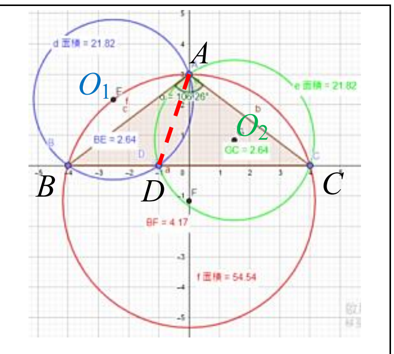
故 P 點為ΔCBD 外接圓之圓心 O_2

由 1^0 及 2^0 的結果可知，等腰ΔABC 中，當動點 D 位於腰上，則含底角之ΔCBD 外接圓圓心 O_2 會落在含頂角之ΔCAD 的外接圓上。

（二）探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 與 R_2 的關係

1.觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-3 等腰三角形之共邊三角形外接圓半徑觀察

		
等腰直角三角形 R_1=2.99= R_2	等腰銳角三角形 R_1=2.71= R_2	等腰鈍角三角形 R_1=2.64= R_2

從圖形及數據可以明顯看出，上圖中三個不同種類的等腰ΔABC，頂角∠A 的頂點與底邊上的動點 D 連線，分割出共邊ΔABD 與ΔACD，其外接圓 O_1（藍色圓）與 O_2（綠色圓）的半徑相等，顯示兩圓全等。

2.幾何論證猜想為真

命題 2.1：任意等腰ΔABC，當動點 D 位於底邊$\overline{BC}$上，連接$\overline{AD}$，共邊ΔABD 與ΔACD 的外接圓半徑 R_1＝R_2，即外接圓全等

【證明】

給定等腰ΔABC，頂角為∠A，$\overline{AB}$ 及$\overline{AC}$為其兩腰

$\overline{BC}$上有一動點 D，連接$\overline{AD}$，分割出共邊ΔABD 及ΔACD

ΔABD 外接圓 O_1，半徑 R_1，ΔACD 外接圓 O_2，半徑 R_2

根據正弦定理，

$$R_1=\frac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}，R_2=\frac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}$$

若∠$ADC=\theta^\circ \Rightarrow \angle ADB=(180-\theta)^\circ$。

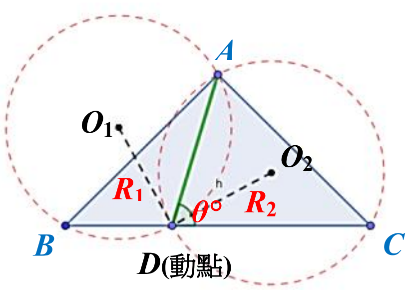
$\Rightarrow \sin\angle ADC=\sin\theta^\circ=\sin(180-\theta)^\circ=\sin\angle ADB$

又∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$

$$\therefore R_1=\frac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}=\frac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}=R_2$$

故兩個共邊三角形的外接圓全等得證

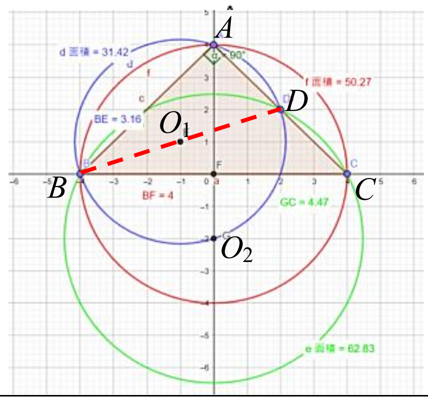
圖 4-2-2 等腰三角形共邊三角形外接圓半徑相等證明



（三）探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1、R_2與邊長的關係

1.觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-4 等腰直角三角形其共邊三角形外接圓半徑與邊長關係觀察

	（1）圓 O_1 面積＝31.4 圓 O_2 面積＝62.8 **圓 O_1：圓 O_2=31.4：62.8=1：2** （2）$R_1＝3.16$ $R_2＝4.47$ **R_1： R_2=3.16：4.47≒1：1.4146≒ 1：$\sqrt{2}$**

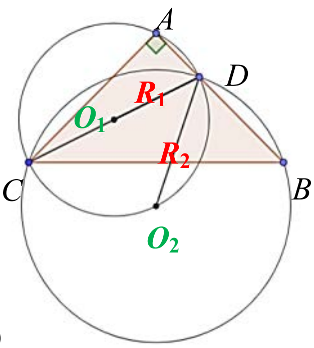
上圖直角ΔABC 中，$\angle A＝90°$，斜邊為$\overline{BC}$，動點 D 在其中一股$\overline{AC}$上，紅色虛線$\overline{BD}$為分割線，ΔBAD 與ΔBCD 為共邊三角形。從圖形及數據可以明顯看出，ΔBCD 的外接圓 O_2（綠色圓）面積為ΔBAD 的外接圓 O_1（藍色圓）面積的 2 倍，半徑亦呈現$\sqrt{2}$ 倍。

2. 幾何論證猜想為真

$\boxed{\text{命題 3.1}}$：等腰直角ΔABC，動點 D 位於其中一股$\overline{AC}$，連接$\overline{BD}$，共邊ΔBAD 與ΔBCD 的外接圓圓 O_1 面積：圓 O_2 面積=1：2，半徑 R_1： R_2＝1：$\sqrt{2}$

【證明】

圖 4-2-3 等腰直角三角形之共邊三角形外接圓半徑與邊長關係



假設等腰直角ΔABC，頂角$\angle A＝90°$，$\overline{AB}$ 及$\overline{AC}$為其兩股，

$\overline{AB}$上有一動點 D，連接$\overline{CD}$，分割出共邊ΔCAD 及ΔCBD，

ΔCAD 外接圓稱為 O_1，半徑 R_1，ΔCBD 外接圓稱為 O_2，半徑 R_2

根據正弦定理，

$$R_1＝\frac{\overline{CD}}{2\sin\angle CAD}，R_2＝\frac{\overline{CD}}{2\sin\angle CBD}$$

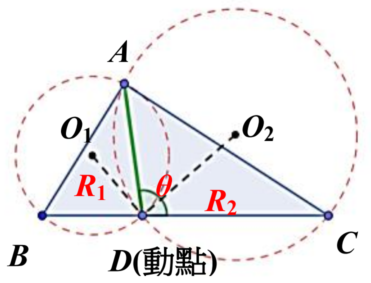
$$\Rightarrow\ R_1：R_2＝\frac{\overline{CD}}{2\sin 90°}：\frac{\overline{CD}}{2\sin 45°}＝1：\sqrt{2}$$ 得證 （面積比＝1：2 亦得證）

$\boxed{\text{延伸猜想}}$ 因為 $R_1：R_2＝1：\sqrt{2}$，同時$\overline{AC}：\overline{BC}$也是 $1：\sqrt{2}$，加上（一）及（二）所描述的關係及證明過程，進一步聯想到，應該對於任意三角形，共邊三角形外接圓的半徑比都會與動點所對的兩個邊長比相等，形成新的猜想，並加以證明。

命題 3.2：對於任意ΔABC，頂角為$\angle A$，底邊$\overline{BC}$上有一動點 D，連接$\overline{AD}$，分割出共邊三角形ΔABD 及ΔACD，ΔABD 外接圓半徑 R_1，ΔACD 外接圓半徑 R_2。

則 $R_1：R_2=\overline{AB}：\overline{AC}$。

圖 4-2-4 任意三角形之共邊三角形外接圓半徑與邊長關係



【證明】

根據正弦定理，$R_1=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}$，$R_2=\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}$

若$\angle ADC=\theta^{\circ} \Rightarrow \angle ADB=(180-\theta)^{\circ}$

$\Rightarrow \sin\angle ADB=\sin\theta^{\circ}=\sin(180-\theta)^{\circ}=\sin\angle ADC$

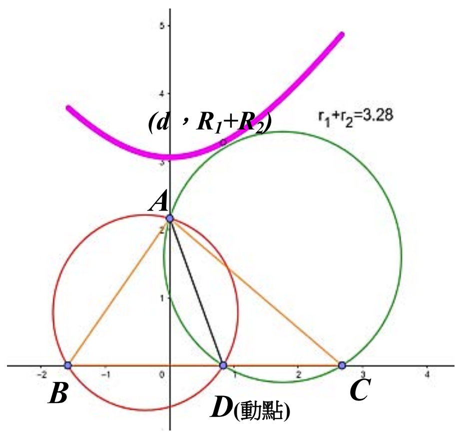
$R_1：R_2=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}：\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}=\overline{AB}：\overline{AC}$

故 $R_1：R_2=\overline{AB}：\overline{AC}$ 得證

（四）探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑和 R_1+R_2 的最小值

1.觀察圖形及數據形成猜想

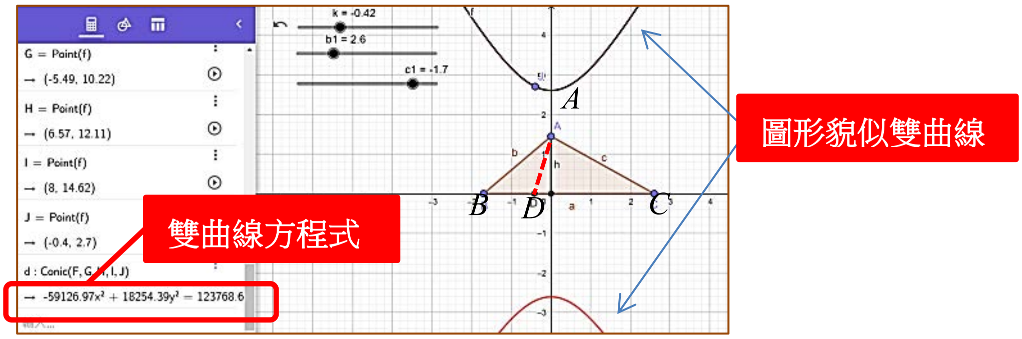
圖 4-2-5（d，R_1+R_2）軌跡圖



在觀察共邊三角形外接圓圓心的關係及外接圓半徑與邊長的關係時，發現移動 D 點時，兩個外接圓會跟著變大或變小，於是突發奇想，將 D 點的 x 坐標與外接圓半徑和寫成數對（d，R_1+R_2），繪製在坐標平面上，意外發現呈現曲線的關係，大家都覺得很驚喜！

不過，這究竟是哪一種曲線呢？我們運用 *GGB* 五點模擬的功能，在圖中紫色的曲線上選取五點，結果模擬出圖 4-2-6 雙曲線的圖形，為了確定 d 與（R_1+R_2）真的是呈現雙曲線一支的關係，我們進行了將坐標關係函數化來加以確認的證明。

圖 4-2-6 五點模擬 d 與（R_1+R_2）關係



2.幾何論證猜想為真

命題 4.1：**對於任意Δ*ABC*，將 *A* 點置於 *y* 軸，$\overline{BC}$置於 *x* 軸，$\overline{BC}$上的動點 *D* 坐標設為（*d,0*），連接$\overline{AD}$，分割出兩個共邊Δ*ABD* 與Δ*ACD*，Δ*ABD* 外接圓半徑 R_1，Δ*ACD* 外接圓半徑 R_2。**

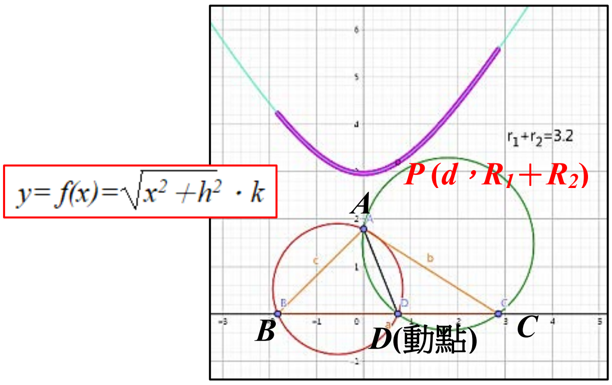
則（R_1+R_2）是 *d* 的函數，圖形為雙曲線的一支。

【證明】

設 *A* 的坐標為(0,*a*)，依正弦定理，$R_1=\dfrac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B}$，$R_2=\dfrac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C}$

令一點 *P* 坐標為$(d，R_1+R_2)$

圖 4-2-7　*d* 與（R_1+R_2）關係圖



$$\Rightarrow P(d，\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B}+\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C})$$

$$\Rightarrow P(d,\ \frac{\sqrt{d^2+a^2}(\sin\angle B+\sin\angle C)}{2\sin\angle B\sin\angle C})$$

$$\Rightarrow P(d,\ \frac{\sqrt{d^2+a^2}\cdot(\dfrac{a}{\overline{AC}}+\dfrac{a}{\overline{AB}})}{2\cdot\dfrac{a}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{a}{\overline{AC}}})$$

$$\Rightarrow P(d,\frac{\sqrt{d^2+a^2}\ (\overline{AB}+\overline{AC})}{2a})$$

在Δ*ABC* 中，$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}$為常數，令$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}=k\ \Rightarrow\ P(d,\sqrt{d^2+a^2}\cdot k)$

P 點在函數 $y=f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot k$ 上

$$y=\sqrt{x^2+a^2}\cdot k$$

$$(\frac{y}{k})^2=x^2+a^2\Rightarrow\frac{y^2}{k^2}-x^2=a^2$$

$$\Rightarrow\frac{y^2}{a^2k^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$，符合雙曲線關係式（型如 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$）

∴ 函數$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot k$為一雙曲線

故當動點 *D* 坐標為（*d,0*），共邊三角形外接圓半徑分別為 R_1 和 R_2時，

（R_1+R_2）是 *d* 的函數，圖形為雙曲線的一支得證。

觀察此雙曲線圖形的特性，具有最低點，代表半徑和存在最小值，這也開展出討論共邊三角形外接圓面積和關係的一條新路徑。

$\boxed{\text{延伸推論}}$ 因為 d 與（R_1+R_2）的關係為雙曲線，從圖形可以得知當 $d=0$ 時，（R_1+R_2）出現最小值，也就是**當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓半徑和最小。**我們也利用正弦定理證明出這個推論是正確的。

【證明】

根據正弦定理，$R_1=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}$，$R_2=\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}$

$\because$ 分母越大，分數越小

若 $\angle ADB=90^{\circ} \Rightarrow \sin\angle ADB=\sin 90°=1=\sin\angle ADC$，此時分母最大

$\therefore$ 當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓半徑最小 $\Rightarrow$ 半徑和最小

而此時（R_1+R_2）的最小值$=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$

（五）探討任意三角形中，共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係

問題帶來的新問題，從雙曲線的最低點可知，當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓的半徑和 R_1+R_2 最小，同時半徑 R_1 與 R_2 也最小，故此時共邊三角形的外接圓面積最小，當然其面積和也是最小。因此我們以分割線為三角形的高為前提，共邊三角形外接圓面積和最小的情況下，分為直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形，來探討共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係。

$\boxed{\text{前提}}$ 任意ΔABC，頂角為$\angle A$，作$\overline{BC}$上的高$\overline{AD}$，且 D 點在$\overline{BC}$上，分割出共邊ΔABD及ΔACD，令ΔABD 外接圓圓心 O_1，半徑 R_1，ΔACD 外接圓圓心 O_2，半徑 R_2，原三角形外接圓圓心 O，半徑 R。

圖 4-2-8 討論共邊三角形外接圓面積流程圖

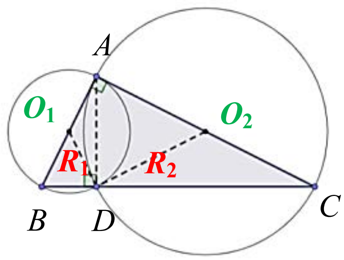
$\boxed{\text{命題 5.1}}$：若$\angle A=90°$ $\Rightarrow\Delta ABC$ 為直角三角形 $\Rightarrow$圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積＝圓 O 面積

【證明】

當$\angle A=90°$，ΔABC 外接圓半徑 $R=\dfrac{\overline{BC}}{2}$

又$\overline{AD}\perp\overline{BC}\Rightarrow\Delta ABD$ 及ΔACD 亦為直角三角形

圖 4-2-9 直角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



$\Rightarrow \Delta ABD$ 外接圓半徑 $R_1=\dfrac{\overline{AB}}{2}$，$\Delta ACD$ 外接圓半徑 $R_2=\dfrac{\overline{AC}}{2}$

$\because$ ΔABC 為直角三角形，根據畢氏定理，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$\therefore$ $(2R_1)^2+(2R_2)^2=(2R)^2 \Rightarrow R_1^2+R_2^2=R^2 \Rightarrow \pi \cdot R_1^2+\pi \cdot R_2^2=\pi \cdot R^2$

故圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積＝圓 O 面積

延伸思考 **如果分割線不為三角形的高時，面積關係又是如何呢？**

令 $\angle ADB=\theta$，此時 $2R_1=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}$，$2R_2=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(180°-\theta)}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}$

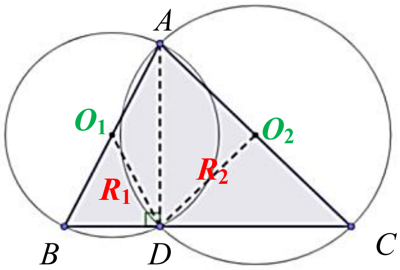
$\Rightarrow \pi \cdot R_1^2+\pi \cdot R_2^2=\pi \cdot \dfrac{\overline{AB}^2}{4\sin^2\theta}+\pi \cdot \dfrac{\overline{AC}^2}{4\sin^2\theta}=\pi \cdot \dfrac{\overline{BC}^2}{4\sin^2\theta}>\pi \cdot \dfrac{\overline{BC}^2}{4}=\pi \cdot R^2$

可知直角三角形其分割線<u>不為高</u>時，圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積＞圓 O 面積

命題 5.2：**若 $\angle A<90°\Rightarrow$ ΔABC 為銳角三角形 $\Rightarrow$ 圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 ＞ 圓 O 面積**

【證明】

圖 4-2-10 銳角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



$\begin{cases}\overline{AB}=2R\sin C\\ \overline{AC}=2R\sin B\end{cases} \Rightarrow R_1^2+R_2^2=R^2(\sin^2C+\sin^2B)$

又 $\angle B+\angle C>90° \Rightarrow \angle B>90°-\angle C$

$\Rightarrow \sin B>\sin(90°-\angle C)=\cos C$

$\Rightarrow \sin^2B>\cos^2C=1-\sin^2C \Rightarrow \sin^2C+\sin^2B>1$

$\Rightarrow R_1^2+R_2^2=R^2(\sin^2C+\sin^2B)>R^2 \Rightarrow \pi \cdot R_1^2+\pi \cdot R_2^2>\pi \cdot R^2$

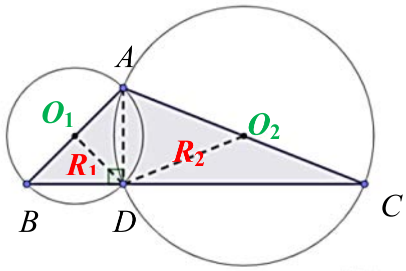
$\because$ 此時共邊三角形的外接圓面積和最小

$\therefore$ 圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積恆大於圓 O 面積

命題 5.3：**若 $\angle A>90°\Rightarrow \Delta ABC$ 為鈍角三角形 $\Rightarrow$ 圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 ＜ 圓 O 面積**

【證明】

圖 4-2-11 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



此時 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2<\overline{BC}^2$

$\Rightarrow R_1^2+R_2^2<R^2$

$\Rightarrow \pi \cdot R_1^2+\pi \cdot R_2^2<\pi \cdot R^2$

$\Rightarrow$ 共邊三角形的外接圓面積和最小值<圓 O 面積

鈍角三角形的這個結果，只能說明當分割線是高的時候，「面積和的最小值」會小於圓 O 面積，動點在其他位置時面積關係可不見得如此。

當時我們觀察 *GGB* 繪圖所得數據，發現在鈍角三角形中，當動點 D 越來越靠近端點的 B 或 C 點時，共邊三角形的外接圓面積和會跟著增加，並且大於圓 O 面積。猜測這個從「＜」到「＞」的過程，必定經過「＝」的關係，我們很好奇這個關鍵的時刻，D 點會在哪個位置，然而又卡住了，因為很想解決這個問題，於是接續開啟「雙圓記」後半段的研究，堅持思考終於讓我們突破困難。

延伸思考 **鈍角三角形中，何時共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積相等？**

我們假定鈍角ΔABC 的兩邊長 $\overline{AB}=m$ 與$\overline{AC}=n$，此時可以根據正弦定理求出共邊三角形兩個外接圓的半徑，再透過 ΔABD 和ΔACD 的外接圓面積和等於ΔABC 的外接圓面積的關係列式，進而求出$\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，推導過程如後。

命題 5.4 **若ΔABD 和ΔACD 的外接圓面積和等於ΔABC 的外接圓面積，則 $\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$**

【推導過程】

設$\angle A > 90°$，$\overline{AB}=m$，$\overline{AC}=n$，$\angle ADB=\theta$，令 A 到$\overline{BC}$的距離為 h

依正弦定理，$R_1=\dfrac{m}{2\sin\theta}$ ， $R_2=\dfrac{n}{2\sin(180°-\theta)}$ ， $R=\dfrac{m}{2\sin C}$

$\pi\cdot R_1^2+\pi\cdot R_2^2=\pi\cdot R^2 \Rightarrow R_1^2+R_2^2=R^2$

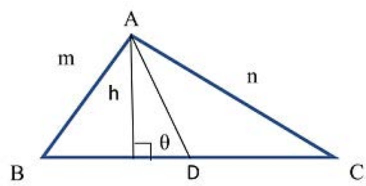
$\Rightarrow\dfrac{m^2}{4\sin^2\theta}+\dfrac{n^2}{4\sin^2(180°-\theta)}=\dfrac{m^2}{4\sin^2 C}\Rightarrow\dfrac{m^2+n^2}{4\sin^2\theta}=\dfrac{m^2}{4\sin^2 C}$

又 $\sin\theta=\dfrac{h}{\overline{AD}}$， $\sin C=\dfrac{h}{n}$

$\dfrac{m^2+n^2}{4\cdot\dfrac{h^2}{(\overline{AD})^2}}=\dfrac{m^2}{4\cdot\dfrac{h^2}{n^2}}\Rightarrow(m^2+n^2)(\overline{AD})^2=(mn)^2$

故 $\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

圖 4-2-12 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積相等時$\overline{AD}$長度推導



作圖 **透過尺規作圖確定出 D 點的位置**

求出$\overline{AD}$之後， $\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$ 的形式讓我們聯想到已知兩股分別為 m、n 的直角三角形斜邊上的高，突然靈光一閃：如果我們透過直角三角形，用尺規作圖先畫出$\overline{AD}$的長度，再以此為半徑，以 A 為圓心畫弧，不就能找出 D 點的位置了！

1.尺規作圖【作法】

(1)作一點 E，使得$\angle BAE=90°$且$\overline{AC}=\overline{AE}$

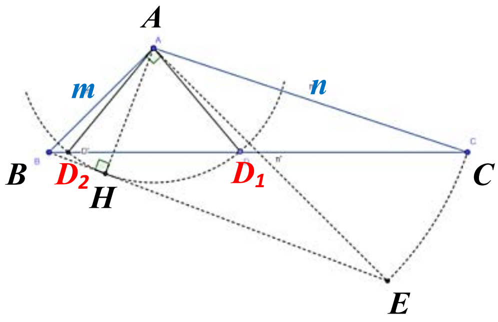
(2)連接$\overline{BE}$，ΔABE 為直角三角形

(3)作ΔABE 斜邊上的高$\overline{AH}$

(4)以 A 為圓心，$\overline{AH}$為半徑畫弧，交$\overline{BC}$於 D_1、D_2

(5) D_1、D_2即為所求

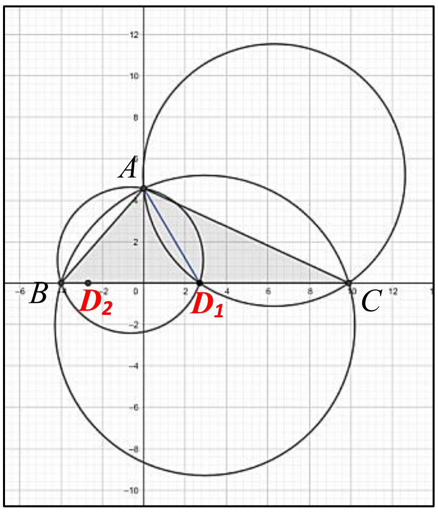
圖 4-2-13 尺規作圖 D 點位置



2.確定 D 點的坐標

畫出 D 點的位置，接著找出其坐標。令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，且 $c>b$，動點 D 坐標設為$(x，0)$，

圖 4-2-14 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積相等時 D 點座標推導



$$\Rightarrow\ m=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\quad n=\sqrt{a^2+c^2}$$

$\because\Delta ABD$ 和ΔACD 的外接圓面積和等於ΔABC 的外接圓面積時$\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+a^2+c^2}}=\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{(2a^2+b^2+c^2)}=a^2+x^2$$

$$x^2=\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}\quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$$

故 $D_1\left(\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}\ ,0\right)$　，$D_2\left(-\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}\ ,0\right)$

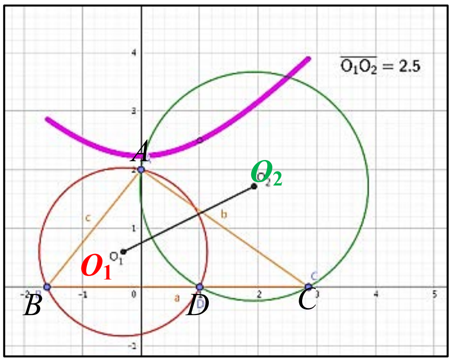
解決鈍角三角形中共邊三角形的外接圓面積和等於圓 O 面積時動點 D 所在的位置，是我們這兩個階段研究的銜接點，第二階段我們將焦點關注到連心線。因為（R_1+R_2）是動點 D 的 x 坐標的函數且圖形為雙曲線的發現，讓我們想到與 R_1、R_2 圍成一個三角形三邊的連心線$\overline{O_1O_2}$或許也具有尚未發現的特性。

有了這樣的想法，先用 GGB 觀察，看到 D 點移動時，連心線$\overline{O_1O_2}$斜率從負到正，圖形擺盪的軌跡似乎呈現平滑對稱的曲線，我們決定一探究竟，果然出現許多有意思的發現。

（六）探討動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$長度的變化

1.觀察圖形及數據形成猜想

圖 4-2-15 （d，$\overline{O_1O_2}$）軌跡圖



因為 R_1、R_2 與連心線$\overline{O_1O_2}$正好圍成一個三角形，加上（R_1+R_2）是動點 D 的 x 坐標 d 的函數且圖形為雙曲線的發現，讓我們聯想到連心線$\overline{O_1O_2}$與動點 D 的 x 坐標 d 是不是也具有特殊關係。

將(d,R_1+R_2)數據坐標化，透過 *GGB* 模擬圖形，竟然也得出圖中紫色的雙曲線，以下透過證明來加以確定。

2.幾何論證猜想為真

命題 6.1：在直角坐標平面中，對於任意ΔABC，令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，且 $c>b$，$\overline{BC}$上的動點 D 坐標設為$(d,0)$，連接$\overline{AD}$，分割出兩個共邊ΔABD 與ΔACD，其外接圓圓心分別為 O_1、O_2，半徑分別為 R_1 和 R_2。

則共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

【證明】

1^0 利用 O_1、O_2 在$\overline{AD}$的中垂線上，先求出 O_1、O_2 的坐標，再求出$\overline{O_1O_2}$長度

(1) $\because$ O_1 必落在$\overline{BD}$的中垂線上故其 x 坐標必為$\dfrac{b+d}{2}$ ； 同理可知，O_2 的 x 坐標必為$\dfrac{c+d}{2}$

(2) 求$\overline{AD}$的方程式:

$$\frac{y-0}{x-d}=\frac{y-a}{x-0}$$

$$\Rightarrow xy=xy-ax-dy+ad \Rightarrow ax+dy-ad=0$$

(3) 求$\overline{AD}$的中垂線 $\overline{O_1O_2}$的方程式

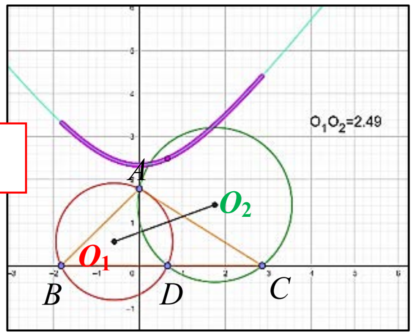
設$\overline{O_1O_2}$的方程式為 $y=\dfrac{d}{a}x+u$

代入$\overline{AD}$中點 $(\dfrac{d}{2},\dfrac{a}{2})$

$$\frac{a}{2}=\frac{d}{a}\cdot\frac{d}{2}+u \Rightarrow u=\frac{a^2-d^2}{2a}$$

$y= g(x) =k\sqrt{a^2+x^2}$

圖 4-2-16 （d，$\overline{O_1O_2}$）軌跡圖證明



$\Rightarrow$ $\overline{O_1O_2}$的方程式: $y=\dfrac{d}{a}x+\dfrac{a^2-d^2}{2a}$

$\Rightarrow -2dx+2ay+d^2-a^2=0$

(4) 求出 O_1、O_2 的座標及$\overline{O_1O_2}$的長度

將 O_1 及 O_2 的 x 坐標代入中垂線方程式求出 O_1 及 O_2 的坐標

$y=\dfrac{d}{a}\cdot\dfrac{b+d}{2}+\dfrac{a^2-d^2}{2a} \quad \Rightarrow y=\dfrac{a^2+bd}{2a}$

$\therefore O_1$ 的座標為$(\dfrac{b+d}{2}, \dfrac{a^2+bd}{2a})$

同理可解得 O_2 的座標為 $O_2(\dfrac{c+d}{2},\dfrac{a^2+cd}{2a})$

得出 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{(\dfrac{b-c}{2})^2+(\dfrac{(b-c)d}{2a})^2}$

$$=\frac{c-b}{2}\sqrt{1+\frac{d^2}{a^2}}=\frac{(c-b)\sqrt{a^2+d^2}}{2a}$$

2^0 證明$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支

$\because \dfrac{c-b}{2a}$為常數，令$\dfrac{c-b}{2a}=k$

由 $g(d)=\overline{O_1O_2}=\dfrac{(c-b)\sqrt{a^2+d^2}}{2a}$

可知共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$ 的長度 y 與動點 D 的 x 坐標

呈現 $g(x)=y=k\sqrt{a^2+x^2}$的函數關係

$\Rightarrow y^2=k^2(a^2+x^2)$

$\Rightarrow y^2=k^2a^2+k^2x^2$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{k^2a^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ ，符合雙曲線關係式（型如 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$）

$\therefore g(x)=\dfrac{(c-b)\sqrt{a^2+x^2}}{2a}$ 的圖形為雙曲線的一支

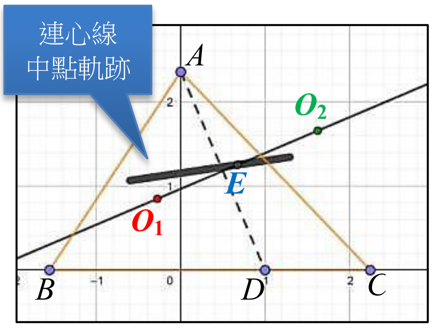
故共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支得證。

$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 跟先前討論過的（R_1+R_2）與 d 同樣是函數關係且圖形皆為雙曲線的一部分，這讓我們覺得很特別，後續將在第陸章討論的時候探究其原因。

(七) 探討動點 *D* 移動時，共邊三角形外接圓連心線中點的軌跡圖形

1.觀察圖形及數據形成猜想

圖 4-2-17 共邊三角形連心線中點軌跡



透過 *GGB* 模擬觀察，發現動點 *D* 位置改變，連心線的長度與斜率跟著改變，然而其中點卻會落於同一直線上，究竟是否真的如此？如果是，那麼這一條直線的方程式是否能找得出來呢？接下來是我們的推論與證明。

2.幾何論證猜想為真

命題 7.1：在直角坐標平面中，對於任意ΔABC，令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，且 $c>b$，$\overline{BC}$上的動點 D 坐標設為$(d,0)$，連接$\overline{AD}$，分割出兩個共邊ΔABD與ΔACD，其外接圓圓心分別為 O_1、O_2，半徑分別為 R_1 和 R_2。

若 E 為連心線$\overline{O_1O_2}$的中點，則當動點 D 移動時，E 點會落於同一條直線上。

【證明】

1^0 利用 O_1、O_2 在$\overline{AD}$的中垂線上，先求出 O_1、O_2 的坐標，再求出 O_1、O_2 的中點坐標

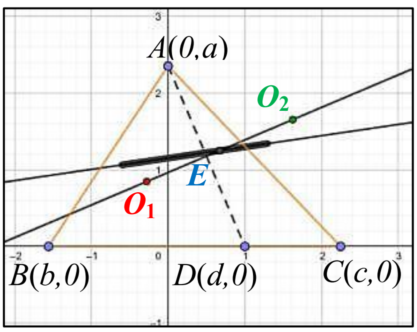
$\because$ O_1 必落在$\overline{BD}$的中垂線上故其 x 坐標必為$\dfrac{b+d}{2}$ ；同理可知，O_2 的 x 坐標必為$\dfrac{c+d}{2}$

又 O_1、O_2 在$\overline{AD}$的中垂線上，此中垂線方程式為 $-2dx+2ay+d^2-a^2=0$

$\therefore$ $O_1(\dfrac{b+d}{2},\dfrac{a^2+bd}{2a})$，$O_2(\dfrac{c+d}{2},\dfrac{a^2+cd}{2a})$

E 為$\overline{O_1O_2}$的中點$\Rightarrow$ $E(\dfrac{b+c+2d}{4},\dfrac{2a^2+bd+cd}{4a})$

圖 4-2-18 共邊三角形連心線中點軌跡



2^0 利用 O_1、O_2 的中點坐標，找出其方程式

令 $x=\dfrac{b+c+2d}{4}$ $\Rightarrow$ $d=\dfrac{4x-b-c}{2}$ 代入 $y=\dfrac{2a^2+bd+cd}{4a}$

$$y=\frac{2a^2+(b+c)\cdot\dfrac{4x-b-c}{2}}{4a}\Rightarrow y=\frac{a^2+(b+c)\cdot\dfrac{4x-b-c}{4}}{2a}$$

$$2ay=a^2+(b+c)\cdot\frac{4x-b-c}{4}\Rightarrow 2ay=a^2+(b+c)x-\frac{(b+c)^2}{4}$$

$\Rightarrow$ $-(b+c)x+2ay+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$ 為二元一次方程式，

故動點 D 移動時 E 點軌跡為一直線得證。

(八) 探討動點 *D* 移動時，共邊三角形外接圓連心線軌跡形成的圖形

1.觀察圖形及數據形成猜想

透過 *GGB* 觀察，看到動點 *D* 由 *B* 點向 *C* 點移動時，連心線斜率從負到正，圖形擺盪的軌跡似乎呈現平滑對稱的曲線，這又會是雙曲線嗎？我們不禁好奇的這樣想。

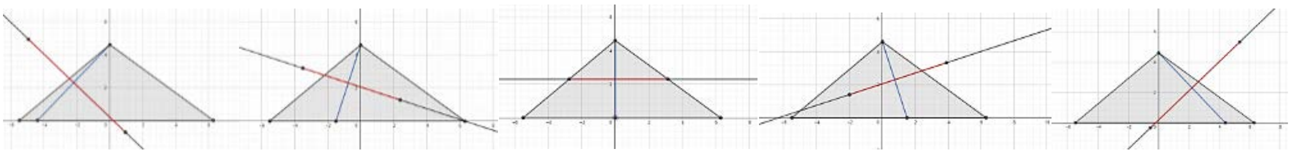
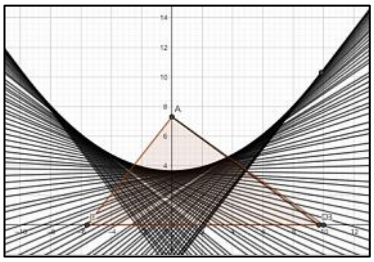


圖 4-2-19 連心線擺盪軌跡

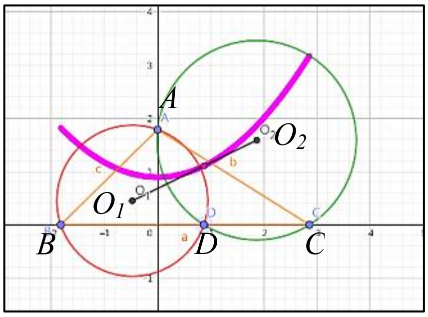
圖 4-2-20 兩外接圓連心線動態模擬圖



結果觀察動態模擬的曲線方程式及圖形，很奇妙的會是拋物線，而且這條曲線與連心線的交點貌似在動點 *D* 的正上方，於是我們大膽猜測，外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的軌跡，會切於一拋物線，且切點的 x 坐標為 d。以下是我們論證的過程。

2.幾何論證猜想為真

圖 4-2-21 兩外接圓連心線軌跡切於同一拋物線



$\boxed{\text{命題 8.1}}$ 在直角坐標平面中，對於任意ΔABC，令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，且 $c>b$，$\overline{BC}$上的動點 D 坐標設為$(d,0)$，連接$\overline{AD}$，分割出兩個共邊ΔABD與ΔACD，其外接圓圓心分別為 O_1、O_2。

則外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的軌跡會切於同一拋物線，且切點的 x 坐標為 d 。

【證明】

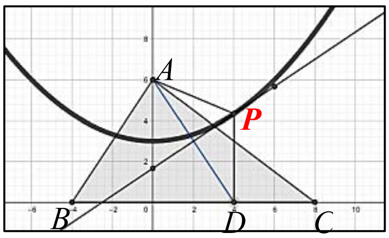
1^0 證明每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點，x 軸為準線的拋物線上

∵ ΔABD 與 ΔACD 的外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會在$\overline{AD}$之中垂線上

令$\overline{AD}$之中垂線為直線 M，過動點 D 作一垂直 x 軸的直線交直線 M 於 P 點

此時 P 點為$\overline{AD}$的中垂線上一點，

圖 4-2-22 連心線上必存在一點 *P* 在拋物線上



∴ $\overline{PA}=\overline{PD}$

令 P 點坐標為(x,y)

$y=\sqrt{(d-0)^2+(y-a)^2} \quad \Rightarrow y^2=(x-0)^2+(y-a)^2$

$\Rightarrow y^2=x^2+y^2-2ay+a^2 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2}$ (拋物線的二次函數式)

由此可知，隨著 D 點的移動，每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點，$\overleftrightarrow{BC}$為準線的拋物線上，此拋物線的二次函數式為 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$

2^0 證明 P 點為切點

已知直線 M 方程式為 $-2dx+2ay+d^2-a^2=0$，

可求連心線$\overline{O_1O_2}$所在之直線 M 與以頂點 A 為焦點，$\overleftrightarrow{BC}$為準線的拋物線的交點

$$\begin{cases}-2dx+2ay+d^2-a^2=0\\ y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}\end{cases}$$

$$-2dx+2a(\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2})+d^2-a^2=0$$

$$x^2-2dx+d^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x-d)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=d\ (\text{重根})$$

可知這樣的交點只有一個，且此點即為 P 點

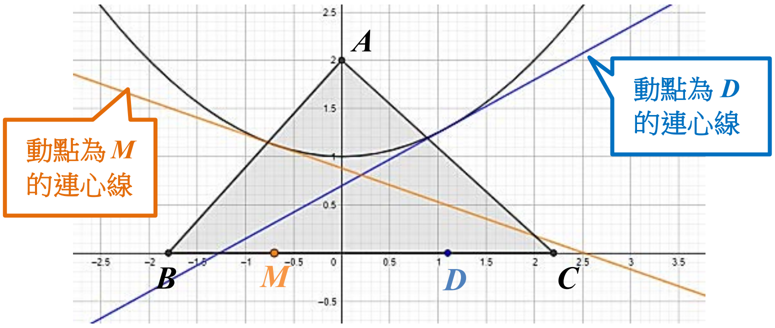
由 1^0 及 2^0 得證，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會與同一拋物線相切，且切點的 x 坐標為 d 。

圖 4-2-23 童軍精神堡壘

連心線軌跡的動態模擬讓我們聯想到童軍露營時，搭建精神堡壘會以繩子拉出直線來構成的拋物線。

除上述的結果，從拋物線方程式，可以發現僅與頂點 A 的坐標及$\overline{BC}$的方程式有關，由此可以推論出無論 B 點、C 點的坐標為何，隨著動點 D 移動，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所形成的軌跡，會包絡出同一拋物線。

圖 4-2-24 動點不同時的連心線皆與同一條拋物線相切



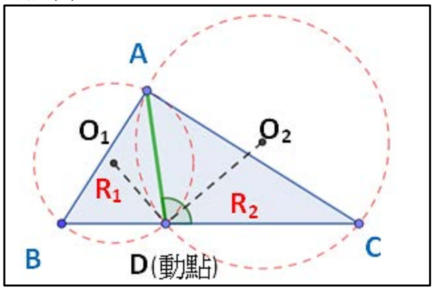
換句話說，這代表只有頂點 A 到$\overline{BC}$的距離能影響拋物線的開口大小，也就是對於任意三角形，若頂點 A 到$\overline{BC}$的距離相等，當動點 D 移動時，其共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所包絡出的拋物線全等。

伍、研究結果

我們將此次探究過程中，關於共邊三角形的外接圓具有的特性，整理出以下結果：

一、當ΔABC為等腰三角形時，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，動點在腰上時，則含底角之$\Delta CBD$的外接圓圓心$O_1$，會落於含頂角之$\Delta CAD$的外接圓$O_2$上。

引用圖 4-2-4

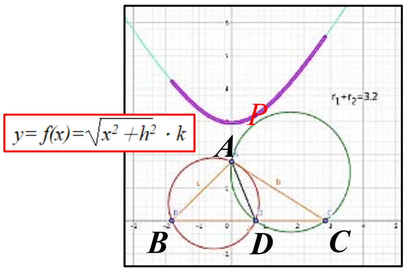


二、當ΔABC為等腰三角形時，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，則$\Delta ABD$與$\Delta ACD$的外接圓全等。

三、將特殊三角形中發現的關係，推廣到任意三角形，得知共邊三角形外接圓半徑$R_1：R_2=\overline{AB}：\overline{AC}$。

引用圖 4-2-7

四、發現共邊三角形外接圓半徑和（R_1+R_2）與動點D的x坐標呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支，進而得知當分割線$\overline{AD}\perp\overline{BC}$時，



半徑和（R_1+R_2）有最小值$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$。

五、承結果四，發現共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積具有以下的關係：

(一) 若ΔABC為直角三角形時，圓O_1面積＋圓O_2面積≥圓O面積，

當分割線為斜邊上的高時，等號成立。

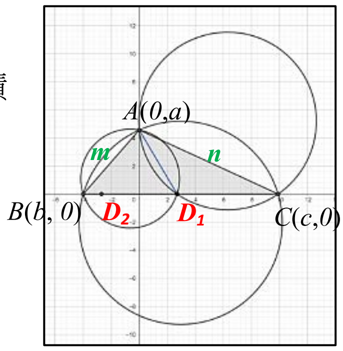
(二) 若ΔABC為銳角三角形時，圓O_1面積＋圓O_2面積 ＞ 圓O面積

(三) 若ΔABC為鈍角三角形時，(圓O_1面積＋圓O_2面積)與圓O面積存在大於、等於或小於的關係。

當$\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$時，面積相等，

動點D可在$D_1(\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}},0)$或$D_2(-\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}},0)$。

引用圖 4-2-14



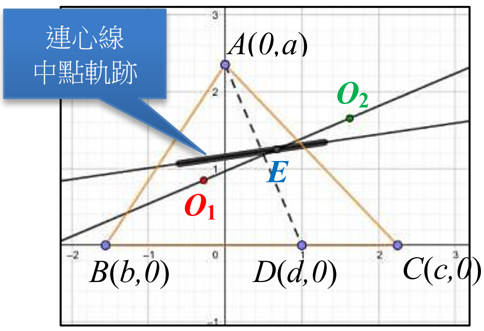
(＊圖中$\overline{AB}=m$，$\overline{AC}=n$)

六、任意三角形中，當動點D移動時，

連心線$\overline{O_1O_2}$的中點E會落於同一條直線上，

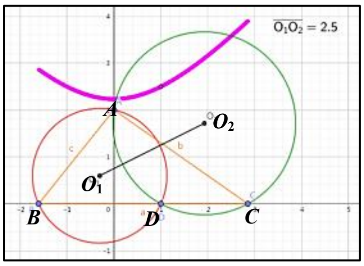
直線方程式為$-(b+c)x+2ay+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$

引用圖 4-2-17



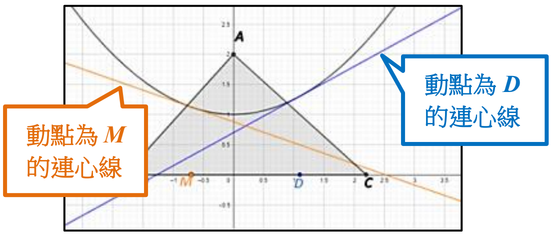
七、任意三角形中，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的長度與動點 D 的 x 坐標呈函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

引用圖 4-2-21



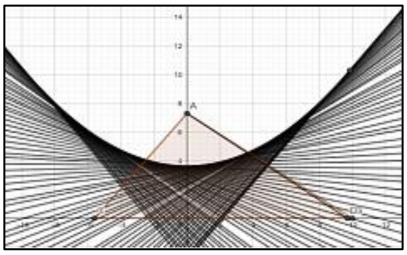
八、任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會與同一拋物線相切，此拋物線焦點為頂點 A，準線為$\overleftrightarrow{BC}$，方程式為 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$ ，且切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標 。

引用圖 4-2-24



九、對於任意三角形，若頂點 A 到$\overline{BC}$的距離相等，當動點 D 移動時，其共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所形成的軌跡包絡出的拋物線全等。

引用圖 4-2-20



陸、討論

一、在鈍角三角形中，發現使（圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積）與圓 O 面積相等的動點 D 位置有兩個可能，一定有兩個嗎？

根據作圖結果發現在鈍角ΔABC 中，有兩個動點的位置可符合共邊三角形ΔABD 和ΔACD 的外接圓面積和等於原ΔABC 的外接圓面積，於是我們想：這樣的點一定有兩個嗎？有沒有可能只有一個？如果只有一個，會是什麼情況下呢？

我們假設鈍角ΔABC 中，$\angle A > 90°$，$\overline{AB}=m$，$\overline{AC}=n$，只存在一個動點 D，使得$\overline{AD}$所裁切出的共邊三角形ΔABD 和ΔACD 的外接圓面積和等於原ΔABC 的外接圓面積。結果發現這個假設是不成立的，也就是鈍角ΔABC 中一定有兩個動點的位置可以符合前述的面積關係，證明如後。

【證明】

如果只存在一個動點 D 點

$\Rightarrow$只有一個動點在$\overline{BC}$上

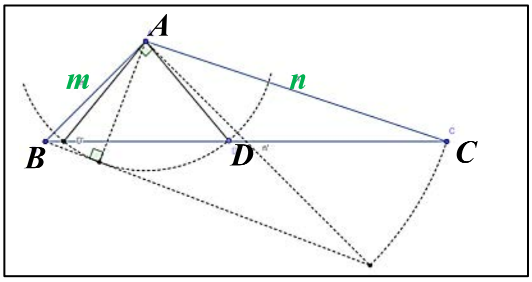
$\Rightarrow \overline{AD} \geqq \overline{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}} \geqq m$

$\Rightarrow n \geqq \sqrt{m^2+n^2}$

$\Rightarrow n^2 \geqq m^2+n^2 \Rightarrow m^2 \leqq 0 \Rightarrow m=0$

引用**圖 4-2-13**



但若 $m=0$，三角形便不存在，故得知這樣的點不可能只有一個。

二、承一，將鈍角ΔABC外接圓面積和與原三角形的外接圓面積大小關係依區間列出

因為確定使得共邊三角形ΔABD和ΔACD的外接圓面積和等於原ΔABC外接圓面積的動點有兩個，於是我們能將面積大小關係做出更明確的描述。令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，動點 D 的坐標為$(x,0)$，$\overline{AD_1}=\overline{AD_2}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，則面積關係如下：

(一)若動點 D 在 B 點與 D_2 之間或在 C 點與 D_1 之間

$\Rightarrow$圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

此時 $b<x<-\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ 或 $\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}<x<c$ ，如圖 6-2-1

(二)若動點 D 為 D_1 或 D_2

$\Rightarrow$圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $=$ 圓 O 面積

此時 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ ，如圖 6-2-2

(三)若動點 D 在 D_1 點與 D_2 之間

$\Rightarrow$圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積$<$圓 O 面積

此時 $-\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}<x<\sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ ，如圖 6-2-3

圖 6-2-1 D 在 B 與 D_2間或 C 與 D_1間

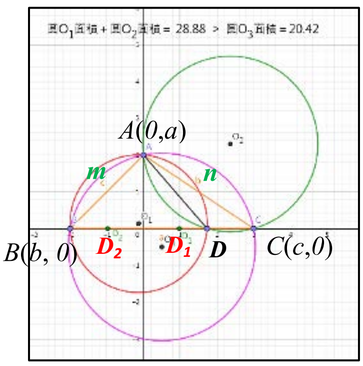


圖 6-2-2 D 在 D_1或 D_2

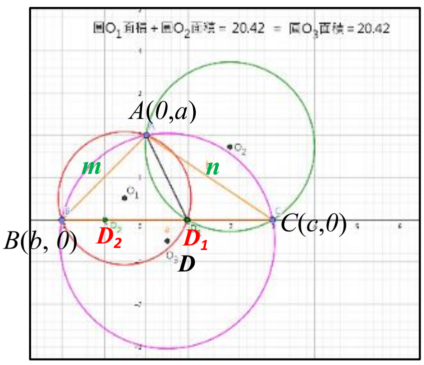
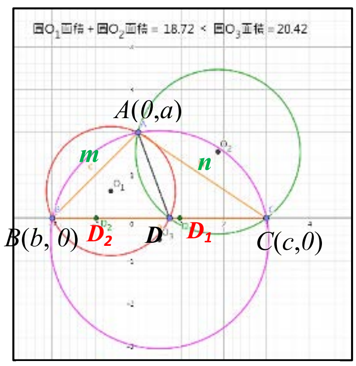


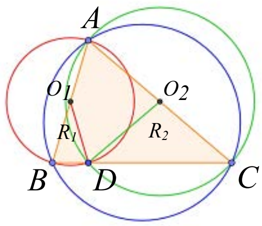
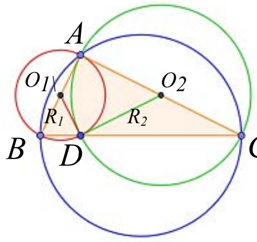
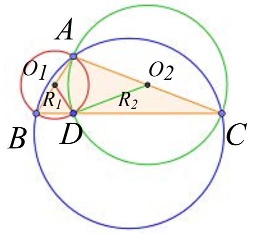
圖 6-2-3 D 在 D_2與 D_1間



(＊圖中$\overline{AB}=m$，$\overline{AC}=n$)

以三角形的高為前提，進行共邊三角形外接圓面積和與其原三角形外接圓面積討論的過程，感受到以角分類三角形種類與外接圓面積關係存在系統性的關聯：

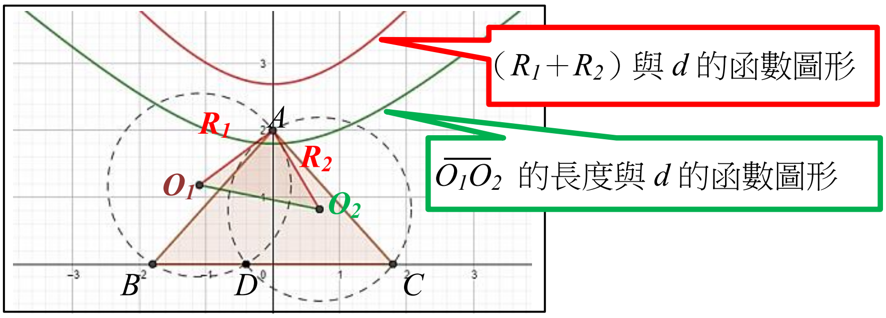
表 6-2-1 不同三角形其共邊三角形外接圓的面積關係

銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
$\angle A<90°$	$\angle A=90°$	$\angle A>90°$
		
圓 O_1＋圓 O_2＞ 圓 O 面積	圓 O_1＋圓 $O_2\geq$ 圓 O 面積	1. D 在區間(B,D_2)，(D_1,C) $\Rightarrow O_1+O_2$ ＞ 圓 O 面積 2. D 在 D_1 或 D_2 $\Rightarrow O_1+O_2$ ＝ 圓 O 面積 3. D 在區間(D_2,D_1) $\Rightarrow O_1+O_2$ ＜ 圓 O 面積
恆大於（**沒有**等於的情況）	出現**一個**等於的位置一高，其他皆為大於	出現**兩個**等於的位置，居兩點間小於，其外則為大於

三、為什麼(R_1+R_2)及$\overline{O_1O_2}$與動點 D 的 x 坐標 d 會一樣呈現圖形是雙曲線一支的函數關係？

$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 跟（R_1+R_2）與 d 同樣是函數關係且圖形皆為雙曲線的一部分，這讓我們覺得很特別，因此觀察這兩個雙曲線方程式，發現係數成比例。

圖 6-3-1（R_1+R_2）與$\overline{O_1O_2}$和動點 D 的 x 坐標函數關係圖形比對



◎（R_1+R_2）與動點 D 的 x 坐標 d 的關係： $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}$

◎ $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 的關係： $g(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{2a}$

加上 R_1、R_2 與$\overline{O_1O_2}$正好是三角形的三邊，猜測與原三角形是否呈現某種關係，進一步發現ΔAO_1O_2與ΔABC 相似。

【證明】

在ΔAO_1O_2與ΔABC中

$\because \angle ABD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

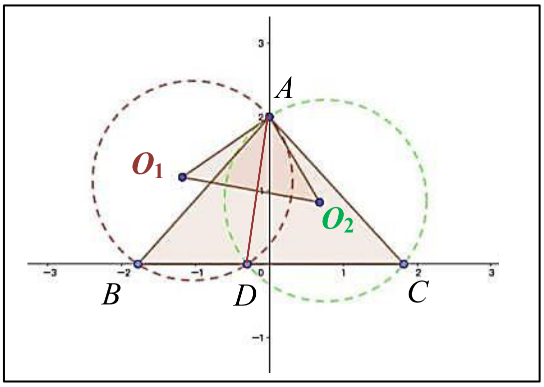
$\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AO_1D = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

$\therefore \angle AO_1O_2 = \angle ABD$

同理$\angle AO_2O_1 = \angle ACD$

故$\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$（$AA$ 相似）

圖 6-3-2 ΔAO_1O_2與ΔABC示意圖

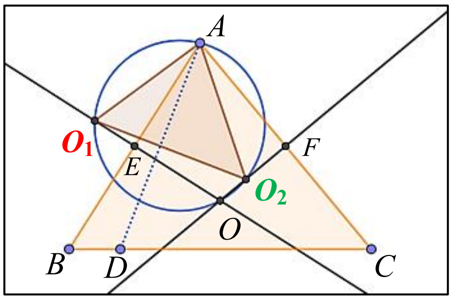


突然恍然大悟！因為ΔAO_1O_2與ΔABC相似，所以（R_1+R_2）與 $\overline{O_1O_2}$ 長度間的關係會跟$(\overline{AB}+\overline{AC})$與$\overline{BC}$相同，既然 ΔABC 三邊長皆為已知，代表 $(\overline{AB}+\overline{AC})$ 與 $\overline{BC}$ 的長度關係固定，這也意味即使（R_1+R_2）與 $\overline{O_1O_2}$ 的長度雖然會隨著動點 D 的位置改變而改變，但其長度關係是不變的，因此為什麼（R_1+R_2）及$\overline{O_1O_2}$與動點 D 的 x 坐標 d 會一樣呈現圖形是雙曲線的函數關係終於真相大白。

四、因為ΔAO_1O_2與ΔABC相似，進一步得出三角形頂點 A、ΔABC 外接圓圓心 O、共邊三角形兩外接圓圓心 O_1 及 O_2，此四點共圓

假設在ΔABC中，動點 D 在$\overline{BC}$上，ΔABC、ΔABD、ΔACD 外接圓圓心分別為 O、O_1 及 O_2，則 A、O、O_1、O_2 四點共圓。

圖 6-4-1 A O_1 O O_2 四點共圓



【證明】

$\because$ $\overleftrightarrow{OO_1}$為$\overline{AB}$中垂線，$\overleftrightarrow{OO_2}$為$\overline{AC}$中垂線，

令$\overleftrightarrow{OO_1}$與$\overline{AB}$交於 E，$\overleftrightarrow{OO_2}$與$\overline{AC}$交於 F

$\therefore$連接$\overline{AO_1}$、$\overline{AO_2}$、$\overline{OO_1}$、$\overline{OO_2}$，

在四邊形 $AEOF$ 中，$\angle AEO=90°$，$\angle AFO=90°$，$\angle EAF+\angle EOF=180°$

$\therefore A$、E、O、F 共圓

當動點 D 移動時，O_1 軌跡在$\overleftrightarrow{OO_1}$上，$O_2$ 軌跡為在$\overleftrightarrow{OO_2}$上 $\Rightarrow \angle O_1OO_2$不變

又$\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$，$\angle O_1AO_2=\angle BAC=\angle EAF$

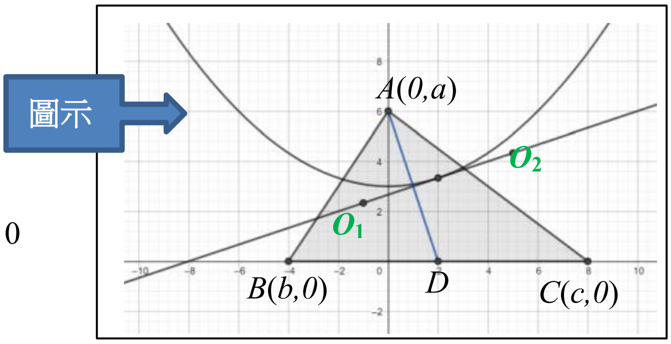
$\angle EAF+\angle EOF=180° \Rightarrow \angle O_1AO_2+\angle O_1OO_2=180°$

故 A、O、O_1、O_2 四點共圓

五、動點 D 移動時，連心線中點的軌跡與拋物線會不會有交點？如果有會相交於何處呢？

既然找出了連心線中點的軌跡方程式，以及拋物線的方程式，我們也想知道這兩個圖形是否會有交點，於是透過聯立求解來尋求答案。

圖 6-5-1 連心線中點軌跡與拋物線相切關係



$$\begin{cases} -(b+c)x+2ay+\dfrac{(b+c)^2}{4}-a^2=0 \\ y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(b+c)x+2a\left(\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}\right)+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$$

$$\Rightarrow -(b+c)x+x^2+a^2+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$$

$$\Rightarrow -(b+c)x+x^2+\frac{(b+c)^2}{4}=0 \qquad \Rightarrow 4x^2-4(b+c)x+(b+c)^2=0$$

$$\Rightarrow [2x-(b+c)]^2=0 \qquad \Rightarrow x=\frac{b+c}{2}\ (\text{重根})$$

因為重根的結果，表示這兩個圖形為相切的情況。

根據之前的研究結果可知，拋物線的每一條切線皆為共邊三角形外接圓的連心線，再由 $x=\dfrac{b+c}{2}$ 的結果推知，當動點 D 為 $\overline{BC}$ 中點時，連心線與拋物線相切的點，正好也是連心線的中點，而且這條連心線與連心線中點軌跡的直線重疊。

原來，共邊三角形外接圓連心線中點軌跡就是當動點 D 為 $\overline{BC}$ 中點時，$\overline{AD}$ 的中垂線。日後求連心線中點軌跡方程式就不需要使用解決問題七時繁瑣的方法了！

柒、結論

整個雙圓記以外心狂想曲階段獲得的外心位置、半徑及外接圓面積初步關係的研究成果為基礎，接續解決先前未解之謎，同時加入對連心線的探究，使得對於三角形中共邊三角形的外接圓有更深入而完整的探討，彙整研究結果與討論，歸納出以下幾個面向的關係：

一、特定三角形中存在的關係

(一)當 ΔABC 為**等腰**三角形時，若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，動點在腰上時，則含底角之 ΔCBD 的外接圓圓心 O_1，會落於含頂角之 ΔCAD 的外接圓 O_2 上。

(二)當 ΔABC 為**等腰**三角形時，若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則 ΔABD 與 ΔACD 的外接圓全等。

二、發現函數關係及其軌跡

(一)發現（R_1+R_2）與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支，進而得知當分割線$\overline{AD}\perp\overline{BC}$時，半徑和（$R_1+R_2$）有最小值 $\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$。

(二)任意三角形中，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

(三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的中點 E 會落於同一條直線上，直線方程式為 $-(b+c)x+2ay+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$。同時發現共邊三角形外接圓連心線中點 E 的軌跡就是當動點 D 在$\overline{BC}$中點時$\overline{AD}$的中垂線。

(四)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會與同一拋物線相切，拋物線的焦點是頂點 A，準線為$\overleftrightarrow{BC}$，其方程式為 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$，且切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

三、建立三角形種類與外接圓面積關係的系統性關聯

(一)共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積具有以下的關係：

1.若ΔABC 為直角三角形時，圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $\geq$ 圓 O 面積，
當分割線為斜邊上的高時，等號成立。

2.若ΔABC 為銳角三角形，則圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

3.若ΔABC 為鈍角三角形，令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$，動點 D 的坐標為 $(x,0)$，
$\overline{AB}=m$, $\overline{AC}=n$, 且 $\overline{AD_1}=\overline{AD_2}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，則：

(1)若動點 D 在（B, D_2）或（D_1, C）之間 ⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

(2)若動點 D 為 D_1 或 D_2 ⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $=$ 圓 O 面積

(3)若動點 D 在（D_2, D_1）之間 ⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 $<$ 圓 O 面積

(二)以三角形的高為前提進行討論，建立三角形種類（以頂角 A 分類）與外接圓面積關係存在系統性的關聯：

圖 7-3-1 三角形種類與外接圓面積關係的系統性關聯

四、幾何不變性

(一)比例關係不變：從特殊三角形推廣到任意三角形，得知外接圓半徑 R_1：R_2＝$\overline{AB}$：$\overline{AC}$。

(二) $AO_1O\ O_2$四點共圓不變：承雙曲線關係，發現ΔAO_1O_2～ΔABC。又因為ΔAO_1O_2～ΔABC，進而得知三角形頂點 A 與三個外接圓圓心 O、O_1 及 O_2，此四點共圓。

五、原圖形變動與產出圖形的關係

(一)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會包絡出焦點是頂點 A，準線為$\overleftrightarrow{BC}$，其方程式為 $y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2}$的拋物線，且連心線$\overline{O_1O_2}$與拋物線之切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

(二)對於任意三角形，當動點 D 移動時，若頂點 A 到$\overline{BC}$的距離相等，無論 A、B、C 坐標為何，其共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所包絡出的拋物線皆全等。

(三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的中點 E 會形成一條直線上，就是當動點 D 為$\overline{BC}$中點時的中垂線。

原本只是出於好奇，想看看共邊三角形的外接圓會不會有什麼特殊的關係，沒想到竟有這麼多令人驚喜的發現，原來在數學的世界裡，想像力就是我們的超能力；原來不是只有解出數學題令人開心，自由的想數學也充滿著樂趣。

研究過程中我們還有觀察到當頂角 A 為銳角、直角跟鈍角時、連心線中點所構成的直線斜率會有相對應的變化，可以作為未來想在這個主題繼續深究的方向，也可嘗試增加為兩個動點或將動點移至三角形內部進行更多的探索。

捌、參考資料及其他

辛佳亮、柯亞承、鄭經獻、龔詩尹（2015）。環「徑」變遷。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會作品說明書。

洪有情、朱峻賢、馬榮喜、陳世易、莊豐兆、顏德琮(2021)。康軒版數學課本第五冊及第六冊。

陳俐安、陳品璇、柯明錦（2011）。共邊三角形的內切圓。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品說明書。

曾琮鈞、徐正皓、劉誠恩、蕭偉智（2021）。圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書。

游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明(2008)。高中數學課本。翰林。

黃勤聰（2010）。20100305 三五童軍節慶祝大會_場地佈置。花蓮縣童軍會。

蘇敏文、吳浩安、黃國斌（2018）。用心。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。

【評語】030422

本作品討論在三角形 ABC 的$\overline{BC}$邊上取一點 D，連接$\overline{AD}$，得到三角形 ABD 和 ACD。如果把三角形 ABD 的外接圓和三角形 ACD 的外接圓分別叫做 O_1 和 O_2，O_1、O_2 這兩圓間會有什麼樣的關係？這是一個有意思的問題。作者們針對兩圓心的關聯性、半徑比、半徑和、面積和、連心線長及連心線的特性做了討論，給出了一些有趣的結果。內容豐富，可以看得出來作者們花費了許多心思，很值得鼓勵。有部分的論述稍嫌繁瑣了些，有些定理的表述方式也可能需要稍做調整（例如，以頂角分類討論兩圓的面積和時，似乎與原三角形是何種三角形無關。而在論述兩邊的平方和與第三邊的關係時，當頂角為鈍角時，使用兩邊的平方和小於第三邊的平方，當頂角為銳角時又特別的解釋此時兩邊的平方和大於第三邊的平方，在說明上好像有點不一致）。作者們確實得出了許多有趣的結論，但可惜的是，沒有把結果進一步的整理，讓人有點抓不到重點的感覺。如果可以重新的整理並加以改寫，讓一些主要的結論更被凸顯，會更好。

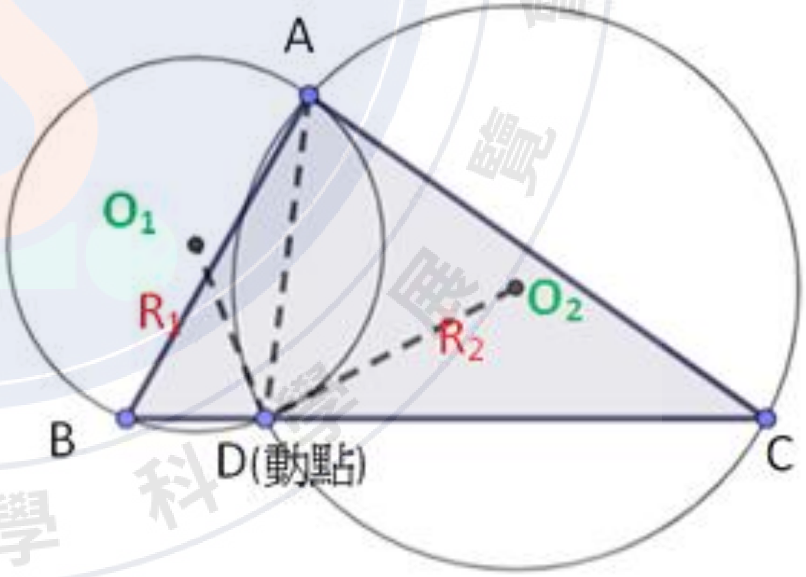
作品簡報

雙圓記

—探 究 共 邊 三 角 形 的 外 接 圓

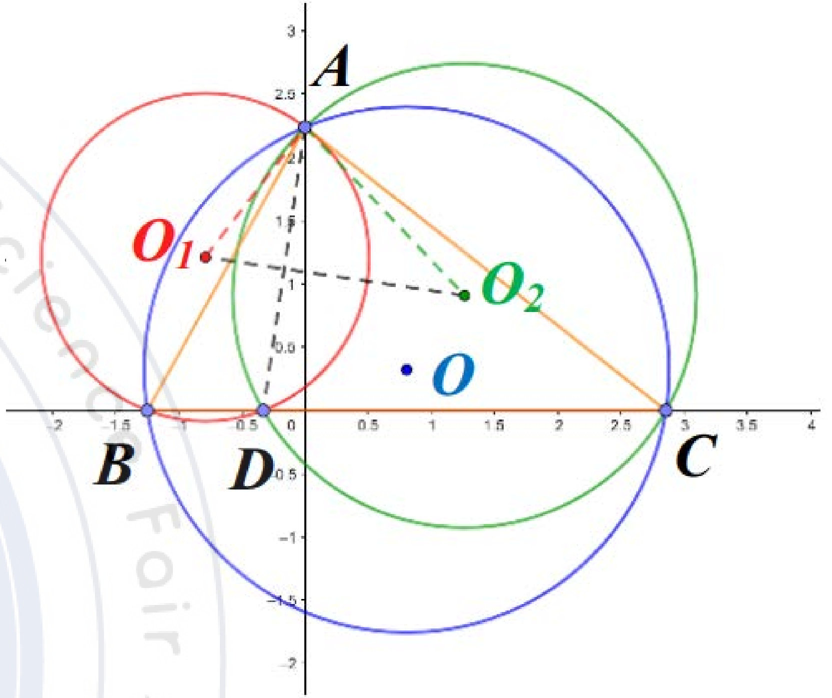
科別：數 學 科

組別：國 中 組



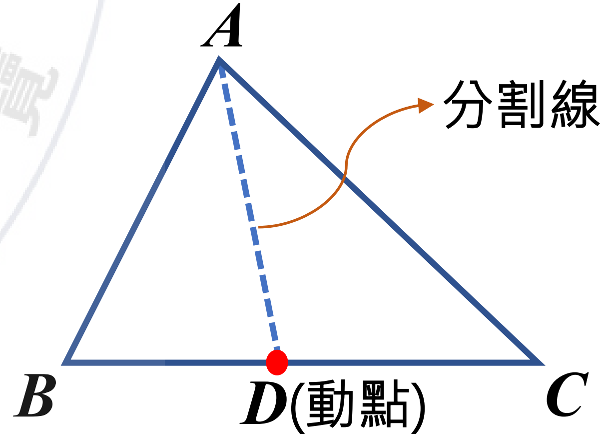
動機

原本單純好奇如果將三角形一分為二，各自做出外接圓，會出現什麼有趣的關係，因為意外發現兩半徑和與動點x坐標存在的函數關係帶來了許多新問題，進而開始了我們對共邊三角形外接圓的探究之旅。



研究問題

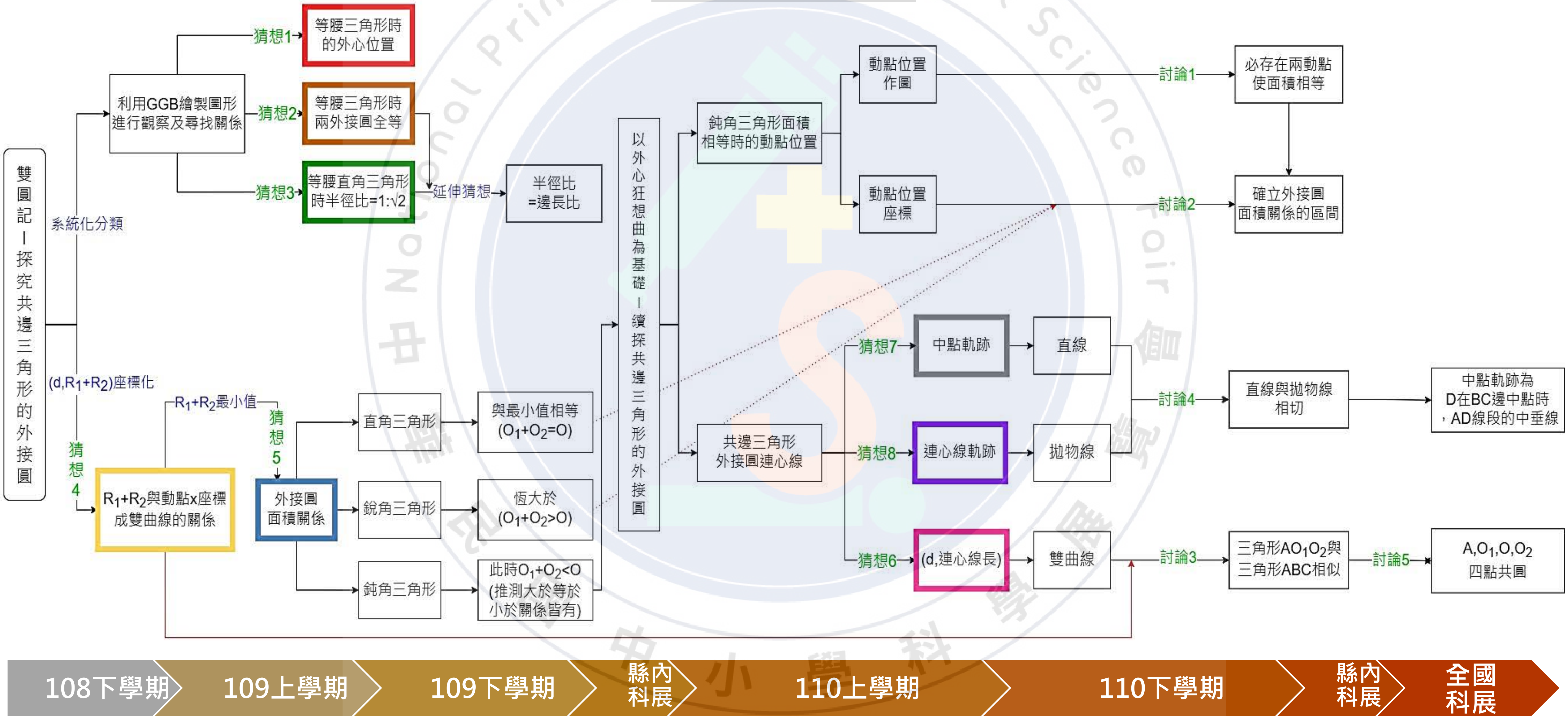
1. 探討等腰三角形中，兩外接圓的**圓心位置**關係
2. 探討等腰三角形中，兩外接圓的**半徑**關係
3. 探討任意三角形中，兩外接圓的**半徑與邊長**關係
4. 探討任意三角形中，兩外接圓的**半徑和**最小值
5. 探討任意三角形中，兩外接圓面積和與原三角形外接圓**面積**的關係
6. 探討任意三角形中，動點移動時，外接圓**連心線長**的變化
7. 探討任意三角形中，動點移動時，外接圓**連心線中點**的軌跡圖形
8. 探討任意三角形中，動點移動時，外接圓**連心線包絡**出的圖形



【共邊三角形示意圖】

O_1,O_2位置關係	R_1,R_2關係	R_1,R_2與邊長關係	(d,R_1+R_2)	面積關係	$(d,\overline{O_1O_2})$	$\overline{O_1O_2}$包絡出圖形	$\overline{O_1O_2}$中點軌跡

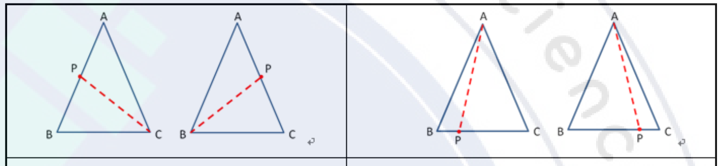
研究地圖



研究方法

共邊三角形系統化分類 ＋ 簡化種類(扣除重複) ＝ 縮減繪圖數 54→30

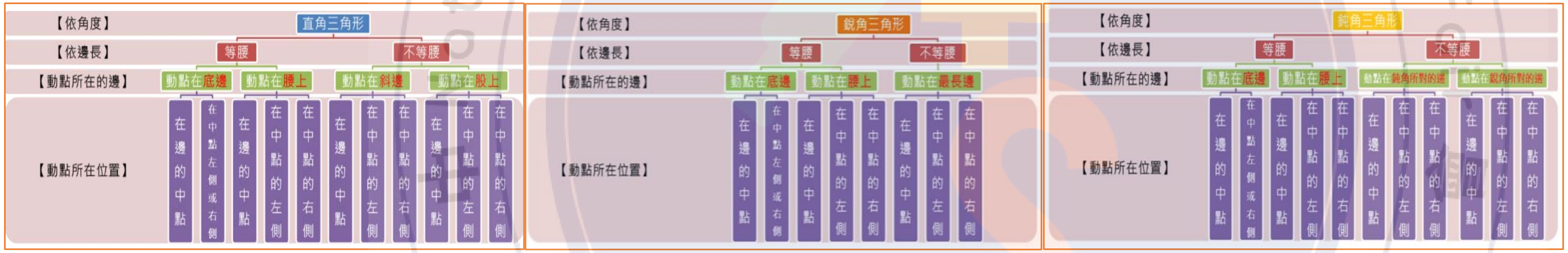
- 依角度：•直角 •銳角 •鈍角
- 依邊長：•等腰 •不等腰
- 動點所在的邊：•底邊 •側邊 •腰或股
- 動點所在位置：•邊的中點 •中點左側 •中點右側

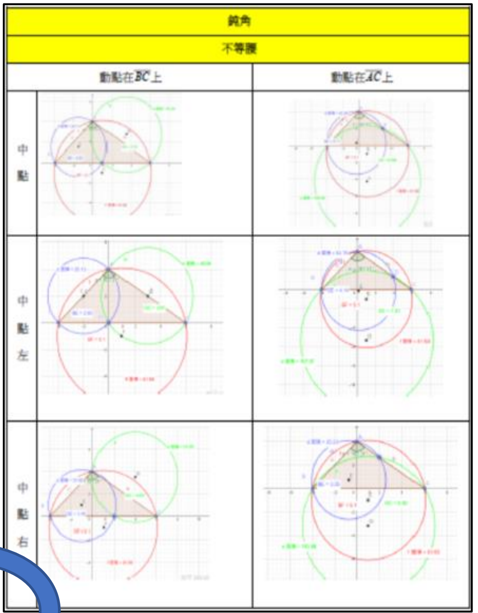


動點在左邊的腰上或右邊的腰上

動點在底邊中點的左邊或者右邊

▼三角形繪圖分類情形▼



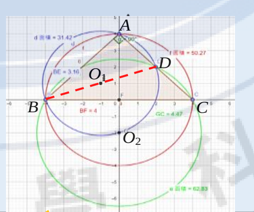


收集形與數的資料

鈍角							
不等腰							
動點在$\overline{BC}$上							
位置	半徑			圓面積			關係
	r_1	r_2	R	O_1	O_2	O	
中點	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	O1＜O2＜O
中點左	2.83	3.61	5.1	25.13	40.84	81.68	離 B 點越近面積和先變小再變大
	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	
	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	
中點右	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	離 C 點越近面積和越大
	3.54	4.51	5.1	39.27	63.81	81.68	
	4	5.1	5.1	50.27	81.68	81.68	

【進入探究流程】

觀察圖形與數據形成猜想



（1）圓 O_1 面積＝31.4

圓 O_2 面積＝62.8

圓 O_1：圓 O_2=31.4：62.8=1：2

（2）R_1＝3.16

R_2＝4.47

R_1：R_2=3.16：4.47≒1：1.4146≒1：$\sqrt{2}$

猜想→命題

命題3.1

等腰直角ΔABC，動點D位於股，則共邊三角形外接圓之圓O_1面積：圓O_2面積=1：2，半徑R_1：R_2=1：$\sqrt{2}$

驗證

幾何論證

【證明】

$$R_1=\frac{\overline{CD}}{2\sin\angle CAD},\ R_2=\frac{\overline{CD}}{2\sin\angle CBD}$$

$$\Rightarrow R_1:R_2=\frac{\overline{CD}}{2\sin 90^\circ}:\frac{\overline{CD}}{2\sin 45^\circ}=1:\sqrt{2}$$

面積比＝1：2亦得證

修正

命題1.1

任意**等腰**ΔABC，動點D位於其中一腰$\overline{AB}$，連接$\overline{CD}$，含頂角之ΔCAD外接圓圓心為O_1，含底角之ΔCBD外接圓圓心為O_2，則O_2落於圓O_1上

【證明】

1^o 作ΔCAD 的外接圓

取$\overline{AD}$的中點 N，過 N 作$\overline{AD}$的中垂線 L_1，與$\overline{CD}$中垂線 L_2相交於 O_1點，圓 O_1即為ΔCAD 的外接圓，半徑為 R

2^o 證明圓 O_1 上的 P 點即為ΔCBD 外接圓之圓心 O_2

$\overline{CD}$中垂線 L_2過 O_1點，交圓 O_1於 P 點

過 P 點作平行 L_1之直線 L_3，交$\overline{AB}$於 M

假設$\overline{AD}=n$，$\overline{BD}=m$，圓 O_1半徑$=R$，$\angle ADC=\theta°$

在ΔCAD 中，根據正弦定理 $\Rightarrow \dfrac{m+n}{2R}=\sin\theta°$

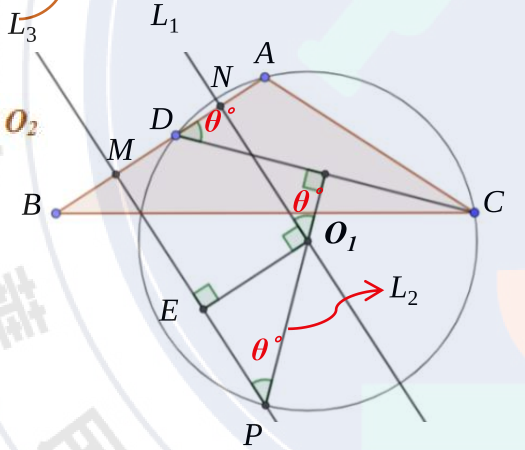
在ΔEPO_1中，若 $\overline{O_1E}\perp L_3$

$\because \overline{DM}=\overline{MN}-\overline{DN}=\overline{O_1E}-\overline{DN}=\dfrac{m+n}{2}-\dfrac{n}{2}=\dfrac{m}{2}$

$\therefore$ M 為$\overline{BD}$的中點 $\Rightarrow$ L_3為$\overline{BD}$的中垂線

$\Rightarrow P$ 為ΔCBD 兩邊中垂線 L_2及 L_3交點

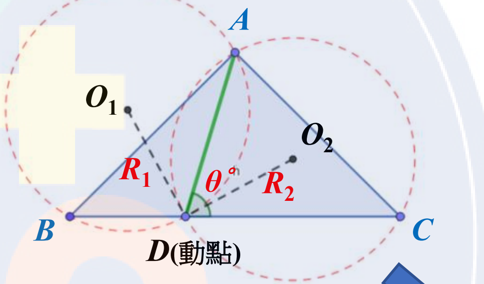
關鍵輔助線



由1^0及2^0的結果可知，含底角之ΔCBD外接圓圓心O_2會落在含頂角之ΔCAD的外接圓上。

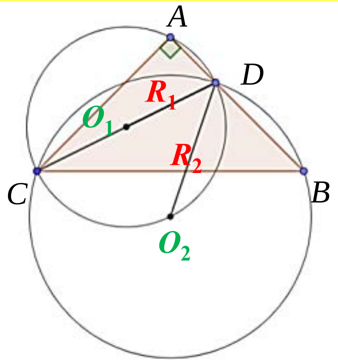
命題2.1

任意**等腰**ΔABC，共邊ΔABD與ΔACD的外接圓半徑$R_1=R_2$，即外接圓全等



命題3.1

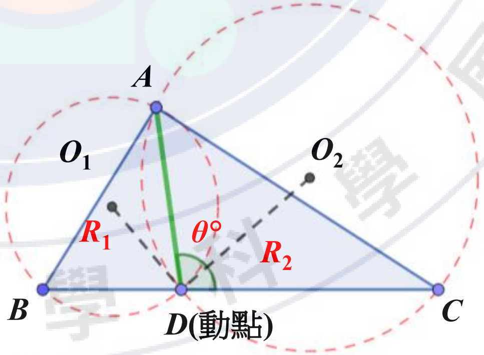
等腰直角ΔABC，動點D位於其中一股$\overline{AC}$，連接$\overline{BD}$，共邊ΔBAD與ΔBCD的外接圓圓O_1面積：圓O_2面積$=1:2$，半徑$R_1:R_2=1:\sqrt{2}$



延伸思考

命題3.2

對於**任意**ΔABC，$R_1:R_2=\overline{AB}:\overline{AC}$



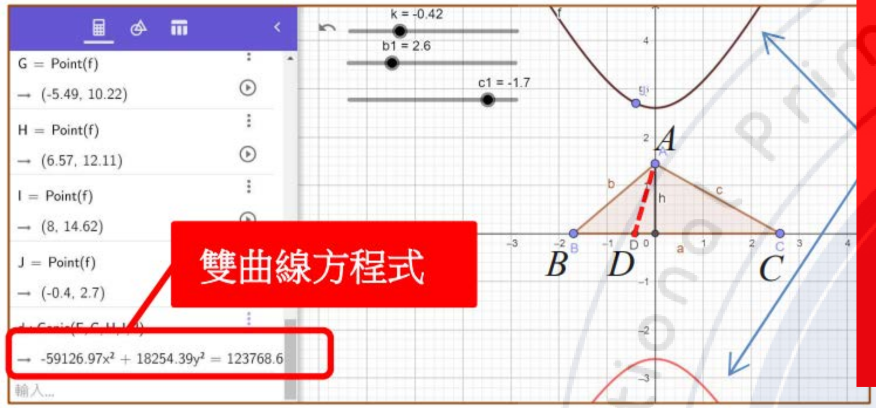
【證明】

根據正弦定理，$R_1=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}$，$R_2=\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}$

$R_1:R_2=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}:\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

故 $R_1:R_2=\overline{AB}:\overline{AC}$ 得證

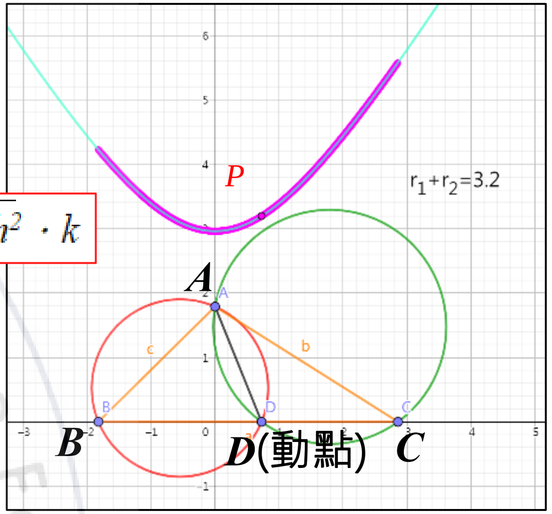
▼五點模擬 (d,R_1+R_2)圖形軌跡



圖形貌似雙曲線

柳暗花明的突破點

$y=f(x)=\sqrt{x^2+h^2}\cdot k$



命題4.1

(R_1+R_2)是d的函數，圖形為雙曲線的一支。

【證明】

設 A 的坐標為$(0,a)$，依正弦定理，$R_1=\dfrac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B}$，$R_2=\dfrac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C}$

令一點 P 坐標為$(d，R_1+R_2)$

$$\Rightarrow P\left(d,\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B}+\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C}\right)\quad\Rightarrow\quad P\left(d,\frac{\sqrt{d^2+a^2}\,(\overline{AB}+\overline{AC})}{2a}\right)$$

在ΔABC中，$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}$為常數，令$\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}=k\Rightarrow P(d,\sqrt{d^2+a^2}\cdot k)$

P 點在函數 $y=f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot k$ 上 $\Rightarrow \dfrac{y^2}{a^2k^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$，符合雙曲線關係式

$\therefore$ 函數$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot k$為一雙曲線

故當動點 D 坐標為$(d,0)$，共邊三角形外接圓半徑分別為 R_1 和 R_2時，(R_1+R_2)是 d 的函數，圖形為雙曲線的一支得證。

延伸思考 → 圖形有最低點 → 半徑和(R_1+R_2)有最小值 → 此時分割線為三角形的高

【證明】

根據正弦定理，$R_1=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}$，$R_2=\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}$

$\because$ 分母越大，分數越小

若$\angle ADB=90^\circ\Rightarrow\sin\angle ADB=\sin90^\circ=1=\sin\angle ADC$，此時分母最大

$\therefore$ 當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓半徑最小⇒半徑和最小

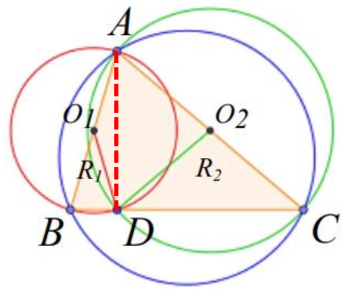
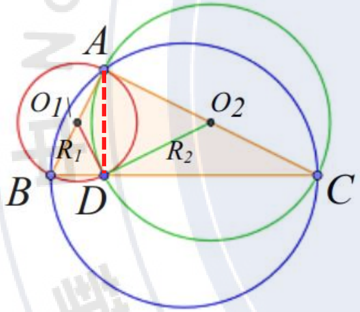
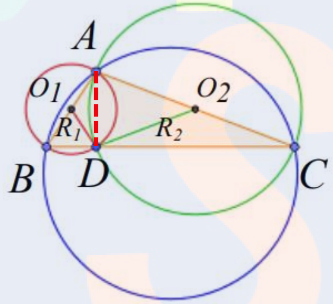
而此時(R_1+R_2)的最小值$=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$

開展出討論共邊三角形外接圓面積和關係的新路徑

於是我們想到...

高為分割線 → 即 → 外接圓面積和最小 → 探討 → (圓O_1面積＋圓O_2面積)與圓O面積

▼共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係

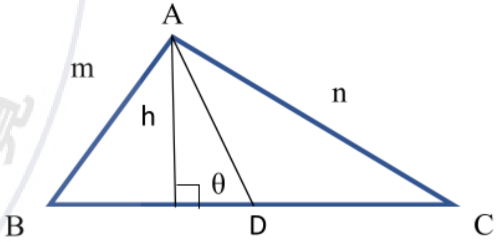
銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
$\angle A<90^\circ$	$\angle A=90^\circ$	$\angle A>90^\circ$
		
圓O_1＋圓O_2＞圓O面積	圓O_1＋圓O_2=圓O面積	圓O_1＋圓O_2<圓O面積
恆大於（**沒有**等於的情況）	有**一個等於**的位置：高其他皆為大於	面積和的**最小值**會**小於**圓O面積

當分割線是高，「面積和最小值」會小於圓O面積，動點在其他位置時不見得如此

延伸思考 → 鈍角三角形中，何時共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積相等？

命題5.4

若ΔABD和ΔACD的外接圓面積和等於ΔABC的外接圓面積，則 $\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$



【推導過程】

設$\angle A>90^\circ$，$\overline{AB}=m$，$\overline{AC}=n$，$\angle ADB=\theta$，令A到$\overline{BC}$的距離為h

依正弦定理，$R_1=\dfrac{m}{2\sin\theta}$，$R_2=\dfrac{n}{2\sin(180^\circ-\theta)}$，$R=\dfrac{m}{2\sin C}$

$\pi\cdot R_1^2+\pi\cdot R_2^2=\pi\cdot R^2 \Rightarrow R_1^2+R_2^2=R^2$

$\Rightarrow \dfrac{m^2}{4\sin^2\theta}+\dfrac{n^2}{4\sin^2(180^\circ-\theta)}=\dfrac{m^2}{4\sin^2 C}\Rightarrow\dfrac{m^2+n^2}{4\sin^2\theta}=\dfrac{m^2}{4\sin^2 C}$ 故 $\overline{AD}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

作圖 透過尺規作圖確定出D點的位置

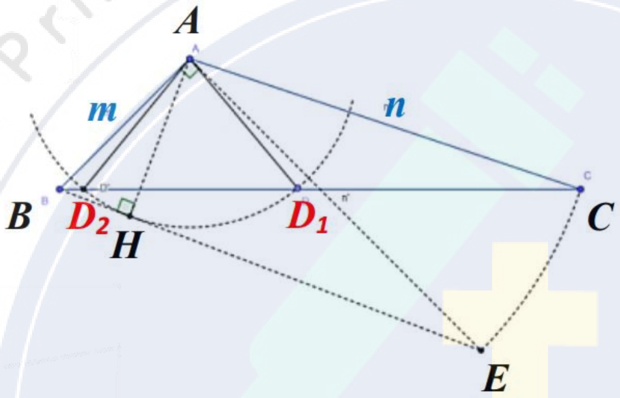
(1)作一點 E，使得$\angle BAE=90°$且$\overline{AC}=\overline{AE}$

(2)連接$\overline{BE}$，ΔABE 為直角三角形

(3)作ΔABE 斜邊上的高$\overline{AH}$

(4)以 A 為圓心，$\overline{AH}$為半徑畫弧，交$\overline{BC}$於 D_1、D_2

(5) D_1、D_2即為所求



延伸思考

討論1 鈍角三角形中，發現（圓O_1＋圓O_2面積）與圓O面積相等的D有兩個可能點，一定有兩個嗎？

【證明】 反證法

如果只存在一個動點 D 點

⇒只有一個動點在$\overline{BC}$上 $\Rightarrow \overline{AD} \geq \overline{AB} \Rightarrow \dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}} \geq m$

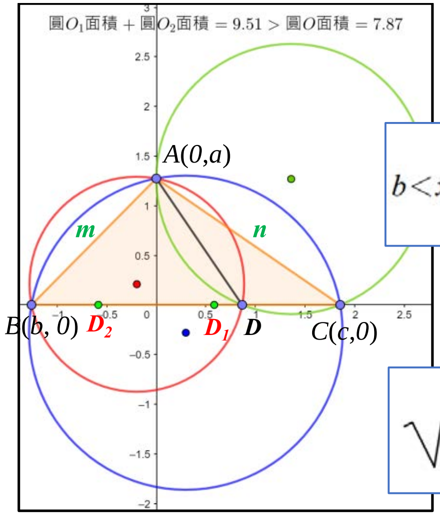
$\Rightarrow n^2 \geq m^2+n^2 \Rightarrow m^2 \leq 0 \Rightarrow m=0$，但若$m=0$，三角形便不存在，

故得知這樣的D點不可能只有一個！

討論2 將鈍角三角形ΔABC共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的大小關係依區間列出

- D在(B,D_2)或(C,D_1)

⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 ＞ 圓 O 面積



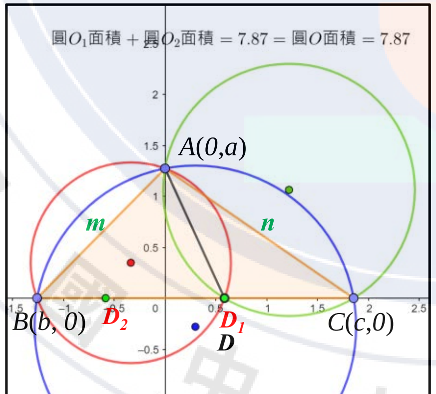
$$b<x<-\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$$

或

$$\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}<x<c$$

- D在D_1或D_2

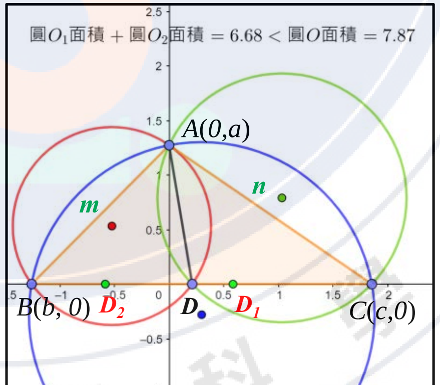
⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積 ＝ 圓 O 面積



$$x=\pm\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$$

- D在(D_2, D_1)

⇒圓 O_1 面積＋圓 O_2 面積＜圓 O 面積



$$-\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}<x<\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$$

完成所有三角形的情況分析

△種類	面積關係	面積相等的 D點
銳角△	圓 O_1＋圓 O_2＞ 圓 O	**沒有**等於的情況
直角△	圓 O_1＋圓 O_2≥ 圓 O 面積	**一個**等於的位置(高)其他皆為大於
鈍角△	1. D 在區間(B,D_2)，(D_1,C) =>O_1+O_2 ＞ 圓 O 面積 2. D 在 D_1 或 D_2 =>O_1+O_2 ＝ 圓 O 面積 3. D 在區間(D_2,D_1) =>O_1+O_2 ＜ 圓 O 面積	**兩個**等於的位置，居兩點間小於，其外則為大於

命題6.1

共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$的長度與動點D的x坐標d呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

【證明】

1^0 利用 O_1、O_2在$\overline{AD}$的中垂線上，先求出 O_1、O_2 的坐標，再求出$\overline{O_1O_2}$長度

(1) ∵ O_1 必落在$\overline{BD}$的中垂線上故其 x 坐標必為$\frac{b+d}{2}$；

同理可知，O_2 的 x 坐標必為$\frac{c+d}{2}$

(2) 求$\overline{AD}$的方程式: $ax+dy-ad=0$

(3) 求$\overline{AD}$的中垂線 $\overline{O_1O_2}$的方程式

$\Rightarrow -2dx+2ay+d^2-a^2=0$

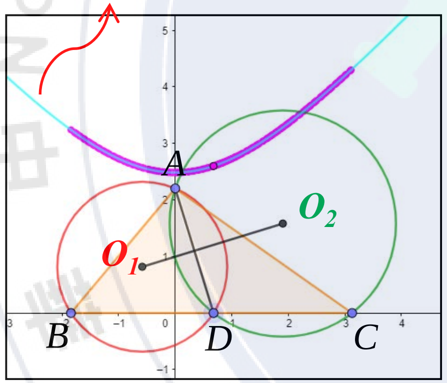
(4) 求出 O_1、O_2 的座標及$\overline{O_1O_2}$的長度

∴O_1 的座標為$(\frac{b+d}{2}, \frac{a^2+bd}{2a})$

同理可解得 O_2 的座標為 $O_2(\frac{c+d}{2}, \frac{a^2+cd}{2a})$

得出 $\overline{O_1O_2} = \frac{(c-b)\sqrt{a^2+d^2}}{2a}$

$y= g(x) =k\sqrt{a^2+x^2}$



2^0 證明$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支

∵ $\frac{c-b}{2a}$為常數，令$\frac{c-b}{2a}=k$

$g(x) = y = k\sqrt{a^2+x^2}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{k^2a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

，符合雙曲線關係式（型如 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$）

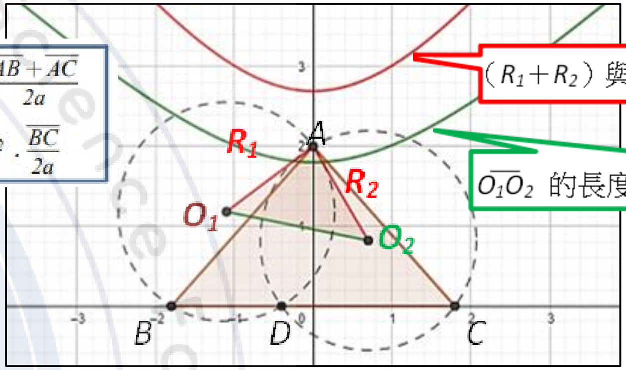
延伸思考

討論3

為什麼（R_1+R_2）及$\overline{O_1O_2}$與動點D的 x 坐標 d 會一樣呈現圖形是雙曲線一支的函數關係？

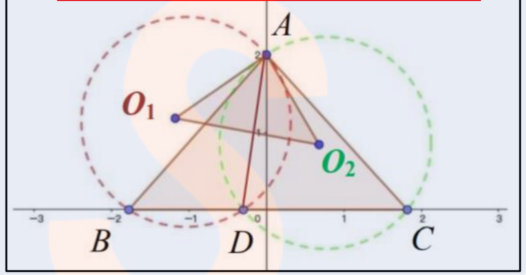
◎（R_1+R_2）與動點 D 的 x 坐標 d 的關係： $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2a}$

◎ $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 的關係： $g(x)=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\frac{\overline{BC}}{2a}$



延伸推論

$\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$



【證明】

在ΔAO_1O_2與ΔABC中

∵ $\angle ABD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

$\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AO_1D = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

∴$\angle AO_1O_2 = \angle ABD$

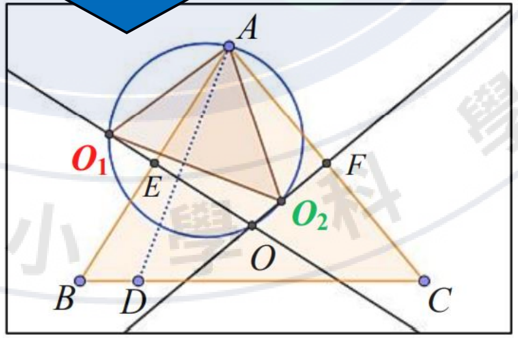
同理$\angle AO_2O_1 = \angle ACD$

故$\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$（$AA$ 相似）

延伸思考

討論4

三角形頂點A、ΔABC外接圓圓心O、共邊三角形兩外接圓圓心O_1及O_2，此四點共圓



在四邊形 $AEOF$ 中，$\angle AEO=90°$，$\angle AFO=90°$，$\angle EAF+\angle EOF=180°$

∴A、E、O、F 共圓

當動點 D 移動時，O_1 軌跡在$\overleftrightarrow{OO_1}$上，$O_2$ 軌跡為在$\overleftrightarrow{OO_2}$上 $\Rightarrow \angle O_1OO_2$不變

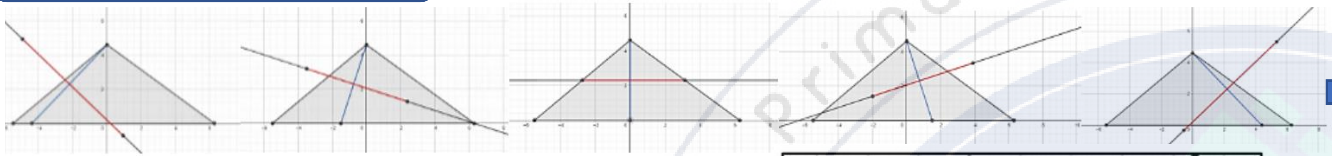
又$\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$，$\angle O_1AO_2=\angle BAC=\angle EAF$

$\angle EAF+\angle EOF=180° \Rightarrow \angle O_1AO_2+\angle O_1OO_2=180°$

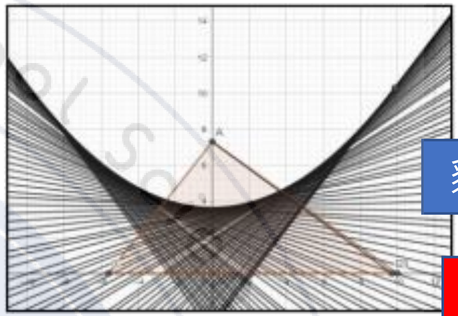
故 A、O、O_1、O_2 四點共圓

有趣的新發現...

▼連心線擺盪連續圖



進行GGB動態模擬



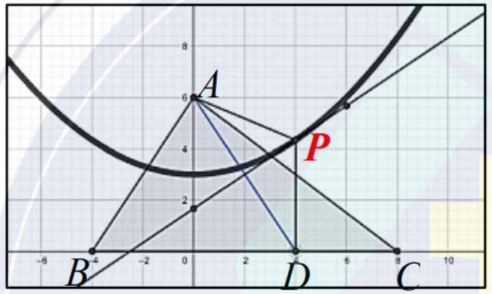
貌似

大膽猜測

隨著D移動，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所形成的軌跡，會包絡出同一拋物線。

命題8.1

外接圓連心線的軌跡$\overline{O_1O_2}$會切於同一拋物線，且切點的x坐標為d。



【證明】

1^0 **證明每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點，x 軸為準線的拋物線上**

$\because$ ΔABD 與 ΔACD 的外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會在$\overline{AD}$之中垂線上

令$\overline{AD}$之中垂線為直線 M，過動點 D 作一垂直 x 軸的直線交直線 M 於 P 點

此時 P 點為$\overline{AD}$的中垂線上一點，

$\therefore$ $\overline{PA}=\overline{PD}$

由此可知，隨著 D 點的移動，每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點，$\overleftrightarrow{BC}$為準線的拋物線上，此拋物線的二次函數式為 $y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2}$

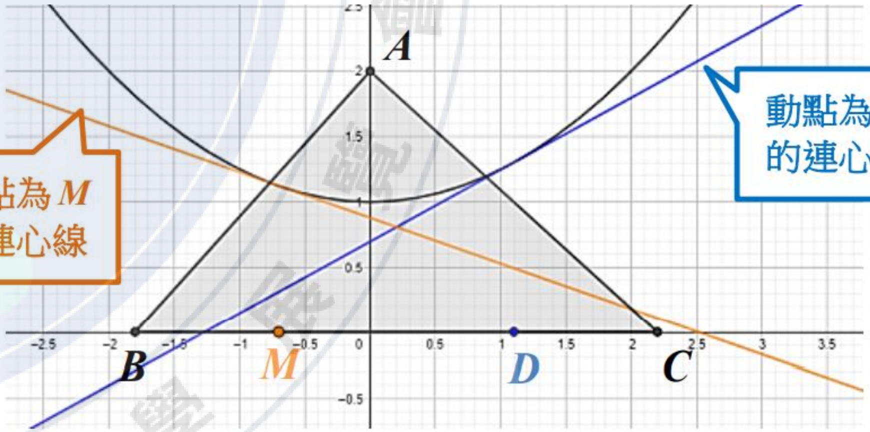
2^0 **證明 P 點為切點**

$$\begin{cases} -2dx+2ay+d^2-a^2=0 \\ y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2} \end{cases} \qquad -2dx+2a\left(\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}\right)+d^2-a^2=0$$

$$x^2-2dx+d^2=0 \ \Rightarrow\ (x-d)^2=0 \ \Rightarrow\ x=d\ (\text{重根})$$

可知這樣的交點只有一個，且此點即為 P 點

由 1^0 及 2^0 得證，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會與同一拋物線相切，且切點的 x 坐標為 d。



對於任意三角形，若A到$\overline{BC}$的距離相等，當動點D移動時，其共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所包絡出的拋物線全等。

命題7.1

若E為連心線$\overline{O_1O_2}$的中點，則當動點D移動時，E點會落於同一條直線上。

1^0 利用 O_1、O_2在$\overline{AD}$的中垂線上，先求出 O_1、O_2的坐標，再求出 O_1、O_2的中點坐標

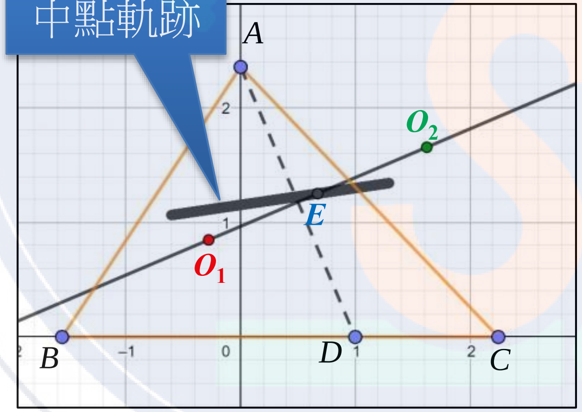
∵ O_1必落在$\overline{BD}$的中垂線上故其 x 坐標必為$\dfrac{b+d}{2}$；同理可知，O_2的 x 坐標必為$\dfrac{c+d}{2}$

又 O_1、O_2在$\overline{AD}$的中垂線上，此中垂線方程式為 $-2dx+2ay+d^2-a^2=0$

∴ $O_1(\dfrac{b+d}{2},\dfrac{a^2+bd}{2a})$，$O_2(\dfrac{c+d}{2},\dfrac{a^2+cd}{2a})$

E 為$\overline{O_1O_2}$的中點 ⇒ $E(\dfrac{b+c+2d}{4},\dfrac{2a^2+bd+cd}{4a})$

連心線中點軌跡



2^0 利用 O_1、O_2的中點坐標，找出其方程式

令 $x=\dfrac{b+c+2d}{4}$ ⇒ $d=\dfrac{4x-b-c}{2}$ 代入 $y=\dfrac{2a^2+bd+cd}{4a}$

⇒ $-(b+c)x+2ay+\dfrac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$ 為二元一次方程式，

故動點 D 移動時 E 點軌跡為一直線得證。

發現求出連心線中點軌跡的簡便方法

討論5

動點D移動時，連心線中點的軌跡與拋物線會不會有交點？如果有會相交於何處呢？

$$\begin{cases}-(b+c)x+2ay+\dfrac{(b+c)^2}{4}-a^2=0\\ y=\dfrac{1}{2a}x^2+\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

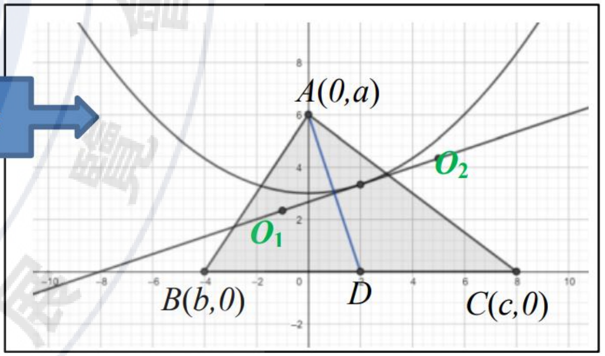
解決方法：
透過聯立求解

$$\Rightarrow -(b+c)x+2a(\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2})+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$$

$$\Rightarrow [2x-(b+c)]^2=0 \quad \Rightarrow x=\frac{b+c}{2}\ (\text{重根})$$

重根 ⇒ 連心線中點的軌跡與拋物線相切

圖示



由$x=\dfrac{b+c}{2}$的結果推知，當動點D為$\overline{BC}$中點時相切的點即連心線的中點，此時連心線與中點軌跡的直線重疊。

共邊三角形外接圓連心線中點軌跡就是當動點D為$\overline{BC}$中點時，$\overline{AD}$的中垂線

結論

一、特定三角形中存在的關係

(一)當ΔABC 為等腰三角形時，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，動點在腰上時，則含底角之$\Delta CBD$ 的外接圓圓心 O_1，會落於含頂角之ΔCAD 的外接圓 O_2 上。

(二)當ΔABC 為等腰三角形時，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，則$\Delta ABD$ 與ΔACD 的外接圓全等。

二、發現函數關係及其軌跡

(一)發現（R_1+R_2）與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支，進而得知當分割線$\overline{AD}\perp\overline{BC}$時，半徑和（$R_1+R_2$）有最小值 $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$。

(二)任意三角形中，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

(三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的中點 E 會落於同一條直線上，直線方程式為 $-(b+c)x+2ay+\frac{(b+c)^2}{4}-a^2=0$。同時發現共邊三角形外接圓連心線中點 E 的軌跡就是當動點 D 在$\overline{BC}$中點時$\overline{AD}$的中垂線。

(四)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會與同一拋物線相切，拋物線的焦點是頂點 A，準線為$\overleftrightarrow{BC}$，其方程式為 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$，且切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

三、建立三角形種類與外接圓面積關係的系統性關聯

▲種類	銳角▲ $\angle A<90°$	直角▲ $\angle A=90°$	鈍角▲ $\angle A>90°$
$(O_1+O_2)=O$ 動點位置	0個	1個	2個
(O_1+O_2) vs. O 面積關係	> 恆大於	> 或 = 出現一個等於的位置—高，其他位置皆大於	> 或 = 或 < 出現兩個等於的位置，居兩點間小於，其外大於

四、幾何不變性

(一)比例關係不變：從特殊三角形推廣到任意三角形，得知外接圓半徑 $R_1:R_2=\overline{AB}:\overline{AC}$。

(二) $AO_1O\,O_2$四點共圓不變：承雙曲線關係，發現$\Delta AO_1O_2\sim\Delta ABC$。又因為$\Delta AO_1O_2\sim\Delta ABC$，進而得知三角形頂點 A 與三個外接圓圓心 O、O_1 及 O_2，此四點共圓。

五、原圖形變動與產出圖形的關係

(一)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$會包絡出焦點是頂點 A，準線為$\overline{BC}$，其方程式為 $y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$的拋物線，且連心線$\overline{O_1O_2}$與拋物線之切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

(二)對於任意三角形，當動點 D 移動時，若頂點 A 到$\overline{BC}$的距離相等，無論 A、B、C 坐標為何，其共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$所包絡出的拋物線皆全等。

(三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線$\overline{O_1O_2}$的中點 E 會形成一條直線上，就是當動點 D 為$\overline{BC}$中點時的中垂線。

文獻

辛佳亮、柯亞承、鄭經獻、龔詩尹（2015）。環「徑」變遷。中華民國第55屆中小學科學展覽會作品說明書。

洪有情、朱峻賢、馬榮喜、陳世易、莊豐兆、顏德琮(2021)。康軒版數學課本第五冊及第六冊。

陳俐安、陳品璇、柯明錦（2011）。共邊三角形的內切圓。中華民國第51屆中小學科學展覽會作品說明書。

曾琮鈞、徐正皓、劉誠恩、蕭偉智（2021）。圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究。中華民國第61屆中小學科學展覽會作品說明書。

游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明(2008)。高中數學課本。翰林。

黃勤聰（2010）。20100305三五童軍節慶祝大會_場地佈置。花蓮縣童軍會。

蘇敏文、吳浩安、黃國斌（2018）。用心。中華民國第58屆中小學科學展覽會作品說明書。