中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030420

黑白配-探討毛毛蟲種類與段數的規律

學校名稱：南投縣立大成國民中學

作者：	指導老師：
國一 曾栩樂 國一 涂泘軒	江奇婉 鄭定祐

關鍵詞：巴斯卡三角形、排列組合、二階線性遞迴關係

摘要

本研究旨在探討科學研習月刊 60-3 期中「黑白毛毛蟲」的問題。意即在一類身體有黑、白色花紋相間的毛毛蟲中，每隻毛毛蟲從頭到尾巴，恰好可以分成四個段落，且這四個段落剛好是兩段黑色及兩段白色，那麼可以分成多少種類的毛毛蟲呢？其身上的顏色段數總和是多少呢？

先以直接劃記的方法解題，藉由觀察及分析探討，再利用二項式定理、巴斯卡三角形、排列組合的方式推論出符合的關係式。最後進一步延伸探討，當毛毛蟲身體段數為 $2n$，$3n$ 時，其毛毛蟲的種類和身體顏色段數總和之間的關係，以及遞迴關係式。

壹、 前言

一、 研究動機

本研究源自於科學研習月刊 60-3 期中「黑白毛毛蟲」的問題。

題目如下：

在一個小島上，生物學家發現了一類身體有黑、白色花紋相間的毛毛蟲，並經過仔細觀察後，發現毛毛蟲的花紋組成，似乎是有規律的！

每隻毛毛蟲從頭到尾巴，恰好可以分成四個段落，且這四個段落剛好是兩段黑色及兩段白色，所以，共可分成六種毛毛蟲，分別是:

黑黑白白

黑白黑白

黑白白黑

白黑黑白

白黑白黑

白白黑黑

但是相鄰的兩段如果是同色，其實看起來是一整段同樣顏色，例如“黑白白黑”的毛毛蟲，其實只有 3 段顏色，而“白白黑黑”毛毛蟲，只有 2 段顏色。

延續上述，六種毛毛蟲的顏色段數，分別是 2、4、3、3、4、2 ，而顏色的段數總和為 $2+4+3+3+4+2=18$

1.如果毛毛蟲身體有六段，每段可以黑白兩色，那有幾種毛毛蟲?

2.其中有幾種毛毛蟲只有 3 段顏色?

3.所有不同毛毛蟲的顏色段數總和是多少?

在研究這個問題的過程中，我們用直接畫出圖案計算，然後也將問題簡化，如果毛毛蟲的身體只有兩段，那麼會有 2 種，顏色總和為 4，接著將毛毛蟲的身體延伸為四段、六段和八段，觀察身體不同段數之下，毛毛蟲總類和顏色段數總和的相關性。我們發現除了一個個徒法煉鋼之外，也可以運用乘法公式，然後延伸至巴斯卡三角形，以及排列組合的概念，協助我們更快找到在毛毛蟲不同身體段數中，計算出毛毛蟲種類，以及顏色段數總和。我們亦進一步將問題延伸挑戰，探討如果當顏色從黑、白兩色變成黑、白、紅三種顏色時，是否也具有相關性。

二、 研究目的

我們的研究目的如下：

一、 探討並計算毛毛蟲身體有兩段、四段、六段、八段時，每段可以黑白兩色，那有幾種毛毛蟲？毛毛蟲的顏色段數總和？

二、 探討當毛毛蟲段數為 $2n$ 時，推論毛毛蟲種類？顏色段數總和？

三、 利用二項式定理、巴斯卡三角形、排列組合等概念，推論毛毛蟲段數為 $2n$ 時之數學關係式。

四、 延伸探討計算當毛毛蟲身體有三段、六段時，每段可以黑、白、紅三色，那有幾種毛毛蟲？毛毛蟲的顏色段數總和？

三、 文獻探討：

(一) 名詞定義

1. $f(2n)$：當毛毛蟲身體段數為 $2n$ 時，n 為正整數，毛毛蟲之種類數量。

   $f(3n)$：當毛毛蟲身體段數為 $3n$ 時，n 為正整數，毛毛蟲之種類數量。

   $f(kn)$：當毛毛蟲身體本段數為 kn 時，n 為正整數，毛毛蟲之種類數量。

2. $S(2n)$：當毛毛蟲本段數為 $2n$ 時, n 為正整數，毛毛蟲之顏色段數總合。

(二) 文獻探討

在中華民國第 52 屆中小學科學展覽會中作品(許家哲)：「怨言不斷～探討排列人數與怨言數的關係」中，提到一個數學問題如下：

從一年級到六年級的兒童各一人，排成一列領取糖果。

如果一個高年級的兒童站在低年級兒童前，那麼他後面所以比他低年級的兒童都各有 1 次怨言，而怨言的總數叫做怨言數，例如:下面的排列，其怨言數就是 4。

		怨言
前	1 年級	0 次
↓	4 年級	0 次
	3 年級	1 次
	2 年級	2 次
	6 年級	0 次
後	5 年級	1 次

此組怨言數為 4。

其作品的研究結果如下:

以 $f(x,y)$表示 x 個人怨言數為 y 的排列方式的個數，x 表示 1、2、3、…、x-1、x 個人，y 指怨言數。

1. x 個人排列，怨言數最小 $y=0$，最大 $y=\frac{x(x-1)}{2}$，即 $0\le y\le\frac{x(x-1)}{2}$。

2. 怨言數的排列個數具有對稱姓，也就是 $f(x,y)=f(x,\frac{x(x-y)}{2}-y)$。

3. 依序列出 1~x 個人的各怨言數的排列個數，再依

   $f(x,y)=f(x-1,y)+f(x-1,y-1)+f(x-1,y-2)+\ldots\ldots+f(x-1,y-x+1)$即可算出 $f(x,y)$的值。

4. 以組合公式 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 可推算出怨言數 0~3 的排列個數，

   $f(x,0)=1$、$f(x,1)=x-1$、$f(x,2)=\frac{x(x-1)}{2}-1$。

從上述作品的文獻探討，利用研究中提到的資訊連結運用到我們這次的研究，我們在研究過程中，也先從依序的劃記開始觀察，然後發現規律性，然後我們再依發現的規律，利用巴斯卡三角形、含有相同物的排列、相異物的組合的概念，找尋之間的數學關係式。

(三) 本研究相關的數學概念:

1. n 階層：規定符號 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$，讀做〝$n$ 階層〞。

2. 相異物排列：將 n 個不同物品排成一列有

   $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 種方法。

3. 含有相同物品的排列：

   設 n 個物品分成 k 類,每類各有 m_1、$m_2\ldots m_k$ 個(每類中的物品相同

   且 $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$),則這 n 個物品排成一列有 $\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ 種方法。

4. 相異物的組合：

   用 C_k^n 表示從 n 個不同的物品中挑出 k 個不同物品的組合數 $(0\le k\le n)$，則

   $$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5. 二項式定理：

設 n 為非負整數，則

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 \ldots + C_k^n x^{n-k} y^k + \ldots C_n^n x^0 y^n$$ 。

6. 巴斯卡三角形：

由二項式定理展開$(x+y)^n$,其中 n=0,1,2,3,…並將係數排列成如下三角形:

1	C_0^0	n=0
1 1	C_0^1 C_1^1	n=1
1 2 1	C_0^2 C_1^2 C_2^2	n=2
1 3 3 1	C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3	n=3
1 4 6 4 1	C_0^4 C_1^4 C_2^4 C_3^4 C_4^4	n=4
1 5 10 10 5 1	C_0^5 C_1^5 C_2^5 C_3^5 C_4^5 C_5^5	n=5
1 6 15 20 15 6 1	C_0^6 C_1^6 C_2^6 C_3^6 C_4^6 C_5^6 C_6^6	n=6
圖 1	圖 2	

這稱為巴斯卡三角形(或楊輝三角形)。

觀察巴斯卡三角形可以看出下列性質；

(1)如圖 1，數字呈現左右對稱，且兩端的數都是 1，這是因為

$$C_n^k = C_{n-k}^n, 且 C_0^n = C_n^n = 1.$$

(2)如圖 2，每個數等於其左上的數與右上的數的和，即

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$$ ，$1 \le k \le n-1$

此式稱為巴斯卡公式。

貳、 研究設備及器材

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、Microsoft Office Word。

參、 研究過程或方法

【研究架構】

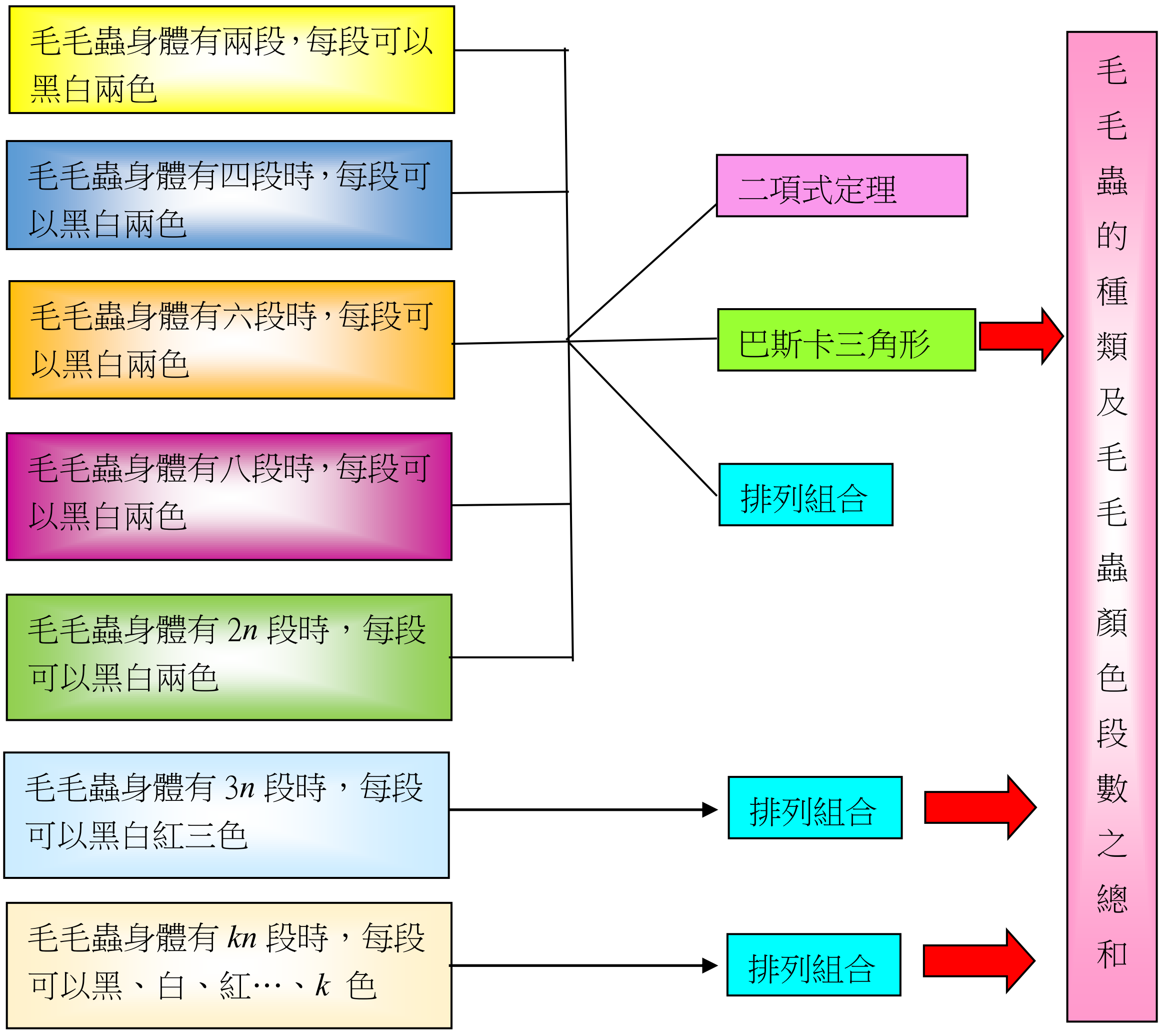


圖 4-1 研究架構

一、 方法一：以直接劃記計算毛毛蟲身體為兩段、四段、六段、八段，每段可以黑白兩色，毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和

(一)毛毛蟲身體為兩段，每段可以黑白兩色

1.實際劃記如表 4-1.1

表 4-1.1

2 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
●○	2	2	4
○●		2	

顏色段數為 2、2。

(二)毛毛蟲身體為四段，每段可以黑白兩色

1.實際劃記如表 4-1.2

表 4-1.2

4 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
●●○○	6	2	18
○○●●		2	
●○○●		3	
○●●○		3	
●○●○		4	
○●○●		4	

顏色段數為 2、3、4、4、3、2。

(三)毛毛蟲身體為六段，每段可以黑白兩色

1.實際劃記如表 4-1.3

6 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
○○○●●●	20	2	80
●●●○○○		2	
○○●●●○		3	
○●●●○○		3	
●○○○●●		3	
●●○○○●		3	
○○●○●●		4	
○○●●○●		4	
○●○○●●		4	
○●●○○●		4	
●○○●●○		4	

●○●●○○		4	
●●○○●○		4	
●●○●○○		4	
○●○●●○		5	
○●●○●○		5	
●○●○○●		5	
●○○●○●		5	
●○●○●○		6	
○●○●○●		6	

顏色段數為 2、3、3、4、4、4、4、5、5、6、6、6、6、5、5、4、4、4、4、3、3、2。

(四)毛毛蟲身體為八段，每段可以黑白兩色

1.實際劃記如表 4-1.4

表 4-1.4

8 個段落	**毛毛蟲種類**	**顏色段數**	**顏色段數總和**
●●●●○○○○	70	2	350
○○○○●●●●		2	
○○○●○●●●		4	
○○○●●○●●		4	
○○○●●●○●		4	
○○●○○●●●		4	
○●○○○●●●		4	
○○●●○○●●		4	
○○●●●○○●		4	
●○○○●●●○		4	
○●●○○○●●		4	
●○○●●●○○		4	
●●○○○●●○		4	
●●○○●●○○		4	
●●●○○○●○		4	
●●●○○●○○		4	
●●●○●○○○		4	
●●○●●○○○		4	
●○●●●○○○		4	

○●●●○○○●		4	
○○○●●●●○		3	
●○○○○●●●		3	
○○●●●●○○		3	
●●○○○○●●		3	
●●●○○○○●		3	
○●●●●○○○		3	
○○●○●●●○		5	
○●○○●●●○		5	
●○○○●○●●		5	
●○○○●●○●		5	
○○●●○●●○		5	
○○●●●○●○		5	
○●○●●●○○		5	
○●●○○●●○		5	
○●●○●●○○		5	
●○○●○○●●		5	
●○●○○○●●		5	
●●○○○●○●		5	
●●○○●○○●		5	
●●○●○○○●		5	
●○●●○○○●		5	
○●●●○○●○		5	
○●●●○●○○		5	
○○●○●○●●		6	
○○●○●●○●		6	
○●○○●○●●		6	
○○●●○●○●		6	
○●○●○○●●		6	
○●○●●○○●		6	
○●●○○●○●		6	
○●●○●○○●		6	
●○○●○●●○		6	
●○○●●○●○		6	
●○●○○●●○		6	
●○●○●●○○		6	
●●○○●○●○		6	
●●○●○○●○		6	

●●○●○●○○		6	
●○●●○○●○		6	
●○●●○●○○		6	
○●○●○●●○		7	
○●○●●○●○		7	
○●●○●○●○		7	
●○○●○●○●		7	
●○●○●○○●		7	
●○○●○●○●		7	
●○●○○●○●		7	
○●○●○●○●		8	
●○●○●○●○		8	

顏色段數為 2、3、3、3、4、4、4、4、4、4、4、4、4、5、5、5、5、5、5、5、5、5、6、6、6、6、6、6、6、6、6、7、7、7、8、

8、7、7、7、6、6、6、6、6、6、6、6、6、5、5、5、5、5、5、5、5、5、4、4、4、4、4、4、4、4、4、3、3、3、2。

整理上列劃記之結果如下表 4-1.5

表 4-1.5

毛毛蟲身體段數	毛毛蟲種類 $f(2n)$	顏色段數總和 $S(2n)$
n=1，2 段	2	4
n =2，4 段	6	18
n =3，6 段	20	80
n =4，8 段	70	350
n =5，10 段	252	1512

我們發現：

1. 顏色段數可以視為一個對稱的數列。
2. 當毛毛蟲身體段數 2，顏色段數總和等於毛毛蟲總類的 2 倍；

   當毛毛蟲身體段數 4，顏色段數總和等於毛毛蟲總類的 3 倍；

   當毛毛蟲身體段數 6，顏色段數總和等於毛毛蟲總類的 4 倍；

   當毛毛蟲身體段數 8，顏色段數總和等於毛毛蟲總類的 5 倍。

小結:

定理一: 當毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且居分，顏色段數總和 $S(2n)$等於毛毛蟲總類 $f(2n)$的 $n+1$ 倍。

即 $S(2n)=(n+1)\,f(2n)$

利用上述方法，雖然可以順利解題，但是太費力耗時了，且中間是否有遺漏或錯誤的情形，都需要再檢查，因此我們希望能再探究是否有簡單的方法。

二、 方法二：利用二項式定理及巴斯卡三角形概念計算毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和

(一)毛毛蟲身體為兩段、四段、六段、八段，每段可以黑白兩色時，其毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和整理如下表 4-1.6

表 4-1.6

毛毛蟲身體段落(2n)	毛毛蟲種類 f(2n)
$n=1$，2 段	2=1+1
$n=2$，4 段	6=1+2+2+1=1+2x2+1
$n=3$，6 段	20=1+3+3+3+3+3+3+1=1+3x3+3x3+1
$n=4$，8 段	70=1+4x4+6x6+4x4+1

從方法一直接劃記中，計算出身體段數不同時，其毛毛蟲的種類，我們發現，將毛毛蟲種類數字拆解，結果發現和巴斯卡三角形的數字竟有相關，所以我們先用直接劃記，畫出當段數是 10 段時的情形，並加以驗証我們的推論是否正確。

表 4-1.7

10 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
○○○○○●●●●●	252	2	4
●●●●●○○○○○		2	
○○○○●●●●●○		3	
●○○○○○●●●●		3	
○○○●●●●●○○		3	
●●○○○○○●●●		3	

○○●●●●●○○○		3	
●●●●○○○○○●		3	
○●●●●●○○○○		3	
●●●○○○○○●●		3	
●○○○●○○○●●		4	
●○○●●●●○○○		4	
●●○○●●●○○○		4	
●●●○○○○●●○		4	
○○○○●○●●●●		4	
○○○○●●○●●●		4	
○○○○●●●○●●		4	
○○○○●●●●○●		4	
○○○●○○●●●●		4	
○○●○○○●●●●		4	
○●○○○○●●●●		4	
●○○○○●●●●○		4	
○○○●●○○●●●		4	
○○○●●●○○●●		4	
○○○●●●●○○●		4	
●○○○●●●●○○		4	
○○●●○○○●●●		4	
○●●○○○○●●●		4	
●●○○○○●●●○		4	
●●○○○●●●○○		4	
○○●●●○○○●●		4	
○○●●●●○○○●		4	
●●●●○○○○●○		4	
●●●●○○○●○○		4	
●●●●○○●○○○		4	
●●●●○●○○○○		4	
●●●○●●○○○○		4	
●●○●●●○○○○		4	
●○●●●●○○○○		4	
○●●●●○○○○●		4	
●●●○○●●○○○		4	
●●●○○○●●○○		4	
○○○●○●●●●○		5	
○○●○○●●●●○		5	

○●○○○●●●●○		5	
●○○○○●○●●●		5	
●○○○○●●○●●		5	
●○○○○●●●○●		5	
○○○●●○●●●○		5	
○○○●●●○●●○		5	
○○○●●●●○●○		5	
○○●○●●●●○○		5	
○●○○●●●●○○		5	
●○○○●○○●●●		5	
●○○○●●○○●●		5	
●○○○●●●○○●		5	
○○●●○○●●●○		5	
○○●●○●●●○○		5	
●○○●○○○●●●		5	
○●●○○○●●●○		5	
○●●○○●●●○○		5	
●○●○○○○●●●		5	
●●○○○○●○●●		5	
●●○○○○●●○●		5	
●●○○○●○○●●		5	
●●○○○●●○○●		5	
○○●●●○○●●○		5	
○○●●●●○○●○		5	
○○●●●○●●○○		5	
○○●●●●○●○○		5	
○●○●●●●○○○		5	
○●●○●●●○○○		5	
●●●○●○○○○●		5	
●●○●●○○○○●		5	
●○●●●○○○○●		5	
○●●●●○○○●○		5	
○●●●●○○●○○		5	
○●●●●○●○○○		5	
●●●○○●○○○●		5	
●●●○○○●○○●		5	
●●●○○○○●○●		5	
●●○●○○○○●●		5	

●●○○●●○○○●		5	
●●○○●○○○●●		5	
●○●●○○○○●●		5	
●○○●●●○○○●		5	
●○○●●○○○●●		5	
○●●●○●●○○○		5	
○●●●○○●●○○		5	
○●●●○○○●●○		5	
○○○●○●○●●●		6	
○○○●○●●○●●		6	
○○○●○●●●○●		6	
○○●○○●○●●●		6	
○○●○○●●○●●		6	
○○●○○●●●○●		6	
○●○○○●○●●●		6	
○●○○○●●○●●		6	
○●○○○●●●○●		6	
○○○●●○●○●●		6	
○○○●●○●●○●		6	
○○○●●●○●○●		6	
○○●○●○○●●●		6	
○○●○●●○○●●		6	
○○●○●●●○○●		6	
○●○○●○○●●●		6	
○●○○●●○○●●		6	
○●○○●●●○○●		6	
●○○○●○●●●○		6	
●○○○●●○●●○		6	
●○○○●●●○●○		6	
○○●●○○●○●●		6	
○○●●○○●●○●		6	
○○●●○●○○●●		6	
○○●●○●●○○●		6	
○●○●○○○●●●		6	
●○○●○○●●●○		6	
●○○●○●●●○○		6	
○●●○○○●○●●		6	
○●●○○○●●○●		6	

○●●○○●○○●●		6	
○●●○○●●○○●		6	
●○●○○○●●●○		6	
●○●○○●●●○○		6	
●●○○○●○●●○		6	
●●○○○●●○●○		6	
○○●●●○○●○●		6	
○○●●●○●○○●		6	
○●○●●○○○●●		6	
○●○●●●○○○●		6	
○●●○●○○○●●		6	
○●●○●●○○○●		6	
●●●○●○○○●○		6	
●●●○●○○●○○		6	
●●●○●○●○○○		6	
●●○●●○○○●○		6	
●●○●●○○●○○		6	
●●○●●○●○○○		6	
●○●●●○○○●○		6	
●○●●●○○●○○		6	
●○●●●○●○○○		6	
●●●○○●○●○○		6	
●●●○○●○○●○		6	
●●●○○○●○●○		6	
●●○●○●●○○○		6	
●●○●○○●●○○		6	
●●○●○○○●●○		6	
●●○○●●○●○○		6	
●●○○●○●●○○		6	
●●○○●●○○●○		6	
●●○○●○○●●○		6	
●○●●○●●○○○		6	
●○●●○○●●○○		6	
●○●●○○○●●○		6	
●○●○●●●○○○		6	
●○○●●●●○○○		6	
●○○●●●●○○○		6	
●○○●●●○○●○		6	

●○○●●○○●●○		6	
○●●●○●○○○●		6	
●○○○●○●○○●		6	
●○○○●○○●○●		6	
○○●○●○●●●○		7	
○○●○●●○●●○		7	
○○●○●●●○●○		7	
○●○○●○●●●○		7	
○●○○●●○●●○		7	
○●○○●●●○●○		7	
●○○○●○●○●●		7	
●○○○●○●●○●		7	
●○○○●●○●○●		7	
○○●●○●○●●○		7	
○○●●○●●○●○		7	
○●○●○○●●●○		7	
○●○●○●●●○○		7	
●○○●○○●○●●		7	
●○○●○○●●○●		7	
●○○●○●○○●●		7	
●○○●○●●○○●		7	
○●●○○●○●●○		7	
○●●○○●●○●○		7	
●○●○○○●○●●		7	
●○●○○○●●○●		7	
●○●○○●○○●●		7	
●○●○○●●○○●		7	
●●○○○●○●○●		7	
○○●●●○●○●○		7	
○●○●●○○●●○		7	
○●○●●●○○●○		7	
○●○●●○●●○○		7	
○●○●●●○●○○		7	
○●●○●○○●●○		7	
○●●○●●○○●○		7	
○●●○●○●●○○		7	
○●●○●●○●○○		7	
●●○●○●○○○●		7	

●●○●○○●○○●		7	
●●○●○○○●○●		7	
●●○○●○●○○●		7	
●●○○●○○●○●		7	
●○●●○●○○○●		7	
●○●●○○●○○●		7	
●○●●○○○●○●		7	
●○●○●●○○○●		7	
●○●○●○○○●●		7	
●○○●●○●○○●		7	
●○○●●○○●○●		7	
○●●●○●○●○○		7	
○●●●○●○○●○		7	
○●●●○○●○●○		7	
○○●○●○●○●●		8	
○○●○●○●●○●		8	
○○●○●●○●○●		8	
○●○○●○●○●●		8	
○●○○●○●●○●		8	
○●○○●●○●○●		8	
○○●●○●○●○●		8	
○●○●○○●○●●		8	
○●○●○○●●○●		8	
○●○●○●○○●●		8	
○●○●○●●○○●		8	
●○○●○●○●●○		8	
●○○●○●●○●○		8	
○●●○○●○●○●		8	
●○●○○●○●●○		8	
●○●○○●●○●○		8	
○●○●●○○●○●		8	
○●○●●○●○○●		8	
○●●○●○○●○●		8	
○●●○●○●○○●		8	
●●○●○●○●○○		8	
●●○●○●○○●○		8	
●●○●○○●○●○		8	
●●○○●○●○●○		8	

●○●●○●○●○○		8	
●○●●○●○○●○		8	
●○●●○○●○●○		8	
●○●○●●○●○○		8	
●○●○●○●●○○		8	
●○●○●●○○●○		8	
●○●○●○○●●○		8	
●○○●●○●○●○		8	
○●○●○●○●●○		9	
○●○●○●●○●○		9	
●○○●○●○●○●		9	
●○●○○●○●○●		9	
○●○●●○●○●○		9	
○●●○●○●○●○		9	
●○●○●○●○○●		9	
●○●○●○○●○●		9	
○●○●○●○●○●		10	
●○●○●○●○●○		10	

從上面表格 4-1.7 得知，當身體段數 10 段時，毛毛蟲種類共 252 種。而 252=1+5x5+10x10+5x5+1，同樣符合和巴斯卡三角形的數字相關，我們推論成功。

巴斯卡三角形：

1 n=0

1 1 n=1

1 2 1 n=2

1 3 3 1 n=3

1 4 6 4 1 n=4

1 5 10 10 5 1 n=5

1 6 15 20 15 6 1 n=6

當毛毛蟲身體段數 2 段，對應巴斯卡三角形的第一層係數，當毛毛蟲身體段數 4 段，對應巴斯卡三角形的第二層係數，當毛毛蟲身體段數 6 段，對應巴斯卡三角形的第三層係數，

因此整理成下表 4-1.8：

表 4-1.8

n	**毛毛蟲身體段落 $2n$**	**巴斯卡三角形的第 n 層係數**	**毛毛蟲種類 $f(2n)$**
1	2 段　2x1	1、1	2=1+1
2	4 段　2x2	1、2、1	6=1+2x2+1
3	6 段　2x3	1、3、3、1	20=1+3x3+3x3+1
4	8 段　2x4	1、4、6、4、1	70=1+4x4+6x6+4x4+1
5	10 段　2x5	1、5、10、10、5、1	252=1+5x5+10x10+5x5+1

而巴斯卡三角形的係數是由二項式定理展開$(x+y)^n$，其中 n=0,1,2,3,…，

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 \ldots + C_k^n x^{n-k} y^k + \ldots C_n^n x^0 y^n$$ 。

小結:

定理二：毛毛蟲身體段落 2 n，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$

$f(2n)= C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + \ldots\ldots + C_n^n \cdot C_n^n$ ，$S(2n)= (n+1)\,f(2n)$

三、 方法三：利用排列概念計算毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和

從直接劃記的結果中，如果將毛毛蟲身上的白色花紋、黑色花紋都看成相同物排列，我們嘗試利用高中數學「含有相同物品排列」的概念幫助我們解題。

當毛毛蟲身體段數四段，會有二段黑色及二段白色，

●●○○　　$n=2$　　毛毛蟲種類 $f(2n)=\frac{4!}{2!2!}=6$ ，$S(2n)= (n+1)\,f(2n)=12$

當毛毛蟲身體段數六段，會有三段黑色及三段白色，

●●●○○○　$n=3$　毛毛蟲種類 $f(2n)=\frac{6!}{3!3!}=20$ ，$S(2n)= (n+1)\,f(2n)=80$

當毛毛蟲身體段數八段，會有四段黑色及四段白色，

●●●●○○○○　$n=4$　毛毛蟲種類 $f(2n)=\frac{8!}{4!4!}=70$ ，$S(2n)= (n+1)\,f(2n)=350$

小結:

定理三: 毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$$f(2n)=\frac{(2n)!}{n!n!} \quad , \quad S(2n)=(n+1)\frac{(2n)!}{n!n!}$$

四、 方法四：利用組合概念計算毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和

從定理三：毛毛蟲身體段落 $2n$，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$$f(2n)=\frac{(2n)!}{n!n!}=C_n^{2n} \text{，} S(2n)=(n+1)\frac{(2n)!}{n!n!}=(n+1)C_n^{2n} \text{。}$$

我們再結合「組合」的概念，可以推論得到：

小結:

定理四: 毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$$f(2n)=\frac{(2n)!}{n!n!}=C_n^{2n} \quad , \quad S(2n)=(n+1)\frac{(2n)!}{n!n!}=(n+1)C_n^{2n} \text{。}$$

五、 延伸推論(一)：當毛毛蟲身體有 3 段、6 段時，每段可以黑、白、紅三色，那有幾種毛毛蟲？毛毛蟲的顏色段數總和？

(一)當毛毛蟲身體有 3 段時:

1. 方法一：直接劃記計算

(1)當毛毛蟲身體段數為 3 段時,實際劃記如表 4-1.9

表 4-1.9

3 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
●○🔴	6	3	18
●🔴○		3	
○●🔴		3	
○🔴●		3	

🔴⚫⚪		3	
🔴⚪⚫		3	

顏色段數為 3、3、3、3、3、3。

2. 方法二：利用含有相同物品排列的概念，則毛毛蟲的種類有 3！＝6 種。

3. 顏色段數只有 3 段一種，所以顏色段數總和為 3x6=18。

(二)當毛毛蟲身體段數為 6 段時：

1. 方法一：直接劃記計算

(1)當毛毛蟲身體段數為 6 段時,實際劃記如表 4-1.10

表 4-1.10

6 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
⚫⚫⚪⚪🔴🔴	90	3	18
⚫⚫🔴🔴⚪⚪		3	
⚪⚪⚫⚫🔴🔴		3	
⚪⚪🔴🔴⚫⚫		3	
🔴🔴⚫⚫⚪⚪		3	
🔴🔴⚪⚪⚫⚫		3	
🔴⚫⚫🔴⚪⚪		4	
🔴⚫⚫⚪⚪🔴		4	
⚫⚫🔴⚪⚪🔴		4	
🔴⚪⚪🔴⚫⚫		4	
🔴⚪⚪⚫⚫🔴		4	
⚪⚪🔴⚫⚫🔴		4	
⚪⚫⚫⚪🔴🔴		4	
⚪⚫⚫🔴🔴⚪		4	
⚫⚫⚪🔴🔴⚪		4	
⚪🔴🔴⚪⚫⚫		4	
⚪🔴🔴⚫⚫⚪		4	
🔴🔴⚪⚫⚫⚪		4	
⚫⚪⚪⚫🔴🔴		4	
⚫⚪⚪🔴🔴⚫		4	
⚪⚪⚫🔴🔴⚫		4	
⚫🔴🔴⚫⚪⚪		4	

●🔴🔴○○●		4	
🔴🔴●○○●		4	
…… ……	…… ……	…… ……	…… ……

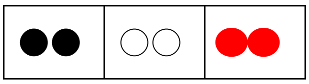
直接劃記的方式太繁瑣，所以直接利用方法二計算。

2. 方法二：利用含有相同物品排列的概念，則毛毛蟲的種類有 $\frac{6!}{2!2!2!}=90$ 種。

(三)顏色段數總和之討論：當毛毛蟲身體為 6 段時，因為一一劃記太繁瑣，所以無法直接計算，因此在毛毛蟲身體 6 段時，我們將毛毛蟲顏色段數分成 3 段、4 段、5 段、6 段分別進行討論。

1. 利用組合概念計算顏色段數總合，當毛毛蟲身體 6 段時，將顏色段數分成 3 段、4 段、5 段、6 段分別進行討論。

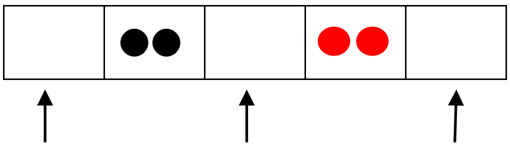
(1)當顏色為 3 段時：



視成三個大方框，也就是相同顏色必須放在同一個方框內，所以會有 3！的排法，而顏色段數為 3，所以顏色段數總和為 3x3!=18。

所以當顏色為 3 段時，顏色段數總和為 3x3!=18。

(2)當顏色為 4 段時：



●●和🔴🔴的這四個位置必須二二同樣顏色，所以可以看成兩個大位置，而這兩個大位置的選擇顏色有 3x2=6 種，另一個剩餘顏色在箭頭的三個位置中擇二放入，所以有 3x2 兩種，因此會有 3x2x3x2=36 種，顏色段數總和為 4x36=144。

所以當顏色為 4 段時，顏色段數總和為 144。

(3)當顏色為 5 段時：

●●	A	B	C	D

A	B	C	D	●●

●●的這二個位置必須同樣顏色，所以看成一個大位置，而這一個大位置的選擇顏色有 3 種，A 的位置剩下二種顏色可以選，剩下的 B、C、D 位置則固定無法再選，所以有 2x1 兩種，因此會有 3x2+3x2=12 種。

A	●●	B	C	D

A	B	C	●●	D

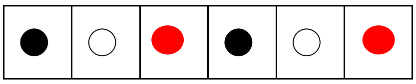
同理，對稱之下，會有 3x2+3x2=12 種。

A	B	●●	C	D

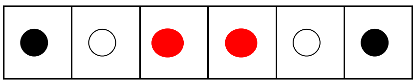
A 的位置和 C 的位置有兩個顏色可以選擇，剩下的 B、D 位置則固定無法再選，因此會有 3x2x2=12 種。

所以當顏色為 5 段時，顏色段數總和為 5x(12+12+12)=5x36=180 種。

(4)當顏色為 6 段時：



先將前面三個位置看成一個大位置，後面三的位置也看成一個大位置，大位置裡的顏色必須是不同的，所以會有 3x2x3x2=36 種。但是為了符合顏色 6 段，所以必須扣除出現下列情形者，

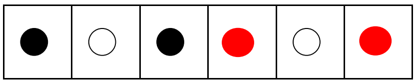


也就是當最中間的兩個顏色相同時，所以將中間兩個位置看成一個大位置，所以中間的顏色選擇有 3 種，另外前面兩個位置和後面兩個位置的選擇各有 2 種，所以共

有 2x3x2=12 種。

因此第一種情形顏色 6 段的有 36-12=24 種。

第二種情形為



前面三個位置看成一個大位置，後面三的位置也看成一個大位置，大位置裡的顏色必須有兩個相同的，所以當前面大位置選完顏色和位置有 3x2=6 種，後面的大位置也固定了，因此第二種情形顏色 6 段的有 6 種。

綜合兩種情形，顏色 6 段的共有 30 種，顏色段數總和為 6x30=180 種。

所以當顏色為 6 段時，顏色段數總和為 6x(24+6)=6x30=180 種。

小結：當毛毛蟲身體分 6 段，顏色為黑、白、紅個兩個時，毛毛蟲的種類有 $\frac{6!}{2!2!2!}=90$ 種，顏色段數總和為 18+144+180+180=522。

綜合上述之結果，整理如下表 4-1.11

表 4-1.11

毛毛蟲身體段數	毛毛蟲總類 $f(3n)$	顏色段數總和 $S(3n)$
n=1，3 段	6	18
n =2，6 段	90	522

但我們無法找出符合 $S(3n)$與 $f(3n)$之間的數學關係式。

小結:

定理五: 毛毛蟲身體段落 3 n，每段可以黑、白、紅三色且均分，毛毛蟲種類為 $f(3n)$，

$$f(3n)=\frac{(3n)!}{n!n!n!}$$

肆、 研究結果

一、 利用「直接劃記」計算其關係為：

定理一：當毛毛蟲身體段數 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，

顏色段數總和 $S(2n)$等於毛毛蟲種類 $f(2n)$的 $n+1$ 倍。

$S(2n)=(n+1)f(2n)$

例如：

當 $n=5$，毛毛蟲身體段數 10，每段可以黑白兩色，毛毛蟲種類 $f(10)=252$，

顏色段數總和 $S(10)=1512$，所以 1512=(5+1)x252，$S(10)=(5+1)f(10)$。

二、 利用「二項式定理」及「巴斯卡三角形」概念其關係為：

定理二：毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$

$f(2n)=C_0^n\cdot C_0^n+C_1^n\cdot C_1^n+C_2^n\cdot C_2^n+\ldots\ldots+C_n^n\cdot C_n^n$，$S(2n)=(n+1)f(2n)$

例如：

當 $n=6$，毛毛蟲身體段數 12，每段可以黑白兩色，

毛毛蟲種類 $f(12)$=1x1+6x6+15x15+20x20+15x15+6x6+1x1=924，

顏色段數總和 $S(12)$=(6+1)x924=6468。

三、 利用「排列」概念其關係為：

定理三: 毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$f(2n)=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$ ， $S(2n)=(n+1)\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

例如：

當 $n=6$，毛毛蟲身體段數 12，每段可以黑白兩色，

毛毛蟲種類 $f(12)=\dfrac{12!}{6!6!}=\dfrac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=924$，

顏色段數總和 $S(12)$=(6+1)x924=6468。

四、 利用「組合」概念其關係為：

定理四：毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$f(2n)= C_n^{2n}$ ， $S(2n)= (n+1)C_n^{2n}$ 。

例如：

當 $n=7$，毛毛蟲身體段數 14，每段可以黑白兩色，

毛毛蟲種類 $f(14)=C_7^{14}=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9\times8}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=3432$，

顏色段數總和 $S(14)$=(7+1)x3432=27456。

五、 延伸推論(一)：

定理五：當毛毛蟲身體有 $3n$ 段時，每段可以黑、白、紅三色且均分，

則毛毛蟲種類 $f(3n)=\frac{(3n)!}{n!n!n!}$

例如：

當 $n=4$，毛毛蟲身體段數 12，每段可以黑、白、紅三色，毛毛蟲種類

$f(12)=\frac{12!}{4!4!4!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}=34650$。

六、 延伸推論(二)：

定理六：當毛毛蟲身體有 kn 段時，每段可以黑、白、紅……k 色且均分，

則毛毛蟲種類 $f(kn)=\frac{(kn)!}{n!n!...n!}$

例如：

當 $k=4$、$n=2$，毛毛蟲身體段數 8，每段可以黑、白、紅、綠四色，毛毛蟲種類

$f(8)=\frac{8!}{2!2!2!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{2\times1\times2\times1}=5040$。

伍、　討論與結論

一、 我們先用電腦，實際畫出所有可能的情形，然後分別找到當顏色只能有黑、白兩色且均分時，在毛毛蟲身體段數為 2 段、4 段、6 段、8 段和 10 段之下，毛毛蟲的種類以及顏色總段數的情形，雖然這花費了我們很多的時間，但從中也學習到如何整理和分析數據的能力。

二、 為了希望可以找到其他方法幫助我們可以更迅速的解題，所以我們試著觀察數據，找到規律性，也提前學習了高中課程，藉由二項式定理、巴斯卡三角形及排列組合的概念，成功找到了數學關係式。

三、 當毛毛蟲身體段落 2 n，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 *f(2n)*，在定理二中 *f(2n)*=$\mathrm{C}_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + ... + C_n^n \cdot C_n^n$，定理三、四中 *f(2n)*= $\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \mathrm{C}_n^{2n}$，

我們欲推論 *f(2n)*=$\mathrm{C}_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + ... + C_n^n \cdot C_n^n = \mathrm{C}_n^{2n}$ 之證明。

其過程如下：

由二項式定理可知 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + ... + C_n^n x^n$

$\because (1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$

$$\therefore (1+x)^n(1+x)^n = (C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + ... + C_n^n x^n)(C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + ... + C_n^n x^n)$$

$$= ......(C_0^n \cdot C_n^n + C_1^n \cdot C_{n-1}^n + C_2^n \cdot C_{n-2}^n + ... + C_n^n \cdot C_0^n)x^n......$$

$$= ......(C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + ... + C_n^n \cdot C_n^n)x^n......$$

$$= ......\sum_{k=0}^{n}(C_k^n \cdot C_k^n)x^n......$$

$$= ...\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2 x^n......$$

由上可知，x^n 的係數為 $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2$ ....(1)

直接利用二項是定理：$(1+x)^{2n} = C_0^{2n} + C_1^{2n}x + C_2^{2n}x^2 + ... + C_n^{2n}x^n + ...C_{2n}^{2n}x^{2n}$

其 x^n 的係數為 C_n^{2n} ....(2)

綜合(1)、(2)

故$\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2 = C_n^{2n}$

意即$C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + \ldots + C_n^n \cdot C_n^n = C_n^{2n}$

故得證。

四、 我們試著觀察，是否具有遞迴關係式，我們發現：

毛毛蟲身體段落 $2n$，顏色只能有黑、白兩色且均分時，毛毛蟲種類為 $f(2n)$，

當 $n=1$，$f(2)=2$，$n=2$，$f(4)=6$，$n=3$，$f(6)=20$，$n=4$，$f(8)=70$，....

我們令 $g(n)=f(2n)$，所以 $g(1)=2$、 $g(2)=6$、 $g(3)=20$、 $g(4)=70$...，

其遞迴關係式為 $g(n)=5g(n-1)-5g(n-2)$。

故毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)= g(n)$，

則遞迴關係式 $g(n)=5g(n-1)-5g(n-2)$。

利用二階遞迴關係式，

$x^2-5x+5=0$，$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$，

$g(1)=2$、$g(2)=6$

$$g(n)=A\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

得到

$$g(n)=\frac{2}{5}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

故毛毛蟲身體段落 $2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $f(2n)= g(n)$，

則一般式 $g(n)=\frac{2}{5}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。

五、 毛毛蟲段數是 $2n$，每段可以黑白兩色且均分時，從不同的數學概念推論出定理一至定理六的數學式，最後也找到遞迴關係式和一般式。毛毛蟲身體有 $3n$，每段可以黑、白、紅三色且均分時，透過排列的概念計算出毛毛蟲種類，但在計算顏色段數總和時，只能以不同顏色段數做討論，尚未找到一個直接的數學式，同理在最後延伸推

論毛毛蟲身體 kn 段，每段可以黑白紅…k 色且均分時，只能以排列的概念計算出毛毛蟲種類。

六、 延伸討論，如果我們將毛毛蟲身體段數分成一段、二段、三段、……，顏色以黑白兩色，但 $\boxed{\text{不規定顏色要平均分配}}$，例如：

當毛毛蟲身體段數三段時，情形有三白、三黑、一白二黑、一黑二白，然後再討論其排列，所以會有 16 種。

因此我們設毛毛蟲段數 n，毛毛蟲種類 $h(n)$，

$h(1)=2$， $h(2)=6$，$h(3)=16$，$h(4)=40$，$h(5)=96$....

我們發現其遞迴關係式為 $h(n)=4g(n-1)-4g(n-2)$。

故毛毛蟲身體段落 n，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $h(n)$，

則遞迴關係式 $h(n)=4h(n-1)-4\,h(n-2)$。

利用二階遞迴關係式，

$x^2-4x+4=0$，$x=2$、2，

$h(1)=2$、$h(2)=6$

$h(n)=(A+nB)2^n$

得到

$h(n)=2^{n-1}+n2^{n-1}$

$h(n)=(n+1)2^{n-1}$

故毛毛蟲身體段落 n，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為 $h(n)$，

則一般式 $h(n)=(n+1)2^{n-1}$ 。

七、 這次研究，尚無法找到毛毛蟲身體段落 n，每段可以黑白兩色且均分，顏色段數總和的數學式，這可留待繼續研究的題材，除外可再延伸考慮下列情形：

(1)當毛毛蟲段數是 $2n$，毛毛蟲身上花紋顏色有 3 色且可不均分時，

(2)當毛毛蟲段數是 $3n$，毛毛蟲身上花紋顏色有 4 色且可不均分時，

(3)當毛毛蟲段數是 n，毛毛蟲身上花紋顏色有 3 色且可不均分時，

(4) 當毛毛蟲段數是 n，毛毛蟲身上花紋顏色多於 3 色以上且可不均分時，

其毛毛蟲種類的數學式，顏色段數總和之數學式，以及兩者之間存在的關係式，這

將是我們後續可以再探討，讓研究更加豐富完善的方向。

陸、 參考資料

一、 許家哲(2012)。怨言不斷~探討排列人數與怨言數的關係。中華民國第五十二屆中小學科學展覽會國小組數學科第二名。

二、 游森棚(2019)。高中數學課本第二冊第三章：排列組合與機率。翰林版。

三、 游森棚(2021)。森棚教官的數學題。科學研習月刊，60-03。

【評語】030420

本作品討論的是身體有 n 段黑色和 n 段白色花紋的毛毛蟲，這樣的黑白毛毛蟲的種類數是多少，不同種類的黑白毛毛蟲身體的顏色區段數的總和又會是多少這樣的問題。這是科學月刊中介紹的一個有趣的問題。以較為符號化的方式來說，這個問題相當於在考慮由 n 個黑球及 n 個白球排成一列，這樣的排列有多少種，若以最長連續相同色球視為區段，作者們計數色球排列的顏色區段數的總和。作者們由一些較小的例子出發，透過分類討論的方式計算結果，根據得出的結果找出通則，最後再利用簡單的排列概念來論證。說明的很仔細，看的出來花費了不少心思，值得鼓勵。在計數方面，利用了排列組合與遞迴關係的方法。關於段數總和的規則部分，感覺上只是由觀察小例子來得出通則，如果可以進一步的解釋與說明得到這個通則的理由則會有更好結果。另一方面，在最後結論的部分提及毛蟲的種類滿足某一個遞迴關係的部分，似乎也只是根據前面幾項的數據推論得到，如果可以進一步的解釋與說明這些數字前後項之間的關連額會更完整。根據小的例子或數字來推論結果其實是有一定程度的風險的，如何保證推論的結果是正確無誤的呢？如果在提出猜想後還能進一步給出論述，清楚的說明規則的正確性，會更好。

作品簡報

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：黑白配

—探討毛毛蟲種類與段數的規律

前言-研究動機

科學研習月刊60-3期中有一個「黑白毛毛蟲」的問題。

在一個小島上，生物學家發現了一類身體有黑、白色花紋相間的毛毛蟲，並經過仔細觀察後，發現毛毛蟲的花紋組成，似乎是有規律的！
每隻毛毛蟲從頭到尾巴，恰好可以分成四個段落，且這四個段落剛好是兩段黑色及兩段白色，所以，共可分成六種毛毛蟲，分別是:
黑黑白白　黑白黑白　黑白白黑　白黑黑白　白黑白黑　白白黑黑
六種毛毛蟲的顏色段數，分別是2、4、3、3、4、2，顏色的段數總和為18。

前言-研究架構

毛毛蟲身體有$2n$段時，每段可以黑白兩色且均分

毛毛蟲身體有3n段時，每段可以黑白兩色且均分

毛毛蟲身體有kn段時，每段可以黑白兩色且均分

二項式定理
巴斯卡三角形
排列組合

毛毛蟲的種類
-數學關係式

毛毛蟲顏色段數總和
-數學關係式

毛毛蟲身體有$2n$、n段時，每段可以黑白兩色

二階遞迴關係

毛毛蟲的種類
-遞迴關係式
-一般式

前言-名詞定義

- $f(2n)$：當毛毛蟲身體段數為$2n$時，n為正整數，毛毛蟲之種類數量。
  $f(3n)$：當毛毛蟲身體段數為$3n$時，n為正整數，毛毛蟲之種類數量。
- $f(kn)$：當毛毛蟲身體本段數為kn時，n為正整數，毛毛蟲之種類數量。
- $S(2n)$：當毛毛蟲本段數為$2n$時，n為正整數，毛毛蟲之顏色段數總合。

範例:毛毛蟲身體段數為2：

●○　○●

$f(2)=2$、$S(2)=4$

前言—數學概念

1. **n階乘**：規定符號$n!= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$，讀做〝$n$階乘〞。
2. **相異物排列**：將n個不同物品排成一列有$n!= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$種方法。
3. **含有相同物品的排列**：設n個物品分成k類，每類各有m_1、m_2、$\cdots m_k$個(每類中的物品相同且$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$)，則這n個物品排成一列有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ 種方法。
4. **相異物的組合**：用 C_k^n 表示從n個不同的物品中挑出k個不同物品的組合數 $(0\le k\le n)$，則
   $$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
5. **二項式定理**：設n為非負整數，則
   $$(x+y)^n=C_0^n x^n y^0+C_1^n x^{n-1}y^1\ldots+C_k^n x^{n-k}y^k+\ldots C_n^n x^0 y^n$$

6. **巴斯卡三角形**：
由二項式定理展開$(x+y)^n$，其中$n=0,1,2,3,\cdots$
並將係數排列成如下三角形：

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1

圖 1

C_0^0
C_0^1　C_1^1
C_0^2　C_1^2　C_2^2
C_0^3　C_1^3　C_2^3　C_3^3
C_0^4　C_1^4　C_2^4　C_3^4　C_4^4
C_0^5　C_1^5　C_2^5　C_3^5　C_4^5　C_5^5
C_0^6　C_1^6　C_2^6　C_3^6　C_4^6　C_5^6　C_6^6

圖 2

研究過程與結果

研究一：直接劃記

說明 當毛毛蟲身體段數4個段落，每段可以黑白兩色且均分

	顏色段數		顏色段數		顏色段數
●●○○	2	●○○●	3	●○●○	4
○○●●	2	○●●○	3	○●○●	4

毛毛蟲種類有6種
顏色段數總和為18

顏色段數為2、3、4、4、3、2。

★整理劃記之結果如下表

毛毛蟲身體段數	毛毛蟲種類 f(2n)	顏色段數總和 S(2n)
n=1，2段	2 $\xrightarrow{\text{2倍}}$	4
n=2，4段	6 $\xrightarrow{\text{3倍}}$	18
n=3，6段	20 $\xrightarrow{\text{4倍}}$	80
n=4，8段	70 $\xrightarrow{\text{5倍}}$	350
n=5，10段	252 $\xrightarrow{\text{6倍}}$	1512

重大發現

★顏色段數可以視為一個對稱的數列。
★當毛毛蟲身體段數2，
顏色段數總和等於毛毛蟲總類的2倍；
★當毛毛蟲身體段數4，
顏色段數總和等於毛毛蟲總類的3倍；
★當毛毛蟲身體段數6，
顏色段數總和等於毛毛蟲總類的4倍；

定理一：
當毛毛蟲身體段數$2n$，每段可以黑白兩色且均分，顏色段數總和$S(2n)$等於毛毛蟲種類$f(2n)$的$n+1$倍。
$S(2n)= (n+1)f(2n)$

範例：
當$n=5$，毛毛蟲身體段數10，
每段可以黑白兩色且均分，
●○●●○○●●○○
毛毛蟲種類$f(10)=252$，
顏色段數總和
$S(10)=(5+1)\times f(10)=1512$。

研究二:「二項式定理」及「巴斯卡三角形」概念

說明

毛毛蟲身體為2段、4段、6段、8段，每段可以黑白兩色時，
其毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和整理如下表

毛毛蟲身體段數 $(2n)$	毛毛蟲種類 $f(2n)$
n =1，2段	2=1+1
n =2，4段	6=1+2+2+1=1+2x2+1
n =3，6段	20=1+3+3+3+3+3+3+1=1+3x3+3x3+1
n =4，8段	70=1+4x4+6x6+4x4+1

重大發現

★將毛毛蟲種類數字拆解，
發現和巴斯卡三角形的數字
竟有相關

巴斯卡三角形的係數是由
二項式定理展開
$(x+y)^n$，其中 n=0, 1, 2, 3, …，

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 ... + C_k^n x^{n-k} y^k + ... C_n^n x^0 y^n$$

定理二：毛毛蟲身體段落 $2n$，
每段可以黑白兩色且均分，
毛毛蟲種類為 $f(2n)$

$$f(2n) = C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + \ldots C_n^n \cdot C_n^n$$

$S(2n)=(n+1)f(2n)$

範例：
當 $n=6$，毛毛蟲身體段數12，每段可以黑白兩色且均分，
●○●●○○●●○○●○
毛毛蟲種類
$f(12)$=1x1+6x6+15x15+20x20+15x15+6x6+1x1=924，
顏色段數總和
$S(12)$=(6+1)x924=6468。

研究三:排列概念

說明 將毛毛蟲身上的白色花紋、黑色花紋都看成相同物排列，利用「含有相同物品排列」的數學概念

當毛毛蟲身體段數4段，會有兩段黑色及兩段白色，

●●○○ $n=2$ 毛毛蟲種類 $f(4)=\frac{4!}{2!2!}=6$，

顏色段數總和 $S(4)=(n+1)\,f(4)=12$

當毛毛蟲身體段數6段，會有三段黑色及三段白色，

●●●○○○ $n=3$ 毛毛蟲種類 $f(6)=\frac{6!}{3!3!}=20$，

顏色段數總和 $S(6)=(n+1)\,f(6)=80$

當毛毛蟲身體段數8段，會有四段黑色及四段白色，

●●●●○○○○ $n=4$ 毛毛蟲種類 $f(8)=\frac{8!}{4!4!}=70$，

顏色段數總和 $S(8)=(n+1)\,f(8)=350$

定理三:

毛毛蟲身體段落 $2n$，每段黑白兩色且均分，

毛毛蟲種類為 $f(2n)$，顏色段數總和 $S(2n)$

$$f(2n)=\frac{(2n)!}{n!n!} \qquad S(2n)=(n+1)\frac{(2n)!}{n!n!}$$

範例:

當 $n=6$，毛毛蟲身體段數12，

每段可以黑白兩色且均分，

●○●●○○●●○○●○

毛毛蟲種類， $f(12)=\frac{12!}{6!6!}=924$

顏色段數總和

$S(12)=(6+1)\text{x}\frac{12!}{6!6!}=6468$。

研究四:組合概念

說明 從定理三的結論，結合組合概念

定理四:

毛毛蟲身體段落$2n$，

每段可以黑白兩色且均分，

毛毛蟲種類為$f(2n)$，顏色段數總和$S(2n)$

$$f(2n)=\frac{(2n)!}{n!n!}=C_n^{2n}\qquad S(2n)=(n+1)C_n^{2n}$$

範例:

當$n=6$，毛毛蟲身體段數12，

每段可以黑白兩色且均分，

●○●●○○●●○○●○

毛毛蟲種類，$f(12)=C_6^{12}=924$

顏色段數總和

$S(12)=(6+1)\text{x}C_6^{12}=6468$。

研究五:延伸推論(一)

說明 當毛毛蟲身體有3段、6段時，每段可以黑、白、紅三色且均分
直接劃記3段時，其毛毛蟲種類及毛毛蟲顏色段數總和整理如下表

3 個段落	毛毛蟲種類	顏色段數	顏色段數總和
●○🔴	6	3	18
●🔴○		3	
○●🔴		3	
○🔴●		3	
🔴●○		3	
🔴○●		3	

顏色段數為3、3、3、3、3、3 。

利用含有相同物品排列的概念，

則毛毛蟲的種類有3！＝6種。

顏色段數只有3段一種，

所以顏色段數總和為3x6=18。

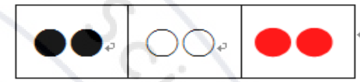
說明

在毛毛蟲身體6段時，我們將毛毛蟲顏色段數分成3段、4段、5段、6段分別進行討論

(1)當顏色為3段時：

視成三個大方框，所以會有3！的排法，顏色段數為3，

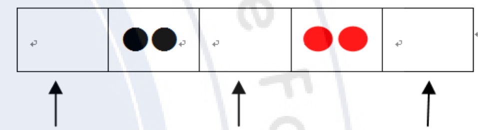
顏色段數總和為3x3!=18。



(2)當顏色為4段時：

●●和 ●●的這四個位置必須二二同樣顏色，看成兩個大位置，顏色有3x2=6種，另一個剩餘顏色在箭頭的三個位置中擇二放入，有3x2兩種，因此有3x2x3x2=36種，

顏色段數總和為4x36=144。



(3)當顏色為5段時：

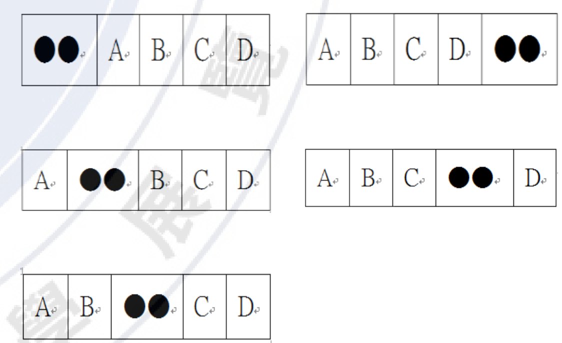
●●同顏色，看成一個大位置，顏色3種，A的位置剩下二種顏色可以選，剩下的Ｂ、Ｃ、Ｄ位置則固定無法再選，所以有2x1兩種，故3x2+3x2=12種。

對稱之下，會有3x2+3x2=12種。

Ａ的位置和Ｃ的位置有兩個顏色選擇，剩下的Ｂ、Ｄ位置則固定無法再選，有3x2x2=12種。

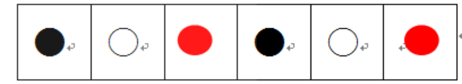
所以當顏色為5段時，

顏色段數總和為5x(12+12+12)=5x36=180種。

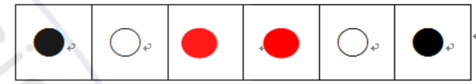


(4)當顏色為6段時：

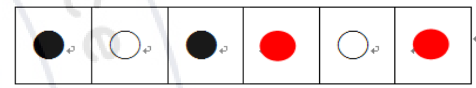
第一種情形:將前面三個位置看成一個大位置，後面三位置也看成一個大位置，大位置裡的顏色不同，所以有3x2x3x2=36種。但為了符合顏色6段，必須扣除下列情形:



當最中間的兩個顏色相同時，將中間兩個位置看成一個大位置，中間的顏色選擇有3種，前面兩個和後面兩個選擇各有2種，所以有2x3x2=12種。第一種情形顏色6段的有36-12=24種。



第二種情形:前面三個位置看成一個大位置，後面三的位置也看成一個大位置，大位置裡的顏色必須有兩個相同的，當前面大位置選完顏色和位置有3x2=6種，後面的大位置也固定了，因此第二種情形顏色6段的有6種。



綜合兩種情形，顏色6段共有30種，顏色段數總和為180種。

毛毛蟲身體段數	毛毛蟲總類 $f(3n)$	顏色段數總和 $S(3n)$
n =1，3段	6	18
n=2，6段	90	522

小結

★當毛毛蟲身體3n段，顏色為黑、白、紅三色且均分時，毛毛蟲的種類與顏色段數總和並未像2n段直觀找到倍數關係。

定理五:

毛毛蟲身體段落$3n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為$f(3n)$，$f(3n)=\dfrac{(3n)!}{n!n!n!}$

定理六:

毛毛蟲身體段落kn ，每段可以k色且均分，毛毛蟲種類為$f(kn)$，$f(kn)=\dfrac{(kn)!}{n!n!...n!}$

討論

討論一：$C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + \dots C_n^n \cdot C_n^n = C_n^{2n}$

說明 當毛毛蟲身體段落$2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為$f(2n)$

在定理二：$f(2n) = C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + \dots C_n^n \cdot C_n^n$，定理三：$f(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!}$

定理四：$f(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} = C_n^{2n}$

我們欲推論$f(2n) = C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + \dots C_n^n \cdot C_n^n = C_n^{2n}$

由二項式定理可知 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n$

$\because (1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$

$$\begin{aligned}\therefore (1+x)^n(1+x)^n &= (C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n)(C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n) \\ &= \dots\dots(C_0^n \cdot C_n^n + C_1^n \cdot C_{n-1}^n + C_2^n \cdot C_{n-2}^n + \dots + C_n^n \cdot C_0^n)x^n \dots\dots \\ &= \dots\dots(C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + \dots + C_n^n \cdot C_n^n)x^n \dots\dots \\ &= \dots\dots\sum_{k=0}^{n}(C_k^n \cdot C_k^n)x^n \dots\dots \quad = \dots\dots\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2 x^n \dots\dots\end{aligned}$$

由上可知，x^n 的係數為 $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2$ ……(1)

直接利用二項式定理：$(1+x)^{2n} = C_0^{2n} + C_1^{2n}x + C_2^{2n}x^2 + \dots + C_n^{2n}x^n + \dots C_{2n}^{2n}x^{2n}$

其x^n的係數為 C_n^{2n} ……(2)

綜合(1)、(2) ➡ 故 $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2 = C_n^{2n}$，意即 $C_0^n \cdot C_0^n + C_1^n \cdot C_1^n + C_2^n \cdot C_2^n + \dots + C_n^n \cdot C_n^n = C_n^{2n}$

故得證。

討論二:二階遞迴關係式

說明 當毛毛蟲身體段落$2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為$f(2n)$

令g(n)=f(2n)，故f(2)=g(1)=2、f(4)=g(2)=6、f(6)= g(3)=20、f(8)= g(4)=70⋯，

重大發現

2、6、20、70.......

4 14 50

20=5(6-2)
70=5(20-6)

利用二階遞迴關係式，$x^2-5x+5=0$，$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

g(1)=2、g(2)=6 ，$g(n)=A(\frac{5+\sqrt{5}}{2})^n+B(\frac{5-\sqrt{5}}{2})^n$

得到 $g(n)=\frac{2}{5}(\frac{5+\sqrt{5}}{2})^n+\frac{2}{5}(\frac{5-\sqrt{5}}{2})^n$

定理七:
毛毛蟲身體段落$2n$，每段可以黑白兩色且均分，毛毛蟲種類為$f(2n)=g(n)$，
則遞迴關係式$g(n)=5g(n-1)-5g(n-2)$，一般式$g(n)=\frac{2}{5}(\frac{5+\sqrt{5}}{2})^n+\frac{2}{5}(\frac{5-\sqrt{5}}{2})^n$

說明 毛毛蟲身體段數分成1段、2段、3段⋯，顏色黑白兩色，不規定顏色要均分

我們設毛毛蟲段數n，毛毛蟲種類$h(n)$ ，h(1)=2，h(2)=6，h(3)=16，h(4)=40，h(5)=96⋯.

重大發現

2、6、16、40.......

4 10 14

16=4(6-2)
40=4(16-6)

利用二階遞迴關係式，$x^2-4x+4=0$，$x=2$、2，

H(1)=2、h(2)=6 ，$h(n)=(A+nB)2^n$

得到 $h(n)=2^{n-1}+n2^{n-1}$ ， $h(n)=(n+1)2^{n-1}$

定理八:
毛毛蟲身體段落n，每段可以黑白兩色且不一定均分，毛毛蟲種類為$h(n)$，
則遞迴關係式$h(n)=4h(n-1)-4h(n-2)$，一般式$h(n)=(n+1)2^{n-1}$

結論與未來展望

結論

★整理和分析數據的能力:實際畫出所有可能的情形，雖然這花費了我們很多的時間，但從中也學習到如何整理和分析數據的能力。

★加深加廣提前學習:試著觀察數據，找到規律性，提前學習了高中課程，藉由二項式定理、巴斯卡三角形及排列組合的概念，成功找到了數學關係式。

★數學概念之間的互通性:毛毛蟲段數是$2n$，每段可以黑白兩色且均分時，從不同的數學概念推論出定理一至定理六的數學式，最後也找到遞迴關係式和一般式(定理七、定理八)。並且成功的推導定理二與定理三、定理四之間的證明。

未來展望

(1)當毛毛蟲段數是$2n$，毛毛蟲身上花紋顏色有3色且可不均分時，

(2)當毛毛蟲段數是$3n$，毛毛蟲身上花紋顏色有4色且可不均分時，

(3)當毛毛蟲段數是n，毛毛蟲身上花紋顏色有3色且可不均分時，

(4)當毛毛蟲段數是n，毛毛蟲身上花紋顏色多於3色以上時，

其毛毛蟲種類的數學式，顏色段數總和之數學式，以及兩者之間存在的關係式，

參考資料

一、許家哲(2012)。怨言不斷~探討排列人數與怨言數的關係。中華民國第五十二屆中小學科學展覽會國小組數學科第二名。

二、游森棚(2019)。高中數學課本第二冊第三章：排列組合與機率。翰林版。

三、游森棚(2021)。森棚教官的數學題。科學研習月刊，60-03。