中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030419

埃及分數和為 1 最優解問題

學校名稱：臺中市立立人國民中學

作者：	指導老師：
國二 嚴婥慈	李漢祥
國二 陳穎婕	王秀鳳

關鍵詞：埃及分數、最優解、拆分法

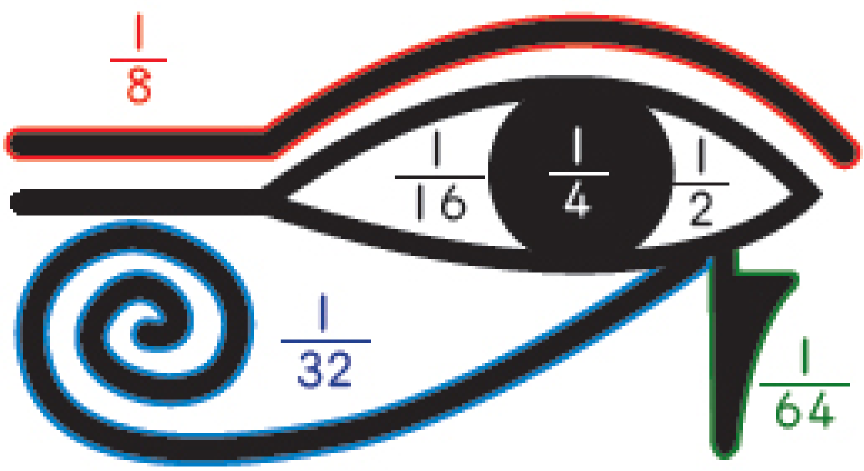
摘要

本作品探討和為1的埃及分數最優解問題，限制分母小於100，項數固定，找出最大分母的最小值。

在研究的過程中，我們發現並沒有一個簡潔的公式，可以立即迅速地找出最優解，而是經由不斷地嘗試與比較後，方能得到答案。本研究最後將推導過程歸納為流程圖，試圖建立未來可能演算法的基礎。

本研究主要使用的工具為拆分法，這個方法簡單可行，但容易陷入混亂的情境，有時必須加上巧思，才能獲得進展。在拆分法的基礎上，進一步發展出併合與置換等技巧。策略採取逐項推進，在確定 n 項的最優解後，再利用拆分或併合或置換，得到 n+1項的最優解。

最終，在經由不斷地失敗與再次努力後，完成了項數不超過42的所有解。



<圖片來源：維基百科-荷魯斯之眼>

壹、研究動機

有一個古老的數學問題，有一位老人臨終前將他的11頭牛分配給三個兒子，老大分得$\frac{1}{2}$，老二分得$\frac{1}{4}$，老三分得$\frac{1}{6}$，牛不得宰殺分割，正當大家不知如何處理時，鄰居牽來一頭牛，解決了所有問題。

老師在某次上課提出這個問題，並說明最後的解決方式可以視為以下數學式的一組解，「$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$，試求$a$、$b$、$c$、$d$相異正整數解。」我們找出這個問題的所有6組解後，嘗試將這個問題由4個未知數擴充到5個，發現解題所需的時間大增。

在尋找相關資料文獻的過程中，我們對最優解問題感到興趣，並嘗試將條件限定為在固定項數的條件下，求和為1的單位分數最大分母的最小值，從而展開了這段研究。

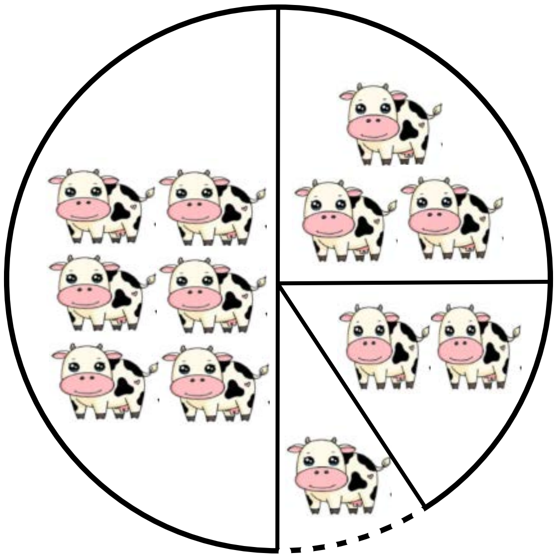
貳、研究目的

本作品研究目的在探討埃及分數和為1時的最優解問題，在項數固定的條件下，嘗試找出最大分母的最小值，主要利用方法則是拆分法。

Yutaka Nishiyama 西山豊(2003)的探討主題為「在分母相異且不大於99的條件下，和為1的單位分數可以製作多長的級數？」最終給出42項的結論。雖然方向與本研究並不完全相同，但推導過程中使用的方法與技巧非常值得參考。

參、研究設備及器材

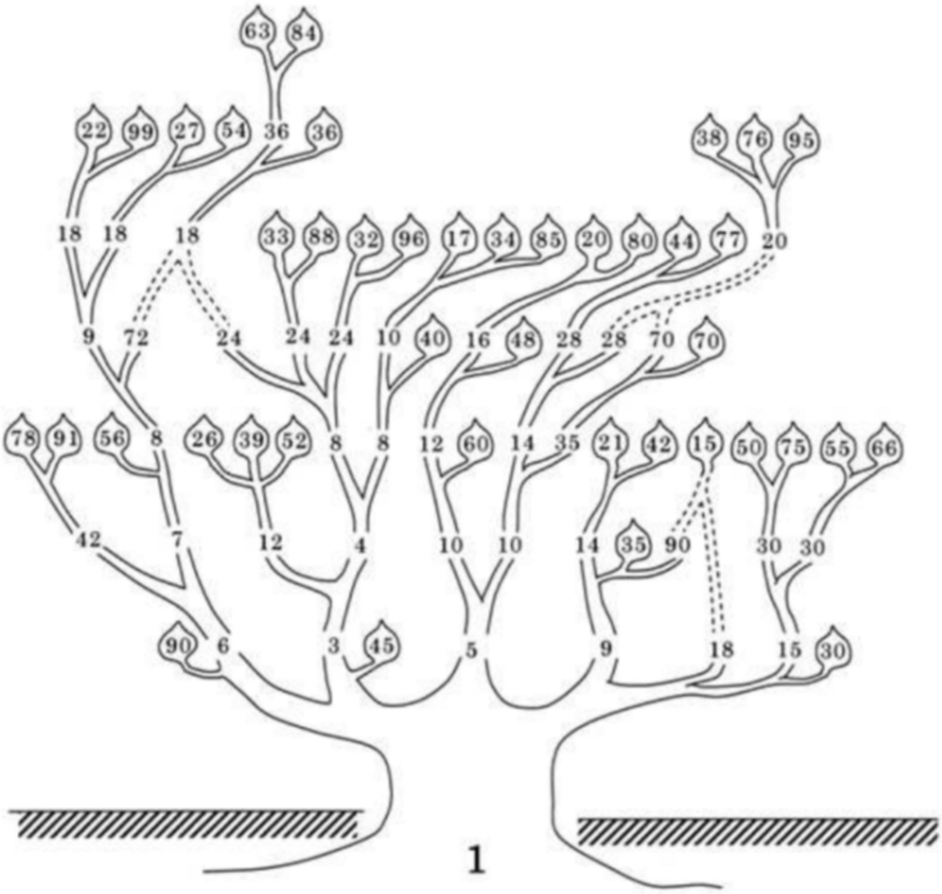
筆、紙、電腦。



肆、研究過程

一、文獻探討：

Yutaka Nishiyama 西山豊(2003)的研究主題為「在分母相異且不大於99的條件下，和為1的單位分數可以製作多長的級數？」，研究結果給出了一個樹形圖與42項的解。



1=/15+/17+/20+/21+/22+/26+/27+/30+/32+/33

+/34+/35+/36+/38+/39+/40+/42+/44+/45+/48

+/50+/52+/54+/55+/56+/60+/63+/66+/70+/75

+/76+/77+/78+/80+/84+/85+/88+/90+/91+/95

+/96+/99

西山教授未說明推論的細節，原先我們預期可以利用樹形圖上的分支便能順利完成較低項數所有的解，但一開始由高項數的42項向低項數發展，在39項即遭遇困難，再改由低項數的3項向高項數發展，在8項時也卡關。

最後我們發展出等量置換及反向併合的技巧，才得以突破困難。

二、名詞與符號定義

(一)、最優解 (文耀光 民91)：指將一個真分數分解成相異單位分數之和的時候要求(1)項數最少(2)最大的分母最小或(3)分母的總和最小。

本研究採取第二種定義：項數固定，相異單位分數之和為1，求最大分母的最小值。

(二)、S_n：有n個項的相異單位分數之級數，其和為1。

例如$S_7=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}$。

(三)、M_n：S_n中的最大分母，如上列S_7中$M_7=18$。

(四)、節點：可以成為S_n最大分母的正整數。

(五)、親代與子代：利用拆分法分解前的單位分數稱為親代，分解後的單位分數稱為子代。

(六)、拆分法：將一個單位分數分解為二個或多個相異單位分數之和，以下簡稱為一拆二或一拆三，以此類推。本研究定義一拆n僅能透過一個親代與一個子代的方式得到。

(七)、為節省篇幅，本研究中某些敘述中單位分數省略分子1，以 /n 之形式呈現。

例如$S_7=/3+/4+/9+/10+/12+/15+/18$。

三、研究過程

(一)、從完美數出發

最小的完美數是6，真因數有1、2、3，可得6=1+2+3，將等號兩側同除以6，會將1分解為三個相異單位分數之和：1=/6+/3+/2。

下一個完美數28，真因數1、2、4、7和14，可得28=1+2+4+7+14，同除以28，分解為五個相異單位分數之和：1=/28+/14+/7+/4+/2。

這會是項數為5時的最優解嗎？我們將在稍後的篇幅利用拆分法的結果做比較。但至少從第三個完美數496開始，因數便超過了本研究設定的二位數限制。

(二)、一拆二拆分法之討論

關於拆分法過往多有探討，我們基於作為工具的需求，將前人的研究簡化，以方便推導。

1. 一拆二拆分法(一)

依宋彥橙等(2007)可以得到

<性質一>

對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數

則$x=m+\alpha$，$y=m+\beta$ 是 $\frac{1}{m}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的一組解

<證明>

$$\frac{1}{m+\alpha}+\frac{1}{m+\beta}=\frac{1}{m+\alpha}+\frac{1}{m+\frac{m^2}{\alpha}}=\frac{1}{m+\alpha}+\frac{\alpha}{m(m+\alpha)}=\frac{1}{m}$$

故 $\frac{1}{m}=\frac{1}{m+\alpha}+\frac{1}{m+\beta}$

以$m=6$為例，$m^2=36=1\times 36=2\times 18=3\times 12=4\times 9=6\times 6$

則可得到以下5種拆分結果　　　　　　**<表1>一拆二舉例**

$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$
$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+6}+\frac{1}{6+6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$	

此法利用欲拆分之數的平方分解為兩兩相乘的因數分解，得到一拆二所有解，每一種因數兩兩分解的結果皆對應一組一拆二的解。

2. 一拆二拆分法(二)

<性質二>

對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，$\alpha<m$

則 $x=m-\alpha$，$y=\beta-m$ 是 $\frac{1}{x}=\frac{1}{m}+\frac{1}{y}$ 的一組解

<證明>

$$\frac{1}{m-\alpha}-\frac{1}{\beta-m}=\frac{1}{m-\alpha}-\frac{1}{\frac{m^2}{\alpha}-m}=\frac{1}{m-\alpha}-\frac{\alpha}{m(m-\alpha)}=\frac{1}{m}$$

故 $\frac{1}{m-\alpha}=\frac{1}{m}+\frac{1}{\beta-m}$

此法使用時機在利用原有分母拆分為新節點，見 p20流程圖。

例如：當S_{11}的原節點28推進到S_{12}的新節點30時，目標是將S_{11}原有11個分母當中的一個拆分為二個，拆分後其中一個新分母是新節點30，而另一新分母必須小於30，且不重覆於原分母。

令$m=30$，且$\alpha<m$，因節點為較大分母，故$\alpha>\frac{m}{2}$，$15<\alpha<30$，

在$m^2=900$之因數中，取$\alpha=18$、20、25，對應$\beta=50$、45、36，

則可得到以下3種拆分結果，　　　　　　　　<表2>節點一拆二舉例

$\frac{1}{30-18}=\frac{1}{12}=\frac{1}{30}+\frac{1}{50-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30-20}=\frac{1}{10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{30-25}=\frac{1}{5}=\frac{1}{30}+\frac{1}{36-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}$	

3. 一拆二拆分法(三)

依 Yutaka Nishiyama (2003)可以得到

若α、β為正整數m之正因數，且$m=\alpha\times\beta$，則

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{\alpha\times\beta}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\times\beta)\times(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\beta\times(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\alpha\times(\alpha+\beta)}$$

以$m=21=7\times 3$為例，

$$\frac{1}{21}=\frac{1}{7\times 3}=\frac{7+3}{(7\times 3)\times(7+3)}=\frac{1}{3\times(7+3)}+\frac{1}{7\times(7+3)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{70}$$

此法在反向併合時是一個簡單好用的方法，但缺點是不能得到所有解。

4. 一拆二拆分法(四)

若α、β為正整數m之正因數，則

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{\alpha+\beta}\times(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{m})=\frac{\alpha}{m\times(\alpha+\beta)}+\frac{\beta}{m\times(\alpha+\beta)}$$

例如 2、5為10之正因數，則

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{2+5}\times\left(\frac{2}{10}+\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{10\times(2+5)}+\frac{5}{10\times(2+5)}=\frac{1}{35}+\frac{1}{14}$$

此法可以推廣應用到一拆三或一拆多。

(三)、一拆多拆分法之討論

1. 一拆三

(1) 若正整數m有3個相異因數x、y、z，則有對應的因數a、b、c，
使得$m=ax=by=cz$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{x+y+z}\times\frac{x+y+z}{m}=\frac{1}{x+y+z}\times\left(\frac{x}{m}+\frac{y}{m}+\frac{z}{m}\right)=\frac{1}{x+y+z}\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{(x+y+z)\times a}+\frac{1}{(x+y+z)\times b}+\frac{1}{(x+y+z)\times c}$$

例如：取6的三個相異因數6、3、2，對應因數為1、2、3

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{(6+3+2)\times 1}+\frac{1}{(6+3+2)\times 2}+\frac{1}{(6+3+2)\times 3}=\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{33}$$

利用上列方式，可得到7組解如下表。

<表3-1>一拆三列表一

/4=/7+/14+/28	/6=/11+/22+/33	/8=/11+/44+/88	/10=/17+/34+/85
/12=/19+/57+/76	/12=/26+/39+/52	/20=/38+/76+/95	

(2) 同(1)方式，但分母同除以 n。

例如：取45的三個相異因數9、5、1，對應因數為5、9、45

$$\frac{1}{45}=\frac{1}{(9+5+1)\times 5}+\frac{1}{(9+5+1)\times 9}+\frac{1}{(9+5+1)\times 45}=\frac{1}{15\times 5}+\frac{1}{15\times 9}+\frac{1}{15\times 45}$$

分母同除以15，可得 $\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$

利用分母同除的方式，可得到11組解如下表。

<表3-2>一拆三列表二

/3=/5+/9+/45	/3=/5+/10+/30	/5=/8+/16+/80	/5=/8+/20+/40
/5=/9+/15+/45	/5=/12+/15+/20	/7=/10+/35+/70	/7=/12+/21+/84
/9=/14+/42+/63	/15=/26+/65+/78	/15=/35+/42+/70	

(3) 將(1)或(2)分母同乘以 n。

例如：將 $\frac{1}{4}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$ 式中的分母同乘以2，可得 $\frac{1}{8}=\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$

利用分母同乘的方式，共可得到6組解如下表。

<表3-3>一拆三列表三

/8=/14+/28+/56	/10=/16+/40+/80	/12=/21+/42+/84	/12=/22+/44+/66
/15=/36+/45+/60	/18=/33+/66+/99		

小結：在分母不超過99的限制下，一拆三合計有24組解。

2. 一拆四

同樣利用 p6一拆二拆分法(四)可以推廣，

若正整數m有4個相異因數w、x、y、z，則有對應的因數a、b、c、d，

使得$m = aw = bx = cy = dz$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{w+x+y+z} \times \frac{w+x+y+z}{m} = \frac{1}{w+x+y+z} \times \left(\frac{w}{m} + \frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{w+x+y+z} \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{(w+x+y+z)\times a} +$$

$$\frac{1}{(w+x+y+z)\times b} + \frac{1}{(w+x+y+z)\times c} + \frac{1}{(w+x+y+z)\times d}$$

以6為例，取6的四個相異因數相加得6+3+2+1=12，

可得/6=/12+/24+/36+/72。

擁有至少四個相異因數正整數由小到大依序為6、8、10、12、14、16、、、

我們利用上列分解式，將它們拆分如下表：

<表4>一拆四列表

/6=/12+/24+/36+/72 (/9=/12+/36 不合)	/8=/15+/30+/60+/120 (/10=/15+/30 不合)	/10=/18+/36+/90+/180 (/12=/18+/36 不合)
/12=/25+/50+/75+/100 (/30=/50+/75 不合)	/12=/23+/46+/92+/138 (138>99 不合)	/12=/26+/39+/78+/156 (156>99 不合)
/12=/23+/46+/69+/276 (276>99 不合)	/14=/24+/48+/168+/336 (/16=/24+/48 不合)	/16=/30+/60+/120+/240 (/20=/30+/60 不合)

除了6以外，上列最大分母均超過本研究設定的二位數，例如8的四個因數和為1+2+4+8=15，一拆四的最大分母將會是8*15=120。另外/6也可利用二組一拆二，得到相同的結果如/6=/9+/18=(/12+/36)+(/24+/72)，這是我們將會排除的情況，也就是多次的一拆二或一拆三都將排除在外，見 p8-p9。

小結：在最大分母不超過99的條件下，一拆四無可行解。

3. 一拆五

同一拆四推導，我們可以找到擁有至少五個因數的最小數字為12、16，

/12=/32+/48+/64+/96+/192。/16=/31+/62+/124+/248+/496。

最大分母均超過本研究設定的二位數。

小結：在最大分母不超過99的條件下，一拆五無可行解。

(四)、親代與子代之取捨

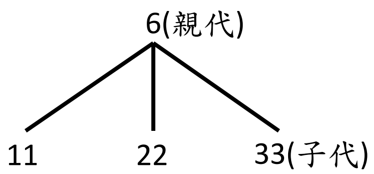
1. 二代與三代之差異

(1) 二代：

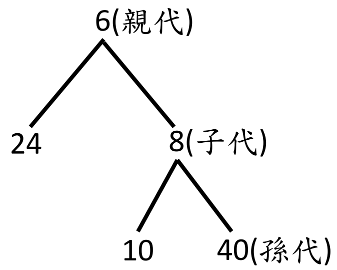
例如/6經由一拆三(見 P8)可得/6=/11+/22+/33，

6為親代，11、22、33為子代。

<圖2>二代與三代拆分之比較



(2) 三代：



/6也可經由二次的一拆二得到，
/6=/8+/24=(/10+/40)+/24，6為親代，8、24為子代，10、40則為8的子代或是6的孫代。

2. 三代的排除

上述雖然都是將一個單位分數拆分為三個單位分數，但為清楚分類與避免混淆，在本研究的定義中，一拆三將專門指僅有二代(親代與子代)的拆分，無法經由二次一拆二得到，也就是親代與子代各僅有一代。

(五)、併合之討論

併合是拆分的反向過程，為求解的一個重要技巧，使用時機有二：
其一是等量置換，例如結合一組一拆二及一組二併一，兩者合併後形成二換二。
其二是結合拆分與併合，形成二拆三或三拆四。

1. 二併一併合法(一)

由一拆二拆分法(三) (見 p6)反向推導

m、n為正整數，則 $\dfrac{1}{(m+n)\times m}+\dfrac{1}{(m+n)\times n}=\dfrac{1}{m\times n}$

例如/15=/(5*3)=/[(3+2)*3]，可得$m=3$、$n=2$，則另一項為/[(3+2)*2]=/10，

二者併合為/15+/10=/6。此法簡單方便，但無法求出所有解。

2. 二併一併合法(二)

將一拆二拆分法(二) (見 p5)反向推導

<性質三>
對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，$\beta>m$
則$x=m-\alpha$，$y=\beta-m$是 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}$ 的一組解 。

<證明>同 p5性質二。
以 $m=15$為例，$m^2=225=1\times 225=3\times 75=5\times 45=9\times 25=15\times 15$ ，
$\beta=25$、45、75、225，對應$\alpha=9$、5、3、1，
則可得到以下4種併合結果，

<表5>二併一舉例

$\frac{1}{15}+\frac{1}{25-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{15-9}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{45-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{15-5}=\frac{1}{10}$
$\frac{1}{15}+\frac{1}{75-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15-3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{225-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{210}=\frac{1}{15-1}=\frac{1}{14}$

(六)、等量置換

1. 使用時機：由原節點推進到下個節點但遭遇障礙，例如下列情況。

(1) 除舊：

當原分數可以拆分為新節點，但拆分後除了新節點的另一個新分數與另外原有分數重覆，則須置換該原有分數，以順利得到新節點，例如：$S_{14a}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}$的下個節點應為35，若欲拆分出$\frac{1}{35}$，依 p6拆分法(二)只有惟一可能$\frac{1}{10}=\frac{1}{35}+\frac{1}{14}$，然而$\frac{1}{14}$已存在於$S_{14a}$中。因此使用結合(一拆二)及(二併一)的(二換二)方式，即($\frac{1}{14}=\frac{1}{21}+\frac{1}{42}$)及($\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{6}$)，消去欲捨棄的$\frac{1}{14}$，置換後項數不變，成為$S_{14b}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}$，再將$\frac{1}{10}$拆分為$\frac{1}{35}+\frac{1}{14}$，得到$S_{15}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}$。

類似的情形出現在$S_{32b}\rightarrow S_{32c}$(消去$\frac{1}{44}$)

(2) 布新：

當原分數無法拆分為下一個新節點時，則置換出另一個新分數，再拆分出新節點。例如：$S_{8a}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}$的下個節點應為24，若欲拆分出$\frac{1}{24}$，依 p6拆分法(二)可得$\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$與$\frac{1}{8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$共兩種可能，然而$\frac{1}{6}$與$\frac{1}{8}$二者皆不存在於$S_{8a}$中，且$\frac{1}{8}$拆分後得到的$\frac{1}{12}$與原分數重覆故不合。因此使用結合(一拆二)及(二併一)的(二換二)方式，即($\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$)及($\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$)得到需要的$\frac{1}{6}$，置換後項數不變，成為$S_{8b}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}$，再將$\frac{1}{6}$拆分為$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$，得到$S_9=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}$。

類似的情形出現在$S_{32a}\rightarrow S_{32b}$(得到$\frac{1}{12}$)、$S_{40a}\rightarrow S_{40b}$(得到$\frac{1}{24}$)

2. 二換二

分母不一定相異，等號左右對消相同項，以下同。

(1) 結合(一拆二)+(二併一)，

$$\begin{array}{rl} & /a=\cancel{/b}+/d \\ +) & \cancel{/b}+/c=/e \\ \hline & /a+/c=/d+/e \end{array}$$

例：$S_{8a} \rightarrow S_{8b}$、$S_{14a} \rightarrow S_{14b}$、$S_{32a} \rightarrow S_{32b}$、$S_{39a} \rightarrow S_{39b}$、$S_{40a} \rightarrow S_{40b}$

(2) 結合(一拆三)+(二併一)+(二併一)

例：$S_{32b} \rightarrow S_{32c}$、$S_{33a} \rightarrow S_{33b}$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{/a} = /f+/g+\cancel{/c} \\ & /b+\cancel{/c} = \cancel{/e} \\ +) & /d+\cancel{/e} = \cancel{/a} \\ \hline & /b+/d = /f+/g \end{array}$$

3. 三換三

(1) 結合 (一拆二)+(三併一)+(一拆三)+(二併一)

$$\begin{array}{rl} & \cancel{/a} = \cancel{/e}+\cancel{/f} \\ & /b+/c+\cancel{/d} = \cancel{/a} \\ & \cancel{/e} = /h+\cancel{/d}+/i \\ +) & \cancel{/f}+/g = /j \\ \hline & /b+/c+/g = /h+/i+/j \end{array}$$

例：$S_{39b} \rightarrow S_{39c}$

(2) 結合 (二併一)+(一拆二)+(二併一)+(一拆二)

例：$S_{19a} \rightarrow S_{19b}$

$$\begin{array}{rl} & /a+/b = \cancel{/c} \\ & \cancel{/c} = /g+\cancel{/f} \\ & /d+\cancel{/e} = /h \\ +) & \cancel{/f} = \cancel{/e}+/i \\ \hline & /a+/b+/d = /g+/h+/i \end{array}$$

(七)、二拆三

(1) 結合(一拆三)+(二併一)，

$$\begin{array}{rl} & \cancel{/a} = /d+/e+/f \\ +) & /b+/c = \cancel{/a} \\ \hline & /b+/c = /d+/e+/f \end{array}$$

例：$S_{10} \rightarrow S_{11}$、$S_{12} \rightarrow S_{13}$、$S_{19b} \rightarrow S_{20}$、$S_{30} \rightarrow S_{31}$

(2) 結合 (三併一)+ (一拆二)+ (一拆二)+ (一拆二)

$$\begin{array}{rl} & \cancel{/a}+\cancel{/b}+\cancel{/c} = /f \\ & /d = \cancel{/a}+\cancel{/a} \\ & \cancel{/a} = \cancel{/b}+/b \\ +) & /e = /g+\cancel{/c} \\ \hline & /d+/e = /f+/b+/g \end{array}$$

例：$S_{22} \rightarrow S_{23}$

(3) 結合 (一拆二) + (一拆二) + (二併一)

例：$S_{34} \rightarrow S_{35}$、$S_{36} \rightarrow S_{37}$、$S_{38} \rightarrow S_{39a}$

$$\begin{array}{rl} & /a=\cancel{/b}+/c \\ & \cancel{/b}=\cancel{/c}+/e \\ +) & \cancel{/c}+/d=/f \\ \hline & /a+/d=/c+/e+/f \end{array}$$

(八)、三拆四

(1) 結合(三併一)+(一拆二)+(一拆三)，

$$\begin{array}{rl} & /a+/b+/c = \cancel{/d} \\ & \cancel{/d} = \cancel{/e}+/f \\ +) & \cancel{/e} = /g+/h+/i \\ \hline & /a+/b+/c = /f+/g+/h+/i \end{array}$$

例：$S_{35} \rightarrow S_{36}$

(2) 結合(一拆二)+(二併一)+(一拆二)

$$\begin{array}{rl} & /a = \cancel{/b}+/e \\ & \cancel{/b}+/c = /f \\ +) & /d = /g+/h \\ \hline & /a+/c+/d = /e+/f+/g+/h \end{array}$$

例：$S_{39c} \rightarrow S_{40}$

(九)、節點之討論

1. 並非所有正整數都能成為拆分後的最大分母，也就是節點。

2. 利用一拆二得到的節點除外狀況：

若某正整數分解後不超過二個質因數，且較小質因數的冪次不超過較大質因數的一半，則此正整數不為一拆二之節點。

<性質四>若正整數$m=n^ak^b$，$n>k$，其中n為質數，a、b為正整數，k為1或質數，且$k^b<\frac{n}{2}$，則m不為一拆二後的最大分母。

<證明> <i> $k=1$

$$m^2=n^{2a}=1\times n^{2a}=\cdots\cdots=n^c\times n^d=n^a\times n^a$$ ，$c<d$，c、d為正整數

依 p6<性質二>

對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，$\alpha<m$

則$x=m-\alpha$，$y=\beta-m$是$\frac{1}{x}=\frac{1}{m}+\frac{1}{y}$的一組解

令$\alpha=n^c$、$\beta=n^d$代入得

$$\frac{1}{m-n^c}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n^d-m}$$

$$\frac{1}{n^a-n^c}=\frac{1}{n^a}+\frac{1}{n^d-n^a}$$

$$\frac{1}{n^c(n^{a-c}-1)}=\frac{1}{n^a}+\frac{1}{n^a(n^{d-a}-1)}$$

因為$c+d=2a$，且$c<d$，所以$c<a<d$

n為質數，又$d>a$，$n^{d-a}\geq 2$，$n^{d-a}-1\geq 1$，$n^a(n^{d-a}-1)\geq n^a$

故$m=n^a$不是最大分母

<ii> $k\geq 2$

$$m^2=(n^ak^b)^2=1\times n^{2a}k^{2b}=k\times n^{2a}k^{2b-1}=\cdots\cdots=n^ak^{b-1}\times n^ak^{b+1}$$
$$=n^ak^b\times n^ak^b$$

令$\alpha=n^ak^{b-1}$、$\beta=n^ak^{b+1}$代入得

$$\frac{1}{m-n^ak^{b-1}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n^ak^{b+1}-m}$$

$$\frac{1}{n^ak^b-n^ak^{b-1}}=\frac{1}{n^ak^b}+\frac{1}{n^ak^{b+1}-n^ak^b}$$

$$\frac{1}{n^ak^{b-1}(k-1)}=\frac{1}{n^ak^b}+\frac{1}{n^ak^b(k-1)}$$

$k \geq 2$，$k-1 \geq 1$，$n^a k^b (k-1) \geq n^a k^b$

故$m = n^a k^b$不是最大分母

3. 不大於99的正整數中，節點的可能值

(1) 排除以下二類，即為一拆二之可能節點。

(i)僅有一個質因數，也就是質數或質數的冪次。

(ii)僅有二個質因數，質因數分解後，較小質因數的冪次小於較大質因數之半。

(i) (ii)證明見 p12性質四。

排除後共有31個一拆二可能節點。

(2) 一拆三扣除重覆數字後共有19個可能節點，見 p8。

(3) 無一拆四或一拆五之可能節點。

(4) 結合(1)(2)(3)一拆二與一拆三可能節點並扣除重覆後，共有36個可能節點。

<表6> 可能為節點的正整數列表

正整數	說明	節點
$6 = 2 \times 3$		✓
$7 = 7$	僅有一個質因數	
$8 = 2^3$	僅有一個質因數	
$9 = 3^2$	僅有一個質因數	
$10 = 2 \times 5$	$2 < \frac{5}{2}$	
$11 = 11$	僅有一個質因數	
$12 = 2^2 \times 3$		✓
$13 = 13$	僅有一個質因數	
$14 = 2 \times 7$	$2 < \frac{7}{2}$	
$15 = 3 \times 5$		✓
$16 = 2^4$	僅有一個質因數	
$17 = 17$	僅有一個質因數	
$18 = 2 \times 3^2$		✓

正整數	說明	節點
$53 = 53$	僅有一個質因數	
$54 = 2 \times 3^3$		✓
$55 = 5 \times 11$	$5 < \frac{11}{2}$	
$56 = 2^3 \times 7$		✓
$59 = 3 \times 19$	$3 < \frac{19}{2}$	
$58 = 2 \times 29$	$2 < \frac{29}{2}$	
$59 = 59$	僅有一個質因數	
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$		✓
$61 = 61$	僅有一個質因數	
$62 = 2 \times 31$	$2 < \frac{31}{2}$	
$63 = 3^2 \times 7$		✓
$64 = 2^5$	僅有一個質因數	
$65 = 5 \times 13$	$5 < \frac{13}{2}$	

正整數	說明	節點
$19=19$	僅有一個質因數	
$20=2^2\times 5$		✓
$21=3\times 7$	$3<\frac{7}{2}$	
$22=2\times 11$	$2<\frac{11}{2}$	
$23=23$	僅有一個質因數	
$24=2^3\times 3$		✓
$25=5^2$	僅有一個質因數	
$26=2\times 13$	$2<\frac{13}{2}$	
$27=3^3$	僅有一個質因數	
$28=2^2\times 7$		✓
$29=29$	僅有一個質因數	
$30=2\times 3\times 5$		✓
$31=31$	僅有一個質因數	
$32=2^5$	僅有一個質因數	
$33=3\times 11$	$3<\frac{11}{2}$但一拆三可	✓(*)
$34=2\times 17$	$2<\frac{17}{2}$	
$35=5\times 7$		✓
$36=2^2\times 3^2$		✓
$37=37$	僅有一個質因數	
$38=2\times 19$	$2<\frac{19}{2}$	
$39=3\times 13$	$3<\frac{13}{2}$	
$40=2^3\times 5$		✓
$41=41$	僅有一個質因數	
$42=2\times 3\times 7$		✓

正整數	說明	節點
$66=2\times 3\times 11$		✓
$67=67$	僅有一個質因數	
$68=2^2\times 17$	$2^2=4<\frac{17}{2}$	
$69=3\times 23$	$3<\frac{23}{2}$	
$70=2\times 5\times 7$		✓
$71=71$	僅有一個質因數	
$72=2^3\times 3^2$		✓
$73=73$	僅有一個質因數	
$74=2\times 37$	$2<\frac{37}{2}$	
$75=3\times 5^2$		✓
$76=2^2\times 19$	$2^2=4<\frac{19}{2}$但一拆三可	✓(*)
$77=7\times 11$		✓
$78=2\times 3\times 13$		✓
$79=79$	僅有一個質因數	
$80=2^4\times 5$		✓
$81=3^4$	僅有一個質因數	
$82=2\times 41$	$2<\frac{41}{2}$	
$83=83$	僅有一個質因數	
$84=2^2\times 3\times 7$		✓
$85=5\times 17$	$5<\frac{17}{2}$但一拆三可	✓(*)
$86=2\times 43$	$2<\frac{43}{2}$	
$87=3\times 29$	$3<\frac{29}{2}$	
$88=2^3\times 11$		✓
$89=89$	僅有一個質因數	

正整數	說明	節點
$43=43$	僅有一個質因數	
$44=2^2\times 11$	$2<\frac{11}{2}$	
$45=3^2\times 5$		✓
$46=2\times 23$	$2<\frac{23}{2}$	
$47=47$	僅有一個質因數	
$48=2^4\times 3$		✓
$49=7^2$	僅有一個質因數	
$50=2\times 5^2$	$2<\frac{5}{2}$	
$51=3\times 17$	$3<\frac{17}{2}$	
$52=2^2\times 13$	$2^2=4<\frac{13}{2}$但一拆三可	✓(*)

正整數	說明	節點
$90=2\times 3^2\times 5$		✓
$91=7\times 13$		✓
$92=2^2\times 23$	$2^2=4<\frac{23}{2}$	
$93=3\times 31$	$3<\frac{31}{2}$	
$94=2\times 47$	$2<\frac{47}{2}$	
$95=5\times 19$	$5<\frac{19}{2}$但一拆三可	✓(*)
$96=2^5\times 3$		✓
$97=97$	僅有一個質因數	
$98=2\times 7^2$	$2<\frac{7}{2}$	
$99=3^2\times 11$		✓

4. 特殊節點之討論

(1) 僅能由惟一種拆分法得到。

(i)一拆二：/28=/44+/$\boxed{77}$、/42=/78+/$\boxed{91}$、/18=/22+/$\boxed{99}$，共3個。

(ii)一拆三：/6=/11+/22+/$\boxed{33}$ 、/12=/26+/39+/$\boxed{52}$、/12=/19+/57+/$\boxed{76}$、/10=/17+/34+/$\boxed{85}$、/20=/38+/76+/$\boxed{95}$，共5個。

(2) 可以作為一拆二之節點，也可以作為一拆三之節點，共14個。

排序如下：20、28、30、40、45、56、60、63、66、70、80、84、88、99。

以/88為例：/24=/33+/$\boxed{88}$ 、/8=/11+/44+/$\boxed{88}$

(3) 若單獨使用一拆三的方法時，將會跳過下一個項數的最優解，例如：

S_{12}=/6+/7+/8+/9+/10+/14+/15+/18+/20+/24+/28+/30，M_{12}=30

下一個節點應為33，但/33無法利用一拆二得到，只能利用一拆三如/6=/11+/22+/33得到，然而若使用一拆三將會得到

S_{14}=/7+/8+/9+/10+/11+/14+/15+/18+/20+/22+/24+/28+/30+/33，M_{14}=33

S_{13}將會被跳過。

$$6 \left\langle \begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{matrix} \right.$$

<圖3>一拆三將跳過下一項數最優解

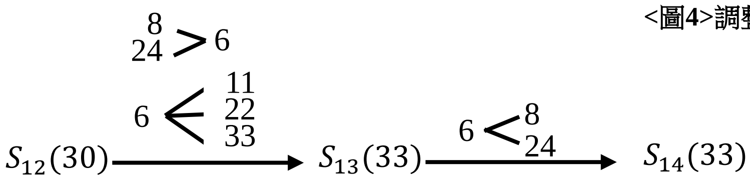
$$\begin{tikzcd} S_{12}(30) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & S_{13}(?) \arrow[r] & S_{14}(33) \end{tikzcd}$$

為了解決這個問題，我們將會同步使用二併一加以調整。

由S_{12}推進到S_{13}時，同步使用一拆三及二併一。

再由S_{13}推進至S_{14}時，反向還原剛剛的二併一成為一拆二，得到S_{14}。

<圖4>調整後的一拆三



類似的例子也出現在$S_{10} \rightarrow S_{11}$、$S_{12} \rightarrow S_{13}$、$S_{19} \rightarrow S_{20}$、$S_{30} \rightarrow S_{31}$。

四、逐項推進

(一)、 求解S_1

若$\frac{1}{a} = 1$ 僅有 a=1 一組解。

(二)、 求解S_2

若$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$，求解$a$、$b$

設$a < b \Rightarrow$ 則 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{2}{a} > 1 \Rightarrow a < 2 \Rightarrow$ 故$a = 1$

代入得 $1 + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow$ 無解

(三)、 求解S_3

若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$，求解$a$、$b$、$c$

設$a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{3}{a} > 1 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 1,2$

$a = 1$代入得 $1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ 無解

$a = 2$代入得 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ 又$\frac{1}{b} > \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{b} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2}{b} > \frac{1}{2} \Rightarrow b < 4$

但$a<b$　故$b=3$　代入得$c=6$

故可得到$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$的惟一解。

(四)、 求解S_4

若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$，求解$a$、$b$、$c$、$d$

設$a<b<c<d$　則$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{4}{a}>1 \Rightarrow a<4 \Rightarrow a=1、2、3$

(1)$a=1$代入得 $1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1 \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0 \Rightarrow$ 無解

(2)$a=2$代入得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$ 又$\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}>\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{3}{b}>\frac{1}{2} \Rightarrow b<6$

但$a<b$ 故$b=3$、4、5

<i>$b=3$ 代入得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$ 故$\frac{1}{c}<\frac{1}{6} \Rightarrow c>6$

又$\frac{1}{c}>\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{c}>\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{2}{c}>\frac{1}{6} \Rightarrow c<12$

故$c=7$、8、9、10、11

代入得對應$d=42$(合)、24(合)、18(合)、15(合)、$\frac{66}{5}$(不合)

<ii>$b=4$ 代入得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{4}$ 又$\frac{1}{c}>\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{c}>\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{2}{c}>\frac{1}{4} \Rightarrow c<8$

但$b<c$ 故$c=5$、6、7

代入得對應$d=20$(合)、12(合)、$\frac{28}{3}$(不合)

<iii>$b=5$代入得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{10}$ 又$\frac{1}{c}>\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{c}>\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{2}{c}>\frac{3}{10} \Rightarrow c<\frac{20}{3}$

但$b<c$ 故$c=6$　代入得對應$d=\frac{15}{2}$(不合)

(3)$a=3$代入得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$ 又$\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}>\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow \frac{3}{b}>\frac{2}{3} \Rightarrow b<\frac{9}{2}$

但$a < b$ 故$b = 4$

$b = 4$代入得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{5}{12}$ 又$\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{c}+\frac{1}{c}>\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{c}>\frac{5}{12}$ $\Rightarrow$ $c<\frac{24}{5}$

但$b < c$ 故無解

故項數為4時，共有6組解

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

最優解為 $S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，最大分母$M_4=12$。

(五)、 從S_4的推導過程中，我們發現若要繼續推進，需要極為大量的時間與精力，我們嘗試推導S_5，得到數量驚人的72組解。且若僅要求最優解，並不需要特別列出所有解，因此我們仔細觀察了S_3的惟一解$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$與$S_4$的六組解，發現兩者所有的解之間皆可利用拆分建立連結。例如將/3拆分為/4+/12，將/6拆分為/7+/42或/8+/24或/9+/18或/10+/15。

(六)、 從S_4推進到S_5，開始改變策略。

步驟一：拆分原分數，判斷是否不改變最大分母，

拆分小於最大分母12之半的原有分母2與4，

/2=/3+/6，與原分數重覆，不合

/4=/5+/20，20大於最大分母12，不合

/4=/6+/12，與原分數重覆，不合

結果：否。

步驟二：若步驟一結果為否，則拆分原分數，判斷是否可以得到下一個節點，

12的下一個節點是15，依 p6一拆二拆分法(二)可得，

惟一分解式為$\frac{1}{6}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$

結果，可，

最優解為 $S_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ ，最大分母$M_5=15$。

(七)、 從S_5推進到S_6

步驟一：拆分原分數後是否不改變最大分母，

拆分小於最大分母15之半的原有分母2、4，

此處與S_4推進到S_5完全相同，可直接套用，不需重覆拆分。

/2=/3+/6(合) ，放入擇優區(見 p19)。

/4=/5+/20(不合) ，略超過最大分母 ，放入觀察區(見 p19)。

/4=/6+/12(不合) ，與原分數重覆，放入淘汰區(見 p19)。

結果：是。

最優解為 $S_6=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ ，最大分母$M_6=15$。

(八)、 S_7以後使用同樣的程序，本研究已推進至S_{42}，詳見 p21-27。

(九)、 拆分推進策略之討論

逐項拆分推進的方法看起來似乎等同試誤法，笨拙緩慢。但善用前一項嘗試結果，將可大量節省時間與精力，只需將注意力放在消減或新增等異動的分數。

本研究將每一次的拆分結果分為以下三區：

1、 擇優區

前一項數各分數拆分後之結果合於最大分母限制者，留在此區。下一項數絕大部分的分數不須再度拆分，利用原結果即可，僅有極少數新進分數需要拆分。

2、 觀察區

前一項數各分數拆分後略超過最大分母限制者，留在此區。可預留作下一節點的可能。

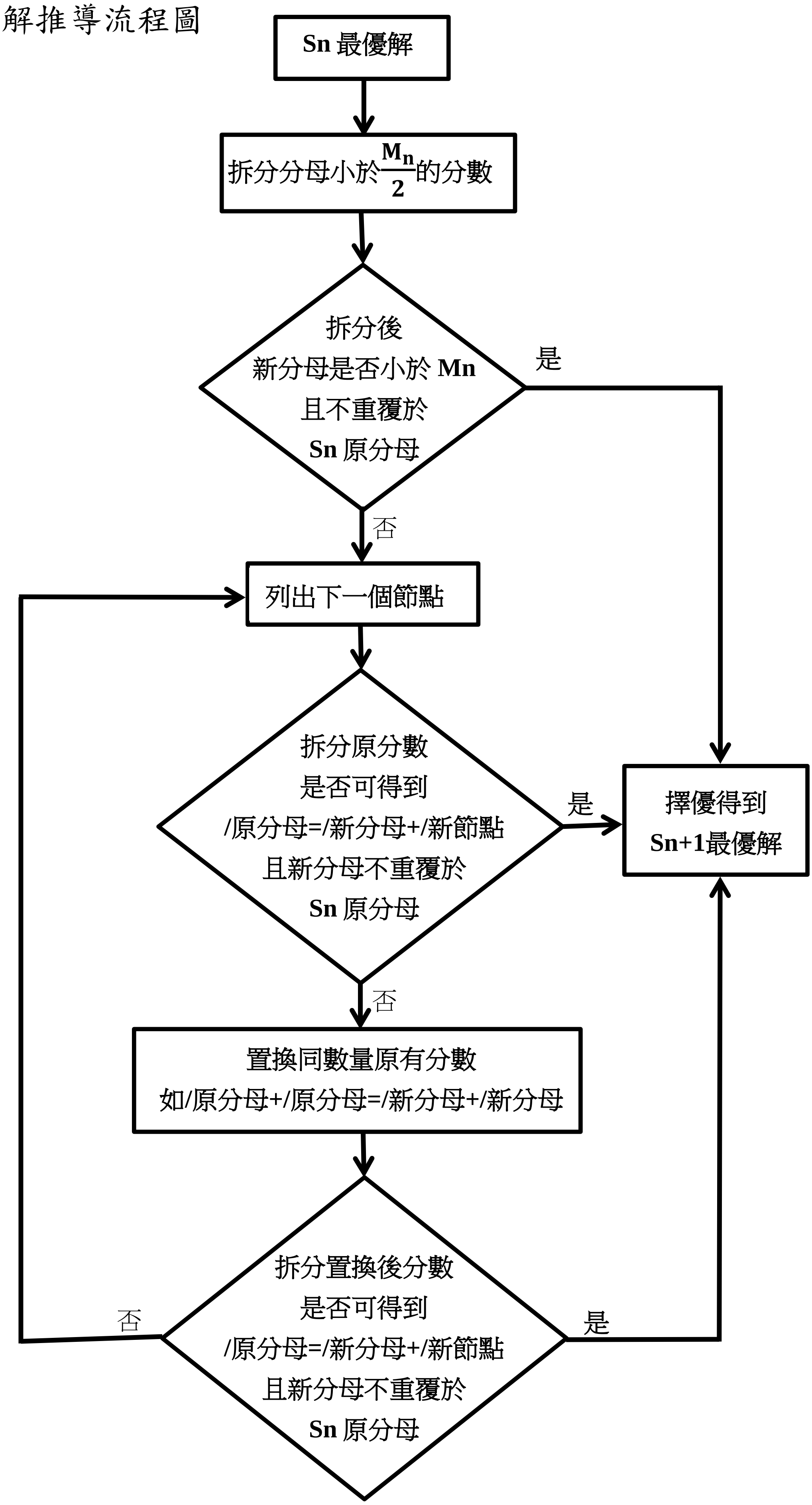
3、 淘汰區

前一項數各分數拆分後與原分數重覆或遠超過節點者，直接淘汰捨棄。

(十)、 流程圖

我們將前列推導過程歸納為流程圖，試圖為未來可能演算法建立基礎。

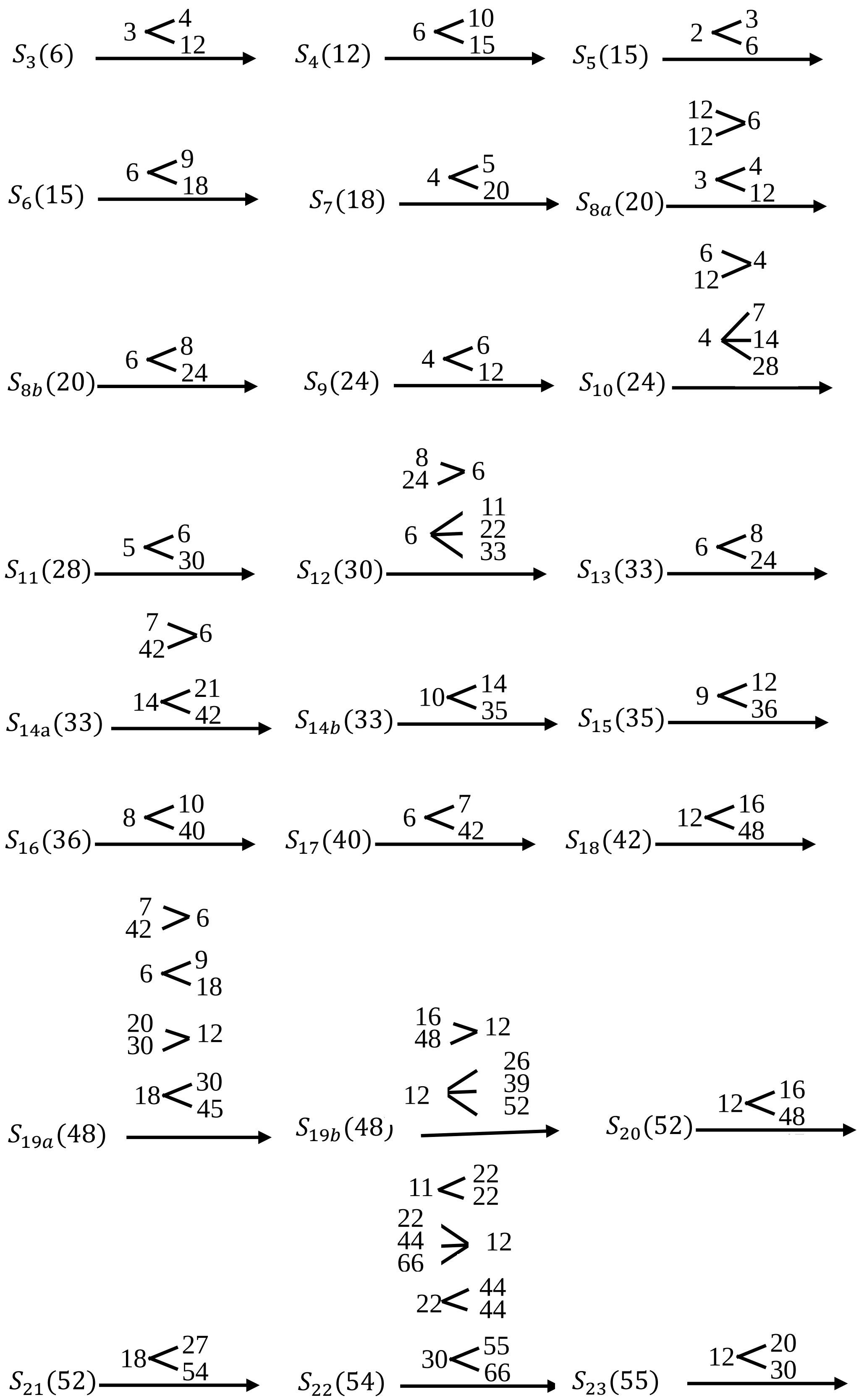
<圖5>最優解推導流程圖


Sn 最優解
拆分分母小於$\frac{M_n}{2}$的分數
拆分後
新分母是否小於 Mn
且不重覆於
Sn 原分母
是
否
列出下一個節點
拆分原分數
是否可得到
/原分母=/新分母+/新節點
且新分母不重覆於
Sn 原分母
是
擇優得到
Sn+1最優解
否
置換同數量原有分數
如/原分母+/原分母=/新分母+/新分母
拆分置換後分數
是否可得到
/原分母=/新分母+/新節點
且新分母不重覆於
Sn 原分母
否
是

伍、研究結果與結論

一、逐項推進。

<圖6>逐項推進



$$S_{24}(55) \xrightarrow{24<\substack{42\\56}} S_{25}(56) \xrightarrow{10<\substack{12\\60}} S_{26}(60) \xrightarrow{14<\substack{18\\63}}$$

$$S_{27}(63) \xrightarrow{18<\substack{24\\72}} S_{28}(72) \xrightarrow{30<\substack{50\\75}} S_{29}(75) \xrightarrow{21<\substack{30\\70}}$$

$$S_{30}(75) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{16\\48}>12\\ 12<\substack{19\\57\\76}\end{array}} S_{31}(76) \xrightarrow{12<\substack{16\\48}} S_{32\mathrm{a}}(76) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{36\\36}>18\\ 9<\substack{12\\36}\end{array}}$$

$$S_{32b}(76) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{22\\22}>11\\ \substack{44\\44}>22\\ 12<\substack{22\\44\\66}\end{array}} S_{32c}(76) \xrightarrow{28<\substack{44\\77}} S_{33a}(77) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{15\\30}>10\\ \substack{39\\130}>30\\ 10<\substack{13\\65\\130}\end{array}}$$

$$S_{33b}(77) \xrightarrow{26<\substack{39\\78}} S_{34}(78) \xrightarrow{\begin{array}{c}16<\substack{20\\80}\\ \substack{20\\30}>12\\ 12<\substack{21\\28}\end{array}} S_{35}(80) \xrightarrow{\begin{array}{c}6<\substack{10\\15}\\ \substack{11\\22\\33}>6\\ 10<\substack{17\\34\\85}\end{array}}$$

$$S_{36}(85) \xrightarrow{\begin{array}{c}20<\substack{30\\60}\\ \substack{15\\60}>12\\ 12<\substack{14\\84}\end{array}} S_{37}(85) \xrightarrow{24<\substack{33\\88}} S_{38}(88) \xrightarrow{\begin{array}{c}18<\substack{24\\72}\\ \substack{72\\72}>36\\ 40<\substack{72\\90}\end{array}}$$

$$S_{39\mathrm{a}}(90) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{39\\78}>26\\ 42<\substack{78\\91}\end{array}} S_{39b}(91) \xrightarrow{\begin{array}{c}12<\substack{20\\30}\\ \substack{19\\57\\76}>12\\ \substack{30\\60}>20\\ 20<\substack{38\\76\\95}\end{array}} S_{39c}(95) \xrightarrow{\begin{array}{c}14<\substack{21\\42}\\ \substack{21\\28}>12\\ 24<\substack{40\\60}\end{array}}$$

$$S_{40\mathrm{a}}(95) \xrightarrow{\begin{array}{c}\substack{36\\72}>24\\ 12<\substack{18\\36}\end{array}} S_{40\mathrm{b}}(95) \xrightarrow{24<\substack{32\\96}} S_{41}(96) \xrightarrow{18<\substack{24\\72}} S_{42}(96)$$

二、最優解列表。

<表7>最優解

項數	最優解	最大分母	備註
3	/2+/3+/6	6	
4	/2+/4+/6+/12	12	/3=/4+/12
5	/2+/4+/10+/12+/15	15	/6=/10+/15
6	/3+/4+/6+/10+/12 +/15	15	/2=/3+/6
7	/3+/4+/9+/10+/12 +/15+/18	18	/6=/9+/18
8a	/3+/5+/9+/10+/12 +/15+/18+/20	20	/4=/5+/20
8b	/4+/5+/6+/9+/10 +/15+/18+/20		/3=/6+/6 /6+/12=/4
9	/4+/5+/8+/9+/10 +/15+/18+/20+/24	24	/6=/8+/24
10	/5+/6+/8+/9+/10 +/12+/15+/18+/20+/24	24	/4=/6+/12
11	/5+/7+/8+/9+/10 +/14+/15+/18+/20+/24 +/28	28	/4=/7+/14+/28 /6+/12=/4
12	/6+/7+/8+/9+/10 +/14+/15+/18+/20+/24 +/28+/30	30	/5=/6+/30
13	/6+/7+/9+/10+/11 +/14+/15+/18+/20+/22 +/28+/30+/33	33	/6=/11+/22+/33 /8+/24=/6
14a	/7+/8+/9+/10+/11 +/14+/15+/18+/20+/22 +/24+/28+/30+/33	33	/6=/8+/24
14b	/6+/8+/9+/10+/11 +/15+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33		/14=/21+/42 /7+/42=/6
15	/6+/8+/9+/11+/14 +/15+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35	35	/10=/14+/35
16	/6+/8+/11+/12+/14 +/15+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35 +/36	36	/9=/12+/36
17	/6+/10+/11+/12+/14 +/15+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35 +/36+/40	40	/8=/10+/40
18	/7+/10+/11+/12+/14 +/15+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35 +/36+/40+/42	42	/6=/7+/42
19a	/7+/10+/11+/14+/15 +/16+/18+/20+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35 +/36+/40+/42+/48	48	/12=/16+/48
19b	/9+/10+/11+/12+/14 +/15+/16+/18+/21+/22 +/24+/28+/30+/33+/35 +/36+/40+/45+/48		/7+/42=/6 /6=/9+/18 /20+/30=/12 /18=/30+/45

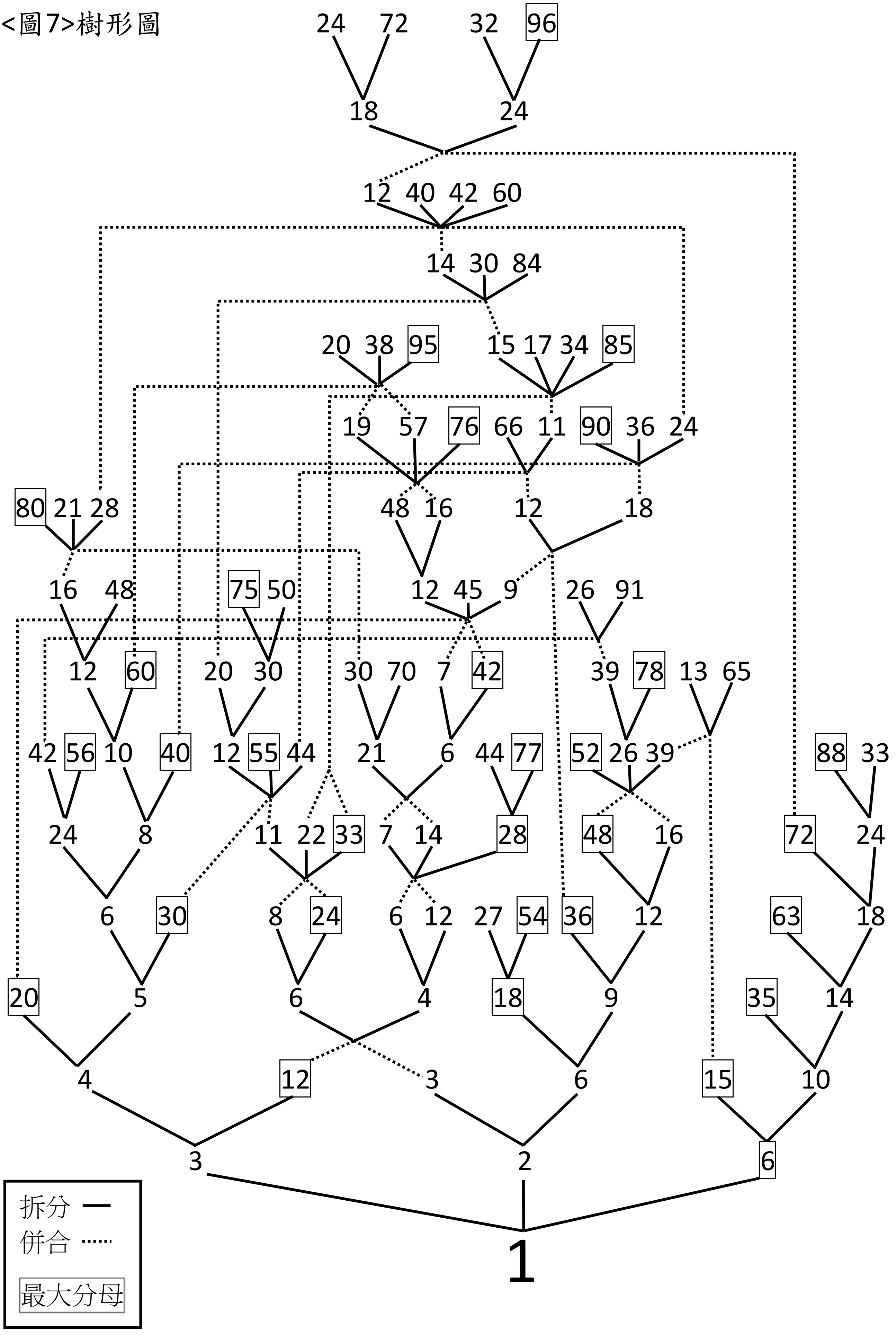
20	/9+/10+/11+/12+/14 +/15+/18+/21+/22+/24 +/26+/28+/30+/33+/35 +/36+/39+/40+/45+/52	52	/12=/26+/39+/52 /16+/48=/12
21	/9+/10+/11+/14+/15 +/16+/18+/21+/22+/24 +/26+/28+/30+/33+/35 +/36+/39+/40+/45+/48 +/52	52	/12=/16+/48
22	/9+/10+/11+/14+/15 +/16+/21+/22+/24+/26 +/27+/28+/30+/33+/35 +/36+/39+/40+/45+/48 +/52+/54	54	/18=/27+/54
23	/9+/10+/12+/14+/15 +/16+/21+/22+/24+/26 +/27+/28+/33+/35+/36 +/39+/40+/44+/45+/48 +/52+/54+/55	55	/22+/44+/66=/12 /11=/22+/22 /22=/44+/44 /30=/55+/66
24	/9+/10+/14+/15+/16 +/20+/21+/22+/24+/26 +/27+/28+/30+/33+/35 +/36+/39+/40+/44+/45 +/48+/52+/54+/55	55	/12=/20+/30
25	/9+/10+/14+/15+/16 +/20+/21+/22+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/36 +/39+/40+/42+/44+/45 +/48+/52+/54+/55+/56	56	/24=/42+/56
26	/9+/12+/14+/15+/16 +/20+/21+/22+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/36 +/39+/40+/42+/44+/45 +/48+/52+/54+/55+/56 +/60	60	/10=/12+/60
27	/9+/12+/15+/16+/18 +/20+/21+/22+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/36 +/39+/40+/42+/44+/45 +/48+/52+/54+/55+/56 +/60+/63	63	/14=/18+/63
28	/9+/12+/15+/16+/20 +/21+/22+/24+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/36 +/39+/40+/42+/44+/45 +/48+/52+/54+/55+/56 +/60+/63+/72	72	/18=/24+/72
29	/9+/12+/15+/16+/20 +/21+/22+/24+/26+/27 +/28+/33+/35+/36+/39 +/40+/42+/44+/45+/85 +/50+/52+/54+/55+/56 +/60+/63+/72+/75	75	/30=/50+/75
30	/9+/12+/15+/16+/20 +/22+/24+/26+/27+/28 +/30+/33+/35+/36+/39 +/40+/42+/44+/45+/48 +/50+/52+/54+/55+/56 +/60+/63+/70+/72+/75	75	/21=/30+/70
31	/9+/12+/15+/19+/20 +/22+/24+/26+/27+/28 +/30+/33+/35+/36+/39 +/40+/42+/44+/45+/50 +/52+/54+/55+/56+/57 +/60+/63+/70+/72+/75 +/76	76	/12=/19+/57+/76 /16+/48=/12

32a	/9+/15+/16+/19+/20 +/22+/24+/26+/27+/28 +/30+/33+/35+/36+/39 +/40+/42+/44+/45+/48 +/50+/52+/54+/55+/56 +/57+/60+/63+/70+/72 +/75+/76	76	/12=/16+/48
32b	/12+/15+/16+/18+/19 +/20+/22+/24+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/39 +/40+/42+/44+/45+/48 +/50+/52+/54+/55+/56 +/57+/60+/63+/70+/72 +/75+/76		/9=/12+/36 /36+/36=/18
32c	/11+/15+/16+/18+/19 +/20+/22+/24+/26+/27 +/28+/30+/33+/35+/39 +/40+/42+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/57 +/60+/63+/66+/70+/72 +/75+/76		/12=/22+/44+/66 /22+/22=/11 /44+/44=/22
33a	/11+/15+/16+/18+/19 +/20+/22+/24+/26+/27 +/30+/33+/35+/39+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/57 +/60+/63+/66+/70+/72 +/75+/76+/77	77	/28=/44+/77
33b	/11+/13+/16+/18+/19 +/20+/22+/24+/26+/27 +/30+/33+/35+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77		/10=/13+/65+/130 /39+/130=/30 /15+/30=/10
34	/11+/13+/16+/18+/19 +/20+/22+/24+/27+/30 +/33+/35+/39+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78	78	/26=/39+/78
35	/11+/13+/18+/19+/20 +/21+/22+/24+/27+/28 +/33+/35+/39+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80	80	/16=/20+/80 /20+/30=/12 /12=/21+/28
36	/13+/15+/17+/18+/19 +/20+/21+/24+/27+/28 +/34+/35+/39+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/85	85	/11+/22+/33=/6 /6=/10+/15 /10=/17+/34+/85
37	/13+/14+/17+/18+/19 +/21+/24+/27+/28+/30 +/34+/35+/39+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/84+/85	85	/20=/30+/60 /15+/60=/12 /12=/14+/84

38	/13+/14+/17+/18+/19 +/21+/27+/28+/30+/33 +/34+/35+/39+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/84+/85+/88	88	/24=/33+/88
39a	/13+/14+/17+/19+/21 +/24+/27+/28+/30+/33 +/34+/35+/36+/39+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/57+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/84+/85+/88+/90	90	/18=/24+/72 /72+/72=/36 /40=/72+/90
39b	/13+/14+/17+/19+/21 +/24+/26+/27+/28+/30 +/33+/34+/35+/36+/44 +/45+/48+/50+/52+/54 +/55+/56+/57+/60+/63 +/65+/66+/70+/72+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91		/39+/78=/26 /42=/78+/91
39c	/13+/14+/17+/20+/21 +/24+/26+/27+/28+/30 +/33+/34+/35+/36+/38 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/63+/65 +/66+/70+/72+/75+/76 +/77+/78+/80+/84+/85 +/88+/90+/91+/95		/19+/57+/75=/12 /12=/20+/30 /20=/38+/76+/95 /30+/60=/20
40a	/12+/13+/17+/20+/21 +/26+/27+/30+/33+/34 +/35+/36+/38+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/60+/63 +/65+/66+/70+/72+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95	95	/14=/21+/42 /21+/28=/12 /24=/40+/60
40b	/13+/17+/18+/20+/21 +/24+/26+/27+/30+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95		/12=/18+/36 /36+/72=/24
41	/13+/17+/18+/20+/21 +/26+/27+/30+/32+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95 +/96	96	/24=/32+/96
42	/13+/17+/20+/21+/24 +/26+/27+/30+/32+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/84+/85+/88+/90+/91 +/95+/96	96	/18=/24+/72

三、最後我們將所有過程合併為一個樹形圖。

<圖7>樹形圖



陸、討論

一、完美數並不完美。

就和為1的埃及分數最優解而言，完美數並不是完美的選擇。拿最小的完美數6來說，6有3個因數3、2、1，的確可以得到項數為3的最優解1=/2+/3+/6。但下一個完美數28，有5個因數14、7、4、2、1，得到的1=/2+/4+/7+/14+/28，就不是項數為5時的最優解。再下一個完美數496，更直接超過本研究的二位數設定。

二、最優解並非惟一。

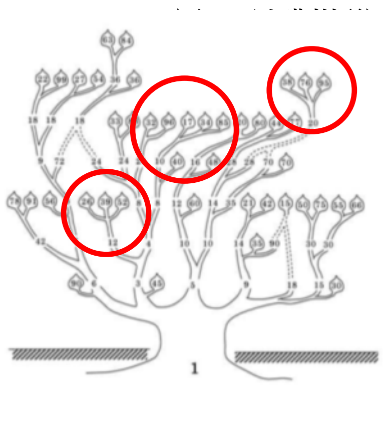
本研究對於最優解的定義為項數固定，求最大分母的最小值，因此非最大分母項的置換並不影響最優解。例如S_{42}中的 /13+/65 可置換為 /15+/39 ，不會影響最大分母M_{42}=96。其它項數大多也有不會改變最大分母的多組最優解，參見 p30。

三、出乎意料的節點。

我們原本預期在 p15表6中列出的36個可能節點均會出現在最優解的最大分母，雖然絕大部分的確如此，但其中也有5個並未出現在最優解中，分別是45、66、84、91、99，另一個意外是並未出現在可能節點列表中的55，卻出現在最優解中。我們猜測或許某些節點彼此互斥，這有待進一步探索求證。

四、關鍵的一拆三。

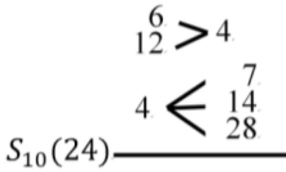
在逐項推導過程中，從S_{10}推進到S_{11}時，迎來本研究中最重要的路線轉折。S_{10} =/5+/6+/8+/9+/10+/12+/15+/18+/20+/24，下個節點是28，但28可以由一拆二/12=/21+/28得到，也可由一拆三/4=/7+/14+/28得到，那麼應該選擇哪一個呢？



合理的判斷明顯應該是選擇前者的一拆二，因為原分數中有/12，但並沒有/4，此時西山教授研究結果中的樹形圖啟發了我們的思路，右圖中可以見到出現了三組一拆三的分支，分別是/10=/17+/34+/85、/12=/26+/39+/52、/20=/38+/76+/95，我們發現若要達到設定的目標，也就是求固定項數時最大分母的最小值，策略上必須儘量控制節點，不讓它快速變大，選擇質數或質數倍數的分母是一個好的對策，因為這類數字通常不會是一拆二的節點(見 p13) ，也較不容易利用拆分得到，在這樣的思考下，一拆三分解後的分母為質數或質數的倍數，且僅能由單一種拆分法得到，成為最好使用的分解式，例如：/4=/7+/14+/28、/6=/11+/22+/33、/10=17+/34+/85、/12=/19+/57+/76=/26+/39+/52、/20=/38+/76+/95等，在後來的逐項推進中均發揮了重要的作用。

五、買空賣空的(一拆三)搭配(二併一)。

例如在$S_{10} \rightarrow S_{11}$的過程中，以(一拆三)搭配(二併一)，即(/4=/7+/14+/28) 搭配(/6+/12=/4)，對消相同項/4後，等同(二拆三)(/6+/12=/7+14+/28)，



<圖9>一拆三搭配二併一

也就是說原先S_{10}中是否有/4項並不影響拆分，事實上S_{10} =/5 +/6 +/8 +/9 +/10 +/12 +/15 +/18 +/20 +/24確實沒有/4此項。

六、拆併置換過程中的例外。

在本研究的定義中，最優解分母均要求相異，然而部分過程出現了分母相同的情形，如$S_{8a} \rightarrow S_{8b}$中的/3=/6+/6。另外在$S_{33a} \rightarrow S_{33b}$中的/10=/13+/65+/130也出現了超過二位數限制的情形。但由於等號兩邊相同項對消的關係，這些例外最終並不影響分母相異的條件要求。

七、回顧西山教授的研究。

在第一次接觸西山教授的研究成果時，我們認為他的研究應是基於逐項推進的策略，只是未呈現在最後的結論。然而在後續深入探索的過程中發現並非如此，雖然同樣大量地使用拆分與併合的技巧，但西山的研究偏向於在二位數限制下儘量拆出最多項數的單位分數，而非得到特定項數的最優解。這可從西山的樹形圖結論看出，若依循本研究的親代與子代的定義，西山結論有8代，如 p3圖1，而本研究的結果則有16代，如 p27圖7。

其次，西山的樹形圖葉子的生長先後順序不一定互相關聯，然而本研究的樹形圖發展則有嚴格的順序，不能顛倒。

最後，若將西山的研究結果與我們研究結論的S_{42}對比，將可發現僅有小幅的差異，一處為/13+/65=/15+/39，可經由等量置換如$S_{33a} \rightarrow S_{33b}$(p11二換二(2))得到，而另一處差異則對最大分母的推導有著巨大的影響，西山研究的最大分母99是由/18=/22+/99得到，但若將/18轉為拆分為/24+/72，則最大分母將不是99，而是96，此時置換後的所有分數組成將與本研究結論中的S_{42}完全符合。

<表8>本研究與西山豐42項結論比較

S_{42}比較	西山	本研究
差異一	/15+/39	/13+/65
差異二	/22+/99	/24+/72

那麼是否有機會超越西山的結論，在二位數的限制下得到43項的成果呢？答案是否定的。因為99是一個特殊節點，只有單一種拆分法可以得到(見 p15)，即/18=/22+/99。而/18已經拆分為/24+/72，無法再次拆分，因此下一個節點將來到100，惟一的可行拆分為/20=/25+/100，故M_{43}=100。

八、程式驗證

我們使用 EXCEL 的 VBA 語言進行最優解驗證測試，初步結果顯示本研究結論正確，最優解列舉與所需時間列表如下，但若繼續測試較大項數最優解，以我們現有設備建置測試環境所需測試時間則遠超過現階段所能負荷。

<表9>VBA 驗證最優解分母列舉與所需時間

項數	最優解分母列舉	所需時間
3	2 3 6	＜1秒
4	2 4 6 12	＜1秒
5	2 4 10 12 15	＜1秒
6	3 4 6 10 12 15	1秒
7	3 4 9 10 12 15 18	10秒
8	3 5 9 10 12 15 18 20	55秒
9	4 5 8 9 10 15 18 20 24 4 6 8 9 10 12 15 18 24	6分20秒
10	5 6 8 9 10 12 15 18 20 24	20分30秒
11	5 6 8 9 10 15 18 20 21 24 28 5 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 6 7 8 9 10 12 14 15 18 24 28	4小時40分

項數	最優解分母列舉	所需時間
12	4 8 9 10 12 15 18 20 21 24 28 30 6 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 30	20小時
13	4 8 9 11 12 18 20 21 22 24 28 30 33 4 8 10 11 12 15 20 21 22 24 28 30 33 4 9 10 11 12 15 18 20 21 22 28 30 33 5 8 9 10 11 12 18 21 22 24 28 30 33 5 8 9 10 11 15 18 20 21 22 24 28 33 6 7 8 9 11 14 18 20 22 24 28 30 33 6 7 8 10 11 14 15 20 22 24 28 30 33 6 7 9 10 11 14 15 18 20 22 28 30 33 6 8 9 10 11 12 15 18 20 22 24 30 33 6 8 9 10 11 12 15 18 21 22 24 28 33 7 8 9 10 11 12 14 15 18 22 24 28 33	252小時

柒、展望

和為1的單位分數最優解問題在分母不超過99時，一拆四或一拆五並無可行解，因此僅停留在一拆二或一拆三的探索，各種拆分或併合的情況相對單純，但若繼續探討分母超過99的最優解，情況將迅速轉為複雜，後續立刻要面對一拆四及相關拆併換的各種可能變化。

數學家哈爾莫斯（P. Halmos）曾說：「問題是數學的心臟」，在本研究的最後，我們設計了一道題目來呼應開端的老人分牛問題，敘述如下：

「某位國王有99個兒子，過世後留下數量龐大的金幣，但遺囑特別規定，並非每一個兒子都可以分到金幣，兒子們必須按照排行的倒數的比例來分配，例如排行20可以分到遺產的20分之1，而且必須把金幣剛好分完，請問最多有幾個兒子可以分到金幣？對應的金幣總數量又是多少？」

捌、參考資料

一、文耀光(民91)。古埃及的單位分數問題 。數學傳播，26(4)， 52-58。

二、 Yutaka Nishiyama.(2013).UNIT FRACTIONS THAT SUM TO 1.International Journal of Pure and Applied Mathematics，Volume85(1)，83-93。

三、Dan Hoey.(1999).Smallest possible maximum denominator in an expression for 1 as a sum of n distinct unit (Egyptian) fractions. Retrieved from https://oeis.org/A030659 (February 15,2022)

四、宋彥橙、何哲瑋、趙泓霖(民96)，西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)—未完成的埃及分數問題，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組。

【評語】030419

本作品考慮的是在要求所使用到的單位分數(分子為1的分數）分母的最大值最小的前提下，找出將數字1表示成n個單位分數的和的所有可能的表示方式。作者們巧妙的運用拆解、合併的技巧，針對在限制所使用到的單位分數的分母的最大值不超過99的前提下可能的分解方式給出了答案。就如同作品說明書中所提到的，將一個單位分數分拆成兩個以上的單位分數的方法其實是有許多種的，如果把分拆後的多個數字可以重新合併後再分拆這樣的可能性列入考慮，問題就會變的十分複雜，這也是問題之所以困難的原因。作者們能巧妙的運用各種分拆、合併的規則，克服了在分解過程中遇到的各種問題，十分不容易，非常值得鼓勵。這個問題最困難的部分是說明哪一些數字不可能是分解式的最後一項。是不是有可能可以給出一些好的判斷準則？如果可以針對這個部分給出一些好的結果，作品會更完整也更有吸引力，對於後續要再更進一步分析這個問題也應該頗有助益。

作品簡報

埃及分數和為1
最優解問題

+/13+/17+/20+/21+/24+/26+/27+/30+/32+/33+/34+/35+/36+/38+/40+/42+/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/60+/63+/65+/66+/70+/72+/75+/76+/77+/78+/80+/84+/85+/88+/90+/91+/95+/96

國中組 數學科

前言

動機與目的

有一個古老的數學問題，有一位老人臨終前將他的11頭牛分配給三個兒子，老大分得1/2，老二分得 1/4，老三分得 1/6，牛不得宰殺分割，正當大家不知如何處理時，鄰居牽來一頭牛，解決了所有問題。本作品進一步擴展上列問題，探討埃及分數和為1時的最優解，在項數固定的條件下，嘗試找出最大分母的最小值，主要利用方法為拆分法。

名詞與符號定義

一、最優解 ：本研究定義：項數固定，相異單位分數之和為1，求最大分母的最小值。

二、 S_n ：有n個項的相異單位分數之級數，其和為1。

例如 $S_7=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}$。

三、 M_n： S_n中的最大分母，如上列 S_7 中$M_7=18$。

四、節點：可以成為S_n 最大分母的正整數。

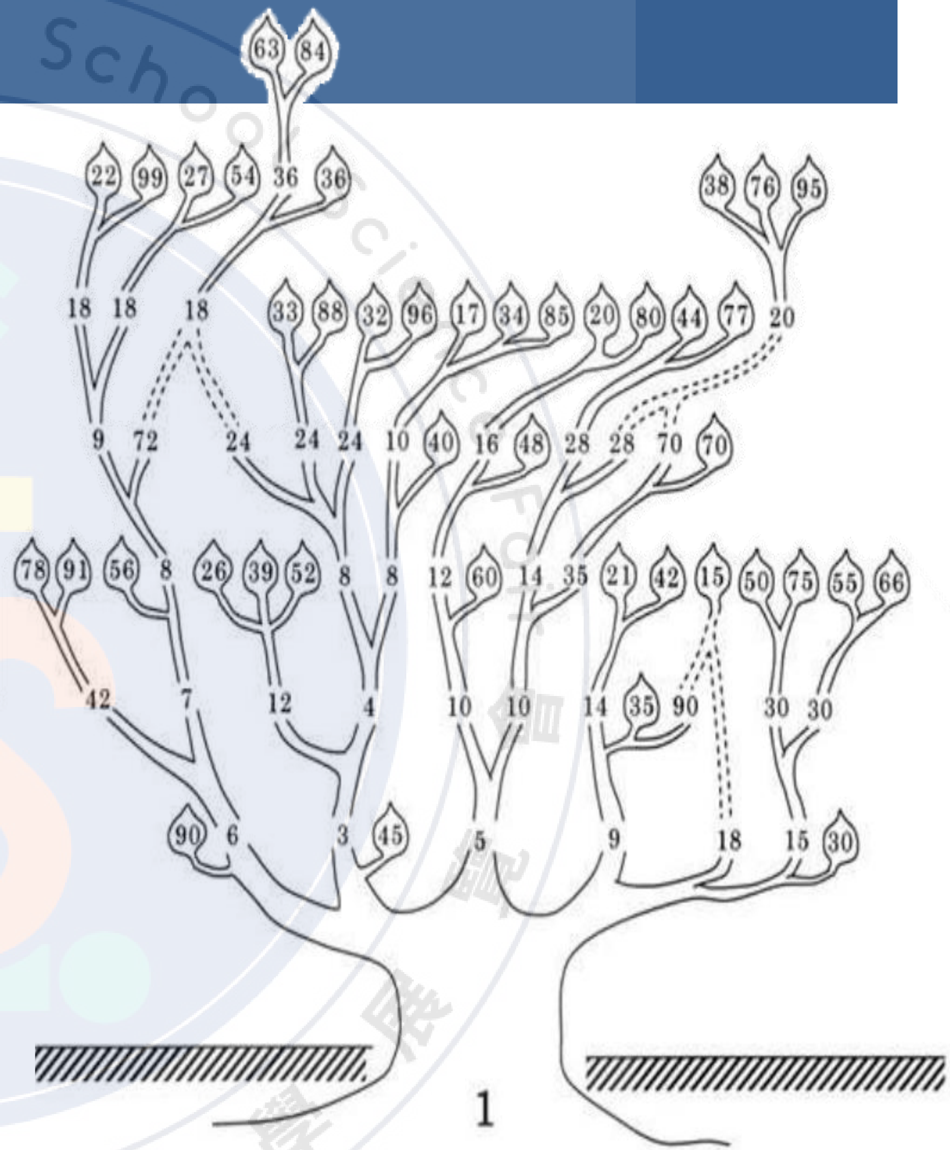
五、親代與子代：利用拆分法分解前的單位分數稱為親代，分解後的單位分數稱為子代。

六、拆分法：將一個單位分數分解為多個相異單位分數之和，簡稱為一拆二或一拆n。

文獻探討

YUTAKA NISHIYAMA 西山豊(2003)的研究

主題為「在分母相異且不大於99的條件下，和為1的單位分數可以製作多長的級數？」，研究結果給出了一個樹形圖與42項的解如右圖。西山的研究方向與本研究有所差異，且西山未說明研究推論的細節，本研究發展出等量置換及反向併合的技巧，才得以突破困難。



1=/15+/17+/20+/21+/22+/26+/27+/30+/32+/33+/34+/35+/36+/38+/39+/40+/42+/44+/45+/48+/50+/52+/54+/55+/56+/60+/63+/66+/70+/75+/76+/77+/78+/80+/84+/85+/88+/90+/91+/95+/96+/99

拆分

<性質一>對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，則$x=m+\alpha$，$y=m+\beta$ 是 $\frac{1}{m}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的一組解 。

$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$
$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$
$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$
$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+6}+\frac{1}{6+6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

令$m=6$，$m^2=36=1\times36=2\times18$

$=3\times12=4\times9=6\times6$。則可得5種拆分結果。

每一種因數兩兩分解的結果皆對應一組一拆二的解。

<性質二>對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，$\alpha<m$，則 $x=m-\alpha$，$y=\beta-m$ 是 $\frac{1}{x}=\frac{1}{m}+\frac{1}{y}$ 的一組解

$\frac{1}{30-18}=\frac{1}{12}=\frac{1}{30}+\frac{1}{50-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{20}$
$\frac{1}{30-20}=\frac{1}{10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{30-20}=\frac{1}{10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45-30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$

令$m=30$，且$\alpha<m$，且$\alpha>\frac{m}{2}$，$15<\alpha<30$，在$m^2=$900之因數中，取$\alpha=18$、20、25，對應$\beta=50$、45、36，

則可得3種拆分結果。每一種因數兩兩分解的結果皆對應一組解。

併合

<性質三>對任一正整數m，$m^2=\alpha\times\beta$，α、β為正整數，$\beta<m$，則$x=m-\alpha$，$y=\beta-m$ 是 $\frac{1}{m}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$的一組解。

$\frac{1}{15}+\frac{1}{25-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{15-9}=\frac{1}{6}$
$\frac{1}{15}+\frac{1}{45-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{15-5}=\frac{1}{10}$
$\frac{1}{15}+\frac{1}{75-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15-3}=\frac{1}{12}$
$\frac{1}{15}+\frac{1}{225-15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{210}=\frac{1}{15-1}=\frac{1}{14}$

令$m=15$，$m^2=225=1\times225=3\times75$

$=5\times45=9\times25=15\times15$

$\beta=25$、45、75、225，對應$\alpha=9$、5、3、1，

可得4種併合結果。每一種因數兩兩分解的結果皆對應一組一拆二的解。

置換

以二換二為例

(1)結合(一拆二)+(二併一)，

例：$S_{32b}\rightarrow S_{32c}$、$S_{33a}\rightarrow S_{33b}$

$$
\begin{array}{rl}
 & /a=\cancel{/b}+/d \\
+) & \cancel{/b}+/c=/e \\
\hline
 & /a+/c=/d+/e
\end{array}
$$

(2)結合(一拆三)+(二併一)+(二併一)

例：$S_{8a}\rightarrow S_{8b}$、$S_{14a}\rightarrow S_{14b}$、$S_{32a}\rightarrow S_{32b}$、$S_{39a}\rightarrow S_{39b}$

$$
\begin{array}{rl}
 & \cancel{/a}=/f+/g+\cancel{/c} \\
 & /b+\cancel{/c}=\cancel{/e} \\
+) & /d+\cancel{/e}=\cancel{/a} \\
\hline
 & /b+/d=/f+/g
\end{array}
$$

節點

節點指的是**可以成為S_n最大分母的正整數**，並非所有正整數都能成為節點，若某正整數分解後不超過二個質因數，且較小質因數的冪次不超過較大質因數的一半，則此正整數不為一折二之節點。

<性質四>若正整數$m = n^a k^b$，$n > k$，其中n為質數，a、b為正整數，k為1或質數，且$k^b < \frac{n}{2}$，則m不為一折二後的最大分母。

(1)一折二共有31個可能節點，

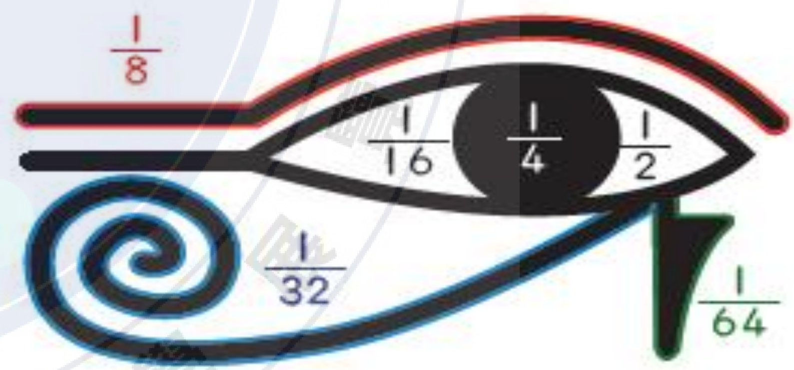
(2)一折三共有19個可能節點，

(3)一折四及一折五無可能節點，

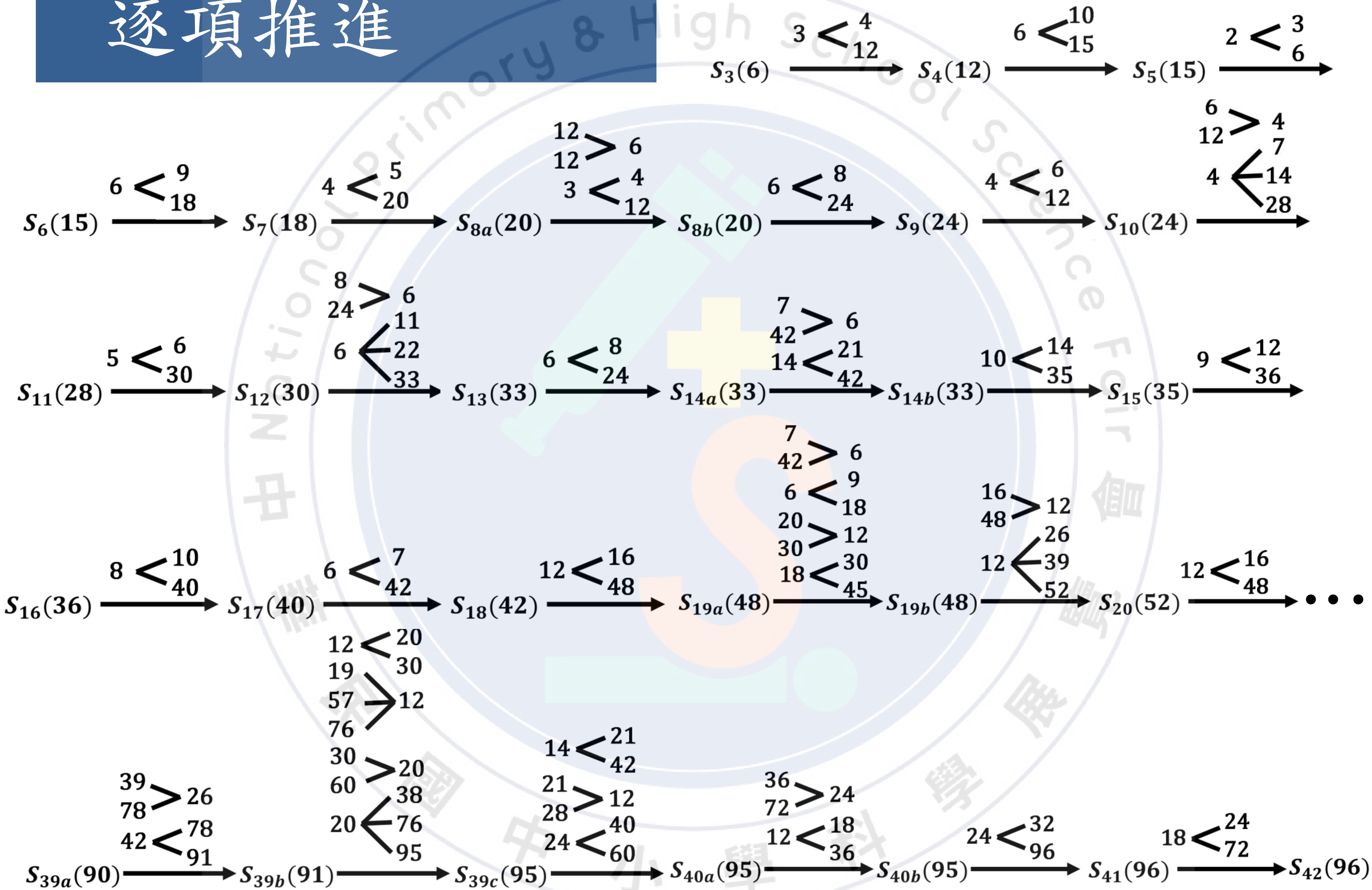
以上合計並扣除重覆後，不大於99的正整數中，

節點的可能值共36個。

3	12	15	18	20	24	28	30	33
35	36	40	42	45	48	52	54	56
60	63	66	70	72	75	76	77	78
80	84	85	88	90	91	95	96	99



逐項推進



S3(6) 3 < 4, 12 → S4(12) 6 < 10, 15 → S5(15) 2 < 3, 6 →
S6(15) 6 < 9, 18 → S7(18) 4 < 5, 20 → S8a(20) 12, 12 > 6; 3 < 4, 12 → S8b(20) 6 < 8, 24 → S9(24) 4 < 6, 12 → S10(24) 6, 12 > 4; 4 < 7, 14, 28 →
S11(28) 5 < 6, 30 → S12(30) 8, 24 > 6; 6 < 11, 22, 33 → S13(33) 6 < 8, 24 → S14a(33) 7, 42 > 6; 14 < 21, 42 → S14b(33) 10 < 14, 35 → S15(35) 9 < 12, 36 →
S16(36) 8 < 10, 40 → S17(40) 6 < 7, 42 → S18(42) 12 < 16, 48 → S19a(48) 7, 42 > 6; 6 < 9, 18; 20, 30 > 12; 18 < 30, 45 → S19b(48) 16, 48 > 12; 12 < 26, 39, 52 → S20(52) 12 < 16, 48 → • • •
S39a(90) 39, 78 > 26; 42 < 78, 91 → S39b(91) 12 < 20, 30; 19, 57, 76 > 12; 30, 60 > 20; 20 < 38, 76, 95 → S39c(95) 14 < 21, 42; 21, 28 > 12; 24 < 40, 60 → S40a(95) 36, 72 > 24; 12 < 18, 36 → S40b(95) 24 < 32, 96 → S41(96) 18 < 24, 72 → S42(96)

流程圖

以S_4推進至S_5為例。 S_4最優解 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

<步驟一>拆分原分數，判斷是否不改變最大分母。

→拆分小於最大分母12之半的原有分母2與4，

/2=/3+/6，與原分數重覆，不合

/4=/5+/20，20大於最大分母12，不合

/4=/6+/12，與原分數重覆，不合

結果：否。進行步驟二

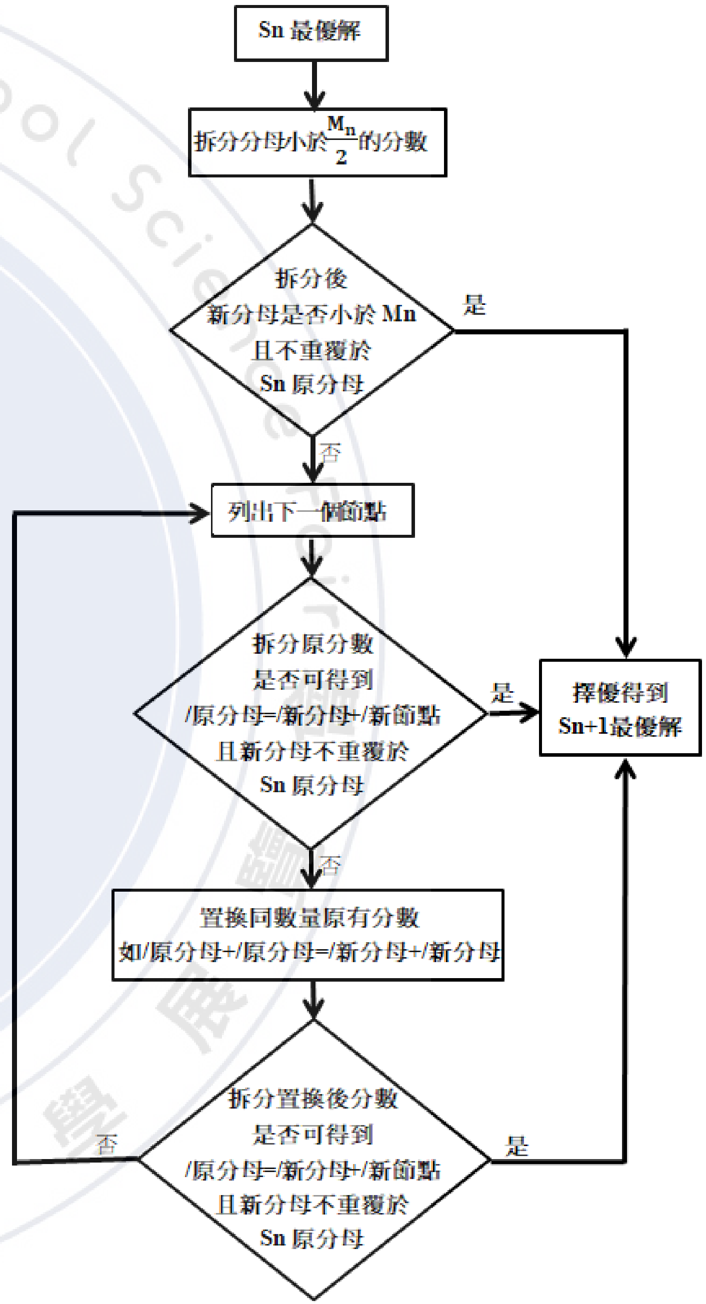
<步驟二>拆分原分數，判斷是否可以得到下一個節點。

→ 12的下一個節點是15，

可得惟一分解式為 $\frac{1}{6}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$

結果：可。

得S_5最優解 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$



最優解

(1)項數固定，相異單位分數之和為1，

最大分母最小。

(2)最優解可能非惟一解，非最大分母項的置換並不影響最優解。

例如S_8 = /3+/5+/9+/10+/12+/15+/18+/20

當中/3+/12 可置換為/4+/6，

成為S_8 = /4+/5+/6+/9+/10+/15+/18+/20

最大分母M_8=20不受影響。

又如項數為11時，有3組最優解如下。

<i> /5+/6+/8+/9+/10 +/15+/18+/20+/21+/24+/28

<ii> /5+/7+/8+/9+/10 +/14+/15+/18+/20+/24+/28

<iii>/6+/7+/8+/9+/10 +/12+/14+/15+/18+/24+/28

(3)目前已得到所有不超過42項的最優解如右表。

最優解列表

項數	最優解	最大分母	備註
3	/2+/3+/6	6	
4	/2+/4+/6+/12	12	/3=/4+/12
5	/2+/4+/10+/12+/15	15	/6=/10+/15
6	/3+/4+/6+/10+/12 +/15	15	/2=/3+/6
7	/3+/4+/9+/10+/12 +/15+/18	18	/6=/9+/18
8a	/3+/5+/9+/10+/12 +/15+/18+/20	20	/4=/5+/20
8b	/4+/5+/6+/9+/10 +/15+/18+/20		/3=/6+/6 /6+/12=/4
9	/4+/5+/8+/9+/10 +/15+/18+/20+/24	24	/6=/8+/24
10	/5+/6+/8+/9+/10 +/12+/15+/18+/20+/24	24	/4=/6+/12
11	/5+/7+/8+/9+/10 +/14+/15+/18+/20+/24 +/28	28	/4=/7+/14+/28 /6+/12=/4
⋮	⋮	⋮	⋮
40a	/12+/13+/17+/20+/21 +/26+/27+/30+/33+/34 +/35+/36+/38+/40+/42 +/44+/45+/48+/50+/52 +/54+/55+/56+/60+/63 +/65+/66+/70+/72+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95	95	/14=/21+/42 /21+/28=/12 /24=/40+/60
40b	/13+/17+/18+/20+/21 +/24+/26+/27+/30+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95		/12=/18+/36 /36+/72=/24
41	/13+/17+/18+/20+/21 +/26+/27+/30+/32+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/75 +/76+/77+/78+/80+/84 +/85+/88+/90+/91+/95 +/96	96	/24=/32+/96
42	/13+/17+/20+/21+/24 +/26+/27+/30+/32+/33 +/34+/35+/36+/38+/40 +/42+/44+/45+/48+/50 +/52+/54+/55+/56+/60 +/63+/65+/66+/70+/72 +/75+/76+/77+/78+/80 +/84+/85+/88+/90+/91 +/95+/96	96	/18=/24+/72

樹形圖

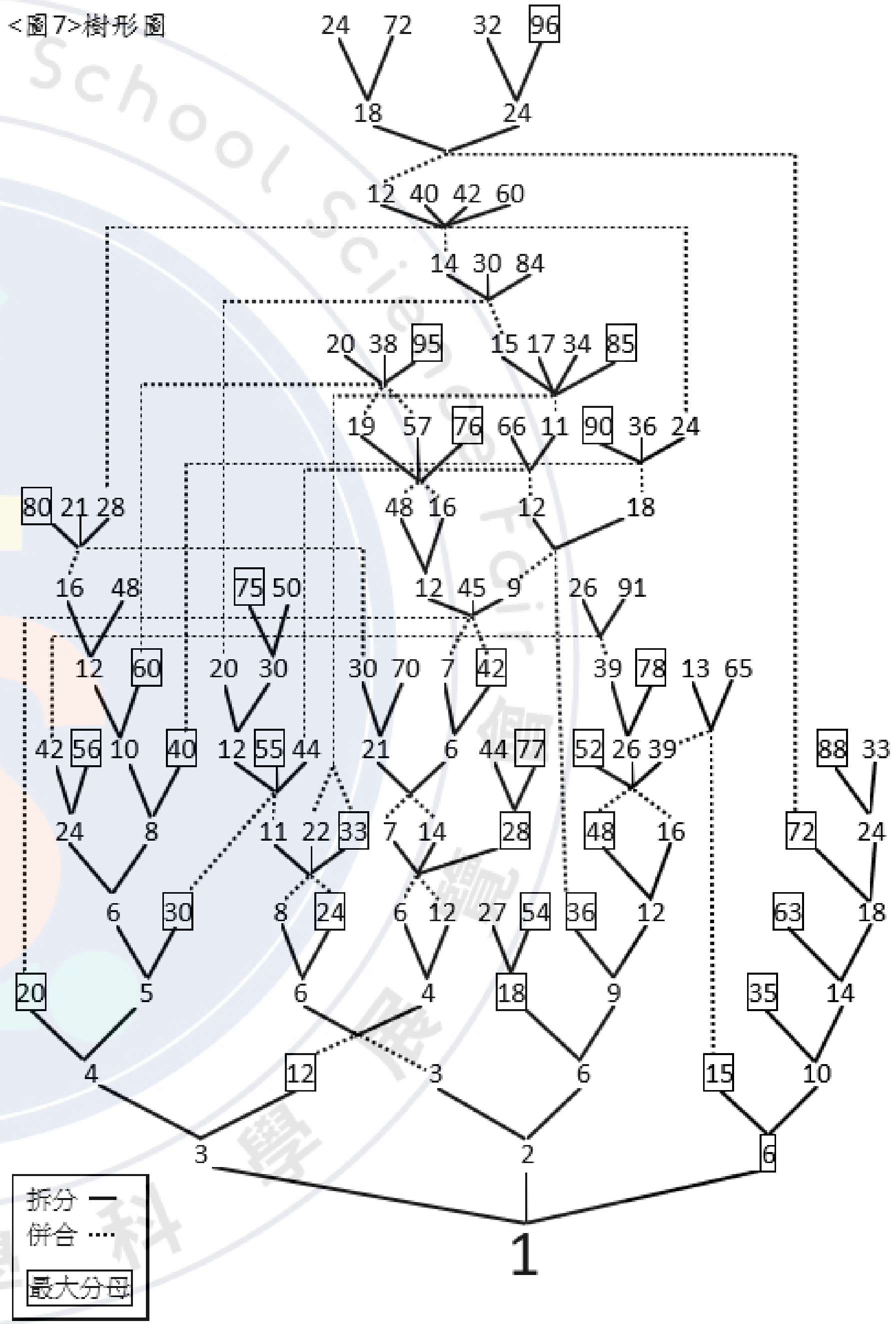
本研究使用右列的樹形圖來表達所有拆分過程，實線代表拆分，虛線代表併合，並在每一項數的最大分母加框作為識別。

16代 本研究的樹形圖有16代，與西山的8代樹形圖有很大的不同。西山的研究偏向於在二位數限制下儘量拆出最多項數的單位分數，而非得到特定項數的最優解。

順序 本研究的樹形圖發展順序不能顛倒，這與西山的樹形圖不同，其葉子的生長先後順序不一定互相關聯。

何者最優？ 若以最優解定義的角度來看，本研究得到42項最大分母為96。而西山的最後結果為99，並非最優解。

<圖7>樹形圖



回顧與展望

回顧西山的研究，偏向於儘量拆出最多項數的單位分數，而非得到特定項數的最優解。是否有機會超越西山的結論，在二位數的限制下得到43項的成果呢？答案是否定的。因為/99僅能由/18=/22+/99得到，而/18已經拆分為/24+/72，因此下一個節點將來到100，惟一的可行拆分為/20=/25+/100，故M_{43}=100 。

展望和為1的單位分數最優解問題在分母不超過99時，僅停留在一拆二或一拆三的探索，但若探討分母超過99的最優解，後續立刻要面對一拆四及相關拆併換的各種可能變化。

數學家哈爾莫斯（P. Halmos）說：「問題是數學的心臟」，我們設計了一道題目來呼應開端的老人分牛問題並作為本研究的結尾。

問題「某位國王有99個兒子，過世後留下數量龐大的金幣，遺囑特別規定，並非每一個兒子都可以分到金幣，兒子們必須按照排行的倒數的比例來分配，例如排行20可以分到遺產的20分之1，而且必須把金幣剛好分完，請問最多有幾個兒子可以分到金幣？對應的金幣總數量又是多少？」

VBA程式驗證

使用EXCEL的VBA語言進行最優解驗證測試，測試至**13項**的結果顯示結論正確，但若繼續測試較大項數最優解，以現有設備建置測試環境所需測試時間則遠超過現階段所能負荷，我們將所得驗證結果及所需時間列表如右。

項數	最優解分母列舉	所需時間
3	2 3 6	＜1秒
4	2 4 6 12	＜1秒
5	2 4 10 12 15	＜1秒
6	3 4 6 10 12 15	1秒
7	3 4 9 10 12 15 18	10秒
8	3 5 9 10 12 15 18 20	1分鐘
9	4 5 8 9 10 15 18 20 24 4 6 8 9 10 12 15 18 24	6分鐘20秒
10	5 6 8 9 10 12 15 18 20 24	20分鐘30秒
11	5 6 8 9 10 15 18 20 21 24 28 5 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 6 7 8 9 10 12 14 15 18 24 28	4小時40分鐘
12	4 8 9 10 12 15 18 20 21 24 28 30 6 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 30	20小時
13	4 8 9 11 12 18 20 21 22 24 28 30 33 4 8 10 11 12 15 20 21 22 24 28 30 33 4 9 10 11 12 15 18 20 21 22 28 30 33 5 8 9 10 11 12 18 21 22 24 28 30 33 5 8 9 10 11 15 18 20 21 22 24 28 33 6 7 8 9 11 14 18 20 22 24 28 30 33 6 7 8 10 11 14 15 20 22 24 28 30 33 6 7 9 10 11 14 15 18 20 22 28 30 33 6 8 9 10 11 12 15 18 20 22 24 30 33 6 8 9 10 11 12 15 18 21 22 24 28 33 7 8 9 10 11 12 14 15 18 22 24 28 33	252小時

參考資料

一、文耀光。古埃及的單位分數問題。

二、https://oeis.org/A030659。

三、Yutaka Nishiyama。UNIT FRACTIONS THAT SUM TO 1。

四、宋彥橙等。西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)─未完成的埃及分數問題。