中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

角平分線的「正交一點」可以不止這樣 -*n* 邊形中角平分線正交的性質探討

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國二 許宸諺 國二 鍾秉哲	鄭芬如

關鍵詞：角平分線、正交、內分角圓內接四邊形

摘　要

本研究從每組間隔 a（$a\in\mathbb{N}$）個內角的二條角平分線皆正交之不規則邊長 n 邊形中，發現在 $a+5$ 邊形開始產生第一個內分角圓內接四邊形。研究從 $2a+5$ 邊形開始，做為變動角的 $\angle A_0$ 及 $\angle A_{n-1}$ 之兩角和與其他固定式內角之間出現的規律關係，並探討到 $4a+5$ 邊形。研究找出在這些條件下的 n 邊形中「內分角圓內接四邊形」個數、正交點數與 n、a 的關係一般式。若將該 n 邊形邊長改為等差關係後，設定第一邊邊長為 p，邊長增加的公差為 d，在每個固定式內角皆為平均角度時，藉由設定基準高、判別高、平行距為工具，發現最多可作到 $4a+4$ 邊形。研究亦發現正交點間的距離與 a、d 有特殊的關係，且在探討正交點間的距離時，找出可由一條恆等式來呈現基準高、平行距和正交點距離彼此的關係更為精簡。

壹、研究動機

本研究從「任意四邊形任兩相鄰內角的角平分線交點會共圓」（文獻[3]）此性質開始探討，在任意 n 邊形中，所有角的角平分線之交點是否也會共圓？起初，我們只利用作圖的方式，試著移動頂點，使角平分線的交點有共圓的可能，但在經過多次實驗後，發現要利用這些交點形成一個圓內接多邊形有很多複雜的情形。因此決定找出形成圓內接四邊形的條件，研究利用只要一組直角對角互補特性來設定由一個 n 邊形中，分別讓每組間隔 a 個內角的角平分線產生正交，以達成形成圓內接四邊形之目的，並以此作為研究假設，並列出六個猜想做為本文探討的主要內容。「猜想一」：在此種 n 邊形中，所有不同內角間是否有規律關係。「猜想二」：在改設定固定式內角皆

為平均角度時，能做到之最多邊數與 a 的關聯。「猜想三」：每組間隔 a 個內角之角平分線正交點所形成的圓內接四邊形個數與 n、a 的關係。另外若將固定式內角皆為平均角度的 n 邊形之邊長設定為等差關係（之後稱等差 n 邊形），則發現邊長間存有平行的關係，於是進行「猜想四」：平行的對應邊之距離關係探討與「猜想五：等差 n 邊形最多邊數與未設定等差邊長之 n 邊形最多邊數的差異比較。最後，在作圖中，我們又發現正交點之間好像有固定的距離、軌跡後，繼續探討「猜想六」：正交點間的距離是否存有什麼規律？

貳、研究目的

本研究首先在不規則邊長的 n 邊形中，先讓每組二條間隔 a 個內角之角平分線正交，使其交點形成的四邊形（內分角圓內接四邊形）因對角互補產生外接圓後，進一步探討此種 n 邊形中與上述六項猜想的具體關係。

一、該 n 邊形中變動角之和與固定式內角間的倍數關係及固定式內角之間的關係一般式。

二、在該 n 邊形中每個固定式內角角度的設定與最大邊數 n 與 a 的關係。

三、該 n 邊形中角平分線的正交點數與每組正交角平分線所圍成的「內分角圓內接四邊形」個數的關係。

再將 n 邊形之不規則邊長探討延伸成等差的關係，設定第一邊長為 p，公差為 d 的等差 n 邊形，繼續探討：

四、設計邊與邊、點與邊之間的三種距離：**基準高、判別高與平行距**，其與三變數 a、p、d 的關係。

五、該 n 邊形中每個固定式內角皆為平均角度 θ_a 時，三變數 a、p、d 與最大邊數 n 的關係，並與不規則邊長的 n 邊形之最大邊數 n 進行比較。

六、探討每個正交點所圍成的圖形以及相鄰正交點間的距離關係。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、GSP 動態幾何繪圖軟體、SmartDraw 繪圖軟體、GGB 繪圖軟體。

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與已知的性質：

名詞定義

1. 角度的寫法新定義：本研究假設 n 邊形中原本完整內角的表示法為 $\angle A_t (t \in \mathbb{N}$ 或 $0)$，如圖 1，例如：$\angle A_0A_1A_2 \to \angle A_1$；如果該角被其角平分線分成兩個半角時，其半角則表示成 $\frac{1}{2}\angle A_t$。

2. 頂點下標的標示法：如圖 1 所示，設第一個頂點為 A_0，從 A_0 點依逆時針方向第一條角平分線是在第二個頂點上產生，所以將第二個頂點下標寫成 A_1，其他各點依此類推。

3. $G_{i,i+a+1}$：為 n 邊形中間隔 a 個內角的 $\angle A_i$、$\angle A_{i+a+1}$ 二內角角平分線的正交點，如圖 1，當 $i=2$，$a=1$時，$G_{2,4}$為 $\angle A_2$ 和 $\angle A_4$ 的角平分線正交的交點。

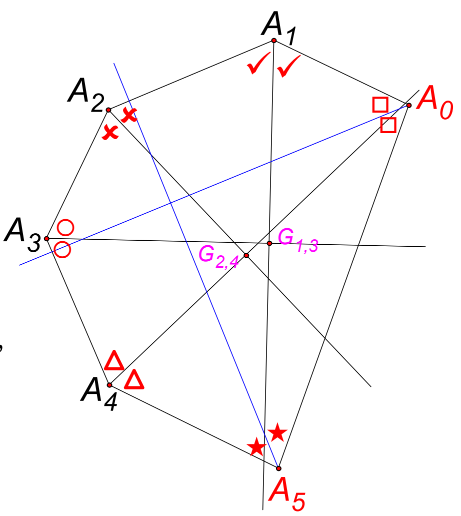


圖 1：名詞定義示意圖

4. 變動角：如圖 1 所示，除 $\angle A_0$ 和 $\angle A_5$ 以外的四個角，皆會產生可固定的角平分線，可藉由分別移動點 A_5 和點 A_0 使其他角平分線正交，如移動點 A_0、點 A_5 可以分別控制 $\angle A_1$、$\angle A_4$ 的角平分線使其與 $\angle A_3$、$\angle A_2$ 的角平分線正交，於是定義 n 邊形中 $\angle A_5$ 和 $\angle A_0$ 為變動角，其餘的角為固定式內角。每個 n 邊形中只會有兩個變動角為 $\angle A_0$ 和 $\angle A_{n-1}$。

5. 內分角圓內接四邊形：由$\angle A_i$、$\angle A_{i+1}$、$\angle A_{i+a+1}$、$\angle A_{i+a+2}$的角平分線所圍成的四邊形，因為對角互補，由性質 1 可知該四邊形會有一個外接圓，我們稱此類四邊形為內分角圓內接四邊形，如圖 1 中的四邊形$G_{1,3}I_{3,4}G_{2,4}I_{1,2}$。$I_{3,4}$為$\angle A_3$和$\angle A_4$的角平分線之交點。

6. 分角線正交 n 邊形：如圖 1，由間隔 1 個內角的$\angle A_2$、兩個半角$\frac{1}{2}\angle A_1$、$\frac{1}{2}\angle A_3$與正交點$G_{1,3}$夾出的直角所圍成的四邊形$A_1A_2A_3G_{1,3}$，我們定義為『分角線正交$a+3$邊形』。

已知性質

性質 1[1]. 圓內接四邊形的兩組對角分別互補

性質 2[3]. 如圖 2，在任意四邊形 $ABCD$ 中，其角平分線的 4 個交點會共圓（符合性質 1 之性質）

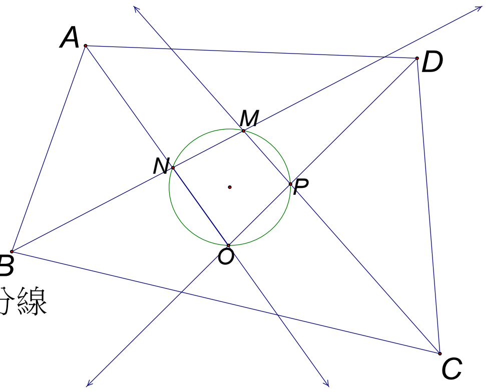


圖 2：性質 2 示意圖

證明：$\because \angle MNO=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle ABC\right)$、$\angle MPO=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle BCD+\frac{1}{2}\angle CDA\right)$

$$\therefore \angle MNO+\angle MPO=360^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD+\frac{1}{2}\angle CDA\right)$$

$$=360^\circ-\left(\frac{1}{2}\times 360^\circ\right)=180^\circ \qquad \text{(對角互補)}$$

【研究架構流程圖】

四邊形中任兩內角分角線交點會共圓

→ 設定不規則邊長的 n 邊形中，間隔 a 個內角分角線正交的交點會共圓

→ 探討：1.變動角與固定式內角的關係式(推論 1)；
2.固定式內角之間的關係式(推論 2)；
3.固定式內角的角度設定求最大邊數與 a 的關係(推論 3)
4.內分角圓內接四邊形個數與 n、a 的關係(推論 4)。

→ 設定邊長為等差關係的 n 邊形中，第一邊長為 p，邊長公差為 d，間隔 a 個內角分角線正交的交點會共圓

→ 定義基準高、判別高與平行距並探討與 a、p、d 的關係(推論 5)

→ 利用基準高和判別高得到最多邊數比值判別法(推論 6)

→ 對於任意$t\in\mathbb{N}$，$\angle A_t$的角平分線與$\angle A_{t+(4a+4)(j-1)}$ $(j=2,3,4\cdots)$ 的角平分線重合(推論 7)

→ 探討正交點所圍成的圖形和正交點之間的距離(推論 8)

有了上述的性質 1、2 為基礎，本研究開始從性質 2 推廣到五、六、七、八、…、n 邊形，嘗試尋找在設定 4 個交點形成的四邊形中，只要一組直角對角互補之條件下，不規則邊長的多邊形中如何能產生最多內分角圓內接四邊形的條件，以及該條件與邊數 n、角度的關係式及其他可能存在的規律關係。

二、在不規則邊長的 *n* 邊形中探討變動角與其他角度的關係一般式

為了找出最多可以作出幾邊形，並尋找變動角與固定式內角之間的關係，我們使用前述提出的方法：

首先，如圖 1 所示，在六邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ 中的四邊形 $A_1A_2A_3G_{1,3}$ 中，$\angle A_1$ 和 $\angle A_3$ 的角平分線正交點為 $G_{1,3}$，則 $\frac{1}{2}\angle A_1+\angle A_2+\frac{1}{2}\angle A_3=360°-90°=270°\cdots$①，同理

$\frac{1}{2}\angle A_2+\angle A_3+\frac{1}{2}\angle A_4=270°\cdots$②，再將上二式相加

$\Rightarrow\frac{1}{2}\angle A_1+\frac{3}{2}\angle A_2+\frac{3}{2}\angle A_3+\frac{1}{2}\angle A_4=270°\times2\ldots\ldots$③；

又六邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ 內角和為 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4$ $+\angle A_5+\angle A_0=(6-2)\times180°\ldots$④，則④-③可得到

$\Rightarrow\frac{1}{2}\angle A_1-\frac{1}{2}\angle A_2-\frac{1}{2}\angle A_3+\frac{1}{2}\angle A_4+\angle A_5+\angle A_0=(6-2)\times180°$ $-270°\times2$，整理之後得到 $\angle A_0+\angle A_5=(6-2)\times180°-270°\times2$ $-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_4)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_3)$，又讓①及②式等號左邊相等，可得到相鄰內角和的關係式：$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_3+\angle A_4$。其他 n 邊形變動角及相鄰內角和關係式依此類推。我們將正交的兩條角平分線所屬的內角位置分成中間間隔一個、二個、三個內角、…、等情況來分析，觀察間隔 a 個內角時，可以作出的 n 邊形是有限的，以下是探討結果。

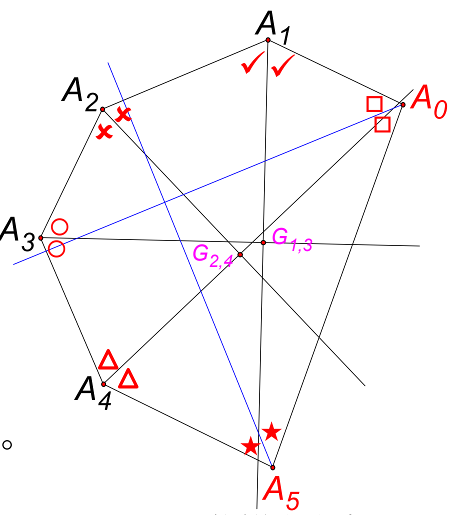


圖 1：推導變動角關係式示意圖

(一)間隔一個內角時（$a=1$）：

1. 六邊形（當 $a=1$ 時，$n=6$ 為最小值），如圖 **3-1**

變動角 $\boxed{\angle A_0+\angle A_5=(6-2)\times 180°-270°\times 2-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_4)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_3)}$，此時出現相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_3+\angle A_4$、不相鄰內角和關係式：無，但六邊形內已有 **1** 個以 $G_{1,3}$、$G_{2,4}$ 為對角頂點的「內分角圓內接四邊形」。

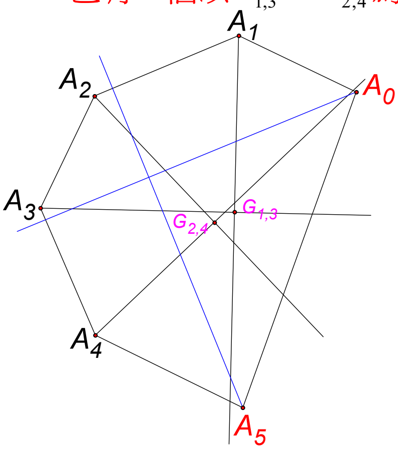


圖 3-1

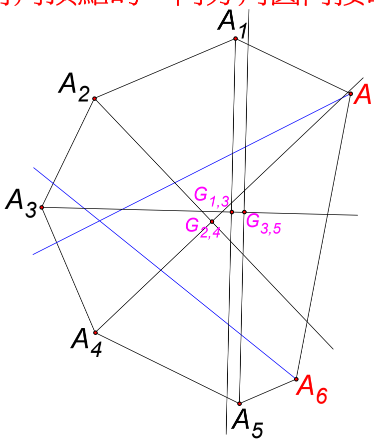


圖 3-2

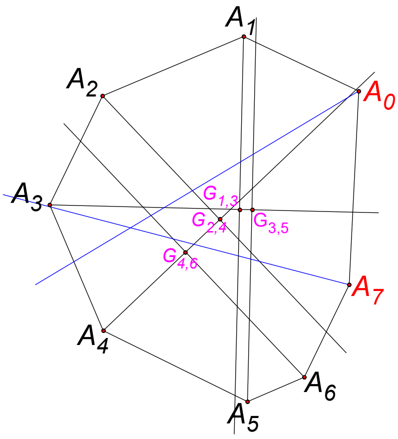


圖 3-3

2. 七邊形（出現完整的規律），如圖 **3-2**

同六邊形一樣，可得變動角 $\angle A_0+\angle A_6$ 與其他固定式內角的關係式為

$\Rightarrow$ 變動角 $\boxed{\angle A_0+\angle A_6=(7-2)\times 180°-270°\times 3-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_5)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_4)+\angle A_3}$

上式中最後一項出現 1 倍的完整內角 $\angle A_3$（稱全角）即表示開始出現完整的規律。

相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_3+\angle A_4\cdots$ ①、$\angle A_2+\angle A_3=\angle A_4+\angle A_5\cdots$ ②，由①-②後經整理得到不相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_5=2\angle A_3$。七邊形內有 **2**（**1+1**）個分別以 $G_{1,3}$ 和 $G_{2,4}$、$G_{3,5}$ 和 $G_{2,4}$ 為對角頂點的「內分角圓內接四邊形」。

3. 八邊形，如圖 **3-3**，同六、七邊形一樣，同理得到變動角 $\angle A_0+\angle A_7$ 的關係式（③式），也得到相鄰內角和關係式與不相鄰內角和關係式

$$\boxed{\angle A_0+\angle A_7=(8-2)\times 180°-270°\times 4-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_6)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_5)+\angle A_3+\angle A_4\cdots③}$$

相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_3+\angle A_4$、$\angle A_2+\angle A_3=\angle A_4+\angle A_5$、$\angle A_3+\angle A_4=\angle A_5+\angle A_6$；不相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_5=2\angle A_3$、$\angle A_2+\angle A_6=2\angle A_4$

八邊形內有 **4**（**1+1+2**）個分別以 $G_{1,3}$ 和 $G_{2,4}$ 、 $G_{3,5}$ 和 $G_{2,4}$ 、 $G_{1,3}$ 和 $G_{4,6}$ 、 $G_{3,5}$ 和 $G_{4,6}$ 為對角頂點的「內分角圓內接四邊形」。

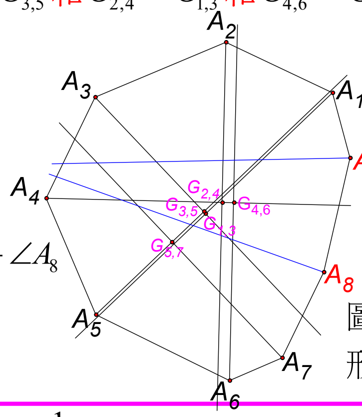


圖 4：九邊形示意圖

4. 九邊形（當 $a=1$ 時，$n=9$ 為最大值），如圖 4

同六、七、八邊形一樣，九邊形的變動角 $\angle A_0+\angle A_8$ 的關係式為

$$\boxed{\angle A_0+\angle A_8=(9-2)\times180^\circ-270^\circ\times5-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_7)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_6)+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5}$$

以及相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_3+\angle A_4$ 、 $\angle A_2+\angle A_3=\angle A_4+\angle A_5$ 、

$\angle A_3+\angle A_4=\angle A_5+\angle A_6$ 、 $\angle A_4+\angle A_5=\angle A_6+\angle A_7$ 和

不相鄰內角和關係式：$\angle A_1+\angle A_5=2\angle A_3$ 、 $\angle A_2+\angle A_6=2\angle A_4$ 、 $\angle A_3+\angle A_7=2\angle A_5$ 。

九邊形內有 **7**（**1+1+2+3**）個分別以 $G_{1,3}$ 和 $G_{2,4}$ 、 $G_{1,3}$ 和 $G_{4,6}$ 、 $G_{3,5}$ 和 $G_{2,4}$ 、 $G_{3,5}$ 和 $G_{4,6}$ 、 $G_{1,3}$ 和 $G_{5,7}$ 、 $G_{2,4}$ 和 $G_{5,7}$ 、 $G_{4,6}$ 和 $G_{5,7}$ 為對角頂點的「內分角圓內接四邊形」。

十邊形（當 $a=1$ 時，$n=10$ 出現 $\angle A_{10}$ 內凹），**如圖 5**，經作圖實驗發現，做到超過九邊形($n=10,11,\ldots$)時，皆為凹多邊形，於是推論並求當「間隔一個內角」系列的圖形之可能關係為何？

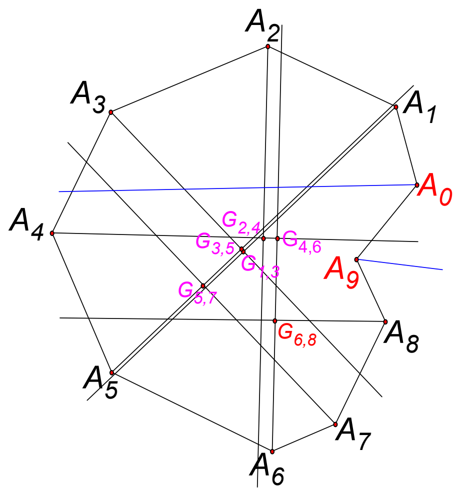


圖 5：凹十邊形示意圖

小結：所以，在間隔 a 個內角中，當 $a=1$ 時，至少從六 $(a+5=1+5=6)$ 邊形開始會產生「內分角圓內接四邊形」，且從七 $(2a+5=2\times1+5=7)$ 邊形開始出現完整的規律，至多做到九 $(4a+5=4\times1+5=9)$ 邊形即停止，

變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 的關係式為

$$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180^\circ-\left[(4-2)\times180^\circ-90^\circ\right]\times(n-4)+\left[\sum_{k=1}^{2}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+\left(\sum_{k=3}^{n-4}\angle A_k\right)$$

其中 $\angle A_0$ 和 $\angle A_{n-1}$ 為變動角，且 $7\le n\le9$ 。

$\boxed{4=a+3=1+3}$

(二) 間隔二個內角、三個內角時（$a=2,3$）：

參考圖 6-1～6-8 和圖 7-1～7-11，比照間隔一個角的分析方式，分析間隔二、三個內角時，n 的最小值、最大值以及開始產生完整規律之邊數，和變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$、相鄰、不相鄰內角和關係式與內分角圓內接四邊形個數統整在表格一～四中，最終得出 n 的最小值、最大值分別為 7 和 9、13 和 17，而變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 關係式中，兩變動角之和會與固定式內角出現兩角之和、連續全角和的倍數關係，且兩種內角和關係式之形式皆與 a 有關。

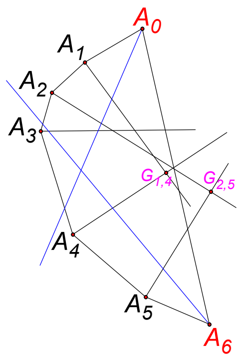


圖 6-1

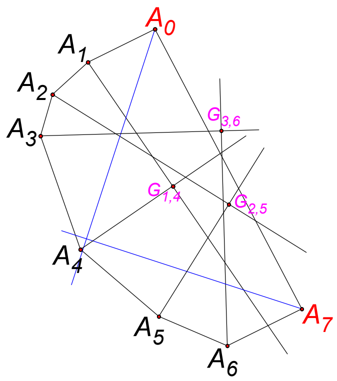


圖 6-2

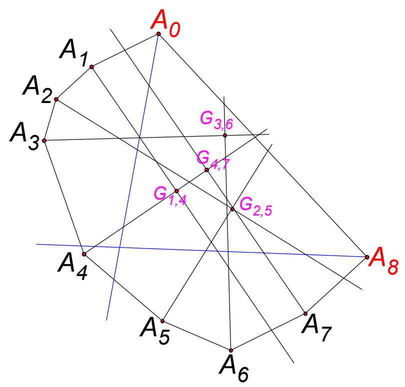


圖 6-3

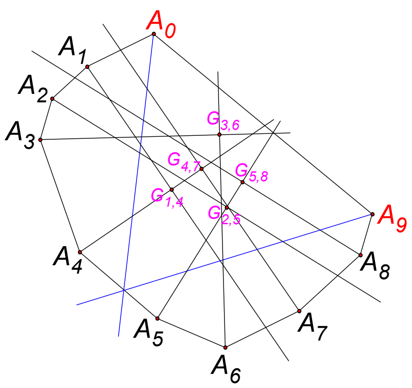


圖 6-4

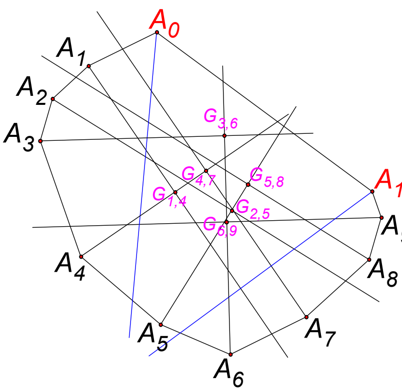


圖 6-5

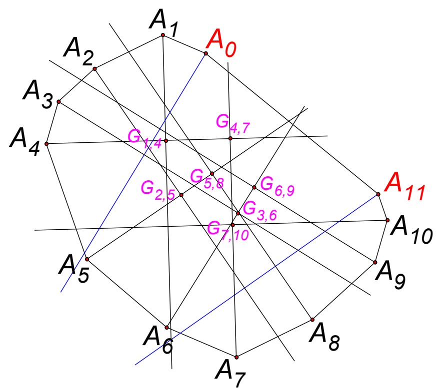


圖 6-6

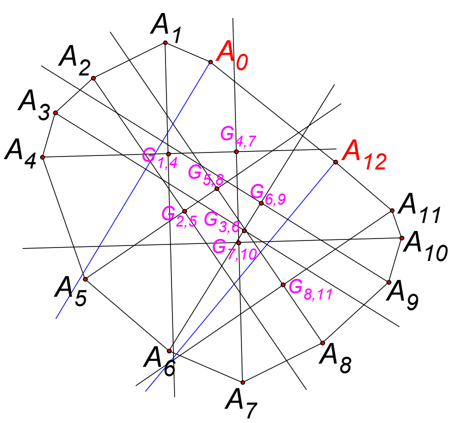


圖 6-7

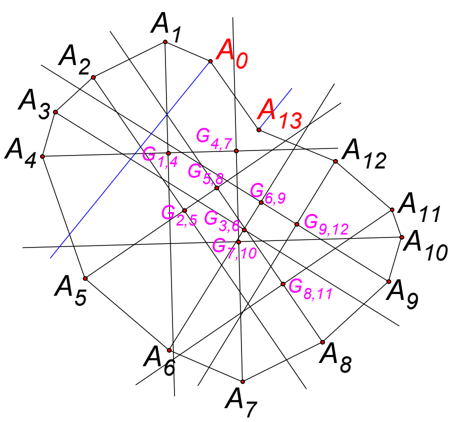


圖 6-8

圖 6-1～6-7：每組間隔二個內角角平分線皆正交的七～十三邊形，
圖 6-8 為產生內凹的十四邊形。

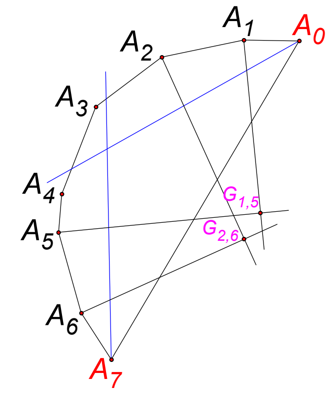


圖 7-1

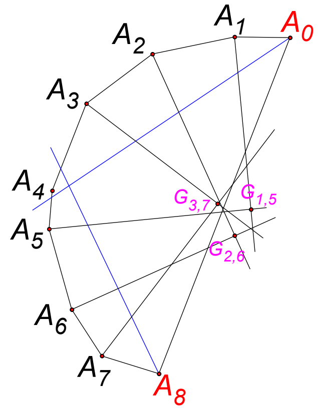


圖 7-2

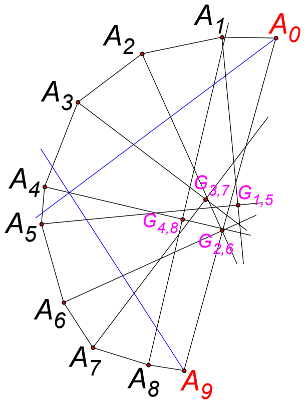


圖 7-3

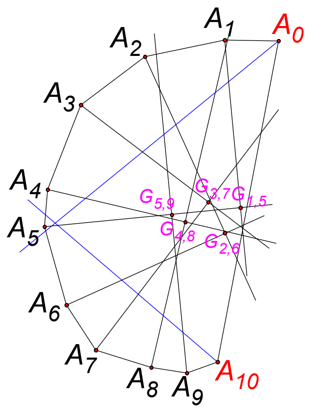


圖 7-4

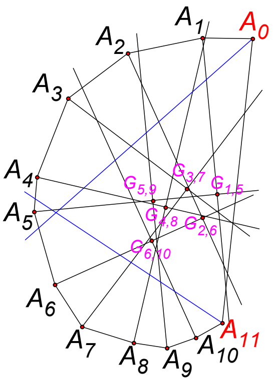


圖 7-5

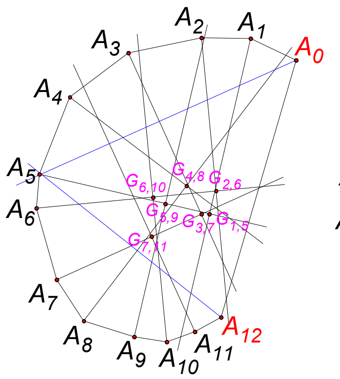


圖 7-6

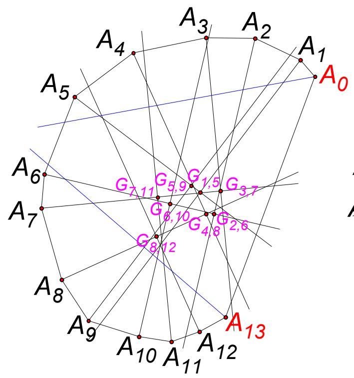


圖 7-7

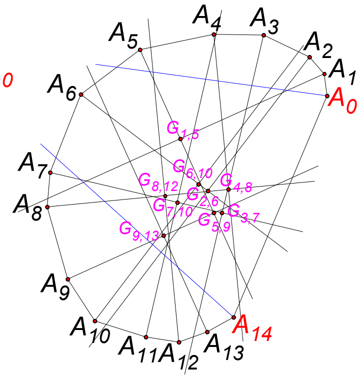


圖 7-8

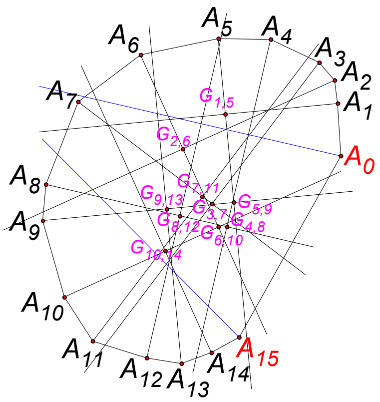


圖 7-9

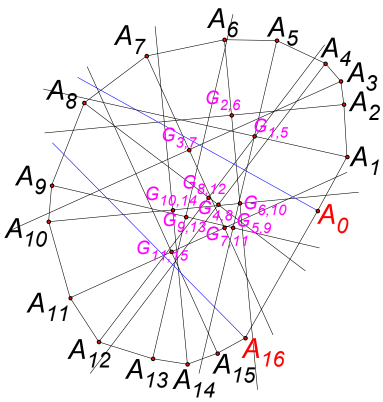


圖 7-10

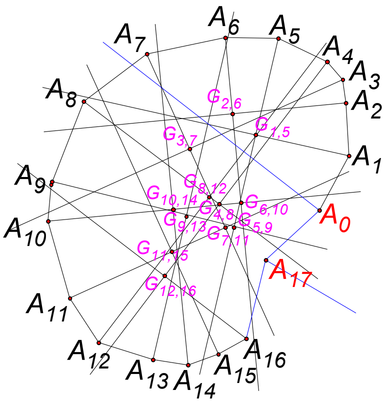


圖 7-11

圖 7-1～7-10：每組間隔三個內角角平分線皆正交的八～十七邊形，
圖 7-11 為產生內凹的十八邊形。

表格一：間隔二個內角平分線正交時，n 邊形中變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 與固定式內角的關係式

邊 數	變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 關係式 $(a=2)$
7(n_{min})	$\angle A_0+\angle A_6=(7-2)\times180°-450°\times2-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_5)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_4)+\angle A_3$
8	$\angle A_0+\angle A_7=(8-2)\times180°-450°\times3-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_6)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_5)+\frac{3}{2}(\angle A_3+\angle A_4)$

9(開始產生完整規律)	$\angle A_0+\angle A_8=(9-2)\times180^\circ-450^\circ\times4-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_7)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_6)+\frac{3}{2}(\angle A_3+\angle A_5)+2\angle A_4$
⋮	⋮
13(n_{max})	$\angle A_0+\angle A_{12}=(13-2)\times180^\circ-450^\circ\times8-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_{11})+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_{10})+\frac{3}{2}(\angle A_3+\angle A_9)+2(\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle A_8)$
n	$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180^\circ-[(5-2)\times180^\circ-90^\circ]\times(n-5)+\left[\sum_{k=1}^{3}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+(2\sum_{k=4}^{n-5}\angle A_k)$

表格二：間隔二個內角平分線正交時，n 邊形中固定式內角間的關係式

邊數	相鄰內角和關係式 $(a=2)$	累計數量	不相鄰內角和關係式 $(a=2)$	累計數量
7	$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_4+\angle A_5$	1	無	0
8	再加 $\angle A_2+\angle A_3=\angle A_5+\angle A_6$	2	$\angle A_1+\angle A_6=\angle A_3+\angle A_4$	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	再加 $\angle A_7+\angle A_8=\angle A_{10}+\angle A_{11}$	7	再加 $\angle A_6+\angle A_{11}=\angle A_8+\angle A_9$	6

表格三：間隔三個內角平分線正交時，n 邊形中變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 與固定式內角的關係式

邊 數	變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 關係式 $(a=3)$
8(n_{min})	$\angle A_0+\angle A_7=(8-2)\times180^\circ-630^\circ\times2-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_6)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_5)+\angle A_3+\angle A_4$
⋮	⋮
11(開始產生完整規律)	$\angle A_0+\angle A_{10}=(11-2)\times180-630\times5-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_9)+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_8)+\frac{3}{2}(\angle A_3+\angle A_7)+\frac{5}{2}(\angle A_4+\angle A_6)+3\angle A_5$
⋮	⋮
17(n_{max})	$\angle A_0+\angle A_{16}=(17-2)\times180^\circ-630^\circ\times11-\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle A_{15})+\frac{1}{2}(\angle A_2+\angle A_{14})+\frac{3}{2}(\angle A_3+\angle A_{13})+\frac{5}{2}(\angle A_4+\angle A_{12})+3(\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle A_8+\angle A_9+\angle A_{10}+\angle A_{11})$
⋮	⋮

n	$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180°-[(6-2)\times180°-90°]\times(n-6)$ $+\left[\sum_{k=1}^{4}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+(3\sum_{k=5}^{n-6}\angle A_k)$

表格四：間隔三個內角平分線正交時，n 邊形中固定式內角間的關係式

邊數	相鄰內角和關係式$(a=3)$	累計數量	不相鄰內角和關係式$(a=3)$	累計數量
8	$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_5+\angle A_6$	1	無	0
9	再加 $\angle A_2+\angle A_3=\angle A_6+\angle A_7$	2	$\angle A_1+\angle A_7=\angle A_3+\angle A_5$	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	再加 $\begin{cases}\angle A_3+\angle A_4=\angle A_7+\angle A_8 \text{、}\\ \angle A_4+\angle A_5=\angle A_8+\angle A_9 \text{、}\\ \vdots \\ \angle A_{10}+\angle A_{11}=\angle A_{14}+\angle A_{15}\end{cases}$	10	再加 $\begin{cases}\angle A_2+\angle A_8=\angle A_4+\angle A_6 \text{、}\\ \angle A_3+\angle A_9=\angle A_5+\angle A_7 \text{、}\\ \vdots \\ \angle A_9+\angle A_{15}=\angle A_{11}+\angle A_{14}\end{cases}$	9

由前面每組間隔一、二、三個內角的角平分線皆正交時，可得出如推論 1 的規律關係式。

推論 1：在邊長不規則的 $n(2a+5\le n\le 4a+5)$ 邊形中，若間隔 a（$a\in\mathbb{N}$）個內角的角平分線皆正交時，則變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 的關係式為

$$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180°-\left[(a+1)\times180°-90°\right]\times(n-a-3)$$
$$+\left[\sum_{k=1}^{a+1}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+(a\sum_{k=a+2}^{n-a-3}\angle A_k)$$

證明：先列出每個分角線正交 a+3 邊形中固定式內角關係式，共 n-a-3 個，再搭配 n 邊形內角和公式，經運算找到固定式內角的係數是與 a 有關的函數。(因篇幅有限，詳細證明過程呈現在實驗日誌的附件中。)

三、不規則邊長的 *n* 邊形中探討間隔 *a* 個內角的角平分線正交時，內部相鄰、不相鄰內角和關係

在前面的探討過程中，已經有分析到在 n 邊形中，每組間隔 a 個內角的角平分線皆正交、且在推導變動角 $\angle A_0+\angle A_{n-1}$ 的關係式時，也同時得到相鄰內角和關係式與不相鄰內角和關係式，觀察其下標的變化規律後，將結果統整在推論 2 中。

推論 2：在邊長不規則的 $n(a+5\le n\le 4a+5)$ 邊形中，若間隔 a（$a=1,2,3,\ldots\ldots$）個內角的角平分線皆正交時，則固定式內角之間的關係式為

相鄰內角和關係式：$\angle A_m+\angle A_{m+1}=\angle A_{m+a+1}+\angle A_{m+a+2}$,且 $1\le m\le n-a-4$

不相鄰內角和關係式：$\angle A_m+\angle A_{m+a+3}=\angle A_{m+2}+\angle A_{m+a+1}$,且 $1\le m\le n-a-5$

證明：由前面表格二、四的結果，同樣是利用分角線正交 a+3 邊形中固定式內角關係式做運算推導就可以得到。(因篇幅有限，詳細證明過程呈現在實驗日誌的附件中。)

四、不規則邊長的 *n* 邊形中邊數最多的條件⇒從相等固定式內角找最多邊數 *n*

為了要讓圖形一般化，因此要讓 n 邊形的邊數達到最多，並使每個內角盡量大，另外每個邊長都盡量不一樣，以致於當邊數越多時，整個圖形越像橢圓形，例如間隔二個角的分角線正交最多可以作到十三邊形，如圖 8。

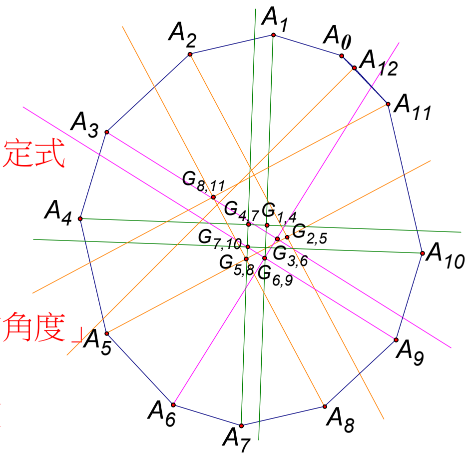


圖 8：當邊數越多，整體越像橢圓形。

為了邊數要最多、內角最大，在不規則邊長 n 邊形中每個固定式內角都會以半角或全角的形式用在推導上，且邊數越多的 n 邊形，其每個固定式內角度數就越接近，於是我們取「平均角度」的概念，設定每個固定式內角的角度都一樣，即分角線正交 $a+3$ 邊形中，固定式內角 $=\dfrac{(a+3-2)\times180^\circ-90^\circ}{a+1}=180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}$ 度。

有了平均角度的設定，搭配觀察到間隔 a 個內角的角平分線正交時，最少從 $a+5$ 邊形開始，可以得到第一個內分角圓內接四邊形，從 $2a+5$ 邊形開始，產生完整規律的變動角關係式，最多可以作到 $4a+5$ 邊形。統整這些規律的結果在推論 3 中。

推論 3：在任一邊長不規則邊長 n 邊形中，若間隔 a（$a\in\mathbb{N}$）個內角的角平分線皆正交，且 n 邊形中固定式內角皆為平均角度$\left(180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}\right)$度時，則此 n 邊形邊數 n 的範圍是 $a+5\le n\le 4a+5$，其中 $n=2a+5$ 時，始有完整規律的變動角關係式。

證明：**1.**由於產生 n 邊形的原則是要「做出至少一個內分角圓內接四邊形」，也就是產生兩個正交點，分別為 $G_{1,a+2}$ 和 $G_{2,a+3}$，故 $\angle A_1 \sim \angle A_{a+3}$ 為其最少的所有固定式內角，共 $a+3$ 個，再加上兩個變動角，所以共有 $a+5$ 個內角。

2.如圖 9 中需有 a+2 個關係式才會產生紅色框框的 $\frac{1}{2}\angle A_{a+2}$ 項，即可出現完整規律的變動角關係式，也就是從 a+5+a=2a+5 邊形開始；

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\angle A_1 + \overbrace{\angle A_2 + \ldots\ldots + \angle A_{a+1}}^{a\text{個角}} + \boxed{\frac{1}{2}\angle A_{a+2}} = (a+1)\times 180° - 90° \\ \frac{1}{2}\angle A_2 + \angle A_3 + \ldots\ldots + \angle A_{a+2} + \frac{1}{2}\angle A_{a+3} = (a+1)\times 180° - 90° \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\angle A_{a+1} + \angle A_{a+2} + \ldots\ldots + \angle A_{2a+1} + \frac{1}{2}\angle A_{2a+2} = (a+1)\times 180° - 90° \\ \boxed{\frac{1}{2}\angle A_{a+2}} + \angle A_{a+3} + \ldots\ldots + \angle A_{2a+2} + \frac{1}{2}\angle A_{2a+3} = (a+1)\times 180° - 90° \end{cases}$$

圖 9：當列到第 $a+2$ 項等式時，其總和出現了第一個「a 倍的全角」。

又二個固定式內角度數和為 $(n-2)\times\frac{90°}{a+1}$ 必小於 $360°$，則 $n<4a+6$，故 $n=4a+5$ 最大，如圖 8，$a=2$ 時最多作到十三邊形，故得證 ■

五、內分角圓內接四邊形數量與 *a*、*n* 的關係一般式

在前面所有分析間隔 a 個內角的不規則邊長 n 邊形中，發現每組固定式內角的角平分線皆正交時，產生的正交點數與內分角圓內接四邊形個數有規律的關係，在此只將間隔一、二個內角的情況合併列在表格五中，其餘均在實驗日誌後的附件中。表格五中內分角圓內接四邊形個數的排列中，有紅色的數字為第一次兩內角平分線平行的情況發生時該 n 邊形會增加的圓內接四邊形個數，且和前一個 n 邊形增加的個數一樣，此乃因為第一次角平分線平行時，新產生的正交點會和第一個正交點共線，接下來還會有第二、三、....次平行發生，產生新正交點也分別和第二、三、......個正交點共線，故角平分線平行情況發生後（含第一次平行）n 邊形內部內分角圓內接四邊形個數還是成等差數列的方式呈現。我們將兩種規律，利用高斯符號，將兩種情況合併為一個公式，其關係式如推論 4。

表格五：間隔一、二個內角時，內分角圓內接四邊形個數及其排列方式

	間隔一個內角，$a=1$				間隔二個內角，$a=2$						
n 邊形	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$	$n=13$
正交點個數及	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	8

其排列方式	2	2+1	2+1 +1	2+1 +1+1	2	2+1	2+1 +1	2+1 +1+1	2+1+1 +1+1	2+1+1 +1+1+1	2+1+1+1 +1+1+1
內分角圓內接四邊形個數及排列方式	1	2	4	7	1	3	5	8	12	17	23
	1	1+1	1+1 +2	1+1 +2+3	1	1+2	1+2 +2	1+2 +2+3	1+2+2 +3+4	1+2+2 +3+4+5	1+2+2+3 +4+5+6

推論 4： 參考表格五，若不規則邊長的 n 邊形中，當每組間隔 a 個內角的固定式內角平分線皆正交時，令正交點數 $O_{n,a}=n-a-3$，可得內分角圓內接四邊形個數為

$$\boldsymbol{Q_{n,a}}=\boldsymbol{C}_2^{\boldsymbol{O_{n,a}}}-[\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{a}-4]\times\left[\frac{\boldsymbol{n}}{2\boldsymbol{a}+5}\right]$$，其中 $C_n^m=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$，$[\ ]$ 為高斯符號。

證明：因篇幅有限，證明過程在實驗日誌的附件中。

六、邊長為等差關係的 *n* 邊形中角平分線正交的研究探討

將 n 邊形邊長改成等差關係後，需重新定義新名詞如下，前面的部分依舊沿用；之後稱邊長是等差關係的 n 邊形為**等差 *n* 邊形**，但最後一邊長不計入等差關係。

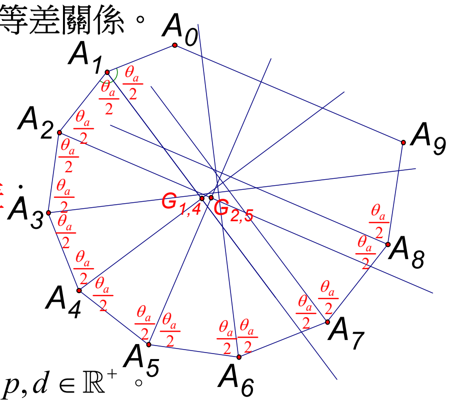


圖 10：名詞定義示意圖

新名詞定義

1. p、d、θ_a：p 為第 1 邊 $\overline{A_0A_1}$ 長度；d 為邊長增加的公差；θ_a 為平均角度，如圖 10 的等差多邊形中，$a=2$、$p=1$、$d=0.05$、$\theta_a=150^\circ$，$G_{1,4}$、$G_{2,5}$ 為正交點，其中 $a\in\mathbb{N}$，$p,d\in\mathbb{R}^+$。

2. 【新引理】如圖 11，在等差 n 邊形中，$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}\perp\overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}}$ 且 $\overline{A_iA_{i+1}}\,//\,\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}(i\geq 0)$。

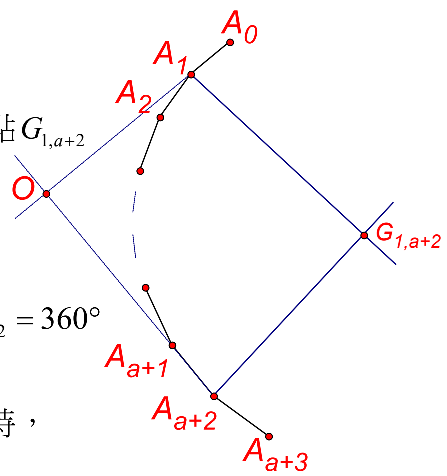


圖 11：引理示意圖

證明：如圖 11，作射線 $\overrightarrow{A_0A_1}$、$\overrightarrow{A_{a+2}A_{a+1}}$ 相交於點 O

$\because \angle A_1$、$\angle A_{a+2}$（間隔 a 個內角）的角平分線正交於點 $G_{1,a+2}$

$\therefore \angle A_1G_{1,a+2}A_{a+2}=90^\circ$ 又四邊形 $A_1G_{1,a+2}A_{a+2}O$ 內角和

$=(180^\circ-\frac{1}{2}\theta_a)+90^\circ+\frac{1}{2}\theta_a+\angle A_1OA_{a+2}=270^\circ+\angle A_1OA_{a+2}=360^\circ$

$\therefore \angle A_1OA_{a+2}=90^\circ\Rightarrow\overleftrightarrow{A_0A_1}\perp\overleftrightarrow{A_{a+1}A_{a+2}}$ 也就是在 $i=0$ 時，

$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}\perp\overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}}$ 成立，同理可證，當 i=1,2,3,4,…時，

$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}\perp\overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}}$ 仍然成立。又 $\overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}}$ 又會與 $\overleftrightarrow{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$ 垂直，即

$\overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}} \perp \overleftrightarrow{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$，所以 $\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$ ■

(一) 製造尋找最多邊數條件之工具

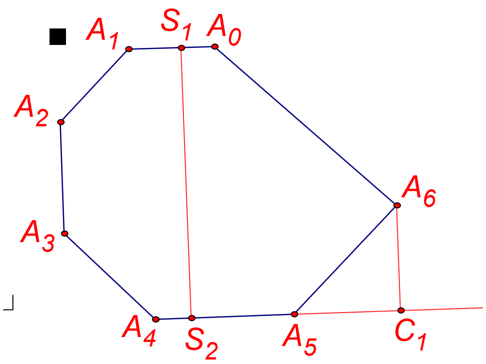


圖 12：判別高小於**基準高**

為了找出等差 n 邊形的最多邊數，我們採用新引理中提到的「各組對應平行邊距離」和「頂點與邊的距離」的比較法。如圖 12 的等差多邊形中，$a=1$ 的條件下，由引理可知，$\overline{A_0A_1}$ 會和 $\overline{A_4A_5}$ 平行 $(i=0)$，於是先定義「**基準高**」**是這兩條邊的距離**；接著再定義「**判別高**」**為點** A_m **到直線** $\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ **的距離，其中** $m \geq 2a+4$，為什麼要如此定義呢？如圖 12 所示，如果**判別高** $(\overline{A_6C_1})$ 小於**基準高** $(\overline{S_1S_2})$，代表在連接 $\overline{A_0A_m}$ $\left(\overline{A_0A_6}\right)$ 時，此多邊形為凸多邊形(做到七邊形)；如圖 13，如果**判別高** $(\overline{A_8C_2})$ 大於等於**基準高** $(\overline{S_3S_4})$，代表在連接 $\overline{A_0A_m}$ $\left(\overline{A_0A_8}\right)$ 時，此多邊形為凹多邊形(做到八邊形)，所以，要判斷最多能做到幾邊形時，只要用**基準高和判別高**進行比較，便可知每多做一條邊是否會內凹，因此可找出最多邊數。另外，各組平行邊之間的距離，也有類似的規律，於是定義了「**平行距**」**為線段** $\overline{A_iA_{i+1}}$ **到線段** $\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$ $(i \geq 0)$ 的距離。我們先將**基準高**、**平行距**、**判別高**的符號定義如下，與 a、p、d 的關係一般式統整歸納在推論 5 中。

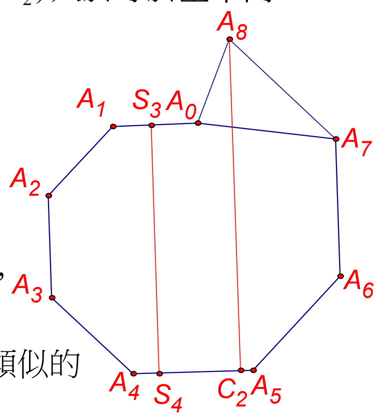


圖 13：**判別高大於基準高**

基準高：$\overline{A_0A_1}$ 到 $\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 的距離，符號為 $D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1}, \overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})$，如圖 14，$\overline{A_0A_1}$ 到 $\overline{A_6A_7}$ 的距離為 $D_{0.05}^{2,1}(\overline{A_0A_1}, \overline{A_6A_7})$。

平行距：$\overline{A_iA_{i+1}}$ 到 $\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$ 的距離，符號為 $D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}}, \overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)$，如圖 14，$\overline{A_2A_3}$ 到 $\overline{A_8A_9}$ 的距離為 $D_{0.05,2}^{2,1}\left(\overline{A_2A_3}, \overline{A_8A_9}\right)$。當 $i=0$ 時，為第一組**平行距**，其值會等於**基準高**，即 $D_{0.05}^{2,1}(\overline{A_0A_1}, \overline{A_6A_7}) = D_{0.05,0}^{2,1}\left(\overline{A_0A_1}, \overline{A_6A_7}\right)$。

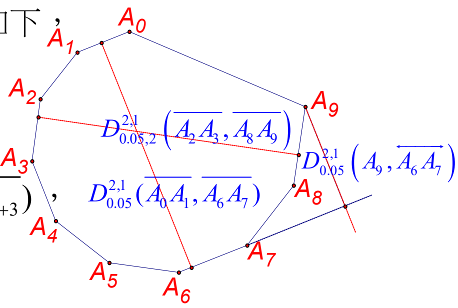


圖 14：**基準高**、**平行距**與**判別高**的舉例說明

判別高：點 A_m 到直線 $\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 的距離，符號為 $D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)$。判別高可分成兩種：

第一類判別高：$2a+4\le m\le 3a+4$；第二類判別高：$m\ge 3a+5$，如圖 14，A_9 到直線 $\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 的距離為 $D_{0.05}^{2,1}\left(A_9,\overleftrightarrow{A_6A_7}\right)$，屬於第一類判別高。

推論 5：在等差 n 邊形中，間隔 a 個內角的角平分線皆正交時，固定式內角為平均角度 θ_a、若第一邊長為 p、則邊長增加公差為 d 時，**基準高** $D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})$、**平行距** $D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}},\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)$ 及**判別高** $D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)$ 的一般式分別如下各式，

基準高 $D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=\left[p+(a+1)d\right]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin(\frac{90^\circ\times k}{a+1})\right]+1\right\}\cdots\cdots(1)$、

平行距 $D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}},\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)=\left[p+(a+i+1)d\right]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin(\frac{90^\circ\times k}{a+1})\right]+1\right\}\cdots\cdots(2)$，$i\ge 0$、

判別高 $D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)$

第一類判別高 $=\sum_{k=1}^{m-2a-3}\left[p+\left(2a+2+k\right)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\cdots\cdots(3-1)$，$2a+4\le m\le 3a+4$

第二類判別高 $=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+\left(2a+2+k\right)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)+\sum_{k=3a+4}^{m-1}\left(p+kd\right)\sin\left[\frac{90^\circ\times\left(4a+4-k\right)}{a+1}\right]\cdots\cdots(3-2)$，

其中　$m\ge 3a+5$。

證明：**1.** 如圖 15，分別過點 A_1、$A_2\ldots A_a$、$A_{a+3}\ldots A_{2a+1}$、A_{2a+2} 作與 $\overline{A_0A_1}$ 平行的射線以及過點 A_2、$A_3\ldots A_{a+1}$、$A_{a+2}\ldots$ A_{2a}, A_{2a+1} 作與前面所作平行線互相垂直的直線且分別交於點 h_1、$h_2\ldots$ h_a、$h_{a+3}\ldots h_{2a+1}$、h_{2a+2}。

又如圖 16 所示，$\angle h_1A_1A_2=180°-\theta_a$、

$\angle h_2A_2A_3=\angle h_2A_2r_1+\angle r_1A_2A_3=\angle h_1A_1A_2+(180°-\theta_a)=2(180°-\theta_a)$

$\angle h_3A_3A_4=\angle h_3A_3r_2+\angle r_2A_3A_4=\angle h_2A_2A_3+(180°-\theta_a)=3(180°-\theta_a)$

依此類推可得 $\angle h_aA_aA_{a+1}=\angle h_{a+3}A_{a+3}A_{a+2}=a\left(180°-\theta_a\right)$，

根據定義，**基準高**可以表示成：

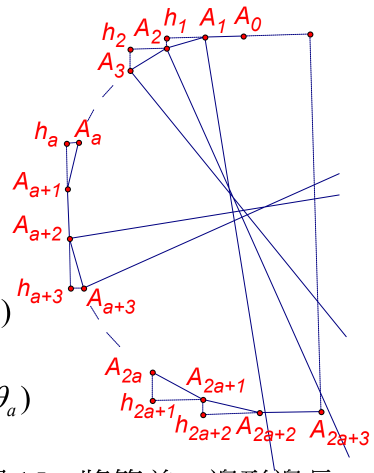


圖 15：將等差 n 邊形邊長利用三角函數轉換成三角形的高並將其加總。

$$D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=(\overline{h_1A_2}+\overline{h_2A_3}+...+\overline{h_aA_{a+1}})+\overline{A_{a+1}A_{a+2}}+(\overline{A_{a+2}h_{a+3}}+...+\overline{A_{2a}h_{2a+1}}+\overline{A_{2a+1}h_{2a+2}})$$

上式中前面括號內的項數和後面括號內一樣，故將前面括號的第一項跟後面括號的最後一項合併；前面括號的第二項跟後面括號的倒數第二項合併，依此類推可得

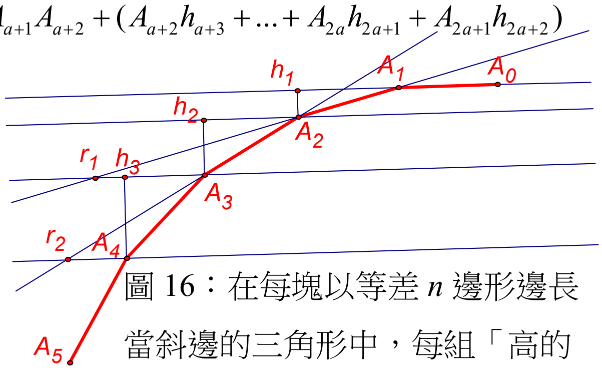


圖 16：在每塊以等差 n 邊形邊長當斜邊的三角形中，每組「高的對角」之間的倍數關係

$$D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=(\overline{h_1A_2}+\overline{A_{2a+1}h_{2a+2}})+(\overline{h_2A_3}+\overline{A_{2a}h_{2a+1}})+...+(\overline{h_aA_{a+1}}+\overline{A_{a+2}h_{a+3}})+\overline{A_{a+1}A_{a+2}}\cdots①$$

又 $\sin(180-\theta_a)=\sin(\angle h_1A_1A_2)=\dfrac{\overline{h_1A_2}}{\overline{A_1A_2}}=\dfrac{\overline{h_1A_2}}{p+d}=\sin(\angle h_{2a+2}A_{2a+2}A_{2a+1})=\dfrac{\overline{h_{2a+2}A_{2a+1}}}{\overline{A_{2a+1}A_{2a+2}}}=\dfrac{\overline{h_{2a+2}A_{2a+1}}}{p+(2a+1)d}$

$\Rightarrow \overline{h_1A_2}=(p+d)\sin(180°-\theta_a)$ 、$\overline{h_{2a+2}A_{2a+1}}=[p+(2a+1)d]\sin(180°-\theta_a)$；同理可證

$\sin[a(180°-\theta_a)]=\sin(\angle h_aA_aA_{a+1})=\dfrac{\overline{h_aA_{a+1}}}{\overline{A_aA_{a+1}}}=\dfrac{\overline{h_aA_{a+1}}}{p+ad}=\sin(\angle h_{a+3}A_{a+3}A_{a+2})=\dfrac{\overline{h_{a+3}A_{a+2}}}{\overline{A_{a+2}A_{a+3}}}=\dfrac{\overline{h_{a+3}A_{a+2}}}{p+(a+2)d}$

$\Rightarrow \overline{h_aA_{a+1}}=(p+ad)\sin[\mathrm{a}(180°-\theta_a)]$, $\overline{h_{a+3}A_{a+2}}=[p+(a+2)d]\sin[a(180°-\theta_a)]$

①式可改成 $D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=\{(p+d)\sin(180°-\theta_a)+[p+(2a+1)d]\sin(180°-\theta_a)\}$

$+\{(p+2d)\sin 2(180°-\theta_a)+[p+(2a)d]\sin 2(180°-\theta_a)\}$

$+...+\{(p+ad)\sin a(180°-\theta_a)+[p+(a+2)d]\sin a(180°-\theta_a)\}+\overline{A_{a+1}A_{a+2}}$

$$=[p+(a+1)d]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin k(180°-\theta_a)\right]+1\right\}=[p+(a+1)d]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin(\frac{90°\times k}{a+1})\right]+1\right\}$$

2. 由於每一組**平行距**都和**基準高**的形式類似，從 1 倍的$180°-\theta_a$乘上該邊邊長，直到a倍的$180°-\theta_a$乘上該邊邊長，差別就差在：當**平行距**中的i增加時，每一邊長都會因公差而增加。假設$\overline{A_iA_{i+1}}$ 、$\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$為第$i+1$組平行邊，於是可將**平行距**表示成

$$D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}},\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)=\{[p+(i+1)d]\sin(180°-\theta_a)+[p+(2a+1+i)d]\sin(180°-\theta_a)\}$$

$$+\{[p+(i+2)d]\sin 2(180°-\theta_a)+[p+(2a+i)d]\sin 2(180°-\theta_a)\}$$

$$+\ldots+\{[p+(i+a)d]\sin a(180^\circ-\theta_a)\ +[p+(a+2+i)d]\sin a(180^\circ-\theta_a)\}+\overline{A_{a+i+1}A_{a+i+2}}$$

$$=[2p+(2a+2+2i)d]\sin(180^\circ-\theta_a)+[2p+(2a+2+2i)d]\sin 2(180^\circ-\theta_a)+\ldots+$$

$$[2p+(2a+2+2i)d]\sin a(180^\circ-\theta_a)+(p+(a+i+1)d)$$

$$=[p+(a+i+1)d]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin k(180-\theta_a)\right]+1\right\}=[p+(a+i+1)d]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin(\frac{90^\circ\times k}{a+1})\right]+1\right\}$$

3. 由於**判別高**無法像**基準高**、**平行距**一樣具有對稱性。所謂對稱性，是指若以 $\overline{A_{a+i+1}A_{a+i+2}}$ 當作整條式子的中間項，第一項和最後一項皆為「1 倍的$180^\circ-\theta_a$」，可以合併，第二項和倒數第二項皆為「2 倍的$180^\circ-\theta_a$」，也可以合併，依此類推。因此分成兩部分來討論：如圖 17，**第一類判別高**的通式，從頂點 A_{2a+4} 開始產生，直到頂點 A_{3a+4} (綠色部分)，於是有以下式子：

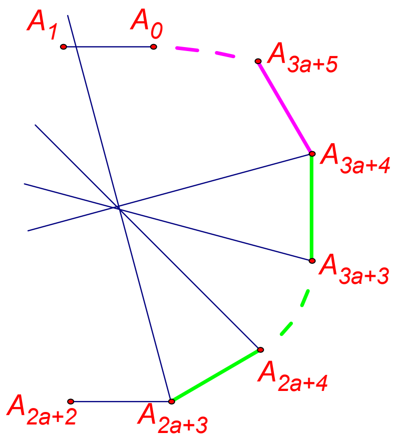


圖 17：說明兩種判別高

$$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\left[p+(2a+3)d\right]\sin\left(180^\circ-\theta_a\right)+\left[p+(2a+4)d\right]\sin 2\left(180^\circ-\theta_a\right)+\ldots$$

$$+\left[p+(m-1)d\right]\sin\left[(m-1)-(2a+2)\right]\left(180^\circ-\theta_a\right)$$ 經過整理得

$$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{(m-1)-(2a+2)}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin k\left(180^\circ-\theta_a\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m-2a-3}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right);$$

第二類判別高的通式，從頂點 A_{3a+5} 開始產生，上限則是後面利用**基準高**和**判別高**來求得(桃紅色部分)，而公式還需要加上**第一類判別高**公式中 m **的最大值**，於是有以下式子：

$$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\left[\sum_{k=1}^{3a+4-2a-3}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+\left[p+(3a+4)d\right]\sin a\left(180-\theta_a\right)$$

$$+\left[p+(3a+5)d\right]\sin(a-1)(180-\theta_a)+\ldots+\left[p+(m-1)d\right]\sin\left[(4a+4)-(m-1)\right](180-\theta_a)$$

經過整理得

$$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)+\sum_{k=3a+4}^{m-1}(p+kd)\sin(4a+4-k)(180-\theta_a)$$

$$=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)+\sum_{k=3a+4}^{m-1}(p+kd)\sin\left[\frac{90°\times(4a+4-k)}{a+1}\right] \quad ■$$

（二）利用基準高和判別高找出等差 *n* 邊形的最多邊數

有了**基準高**和**判別高**的一般式，即可利用它們的大小關係推導出等差 n 邊形的最多邊數，進而得到**最多邊數比值判別法**，即利用此來判斷是否可做到等差 n 邊形的最多邊數，如推論 6 所述。

推論 6:【最多邊數比值判別法】

在固定式內角皆為平均角度 θ_a、第一邊長為 p 和邊長公差為 d 的等差 n 邊形中，若滿足 d 和 p 的比值範圍如下，則可作到等差 n 邊形最多邊數為 $4a+4$。

間隔 a 個內角($a\ge 2$)時， $\dfrac{d}{p}<\dfrac{\sin\left(\frac{90°}{a+1}\right)}{\left[\sum_{k=2}^{a}(4a+4)\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+\sin\left(\frac{90°}{a+1}\right)+(2a+2)}$；

間隔一個內角($a=1$)時， $\dfrac{d}{p}<\dfrac{\sin 45°}{\sin 45°+4}$ 。

證明：(1)當產生第 $4a+5$ 個點(A_{4a+4})時，點 A_{4a+4} 的判別高(點 A_{4a+4} 到 $\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 的垂直距離)等於最後一組平行距($\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 到 $\overleftrightarrow{A_{4a+4}A_{4a+5}}$ 的垂直距離)，故

判別高 $D_d^{a,p}\left(A_{4a+4},\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)$

$$=\text{平行距 } D_{d,2a+2}^{a,p}\left(\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}},\overline{A_{4a+4}A_{4a+5}}\right)=\left[p+(a+2a+2+1)d\right]\left\{\left[\sum_{k=1}^{a}2\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}$$

$$=\left[p+(3a+3)d\right]\left\{\left[\sum_{k=1}^{a}2\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}>\left[p+(a+1)d\right]\left\{\left[\sum_{k=1}^{a}2\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}=\text{基準高}$$

即基準高＜判別高，圖形變成凹多邊形，故得證。

(2)當產生第 $4a+4$ 個點(A_{4a+3})時，連接 $\overline{A_0A_{4a+3}}$ 時，判別高(第二類)為

$$D_d^{a,p}\left(A_{4a+3},\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)+\sum_{k=3a+4}^{4a+2}(p+kd)\sin\left[\frac{90°\times(4a+4-k)}{a+1}\right]$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right\}+\left\{\sum_{k=2}^{a}\left[p+(4a+4-k)d\right]\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right\}$$

$$=\left[p+(3a+3)d\right]\left\{\left[\sum_{k=2}^{a}2\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+1\right\}-a\cdot d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)$$

又基準高 $D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=\left[p+(a+1)d\right]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}$

$$=\left[p+(a+1)d\right]\left\{\left[\sum_{k=2}^{a}2\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+2\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+1\right\}$$

同樣將第 4*a*+4 個點(A_{4a+3})時的判別高(第二類)和基準高經整理並刪除相同的部分後，剩下不同的部分則為 判別高=$(2a+2)d\left[\sum_{k=2}^{a}2\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+(2a+2)d$

和基準高= $p\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)$ ，兩者皆與 p、d 的變化有關。於是從此處設定判別高 < 基準高來尋找 p 與 d 的比值，i.e. $d\left\{\left[\sum_{k=2}^{a}(4a+4)\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+(2a+2)\right\}<p\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{p}<\frac{\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)}{\left[\sum_{k=2}^{a}(4a+4)\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+(2a+2)}$$

。故當比值 $\frac{d}{p}$ 小於

$$\frac{\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)}{\sum_{k=2}^{a}\left[(4a+4)\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)+(2a+2)}$$

時，即可做到最大邊數 4*a*+4 邊形。

(3) 特例$(a=1)$：

因 *a*=1 時沒有第二類判別高（第二類判別高中，間隔一個內角時 m 的最小值為 8，$n=9$ ，但 $n=9$ 與**(1)**的結果 $n_{\max}\neq 4a+5$ 矛盾），所以不能使用上面的比值關係式，需另找一種關係式來判斷(使用第一類判別高)。當 $m=3a+4$ (n=3*a*+5)時，判別高(第一類)

$D_d^{a,p}\left(A_{3a+4},\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)$ 代入 判別高<基準高 得

$\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right) < \left[p+(a+1)d\right]\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}$ 經整理後得到

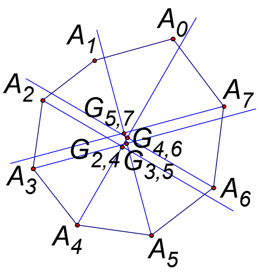
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{a}(k\cdot d-p)\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)<-(2a+2)d$$ ，a=1 代入得 $(d-p)\sin 45^\circ < -4d$

$\Rightarrow (p-d)\sin 45° > 4d \quad \Rightarrow p\sin 45° > d\sin 45° + 4d \quad \Rightarrow \dfrac{d}{p} < \dfrac{\sin 45°}{\sin 45° + 4} \fallingdotseq 0.15022$，

故當比值 $\dfrac{d}{p}$ 小於 $\dfrac{\sin 45°}{\sin 45° + 4}$ 時，即可做到最多邊數 8 邊形，

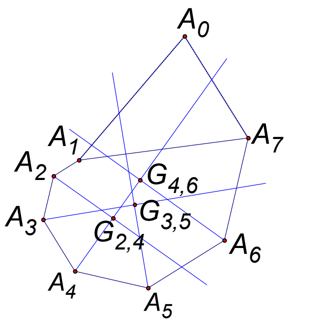
且判別高的 m 值上限為最多邊數 $4a+4$ 減 1，也就是 $4a+3$ ■

如圖 18(a)、(b)是在 $a=1$，最多邊數比值 $\dfrac{\sin 45°}{\sin 45° + 4} \fallingdotseq 0.15022$ 時，比值 $\dfrac{d}{p}$ 分別小於和大於 0.15022 得到的八邊形與七邊形（最多邊數為 $4\times 1+4=8$ 邊形）；圖 18(c)、(d)是在 $a=3$，最多邊數比值約為 $\dfrac{\sin 22.5°}{16\times(\sin 45° + \sin 67.5°) + \sin 22.5° + 8} \fallingdotseq 0.01110$ 時，比值 $\dfrac{d}{p}$ 分別小於和大於 0.01110 得到的十六邊形與十五邊形（最多邊數為 $4\times 3+4=16$ 邊形）。



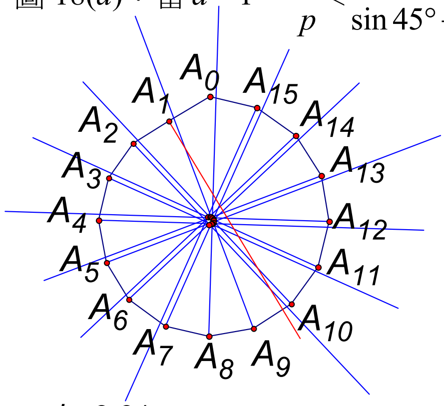
$\dfrac{d}{p} = \dfrac{0.1}{2} = 0.05 < 0.15022$

圖 18(a)：當 $a=1$，$\dfrac{d}{p} < \dfrac{\sin 45°}{\sin 45° + 4}$ 時



$\dfrac{d}{p} = \dfrac{0.5}{1} = 0.5 > 0.15022$

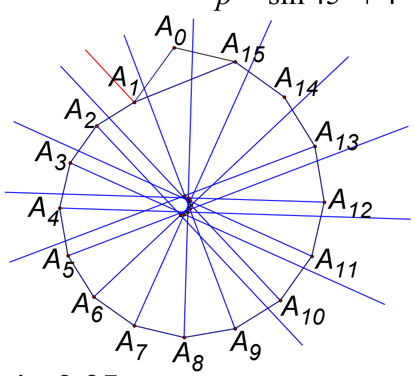
圖 18(b)：當 $a=1$，$\dfrac{d}{p} > \dfrac{\sin 45°}{\sin 45° + 4}$ 時



$\dfrac{d}{p} = \dfrac{0.01}{1} = 0.01 < 0.01110$

圖 18(c)：當 $a=3$，

$\dfrac{d}{p} < \dfrac{\sin 22.5°}{16\times(\sin 45° + \sin 67.5°) + \sin 22.5° + 8}$ 時



$\dfrac{d}{p} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025 > 0.01110$

圖 18(d)： 當 $a=3$，

$\dfrac{d}{p} < \dfrac{\sin 22.5°}{16\times(\sin 45° + \sin 67.5°) + \sin 22.5° + 8}$ 時

我們在前面的作圖實驗中發現，作到最多邊數時，所形成的圖形會有點像螺旋或渦

旋圖形，好奇圖形最後會發散還是收斂呢？於是我們在不管是否滿足最多邊數的比值的情形下，如圖 19，不將 $\overline{A_0A_{3a+4}}$ 連線起來，而是繼續作下一個邊，把螺旋或渦旋圖形繼續畫下去，看看會有什麼結果？

（三）從螺旋或渦旋圖形中找到恆等式

圖 19 中，假設在點 A_{4a+4} 之後所作的邊，就設定為螺旋或渦旋圖中第二圈的邊，根據引理，每產生一條邊，都會和前一圈與之相對應的邊平行，例：$\overline{A_{4a+4}A_{4a+5}}//\overline{A_0A_1}$，而發現以此方式作圖，圖形並不會收斂或是發散。且又發現，$\angle A_1$ 的角平分線會和 $\angle A_{4a+5}$ 的角平分線重合，於是我們

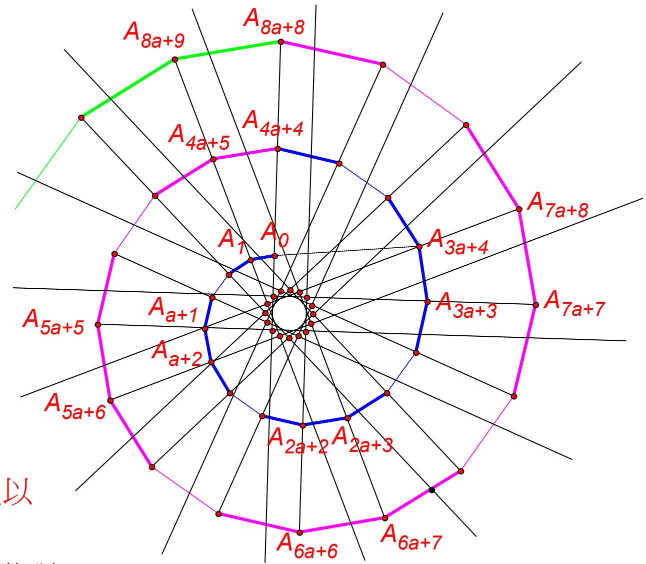


圖 19：當不考慮是否形成凹多邊形，而是持續作圖下去

採用「直角坐標」的作圖方式，證明上述的重合特性。如圖 20 所示，設 A_0 為原點 $A_1(-p,0)$ 依此類推，若要證明 $\angle A_1$ 的角平分線和 $\angle A_{4a+5}$ 的角平分線是否重合，只須證明 A_{4a+5} 此點的坐標是否滿足 $\angle A_1$ 的角平分線之直線方程式，即可得證。我們將證明後的結果，統整在推論 7 中。

推論 7：在固定式內角皆為平均角度 θ_a、第一邊長為 p 和邊長公差為 d 的螺旋或渦旋圖中，不論是否滿足最多邊數比值的條件，對於任意 $t\in\mathbb{N}$，$\angle A_t$ 的角平分線會和 $\angle A_{t+(4a+4)(j-1)}$ $(j=2,3,4\cdots)$ 的角平分線重合，且當 $a\in\mathbb{N}$，$\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\dfrac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+1=\cot\left(\dfrac{45^\circ}{a+1}\right)$ 恆成立。

證明：如圖 20，A_1 的角平分線交 y 軸於 S 點，$\angle A_0A_1S=\dfrac{1}{2}\theta_a$，

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=\frac{\overline{A_0S}}{\overline{A_0A_1}}=\frac{\overline{A_0S}}{p}，\Rightarrow \overline{A_0S}=p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S\left(0,-p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\right)，$$ 則過 $A_1(-p,0)$、

$S\left(0,-p\tan\left(\dfrac{\theta_a}{2}\right)\right)$ 兩點的直線方程式為 $y=-\tan\left(\dfrac{\theta_a}{2}\right)x-p\tan\left(\dfrac{\theta_a}{2}\right)$

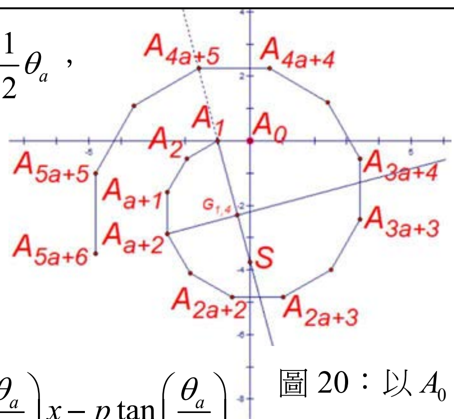


圖 20：以 A_0 為原點的螺旋圖

$\Rightarrow y+\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)x+p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=0$ 。令 $A_{4a+5}\left(x_1,y_1\right)$，根據平行距和基準高公式，

$$y_1=D_{d,2a+2}^{a,p}\left(\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}},\overline{A_{4a+4}A_{4a+5}}\right)-D_d^{a,p}\left(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=(2a+2)d\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}，$$

$$x_1=-\left\{p+(p+d)\cos\left(180°-\theta_a\right)+(p+2d)\cos 2\left(180°-\theta_a\right)+\ldots+(p+ad)\cos a\left(180°-\theta_a\right)\right\}$$

$$+\left\{\left[p+(a+2)d\right]\cos a\left(180°-\theta_a\right)+\left[p+(a+3)d\right]\cos(a-1)\left(180°-\theta_a\right)+\ldots+\left[p+(2a+2)d\right]\cos 0\left(180°-\theta_a\right)\right\}$$

$$+\left\{\left[p+(2a+3)d\right]\cos\left(180°-\theta_a\right)+\left[p+(2a+4)d\right]\cos 2\left(180°-\theta_a\right)+\ldots+\left(p+(3a+2)d\right)\cos a\left(180°-\theta_a\right)\right\}$$

$$-\left\{\left[p+(3a+4)d\right]\cos a\left(180°-\theta_a\right)+\left[p+(3a+5)d\right]\cos(a-1)\left(180°-\theta_a\right)+\ldots+\left[p+(4a+3)d\right]\cos\left(180°-\theta_a\right)\right\}$$

$$-\left[p+(4a+4)d\right]$$

$$=\left[-\sum_{k=0}^{a}(p+kd)\cos k\left(180°-\theta_a\right)\right]+\left\{\sum_{k=0}^{a}\left[p+(2a+2-k)d\right]\cos k\left(180°-\theta_a\right)\right\}+\left\{\sum_{k=1}^{a}\left[p+(2a+2+k)d\right]\cos k\left(180°-\theta_a\right)\right\}$$

$-\left\{\sum_{k=1}^{a}\left[p+(4a+4-k)d\right]\cos k\left(180°-\theta_a\right)\right\}-\left[p+(4a+4)d\right]$，經整理得到

$$=(2a+2)d-\left[p+(4a+4)d\right]=-\left[p+(2a+2)d\right]$$

$$\Rightarrow A_{4a+5}\left(x_1,y_1\right)=A_{4a+5}\left(-\left[p+(2a+2)d\right],(2a+2)d\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}\right)$$

將 A_{4a+5} 的坐標代入 $y+\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)x+p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=0$ 時，設等號左邊的式子為 $\boldsymbol{l}$，即

$$(2a+2)d\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1\right\}-\left[p+(2a+2)d\right]\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)+p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=l，$$

$$\Rightarrow(2a+2)d\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1-\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\right\}=l，$$

又 $\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=\tan\left(90°-\frac{45°}{a+1}\right)=\cot\left(\frac{45°}{a+1}\right)$

$$\Rightarrow(2a+2)d\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1-\cot\left(\frac{45°}{a+1}\right)\right\}=l\ldots\ldots①$$

$\Rightarrow\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)\right]+1=\frac{l}{(2a+2)d}+\frac{\cos\left(\frac{45°}{a+1}\right)}{\sin\left(\frac{45°}{a+1}\right)}$，等式兩邊再同乘以 $\sin\frac{45°}{a+1}$ 並展開，得

$$\Rightarrow 2\left[\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)+\sin(\frac{90^\circ\times 2}{a+1})\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)+\sin(\frac{90^\circ\times 3}{a+1})\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)+\ldots+\sin(\frac{90^\circ\times a}{a+1})\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)\right]$$

$$+\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)=\frac{l\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(2a+2)d}+\cos\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$$，經整理、抵銷後得到

$$\Rightarrow \cos(\frac{45^\circ}{a+1})-\cos(\frac{90^\circ\times a+45^\circ}{a+1})+\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)=\frac{l\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(2a+2)d}+\cos\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$$

$$\Rightarrow -\cos(\frac{90^\circ\times a+45^\circ}{a+1})+\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)=\frac{l\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(2a+2)d}$$，又 $\cos(\frac{90^\circ\times a+45^\circ}{a+1})=\cos\left[90^\circ-\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)\right]=\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$

$$\Rightarrow -\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)+\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)=0=\frac{l\sin\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(2a+2)d}\Rightarrow l=0$$ 故 $\angle A_1$ 的分角線和 $\angle A_{4a+5}$ 的分角線重合。

對於其他組如 $\angle A_2$ 和 $\angle A_{4a+6}$ 的分角線…等也同理可證得重合的結果。①式中的 $l=0$，於是等式 $\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin(\frac{90^\circ\times k}{a+1})\right]+1=\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$……②成立。故推論 5 中的**基準高**、**平行距**皆因②式可分別簡化成 $[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$、$[p+(a+i+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$；推論 6 中最多邊數比值判別法的兩種判別不等式，經再整理推導而得到 $\frac{d}{p}<\frac{\sin^2\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(4a+3)\cos^2\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)-(3a+2)}$，$a\geq 1$。

（四）等差 *n* 邊形中正交點距離關係與長度的探討

推論 8：

在等差 n 邊形中，若間隔 a 個內角的角平分線皆正交，且固定式內角為平均角度 θ_a、第一邊邊長為 p、邊長增加的公差為 d 時，則 **1.** 相鄰的正交點距離等長；**2.** 不管是否滿足最多邊數比值條件，正交點所圍成的圖形為正 $(4a+4)$ 邊形，且 **3.** 相鄰的兩個正交點距離（i.e. 正 $(4a+4)$ 邊形的邊長）與 a、d 的關係一般式為

$$\frac{d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+(a+1)\right\}}{\sqrt{2}}$$。

證明：**1.**以隔三個角(公差 **0.1**)為例，如圖 21，(1)過 P_1 作 $\overline{A_3G_{3,7}}$ 的平行線交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_1，過 B_1、

P_1分別作$\overline{A_3G_{3,7}}$的垂直線並交於C_1、H_1。則$\overline{B_1C_1}=\overline{P_1H_1}$，同理 $\overline{B_2C_2}=\overline{P_2H_2}$、

$\overline{B_3C_3}=\overline{P_3H_3}\ldots$，又$\overline{B_1C_1}=d\sin\left(\dfrac{\theta_3}{2}\right)=\overline{B_2C_2}=\overline{B_3C_3}=\cdots$， $\Rightarrow\overline{P_1H_1}=\overline{P_2H_2}=\overline{P_3H_3}=\cdots$

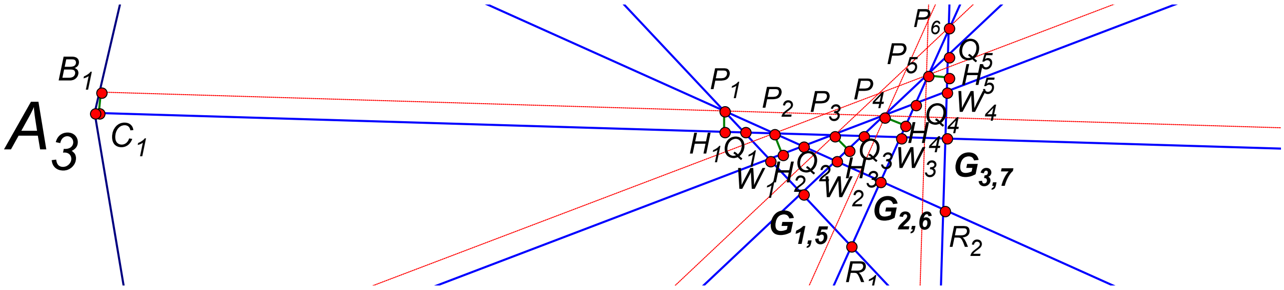


圖 21：證明每組內分角圓內接四邊形為箏形及每組相鄰正交點之間的距離關係

$\because\angle P_1H_1P_2=90^\circ=\angle P_2H_2P_3=\angle P_3H_3P_4=\angle P_4H_4P_5=\angle P_5H_5P_6=\cdots$

$\angle P_1P_2H_1=180^\circ-\theta_3=\angle P_2P_3H_2=\angle P_3P_4H_3=\angle P_4P_5H_4=\ldots\ldots$

$\therefore\ \triangle P_1P_2H_1\cong\ \triangle P_2P_3H_2\cong\ \triangle P_3P_4H_3\cong\ \triangle P_4P_5H_4\ldots\ldots(AAS$全等性質$)$

$\Rightarrow\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}=\overline{P_4P_5}\ldots\ldots$······①

又$\angle P_2P_1Q_1=22.5^\circ=\angle P_3P_2Q_2=\angle P_4P_3Q_3=\angle P_5P_4Q_4=\angle P_6P_5Q_5=\angle\ldots\ldots$······②

$\therefore\ \triangle P_1P_2Q_1\cong\triangle P_2P_3Q_2\cong\triangle P_3P_4Q_3\cong\triangle P_4P_5Q_4\cong\triangle P_5P_6Q_5\cong\cdots\cdots(ASA$全等性質$)$

$\Rightarrow\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_1}$(等腰三角形)$=\overline{P_2Q_2}=\overline{P_3Q_2}=\overline{P_3Q_3}=\overline{P_4Q_3}=\overline{P_4Q_4}=\overline{P_5Q_4}=\ldots\ldots$······③

由①+③$\Rightarrow\overline{P_1Q_2}=\overline{P_2P_1}+\overline{P_2Q_2}=\overline{P_2P_3}+\overline{P_3Q_3}=\overline{P_2P_3}+\overline{P_3Q_3}=\overline{P_2Q_3}=\overline{P_3Q_4}=\overline{P_4Q_5}=\ldots\ldots$······④

且$\angle P_1Q_2W_1=2(180-\theta_3)=\angle P_2Q_3W_2=\angle P_3Q_4W_3=\angle P_4Q_5W_4=\ldots\ldots$······⑤

由②、④、⑤可得 $\triangle P_1Q_2W_1\cong\triangle P_2Q_3W_2\cong\triangle P_3Q_4W_3\cong\triangle P_4Q_5W_4\cong\ldots\ldots(ASA$全等性質$)$

$\Rightarrow\overline{Q_2W_1}=\overline{Q_3W_2}=\overline{Q_4W_3}=\overline{Q_5W_4}=\ldots\ldots$······⑥ 又$\overline{P_1Q_2}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2Q_2}=\overline{P_3P_4}+\overline{P_3Q_2}=\overline{P_4Q_2}$

$\angle P_1Q_2W_1=\angle P_4Q_2W_2$，$\angle Q_1P_1W_1=\angle Q_2P_4W_2$ $\therefore\ \triangle P_1Q_2W_1\cong\triangle P_4Q_2W_2(ASA$全等性質$)$

$\Rightarrow\overline{Q_2W_1}=\overline{Q_2W_2}$，同理$\overline{Q_3W_2}=\overline{Q_3W_3}$、$\overline{Q_4W_3}=\overline{Q_4W_4}=\ldots\ldots$······⑦

(3)同理可再證得 $\triangle P_1R_1G_{2,6}\cong\triangle P_2R_2G_{3,7}\cong\triangle P_5R_1G_{1,5}\cong\triangle P_6R_2G_{2,6}\cong\ldots\ldots$

$\Rightarrow\overline{R_1G_{1,5}}=\overline{R_1G_{2,6}}=\overline{R_2G_{2,6}}=\overline{R_2G_{3,7}}=\ldots\ldots$又$\because\ \angle G_{1,5}W_2G_{2,6}=180^\circ-3(180^\circ-\theta_3)=\angle G_{2,6}W_3G_{3,7}$

$\Rightarrow\angle G_{1,5}R_1G_{2,6}=180^\circ-(3\theta_3-2\times180^\circ)=\angle G_{2,6}R_2G_{3,7}$

$\therefore$所有 a=3 的內分角圓內接箏形皆為全等，故得證

2. 承 1 的結果，所有正交點連接起來，圍成一個等邊多邊形。又如圖 22 所示，每個內分角圓內接箏形都是全等的，即四邊形 $G_{1,a+2}I_{1,a+3}G_{2,a+3}I_{2,a+2}\cong$ 四邊形 $G_{2,a+3}I_{2,a+4}G_{3,a+4}I_{3,a+3}\cong\ldots$ ，依此類推，則

$\angle G_{1,a+2}G_{2,a+3}I_{2,a+2}=\angle G_{3,a+4}G_{2,a+3}I_{3,a+3}$

$=\angle G_{2,a+3}G_{3,a+4}I_{3,a+3}=\angle G_{4,a+5}G_{3,a+4}I_{4,a+4}\cdots$ ，依此類推。

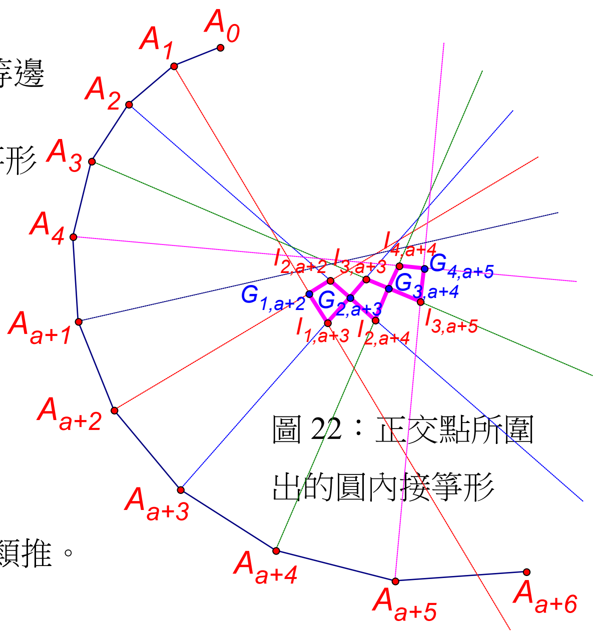


圖 22：正交點所圍出的圓內接箏形

設 $\angle G_{1,a+2}G_{2,a+3}I_{2,a+2}=\beta\Rightarrow\angle G_{1,a+2}G_{2,a+3}I_{1,a+3}=90^\circ-\beta\Rightarrow\angle G_{1,a+2}I_{1,a+3}G_{2,a+3}=2\beta$ ，

在 $a+4$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{a+1}A_{a+2}A_{a+3}I_{1,a+3}$ 中，其內角和 $=(a+4-2)\times180^\circ=(a+2)\times180^\circ$

$\therefore\angle G_{1,a+2}I_{1,a+3}G_{2,a+3}$ 的外角 $\angle A_1I_{1,a+3}A_{a+3}=180^\circ-2\beta=(a+2)\times180^\circ-(a+2)\times\theta_a=\dfrac{90^\circ\times(a+2)}{a+1}$

$\Rightarrow\beta=\dfrac{45^\circ\times a}{a+1}$ $\therefore\angle G_{1,a+2}G_{2,a+3}G_{3,a+4}=90^\circ+2\beta=90^\circ+2\left(45^\circ-\dfrac{45^\circ}{a+1}\right)=180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}=\theta_a$

同理可證 $\theta_a=\angle G_{2,a+3}G_{3,a+4}G_{4,a+5}=\angle G_{3,a+4}G_{4,a+5}G_{5,a+6}=\cdots\cdots$

根據內角和公式，若一正 n 邊形中，每個內角為 $\partial^\circ=\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$ $\Rightarrow n=\dfrac{360^\circ}{180-\partial^\circ}\cdots\cdots$ ①

將平均角度 θ_a 代入①式得 $n=\dfrac{360^\circ}{180^\circ-\left(180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}\right)}=4a+4\ (a\in\mathbb{N})$

故所有正交點所圍出的圖形為正 $4a+4$ 邊形 ■

3. 如圖 23，設 $A_{2a+3}(x_3,y_3)$ 、 $\angle A_1$ 的角平分線交 $\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 於 $M(x_4,y_4)$ ，

其中 $y_3=y_4$ ($\overline{A_{2a+3}M}\,//\,x$ 軸)，則 $\overline{A_{2a+3}M}=x_3-x_4$ 且

$$x_3=-\left\{p+(p+d)\cos(180^\circ-\theta_a)+(p+2d)\cos2(180^\circ-\theta_a)+\ldots+(p+ad)\cos a(180^\circ-\theta_a)\right\}$$

$$+\begin{Bmatrix}[p+(a+2)d]\cos a(180^\circ-\theta_a)+[p+(a+3)d]\cos(a-1)(180^\circ-\theta_a)\\+\ldots+[p+(2a+2)d]\cos0(180^\circ-\theta_a)\end{Bmatrix}$$

$$=\left[-\sum_{k=0}^{a}(p+kd)\cos k(180^\circ-\theta_a)\right]+\left\{\sum_{k=0}^{a}[p+(2a+2-k)d]\cos k(180^\circ-\theta_a)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{a}(2a+2-2k)d\cos k(180°-\theta_a)=2d\sum_{k=0}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)$$

又 $\overline{A_{2a+3}M}$ 的直線方程式為 $y=-H_{a,p,d}=-[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45°}{a+1}\right)$、

$\overline{A_1M}$ 的直線方程式為 $y=-\tan\left(\frac{1}{2}\theta_a\right)x-p\tan\left(\frac{1}{2}\theta_a\right)$，

(見推論 7)

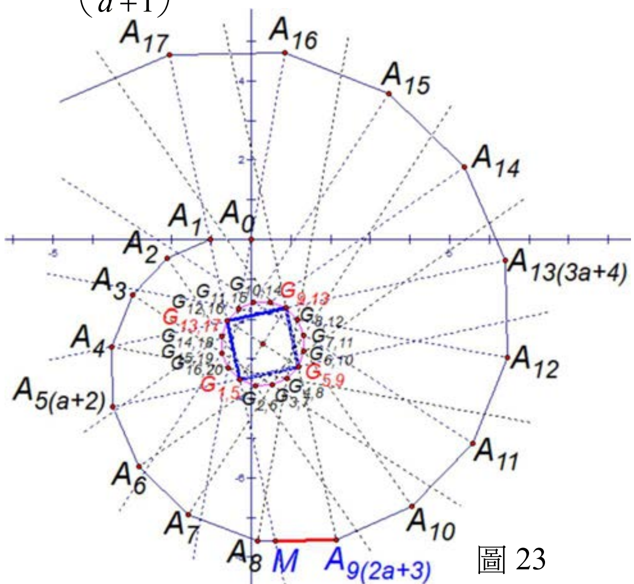


圖 23

解聯立方程式 $\begin{cases} y=-[p+(a+1)d]\cot\left(\dfrac{45°}{a+1}\right) \\ y=-\tan\left(\dfrac{1}{2}\theta_a\right)x-p\tan\left(\dfrac{1}{2}\theta_a\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow x=x_4=\frac{[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45°}{a+1}\right)-p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \overline{A_{2a+3}M}=x_3-x_4=2d\sum_{k=0}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90°\times k}{a+1}\right)-\frac{[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45°}{a+1}\right)-p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}$$

再設 $\overline{A_{2a+3}M}=m$ ，則 $\overline{G_{1,5}G_{5,9}}\left(\overline{G_{1,a+2}G_{a+2,2a+3}}\right)=m\sin(\frac{\theta_a}{2})=\overline{G_{5,9}G_{9,13}}\left(\overline{G_{a+2,2a+3}G_{2a+3,3a+4}}\right)$，

得 $\overline{G_{1,5}G_{9,13}}\left(\overline{G_{1,a+2}G_{2a+3,3a+4}}\right)=\sqrt{2}m\sin(\frac{\theta_a}{2})$ 。如圖 24，若將此正交點所圍成的正多邊形作外接圓，則 $\overline{G_{1,5}G_{9,13}}$ 為此圓的直徑，半徑為 $\dfrac{m\sin(\frac{1}{2}\theta_a)}{\sqrt{2}}$ ，圓上的每個點皆為正交點，若將每個正交點連接圓心 O ，則 $\angle G_{1,a+2}OG_{2,a+3}=\angle G_{2,a+3}OG_{3,a+4}=\ldots$

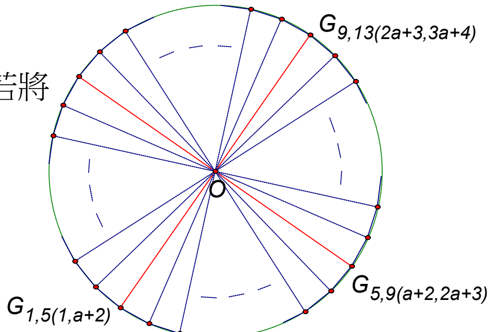


圖 24： $4a+4$ 個正交點會共圓

$=\dfrac{360°}{4a+4}=\dfrac{90°}{a+1}$ ，如圖 25，此為任意相鄰一組正交點和圓心 O 所形成的等腰三角形，根據正弦定理，得到

$$\frac{\overline{G_{1,a+2}O}}{\sin\frac{\theta_a}{2}}=\frac{\frac{m\sin(\frac{1}{2}\theta_a)}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{1}{2}\left(180°-\frac{90°}{a+1}\right)}=\frac{\overline{G_{1,a+2}G_{2,a+3}}}{\sin\left(\frac{90°}{a+1}\right)}$$

，於是相鄰兩正交點

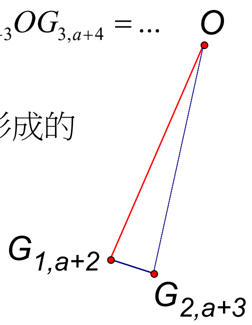


圖 25：相鄰兩個正交點與其共圓的圓心形成的三角形

距離為 $\overline{G_{1,a+2}G_{2,a+3}}=\dfrac{\dfrac{m\sin\left(\dfrac{90^\circ}{a+1}\right)\times\sin(\dfrac{1}{2}\theta_a)}{\sqrt{2}}}{\sin\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}\right)}=\dfrac{m\sin\left(\dfrac{90^\circ}{a+1}\right)}{\sqrt{2}}$。將 m 值代入上式得

$$\frac{\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\times\left\{\left[2d\sum_{k=0}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]-\frac{[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)-p\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}\right\}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\left\{\left[2d\sum_{k=0}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]-[p+(a+1)d]+p\right\}}{\sqrt{2}}\left(\because\tan\left(90^\circ-\frac{45^\circ}{a+1}\right)=\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)\right)$$

$$=\frac{d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+(a+1)\right\}}{\sqrt{2}}$$

■

伍、研究結果與結論

一、不規則邊長的 n 邊形中，間隔 a 個內角的分角線皆正交時，研究動機中的猜想一～三與與研究結果的推論 1～4 之對照表如下：

猜想一	**推論 1**： 變動角關係式	$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180^\circ-\left[(a+1)\times180^\circ-90^\circ\right]\times(n-a-3)$ $+\left[\sum_{k=1}^{a+1}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+\left(a\sum_{k=a+2}^{n-a-3}\angle A_k\right)$，$2a+5\le n\le 4a+5$
	推論 2：固定式內角間關係式 $a\in\mathbb{N}$	相鄰內角和：$\angle A_m+\angle A_{m+1}=\angle A_{m+a+1}+\angle A_{m+a+2}\,(1\le m\le n-a-4)$ 不相鄰內角和：$\angle A_m+\angle A_{m+a+3}=\angle A_{m+2}+\angle A_{m+a+1}\,(1\le m\le n-a-5)$ $(2a+5\le n\le 4a+5)$
猜想二	**推論 3**：固定式內角之設定	n 邊形中固定式內角皆為 $\theta_a=180^\circ-\dfrac{90^\circ}{a+1}$ 時，此 n 邊形邊數 n 的範圍是 $a+5\le n\le 4a+5$；$n=2a+5$ 時開始有完整規律的變動角關係式。
猜想三	**推論 4**：內分角圓內接四邊形個數與 n、a 的關係	正交點數 $O_{n,a}(=n-a-3)$ 與內分角圓內接四邊形個數 $\boldsymbol{Q_{n,a}}$ 之關係式為 $\boldsymbol{Q_{n,a}=C_2^{O_{n,a}}-[n-2a-4]\times\left[\dfrac{n}{2a+5}\right]}$，$a+5\le n\le 4a+5$，$C_n^m=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

二、等差 n 邊形中，間隔 a 個內角的角平分線皆正交時，在固定式內角為平均角度 θ_a、第一邊長為 p、邊長公差為 d 的條件下，猜想四～六與推論 5～8 之對照表如下：

猜想四	**推論 5**：基準高、判別高與平行距(皆與 a、p、d 有關)	基準高：$D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$ 平行距：$D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}},\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)=[p+(a+i+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)(i\ge 1)$ 第一類判別高： $D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{m-2a-3}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)(2a+4\le m\le 3a+4)$ 第二類判別高：$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)$ $+\sum_{k=3a+4}^{m-1}(p+kd)\sin\left[\frac{90^\circ\times(4a+4-k)}{a+1}\right]\ (3a+5\le m\le 4a+3)$
猜想五	**推論 6**：最多邊數與最多邊數比值判別法	最多邊數比值判別法$\Rightarrow \frac{d}{p}<\frac{\sin^2\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)}{(4a+3)\cos^2\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)-(3a+2)}(a\in\mathbb{N})$ 滿足上列比值不等式可作到等差 n 邊形最多邊數為 $4a+4$ 。
猜想六	**推論 7**：角平分線之重合關係、恆等式	1.在等差螺旋或渦漩圖中，對於任意 $t\in\mathbb{N}$，$\angle A_t$ 的角平分線會與 $\angle A_{t+(4a+4)(j-1)}\ (j=2,3,4\cdots)$ 的角平分線重合，其中 j 為螺旋圖的圈序。 2.恆等式 $\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+1=\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)(a\in\mathbb{N})$
	推論 8：正交點圍成之圖形、相鄰正交點之距離	1.正交點所圍成之圖形為正 $4a+4$ 邊形，內角為平均角度 $\theta_a=180^\circ-\frac{90^\circ}{a+1}$ 2.所有相鄰的正交點距離＝邊長 $=\frac{d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+(a+1)\right\}}{\sqrt{2}}$

三、表格六為不規則邊長 n 邊形與等差 n 邊形相關性質之異同分析表

表格六：不規則邊長 n 邊形與等差 n 邊形中相關性質之異同分析表

<table>
<tr><td></td><td>不規則邊長 n 邊形</td><td>等差 n 邊形</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.變動角與固定式內角間的關係一般式</td><td colspan="2">$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180^\circ-\left[(a+1)\times180^\circ-90^\circ\right]\times(n-a-3)$ $+\left[\sum_{k=1}^{a+1}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+\left(a\sum_{k=a+2}^{n-a-3}\angle A_k\right)$</td></tr>
<tr><td>$2a+5\le n\le 4a+5$</td><td>$2a+5\le n\le 4a+4$</td></tr>
<tr><td>2. 相鄰內角和關係式 & 不相鄰內角和關係式</td><td colspan="2">$\angle A_m+\angle A_{m+1}=\angle A_{m+a+1}+\angle A_{m+a+2}\ (1\le m\le n-a-4)$
$\angle A_m+\angle A_{m+a+3}=\angle A_{m+2}+\angle A_{m+a+1}\ (1\le m\le n-a-5)$</td></tr>
<tr><td>3.設定固定式內角皆為平均角度時的最多邊數</td><td>$n_{max}=4a+5$</td><td>$n_{max}=4a+4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.內分角圓內接四邊形個數 $Q_{n,a}$</td><td colspan="2">$Q_{n,a}=C_2^{O_{n,a}}-[n-2a-4]\times\left[\frac{n}{2a+5}\right]$</td></tr>
<tr><td>$a+5\le n\le 4a+5$</td><td>$a+5\le n\le 4a+4$</td></tr>
</table>

陸、未來展望

對於等差 n 邊形的最多邊數判別條件，可以進階探討任意間隔 a 個內角的角平分線正交時，任意第一邊長和公差與最多邊數的關係一般式？又如圖 26，繼續作等差的邊長下去，這無限循環的螺旋或渦漩圖形中，每圈對應的平行距間是否存有黃金比例的關係？

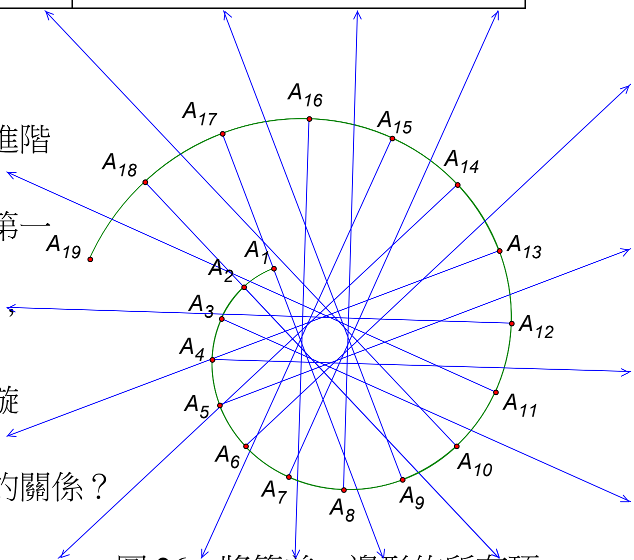


圖 26：將等差 n 邊形的所有頂點以弧線連接而形成螺旋圖

柒、參考資料及文獻

[1] 國中數學第四、五冊，新北市康軒文教公司。

[2] 高中數學第二冊第一章，排列組合；第三冊第一章，三角，南一書局。

[3] 笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年

[4] 許宸諺、鍾秉哲，角平分線正交的秘密 → n 邊形中角平分線正交的性質探討，新竹縣第 61 屆科展國中組數學科第二名，2021 年 5 月。

【評語】030418

本作品考慮的是如下的問題：給定 n 邊形的 n 個頂點 A_0 A_1⋯ $A_{1(n-1)}$，其中 A_0 和 $A_{(n-1)}$的內角是可以變動的。如果要求相隔 a 個內角的角平分線必須正交，n 的最大可能值是多少？內角角度應該滿足什麼樣的條件？作者們針對這個問題以及一些延伸的問題做了討論。內容很豐富，可以看得出來作者們投入了很長的時間與心力來完成這樣的研究工作，這一點，很值得鼓勵。問題設定的條件有點奇妙，即便給了兩個可變動的內角，在其他 n-2 個內角都已經固定的情況下，要保證對某一個 a，相隔 a 個內角的角平分線都必須正交，這件事不一定可行，作品說明書中所給出的角度需滿足的條件也明白的指出了這一點。如果是這樣，給兩個可變動的內角 A_0 和 A_(n-1)似乎沒有什麼意義。另一方面，在分析 n 的最大可能值的時候假設了 n-4 個內角的值都相同，這件事也有點奇怪，如果角度不見得相等，n 的最大可能值有可能會更大嗎？是不是可以避開角度的實際值，給出一個單純的、只用不等式來說明的一種論述？如果可以針對上述這些內容做一些修正，應該會更好。

作品簡報

角平分線的「正交一點」可以不只這樣
－ n邊形中角平分線正交的性質探討

作品編號：**030418**

組別：國中組

科別：數學科

研究動機與六個猜想

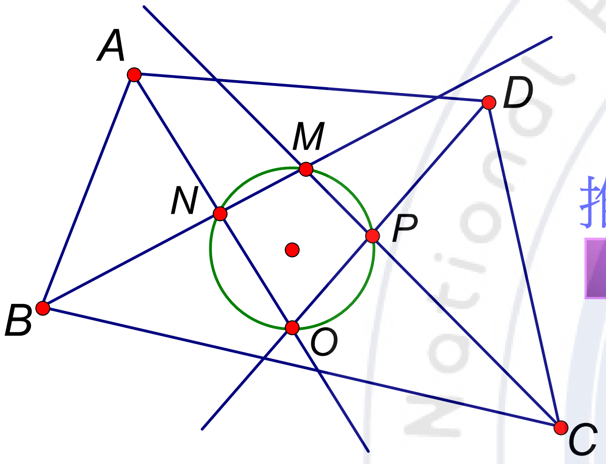


圖1

推廣

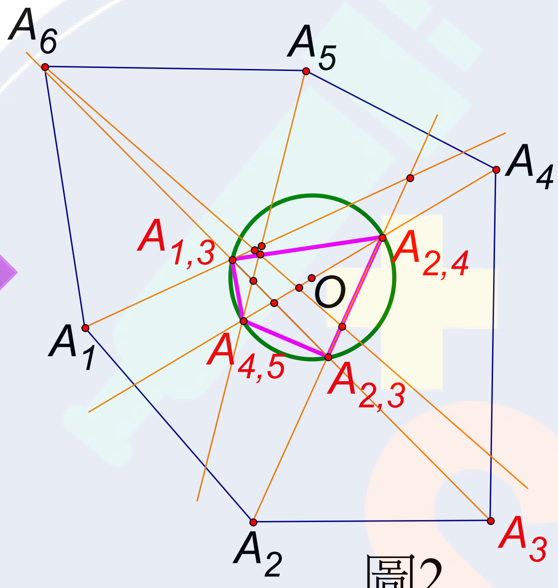


圖2

利用直角
對角互補

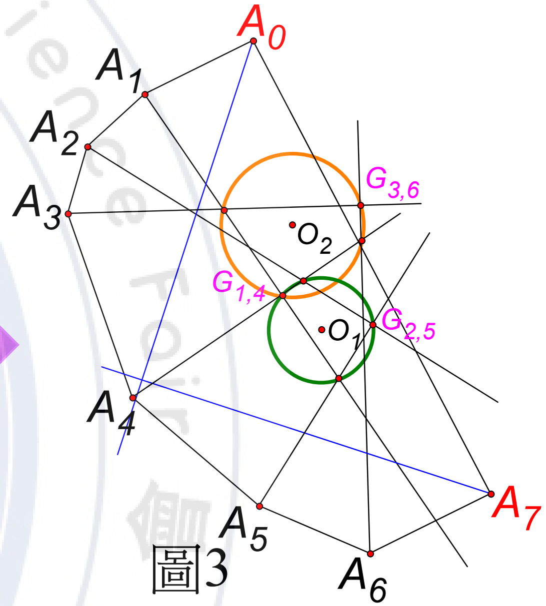


圖3

六個猜想

一、不規則邊長n邊形中，間隔a個內角分角線正交時，所有內角間關係探討

二、設定特定內角皆為平均角度時，能做到之最多邊數與a的關聯

三、正交點所形成的圓內接四邊形個數與n、a的關係。

四、設定邊長為等差關係，邊長間有平行關係，探討平行對應邊之距離關係

五、不規則邊長與等差邊長的最多邊數比較

六、正交點間的距離、軌跡之規律探討

研究目的與架構流程圖

四邊形中任兩內角分角線交點會共圓

設定不規則邊長的n邊形中，間隔 a 個內角分角線正交的交點會共圓

猜想一～三

1.變動角與固定式內角的關係式(推論1)；

2.固定式內角之間的關係式(推論2)；

3.固定式內角的角度設定求最多邊數與a的關係(推論3)；

4.內分角圓內接四邊形個數與n、a的關係(推論4)

設定邊長為等差關係的n邊形中，第一邊長為p，邊長公差為d，間隔a個內角分角線正交的交點會共圓

猜想四 定義基準高、判別高與平行距並探討與a、p、d的關係(推論5)

猜想五 利用基準高和判別高得到最多邊數比值判別法（推論6）

猜想六 對於任意 $t \in \mathbb{N}$，$\angle A_t$ 的角平分線與 $\angle A_{t+(4a+4)(j-1)}\ (j = 2,3,4\cdots)$ 的角平分線重合（推論7）

猜想六 探討正交點所圍成的圖形和正交點之間的距離（推論8）

名詞定義與已知性質

• 名詞定義

1. 角度、正交點定義，如圖4，全角$\angle A_1A_2A_3 \to \angle A_2$；半角$\angle A_2A_1G_{1,3} \to \frac{1}{2}\angle A_1$；$G_{2,4}$為$\angle A_2$和$\angle A_4$之角平分線正交的交點。
2. 變動角，如圖4，可藉由分別移動$\angle A_0$和$\angle A_5$此類角度使其他角平分線正交，稱$\angle A_0$和$\angle A_5$ $(\angle A_{n-1})$為變動角。
3. 內分角圓內接四邊形，如圖4，由二組正交分角線交點圍成的四邊形。
4. 分角線正交a+3邊形，如圖4，由a個全角$(\angle A_2)$、兩個半角$\frac{1}{2}\angle A_1$、$\frac{1}{2}\angle A_3$、與正交點$G_{1,3}$所圍成的多邊形。

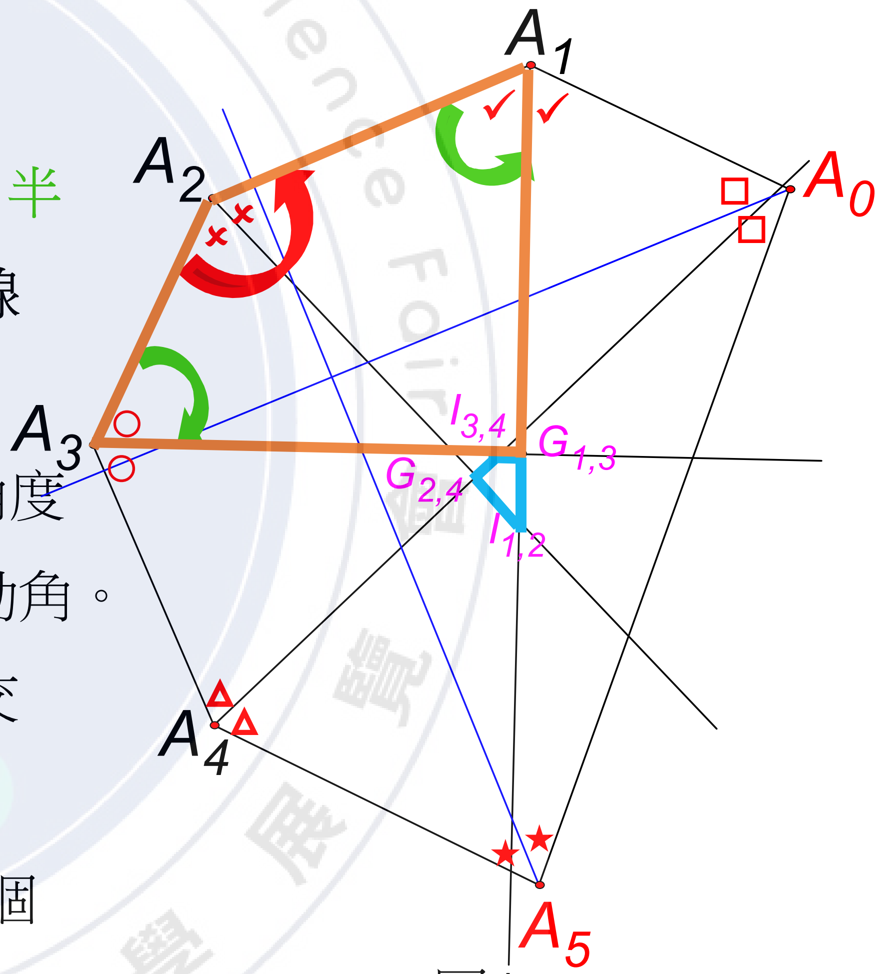


圖4

名詞定義與已知性質

• 名詞定義、已知的性質與引理

5. p、d、θ_a：如圖6，在等差 n 邊形中，$p=\overline{A_0A_1}$，d 為邊長的公差；θ_a 為平均角度。

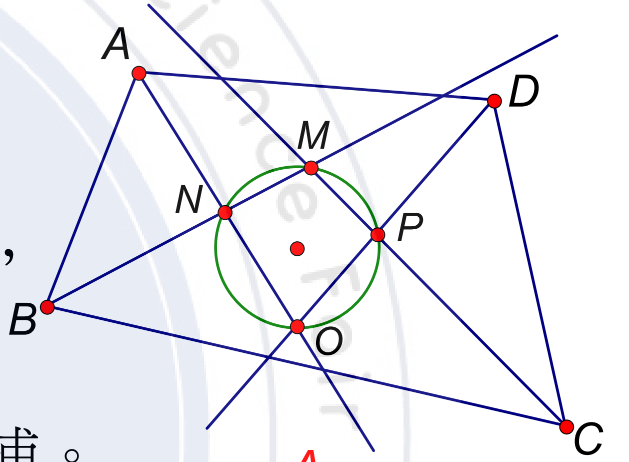


圖5

性質 1：如圖5，圓內接四邊形的兩組對角分別互補。

性質 2：如圖5，四邊形中四條角平分線的4個交點會共圓。

引理：如圖6，等差n邊形中，$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}} \perp \overleftrightarrow{A_{i+a+1}A_{i+a+2}}$；$\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}} (i \geq 0)$

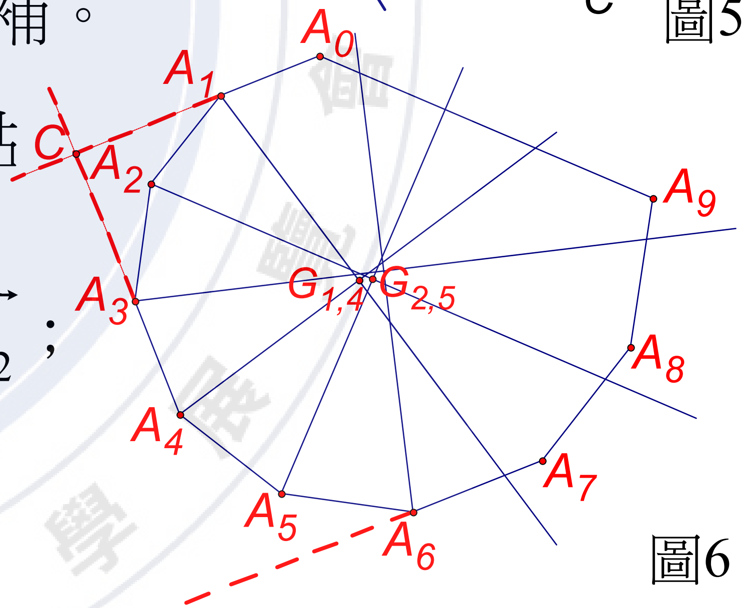


圖6

猜想一 (一)不規則邊長n邊形中變動角與固定式內角的關係一般式

推論1：如圖7、8，不規則邊長 n 邊形中每組間隔 a 個內角的角平分線皆正交時，變動角 $\angle A_0 + \angle A_{n-1}$ 與固定式內角的關係式為

$$\angle A_0 + \angle A_{n-1} = (n-2)\times 180^\circ - \left[(a+1)\times 180^\circ - 90^\circ\right]\times(n-a-3) + \left[\sum_{k=1}^{a+1}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k + \angle A_{n-1-k})\right] + \left(a\sum_{k=a+2}^{n-a-3}\angle A_k\right),\ 2a+5 \le n \le 4a+5$$

推論2：如圖7、8，不規則邊長 n 邊形中，每組間隔 a 個內角的角平分線皆正交時，固定式內角之間的關係式為

相鄰內角和關係式：$\angle A_m + \angle A_{m+1} = \angle A_{m+a+1} + \angle A_{m+a+2}$，

且 $1 \le m \le n-a-4$

不相鄰內角和關係式：$\angle A_m + \angle A_{m+a+3} = \angle A_{m+2} + \angle A_{m+a+1}$，

且 $1 \le m \le n-a-5$

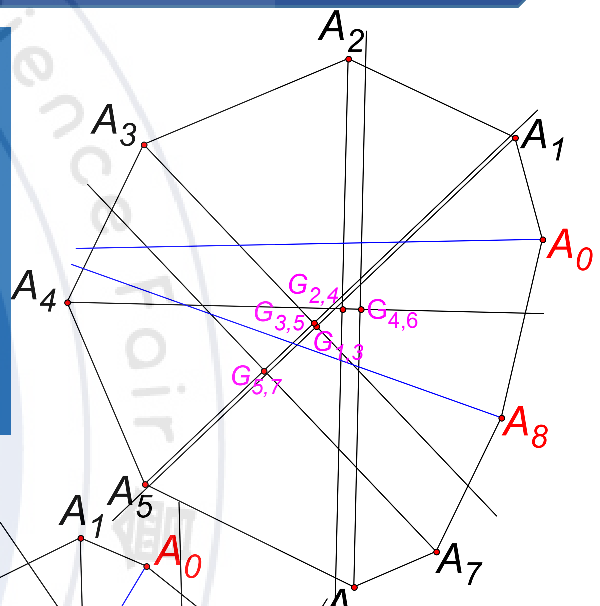


圖7

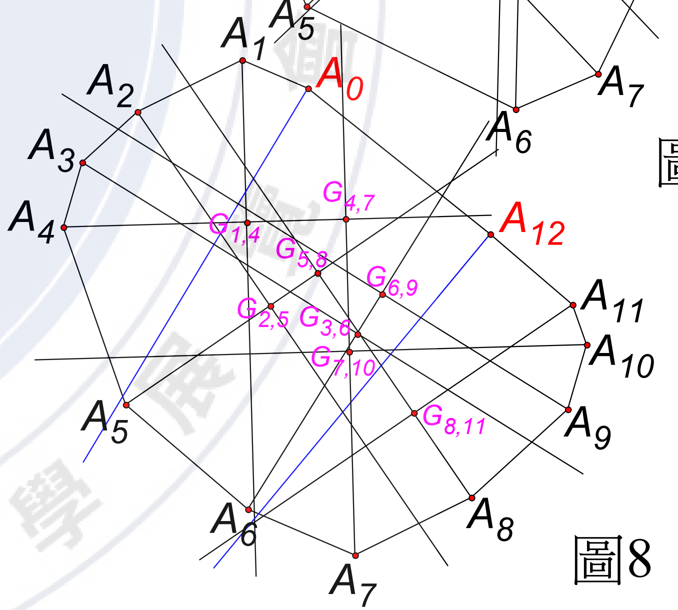


圖8

猜想二、三 ➡ (二)等固定式內角找 **n** 邊形的最多邊數及圓內接四邊形數量探討

推論3：如圖9，若 **n** 邊形中固定式內角皆為平均角度時，則邊數**n**的範圍是 $a+5\le n\le 4a+5$，且 $n=2a+5$ 時開始有完整規律的變動角關係式

推論4：如表格一，若角平分線的正交點數為 $O_{n,a}=n-a-3$，則內分角圓內接四邊形個數 $Q_{n,a}$ 與正交點數之間的關係為

$$Q_{n,a}=C_2^{O_{n,a}}-[n-2a-4]\times\left[\frac{n}{2a+5}\right]，C_n^m=\frac{m!}{n!(m-n)!}，[\ ]為高斯符號$$

表格一	間隔四個內角，***a*** **=4**					
*n*邊形	*n*=9	...	*n*=12	*n*=13	...	*n*=21
角平分線正交點數	2	...	5	6	...	14
圓內接四邊形個數和排列方式	1	...	10=1+2+3+4	14=1+2+3+4+4	...	82=1+2+3+4+4+5+6+7+8+9+10+11+12

$$\frac{1}{2}\angle A_1+\overbrace{\angle A_2+\ldots\ldots+\angle A_{a+1}}^{a個角}+\boxed{\frac{1}{2}\angle A_{a+2}}=(a+1)\times180^\circ-90^\circ$$

$$\frac{1}{2}\angle A_2+\angle A_3+\ldots\ldots+\angle A_{a+2}+\frac{1}{2}\angle A_{a+3}=(a+1)\times180^\circ-90^\circ$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2}\angle A_{a+1}+\angle A_{a+2}+\ldots\ldots+\angle A_{2a+1}+\frac{1}{2}\angle A_{2a+2}=(a+1)\times180^\circ-90^\circ$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\angle A_{a+2}}+\angle A_{a+3}+\ldots\ldots+\angle A_{2a+2}+\frac{1}{2}\angle A_{2a+3}=(a+1)\times180^\circ-90^\circ$$

圖9

猜想四 (三)等差n邊形中最多邊數、相鄰正交點距離與其圍成之圖形探討

推論5：如圖10、11，定義基準高、判別高、平行距，並得出如下四個關係式

基準高：$\overline{A_0A_1}$ 到 $\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 的距離；

$$D_d^{a,p}(\overline{A_0A_1},\overline{A_{2a+2}A_{2a+3}})=[p+(a+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$$

平行距：$\overline{A_iA_{i+1}}$ 到 $\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}$ 的距離；

$$D_{d,i}^{a,p}\left(\overline{A_iA_{i+1}},\overline{A_{i+2a+2}A_{i+2a+3}}\right)=[p+(a+i+1)d]\cot\left(\frac{45^\circ}{a+1}\right)$$

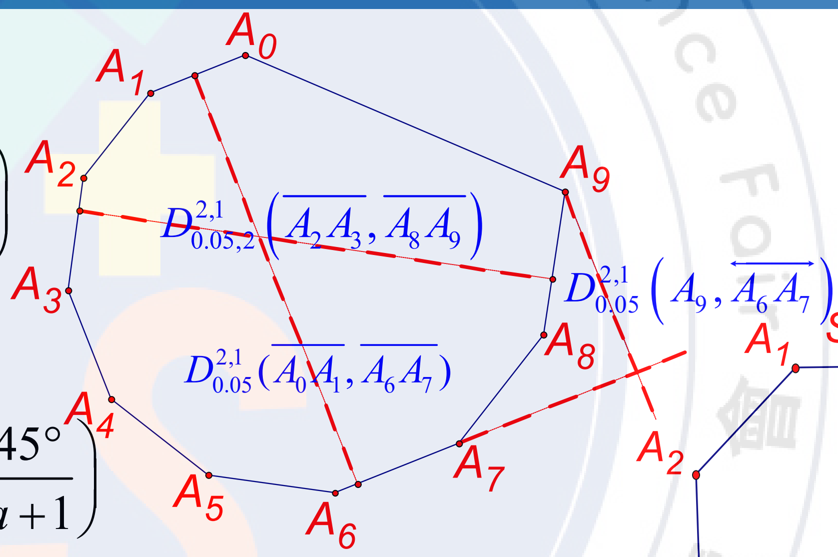


圖11

判別高：點 A_m 到 $\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}$ 的距離；

第一類：$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{m-2a-3}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)$，$2a+4\le m\le 3a+4$

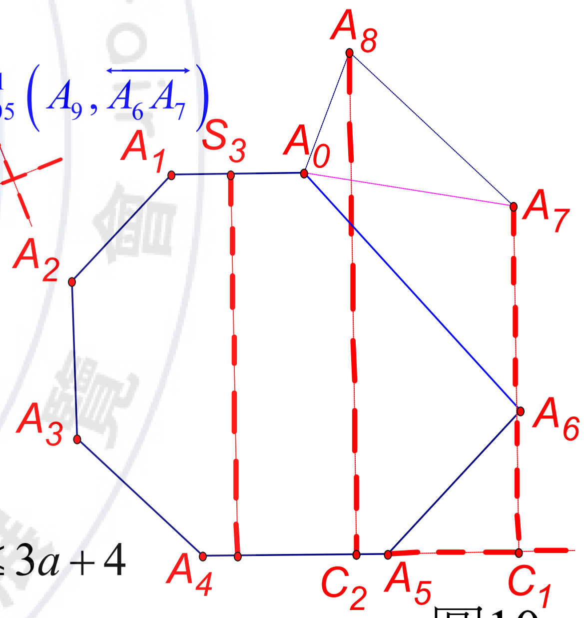


圖10

第二類：$D_d^{a,p}\left(A_m,\overleftrightarrow{A_{2a+2}A_{2a+3}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{a+1}\left[p+(2a+2+k)d\right]\sin\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)+\sum\limits_{k=3a+4}^{m-1}(p+kd)\sin\left[\frac{90^\circ\times(4a+4-k)}{a+1}\right]$，$3a+5\le m\le 4a+3$

猜想五、六 ➡ (四)等差n邊形中最多邊數、圖13中角平分線間的規律關係

推論6：【最多邊數比值判別法】
在固定式內角為平均角度θ_a、第一邊長為p、邊長增加的公差為d的等差n邊形中，若滿足d和p的比值範圍如下，
則最多邊數為**4a+4**：$\dfrac{d}{p} < \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{45^\circ}{a+1}\right)}{(4a+3)\cos^2\left(\dfrac{45^\circ}{a+1}\right)-(3a+2)}$

推論7：在推論6的條件下，不論是否滿足最多邊數比值範圍，且繼續作邊所形成的螺旋圖中，對於任意$t \in \mathbb{N}$，$\angle A_t$的角平分線會和$\angle A_{t+(4a+4)(j-1)}$ $(j=2,3,4\cdots)$的角平分線重合，
且當$a \in \mathbb{N}$，
下列等式恆成立：$\left[2\sum_{k=1}^{a}\sin\left(\dfrac{90^\circ \times k}{a+1}\right)\right]+1=\cot\left(\dfrac{45^\circ}{a+1}\right)$

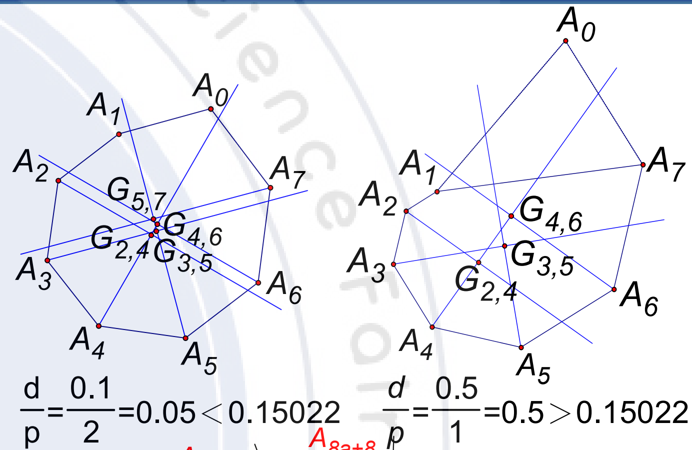


圖12

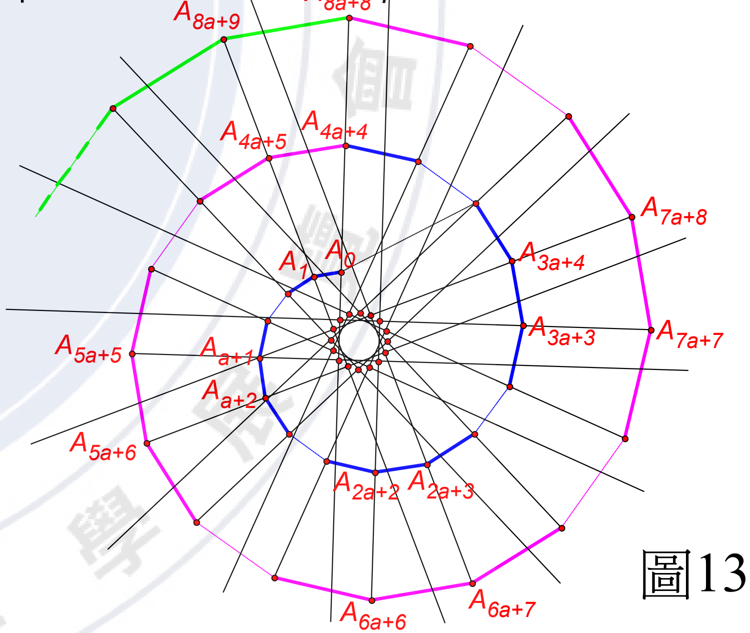


圖13

猜想六 ⇨ (五)相鄰正交點之距離與其圍成之圖形探討

推論8：如圖14，在等差 n 邊形中，間隔 a 個內角的分角線皆正交，且固定式內角為平均角度 θ_a、第一邊長為 p 、邊長增加的公差為 d 時，則

1. 相鄰的正交點距離等長；
2. 不管是否滿足最多邊數比值條件，正交點所圍成的圖形為正 $4a+4$ 邊形；
3. 相鄰兩個正交點距離 (i.e.正$4a+4$ 邊形的邊長) 與 a 、d 的關係一般式為

$$\frac{d\sin\left(\frac{90^\circ}{a+1}\right)\left\{\left[2\sum_{k=1}^{a}(a+1-k)\cos\left(\frac{90^\circ\times k}{a+1}\right)\right]+(a+1)\right\}}{\sqrt{2}}$$

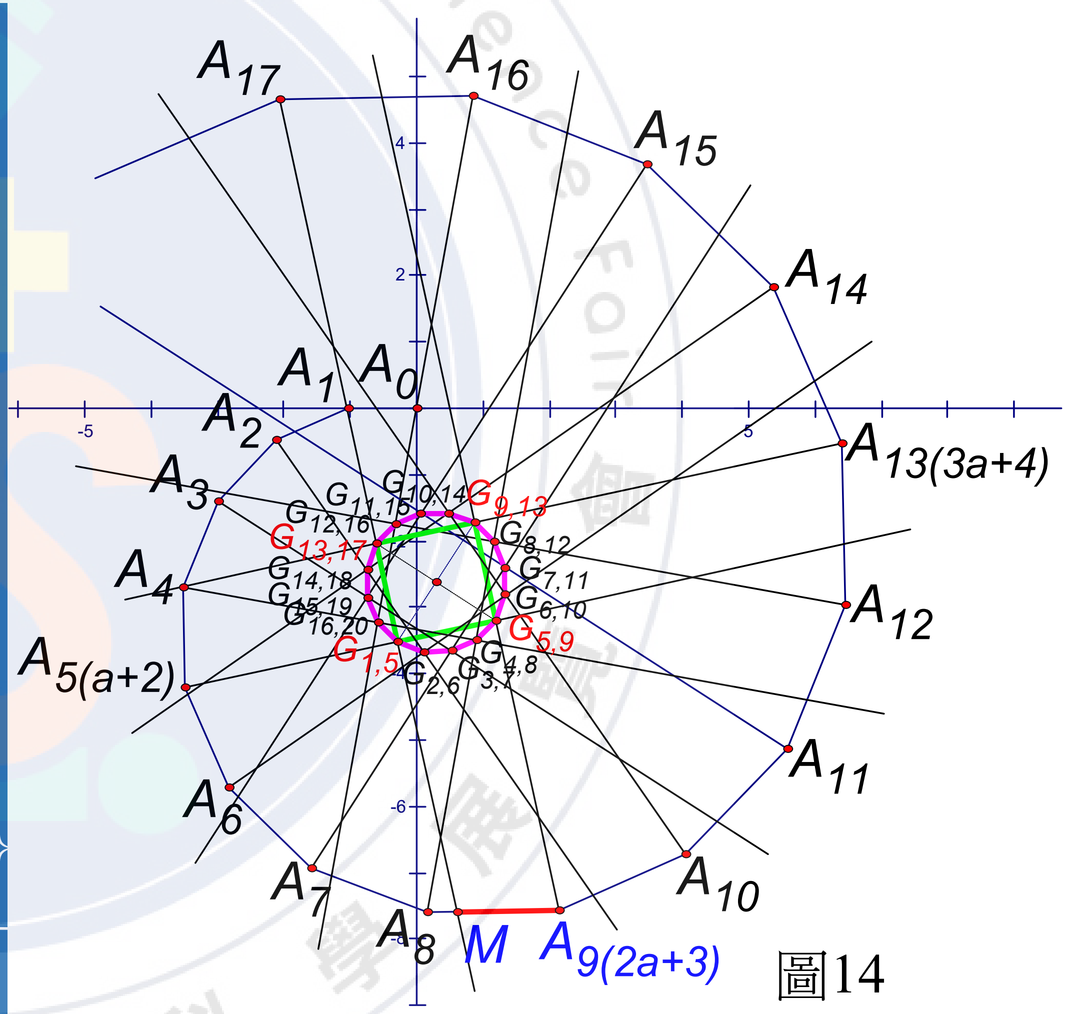


圖14

不規則邊長與等差邊長的n邊形之異同分析表

	不規則邊長n邊形	等差n邊形
1.變動角與固定式內角間的關係一般式	$\angle A_0+\angle A_{n-1}=(n-2)\times180^\circ-\left[(a+1)\times180^\circ-90^\circ\right]\times(n-a-3)+\left[\sum_{k=1}^{a+1}\left(k-\frac{3}{2}\right)(\angle A_k+\angle A_{n-1-k})\right]+\left(a\sum_{k=a+2}^{n-a-3}\angle A_k\right)$	
	$2a+5\le n\le 4a+5$	$2a+5\le n\le 4a+4$
2. 相鄰內角和關係式&不相鄰內角和關係式	$\angle A_m+\angle A_{m+1}=\angle A_{m+a+1}+\angle A_{m+a+2}\quad(1\le m\le n-a-4)$ $\angle A_m+\angle A_{m+a+3}=\angle A_{m+2}+\angle A_{m+a+1}\quad(1\le m\le n-a-5)$	
3.設定固定式內角皆為平均角度時的最多邊數	$n_{max}=4a+5$	$n_{max}=4a+4$
4.內分角圓內接四邊形個數 $Q_{n,a}$	$Q_{n,a}=C_2^{O_{n,a}}-[n-2a-4]\times\left[\frac{n}{2a+5}\right]$	
	$a+5\le n\le 4a+5$	$a+5\le n\le 4a+4$

未來展望

1.探討是否在給定三個變數(a 、p 、d)的條件下，就知道最多邊數為何 ？
2.如圖15，在無限循環的螺旋圖形中會不會有關於黃金比例的角度或長度產生呢?

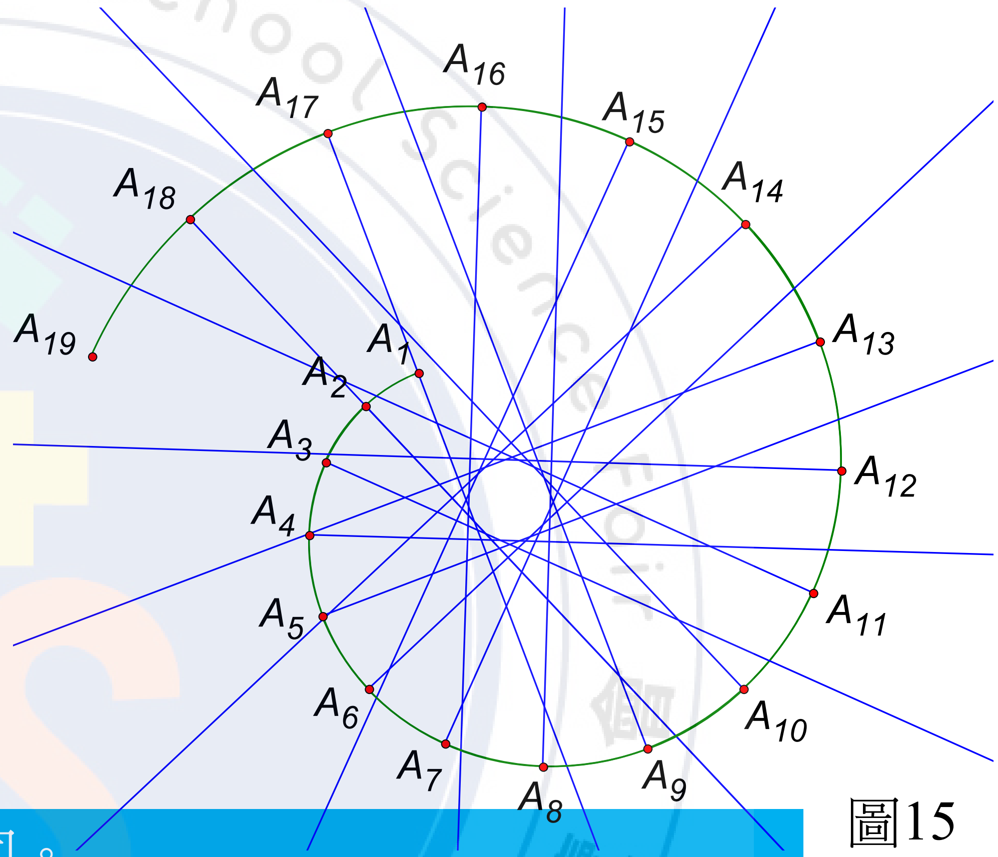


圖15

參考文獻

[1] 國中數學第四、五冊，新北市康軒文教公司。
[2] 高中數學第二冊第一章，排列組合；第三冊第一章，三角，南一書局。
[3] 笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003年
[4] 許宸諺、鍾秉哲，角平分線正交的秘密－n邊形中角平分線正交的性質探討 新竹縣第61屆科展國中組數學科第二名，2021年5月。