中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030416

當三角形遇見圓—最大覆蓋率之探討

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 劉宇昕	吳浩誠
國三 陳正昕	沈志強

關鍵詞：覆蓋率、三角形、圓形

摘要

本作品針對圓覆蓋三角形面積率進行研究，探討不同圓半徑覆蓋於正、等腰三角形，當有最大覆蓋率時，圓心位置或範圍及覆蓋率為何。在正、等腰三角形$r \le r_I$、$r \ge r_O$時，利用相似，求出範圍頂點位置及作圖方法；而在正三角形且$r_I < r < r_O$時，巧妙運用正三角形的性質及將弓形疊合，得證圓心位於內(外)心時覆蓋率最大；而當被覆蓋三角形為等腰三角形且$r_I < r < r_O$時，求出臨界值並將其細分為銳角、直角、鈍角來討論，在銳、直角三角形時，寫出覆蓋率並微分，求得圓心最佳位置，而在鈍角三角形時更發現幾處相異，也算出了半徑臨界值，並利用對稱證明圓心最佳位置。

壹、研究動機

上了國中後，開始對幾何有些許接觸，一次上圓的課程時，有同學突發奇想：如果把圓放在正三角形裡，怎麼放覆蓋面積最大？立即在課堂上引起很大的迴響，大家第一直覺都認為放在內(外)心的位置，覆蓋面積應該會最大，但證明一時間居然也說不上口，此時又有同學提問，不同半徑會不會影響？如果不是正三角形又要放在哪裡？種種疑問使我們欲罷不能，也激起我們挑戰數學的好勝心，進而開始了這次研究。

貳、研究目的

一、探討正三角形在覆蓋圓半徑小於內切圓半徑時圓心的範圍

二、探討正三角形在覆蓋圓半徑大於外切圓半徑時圓心的範圍

三、探討正三角形在覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外切圓半徑時圓心的位置

四、探討等腰三角形在覆蓋圓半徑小於內切圓半徑時圓心的範圍

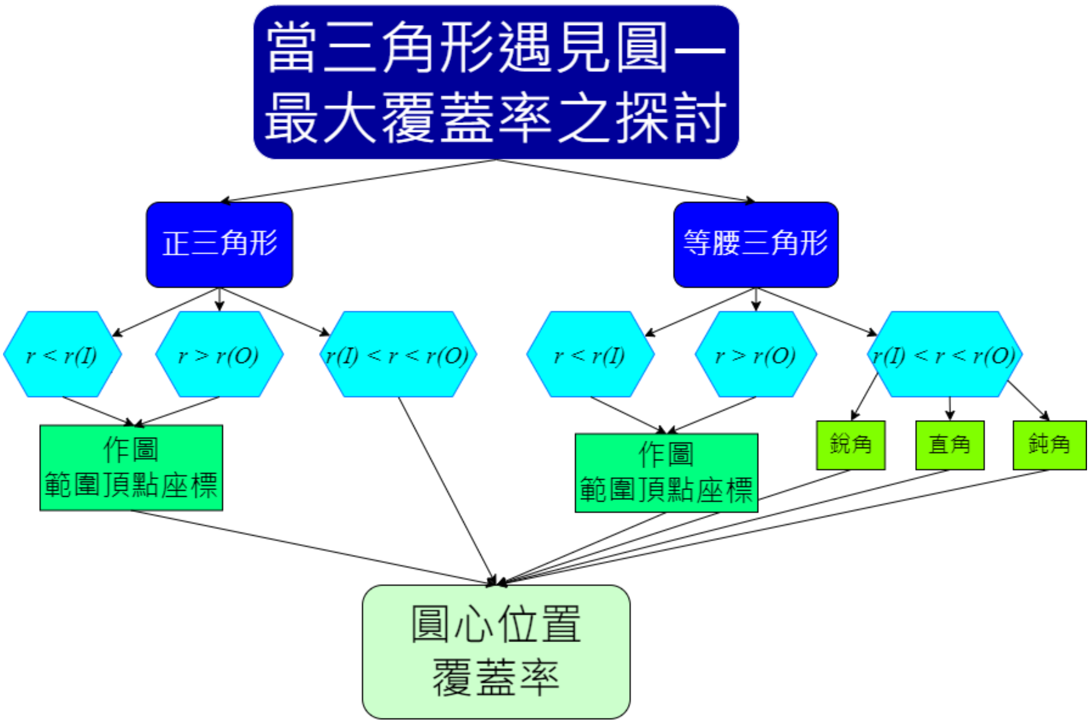
五、探討等腰三角形在覆蓋圓半徑大於外切圓半徑時圓心的範圍

六、探討等腰銳角三角形在覆蓋圓半徑大於內切圓、大於外切圓半徑時圓心的位置

七、探討等腰直角三角形在覆蓋圓半徑大於內切圓、大於外切圓半徑時圓心的位置

八、探討等腰鈍角三角形在覆蓋圓半徑大於內切圓、大於外切圓半徑時圓心的位置

參、研究架構圖



肆、研究設備及器材

$GeoGebra$、$Wolfram\ \ Alpha$。

伍、研究過程或方法

將原題完整敘述如下：

給定一正三角形及任意半徑之圓，當圓覆蓋於正三角形的覆蓋率最大時，試求圓心的位置或範圍及覆蓋正三角形之覆蓋率。

為方便研究，做出以下名詞定義

$f(r)$：覆蓋率(圓覆蓋於三角形的面積÷三角形面積)

O_c ：覆蓋圓圓心

r ：覆蓋圓半徑

r_I ：三角形內切圓半徑

r_O ：三角形外接圓半徑

首先探討原題，也就是當被覆蓋三角形為正三角形時的情況。

一、 正三角形

猜測：

在$r < r_I$或$r > r_O$時，很直觀的，應會有一範圍使圓心在範圍中皆有最大覆蓋率，而當$r = r_I$時，圓心在內心為最佳位置，當$r = r_O$時，圓心在外心為最佳位置。因此當r由r_I變大至r_O的過程，由於正三角形內心與外心位置相同，因此猜測O_c 位於內(外)心應皆為最佳位置。

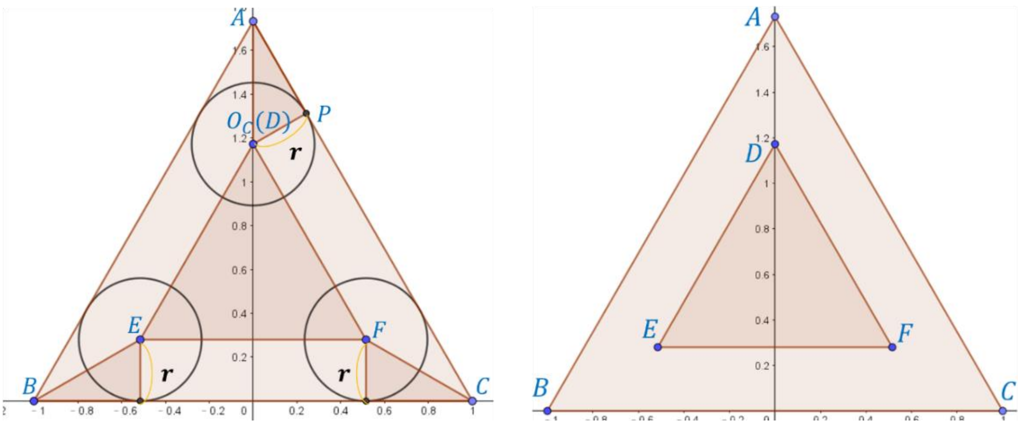
簡要分析：

當$r < r_I$時，最大覆蓋面積即為圓面積；當$r > r_O$時，最大覆蓋面積則為三角形面積，可以推知r應是影響圓心位置的重要變因，因此在解決正三角形時，將以r是否小於r_I或大於r_O來分類討論。

而因r是任意值，因此正三角形的大小並沒有影響，為了方便計算，將正三角形三頂點置於$(1,0)$、$(-1,0)$、$(0,\sqrt{3})$。

(一) 覆蓋圓半徑小於內切圓半徑($r \le r_I$)：

由於 $r \le r_I$，可得知圓心位置應為一範圍，最大覆蓋面積為圓面積，且圓的位置僅能在三角形內部至多與邊相切，也就是若$\boldsymbol{O_c}$**至最近邊的距離大於等於**$\boldsymbol{r}$，則此點為圓心可以放置之位置，上述可得當與三角形距離為覆蓋圓半徑時為圓心範圍之邊界，如下圖，並整理為推論一。



推論一：當$r \le r_I$， O_c在以$D\left(0, \sqrt{3}-2r\right)$、$E\left(-1+\sqrt{3}r, r\right)$、$F(1-\sqrt{3}r, r)$為頂點的正三角形時有最大覆蓋率，且$f(r)=\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$。

說明：(1) 當覆蓋圓與△ABC兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$相切，且切$\overline{AC}$於 P 點，

則△AO_cP為$30^{\mathrm{o}}-60^{\mathrm{o}}-90^{\mathrm{o}}$的三角形

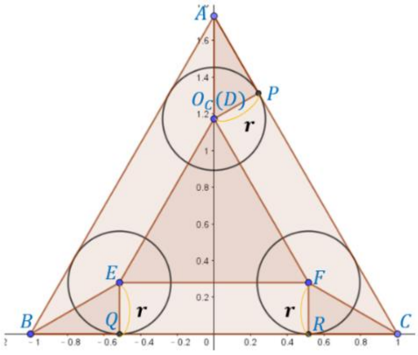
$\because\ \overline{O_cP}=r\ \therefore\ \overline{O_cA}=2r \quad \Rightarrow$ D點坐標$\left(0, \sqrt{3}-2r\right)$

同理當O_c與△ABC兩邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$相切，且切$\overline{BC}$於 Q 點，

及當O_c與△ABC兩邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$相切，且切$\overline{BC}$於 R 點

$\because\ \overline{BQ}=\overline{CR}=\sqrt{3}r$

$\therefore$ F 點坐標$\left(-1+\sqrt{3}r, r\right)$、$G$ 點坐標$\left(1-\sqrt{3}r, r\right)$



(2) $\because\ r \le r_I$，覆蓋面積最大即為覆蓋圓的面積

$\therefore$ 最大覆蓋率$CR=\frac{\text{覆蓋圓面積}}{\text{正三角形面積}}=\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$。

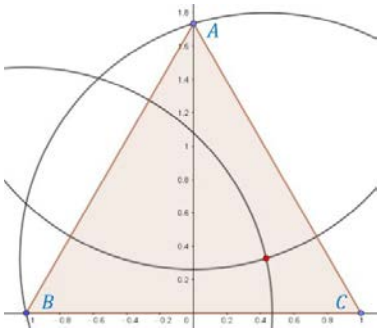
知道半徑小於內切圓半徑的圓心範圍後，因$r_I<r<r_O$時無法完全覆蓋，討論較為複雜，所以先由$r \ge r_O$的情況著手研究。

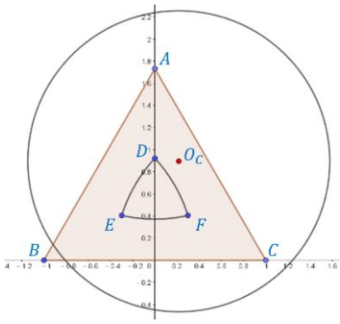
(二) 覆蓋圓半徑大於外接圓半徑($r \ge r_O$)：

$r \ge r_O$時，圓心位置也應為一範圍，最大覆蓋面積即為三角形面積。

在研究過程發現，區域不再是正三角形。由於較$r \le r_I$時複雜，因此$r \ge r_O$時將討論頂點位置及如何作圖。

不同於$r \le r_I$，在$r \ge r_O$時限制變為**圓心至三角形最遠頂點距離小於或等於r**。並以三角形任意一頂點為圓心， r為半徑畫弧，如果O_c 落在此弧上可使覆蓋圓與一頂點相接，當O_c 在此弧上移動直至覆蓋圓與三角形第二頂點相接時，正三角形皆被覆蓋圓完全覆蓋。當覆蓋圓與三角形二頂點相接時，O_c 的位置即為圓心範圍的一個頂點，以同樣方法可得三頂點位置，如下圖，若圓心在此三頂點及其軌跡之外，則O_c 至三角形其中一頂點距離必大於r而無法完全覆蓋，如下頁圖：





推論二：當$r \geq r_O$， O_c在分別以A、B、C為圓心，r為半徑畫圓交於D、E、F的區域內有最大覆蓋率$f(r)=1$，且三點坐標：

$D\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$E\left(\frac{1-\sqrt{3r^2-3}}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$ 、$F\left(\frac{-1+\sqrt{3r^2-3}}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$。

說明：(1) 當覆蓋圓O_c與$\triangle ABC$兩頂點B、C相接

$\because\ \overline{O_cB}=\overline{O_cC}=r$，$\overline{O_cO}=\sqrt{r^2-1}$

$\therefore D$點坐標$\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$

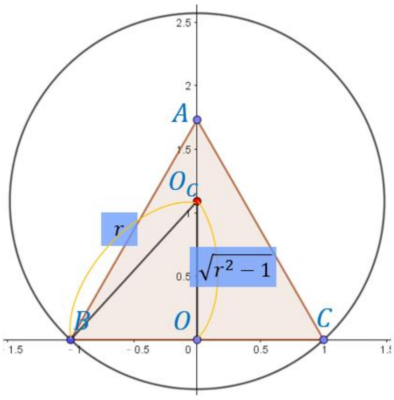
$\because \overline{DO}=\sqrt{r^2-1}\ \therefore \overline{AD}=\ \sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}$

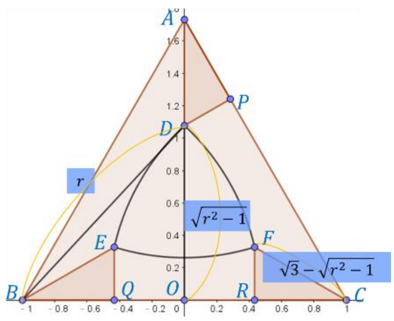
且$\triangle ADP$、$\triangle BEQ$、$\triangle CFR$為$30^o-60^o-90^o$的三角形

又$\overline{AD}=\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}=\overline{BE}=\overline{CF}$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{CR}=\frac{3-\sqrt{3r^2-3}}{2}$ ，$\overline{EQ}=\overline{FR}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}$

因此，E點坐標$\left(\frac{1-\sqrt{3r^2-3}}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$、$F$點坐標$\left(\frac{\sqrt{3r^2-3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$



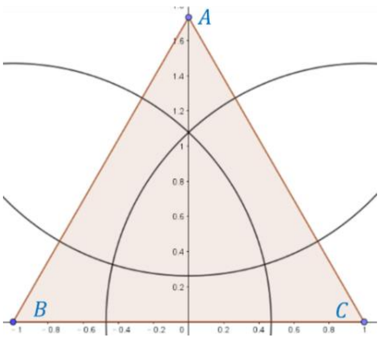


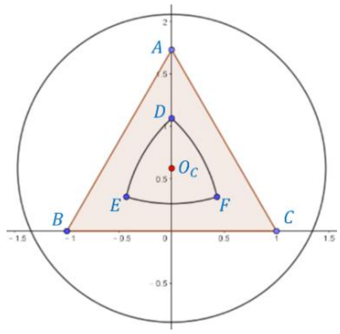
(2) $\because\ r \geq r_O\quad \therefore$ 覆蓋面積最大即為三角形的面積，因此最大覆蓋率$f(r)=1$。

由上述，我們也可以得到最大覆蓋圓圓心區域的尺規作圖方法。

最大覆蓋率覆蓋圓圓心區域作圖：

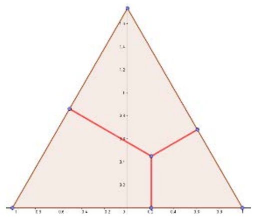
以三角形三頂點為圓心，覆蓋圓半徑為半徑r畫弧，相交區域即為所求，且覆蓋面積皆為正三角形面積。

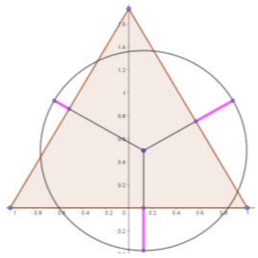




(三) 覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外接圓($r_I < r < r_O$)：

當$r_I < r < r_O$，最大覆蓋不再是整個覆蓋圓或整個三角形，求覆蓋面積的策略改為圓面積減掉超出三角形外的弓形。





依據一開始的猜測，O_c 應該落在正三角形的內(外)心，因此需要證明在其他位置的覆蓋率皆比較小。原本想要直接算出三個弓形面積後微分求覆蓋面積最大值，但我們想到正三角形有一重要性質：

正三角形內任一點到三邊的距離和等於正三角形的高。也就是說

「半徑減三弦心距**的和是定值**」。

利用這個性質，我們分兩部分討論，進而得到底下推論三。

推論三：當$r_I < r < r_O$， O_c 落在正三角形的內(外)心上有最大覆蓋率，

最大覆蓋率$f(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2 - 3r^2 \times \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3r} - \sqrt{3r^2-1}\right)$

說明：(1) **當O_c 落在中垂線上任一點的覆蓋率，皆比該點左右移動時的覆蓋率大：**

當O_c 落在中垂線上，如下頁左圖，因為對稱所以弓形$P_1Q_1R_1$ =弓形$P_3Q_3R_3$，若O_c 向右移動，右邊的弓形面積增加、左邊弓形面積減少而下面弓形面積不變。且因半徑減弦心距的和為定值，也就是當我們把原來的弓形與向右移動後的左、右弓形疊合如下頁右圖(將Q_1～Q_6疊合為Q、P_1～P_4疊合為P、R_1～R_4疊合為R)，右弓形弦心距的增加量$\overline{X_1Y_1}$=左邊弓形弦心距的減少量$\overline{Y_1Z_1}$。如下

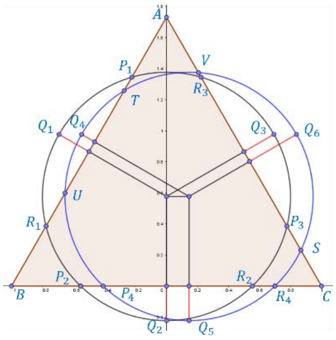
圖，明顯地，

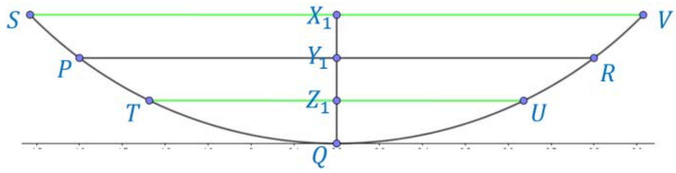
$\because \left(弓形SQ_6V - 弓形P_3Q_3R_3\right) > \left(弓形P_1Q_1R_1 - 弓形TQ_4U\right)$

$\therefore (弓形SQ_6V + 弓形TQ_4U) > 2(弓形P_{1(3)}Q_{1(3)}R_{1(3)})$

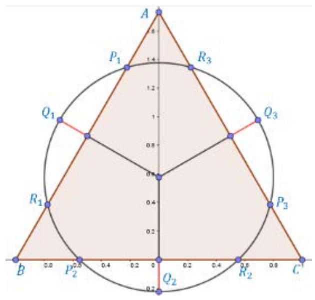
$\Rightarrow O_c$ 由中垂線向右移覆蓋面積減少，同理向左也是一樣。

由上述我們得到當O_c 落在中垂線上任一點的覆蓋率，皆比該點左右移動時的覆蓋率大。





(2) 當O_c 落在內(外)心的覆蓋率，皆比落在中垂線上任相異一點的覆蓋率大：



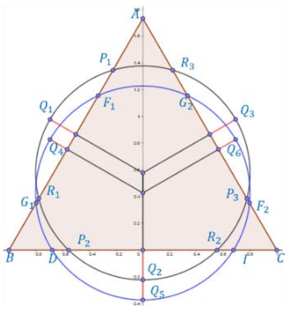
如右圖，當圓心位於內(外)心時，弓形$P_1Q_1R_1$、弓形$P_2Q_2R_2$、弓形$P_3Q_3R_3$面積皆相等。

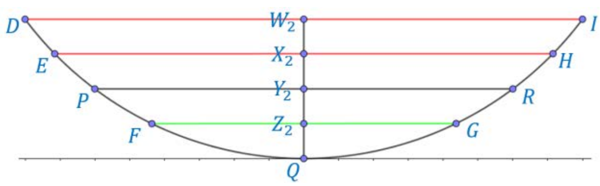
圓心由內(外)心往下移動時，左右弓形減少、下弓形增加，且三段弦心距為定值，又左右對稱，因此左、右弓形弦心距的減少量$2\overline{Y_1Z_1}$=下弓形弦心距的增加量$\overline{W_1X_1}$，同樣將$Q_1 \sim Q_6$疊合為Q、$P_1 \sim P_4$疊合為P、$R_1 \sim R_4$疊合為R，如下圖可推得：

$\because \left(弓形DQ_5I - 弓形P_2Q_2R_2\right) > 2\left(弓形P_{1(3)}Q_{1(3)}R_{1(3)} - 弓形F_{1(2)}Q_{1(2)}G_{1(2)}\right)$

$\therefore (弓形DQ_5I + 2(弓形F_{1(2)}Q_{1(2)}G_{1(2)})) > 3$ 弓形$(弓形P_{1(3)}Q_{1(3)}R_{1(3)})$

$\Rightarrow$當圓心由內(外)心往下移動時，覆蓋面積減少。



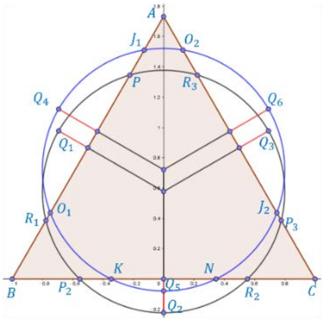


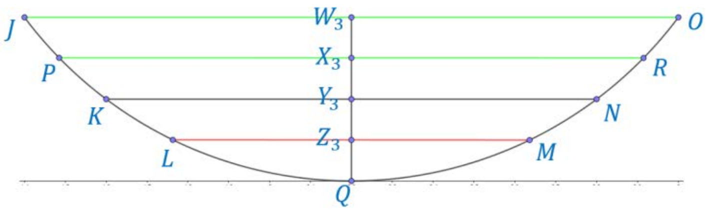
當圓心由內(外)心往上移動時，則左右弓形增加、下弓形減少，向上移動時，左、右弓形弦心距的增加量$2\overline{Y_2Z_2}$=下弓形弦心距的減少量$\overline{W_2X_2}$，同樣將$Q_1\sim Q_6$疊合為$Q_1\sim Q_6$疊合為Q、$P_1\sim P_4$疊合為P、$R_1\sim R_4$疊合為R，如下圖可推得：

$$\because 2(弓形J_{1(2)}Q_{1(2)}O_{1(2)}-弓形P_{1(3)}Q_{1(3)}R_{1(3)})>(弓形P_2Q_2R_2-弓形KQ_5N)$$

$$\therefore 2\left(弓形J_{1(2)}Q_{1(2)}O_{1(2)}\right)+(弓形KQ_5N)\ \ >3(弓形P_{1(2、3)}Q_{1(2、3)}R_{1(2、3)})$$

⇒當圓心由內(外)心往上移動時，覆蓋面積減少。



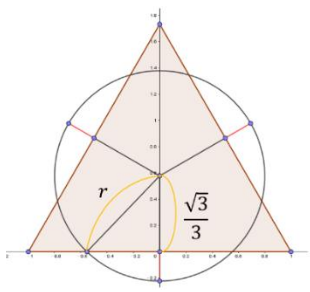


由以上兩點說明O_C位於內(外)心時，有最大覆蓋面積。接著探討O_C位於內(外)心時的覆蓋率。

O_C位於內(外)心覆蓋率：

由於覆蓋率為覆蓋面積÷三角形面積，又弓形相關長度如下圖，因此可推知覆蓋率如下：

$$\frac{(圓面積-(弓形\times 3))}{三角形面積}=\frac{(圓面積-3(圓形\times 扇形角度-小三角形))}{三角形面積}$$



$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2-3\left(\pi r^2\times\frac{2\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3r})}{2\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2-3\left(r^2\times\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3r})-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{r^2-\frac{1}{3}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2-3r^2\times\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3r})-\sqrt{3r^2-1}\right)$$

到這裡，原題已經解決了，可以簡單歸納如下；

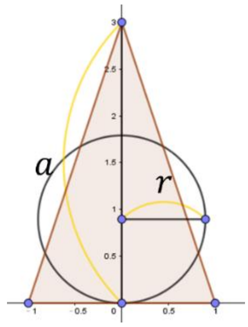
當$r \le r_I$或$r \ge r_o$可依作圖方法求出範圍及坐標。

$r \le r_I$：$f(r)=\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$。

$r \ge r_o$：$f(r)=1$。

$r_I < r < r_O$：O_C位於內(外)心時最佳， $f(r)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2-3r^2\times\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3r})-\sqrt{3r^2-1}\right)$。

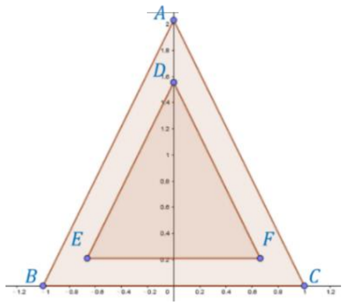
二、 等腰三角形



解決正三角形後，我們將原題的正三角形延伸為等腰三角形，半徑的定義同正三角形，並同樣將三角形的底置於$(1,0)$、$(-1,0)$，第三點設為$(0,a)$且$a>0$，如右圖：

猜測：

等腰三角形的內心與外心並非同一點，因此當$r_I < r < r_O$時最大覆蓋率應該不會是同一點，或許當圓半徑變大的過程最大覆蓋率的圓心會從內心往外心的方向直線移動。



與正三角形相同，先將半徑分為小於內切圓、大於外接圓與大於內切圓且小於外接圓三種情況分析最大覆蓋率圓心的可能位置。

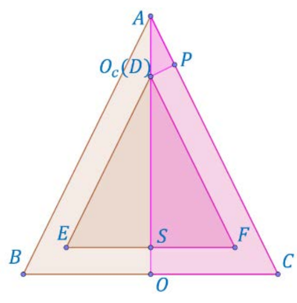
(一) 覆蓋圓半徑小於內切圓($r < r_I$)：

與正三角形求法相同可得最大覆蓋面積為圓面積，當圓心與三角形距離為覆蓋圓半徑時為圓心範圍之邊界，如右圖。

> **推論四**：當$r \le r_I$， O_c在以$D\left(0,a-r\sqrt{a^2+1}\right)$、$E\left(-\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a},r\right)$、$F\left(\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a},r\right)$為頂點的相似三角形內有最大覆蓋率，且$f(r)=\frac{\pi r^2}{a}$。

說明：(1)當覆蓋圓圓心O_c與$\triangle ABC$兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$相切，且切$\overline{AC}$於P點

則$\triangle AO_cP$為一與$\triangle AOC$相似的直角三角形(AA相似)，如右圖



$\because \overline{O_cP}=r \quad \therefore \overline{O_cA}=\mathrm{r}\times\frac{\sqrt{a^2+1}}{1}= \ r\sqrt{a^2+1}$

$\Rightarrow D$點坐標$\left(0,a-r\sqrt{a^2-1}\right)$

且$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$($AA$相似) $\therefore \overline{ES}=\overline{SF}=\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a}$

$\Rightarrow E$點坐標$\left(-\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a}, r\right)$、$F$點坐標$\left(\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a}, r\right)$

(2)$\because\ r \le r_I\ \therefore$ 覆蓋面積最大即為覆蓋圓的面積，因此最大覆蓋率$f(r)=\frac{\pi r^2}{a}$。

(二) 覆蓋圓半徑大於外接圓($r \ge r_O$)：

由正三角形可得知圓心範圍即為分別以原三角形頂點為圓心，半徑r畫圓的重疊處，圓心位於此範圍便可完全覆蓋三角形。

推論五：當$r \ge r_O$， O_c在分別以A、B、C為圓心，r為半徑畫圓交於D、E、F的範圍內有最大覆蓋率，$f(r)=1$。且三點坐標：$D(0,\sqrt{r^2-1})$、$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$、$F\left(\frac{a\sqrt{4r^2-a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$。

說明：(1) 當圓O_c與$\triangle ABC$兩頂點B、C相接

$\because\ \overline{O_cB}=\overline{O_cC}=r\quad \therefore\ \overline{DO}=\sqrt{r^2-1} \Rightarrow D$點坐標$(0,\sqrt{r^2-1})$

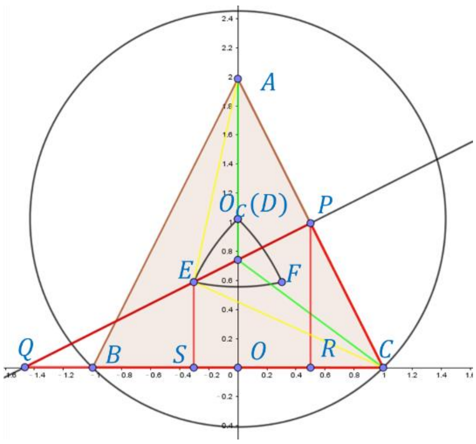
做$\overline{AC}$中垂線，並交$\overleftrightarrow{BC}$於Q

$\because\ \overline{AE}=\overline{CE}=r$、$\overline{PC}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\quad \therefore\ \overline{PE}=\sqrt{r^2-(\frac{\sqrt{a^2+1}}{2})^2}$

又$\overleftrightarrow{PQ}$為$\overline{AC}$中垂線可得P點坐標$\left(\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$、

過P點做$\overline{BC}$垂線交$\overline{BC}$於R

$\because\ \overline{QR}\times\overline{RC}=\overline{PR}^2$(母子相似) $\therefore Q$點坐標$\left(\frac{1-a^2}{2},0\right)$



又$\overline{QR}=\frac{1}{2}-\frac{1-a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$ ，$\overline{PR}=\frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$\because \overline{PC}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$,$\overline{CE}=r$ $\therefore \overline{PE}=\frac{\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2}$

E點做$\overline{BC}$垂線交$\overline{BC}$於S

$\because \triangle QPR \sim \triangle QES$(AA) $\therefore \overline{PQ}:\overline{QE}=\overline{PR}:\overline{ES}$

$$\overline{QE}=\overline{PQ}-\overline{PE}=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}-\frac{\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2}=\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{ES}=\frac{a}{2}\times\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2}\div\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$\because \triangle QPR \sim \triangle QES(\mathrm{AA})$ $\therefore \overline{PQ}:\overline{QE}=\overline{QR}:\overline{QS}$

$$\Rightarrow \overline{QS}=\frac{a^2}{2}\times\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2}\div\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$=\frac{a(a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1})}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$\overline{OS}=\overline{QR}-\overline{QS}-\overline{OR}=\frac{a^2}{2}-\frac{a\left(a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}\right)}{2\sqrt{a^2+1}}-\frac{1}{2}$$

$$\overline{OS}=\frac{a\sqrt{4r^2-a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}$$

E點坐標$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}},\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$、

F點坐標$\left(\frac{a\sqrt{4r^2-a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}},\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$。

(2) $\because$ $r \geq r_O$

$\therefore$ 覆蓋面積最大即為三角形的面積，因此最大覆蓋率$f(r)=1$。

(三) 覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外接圓($r_I<r<r_O$)：

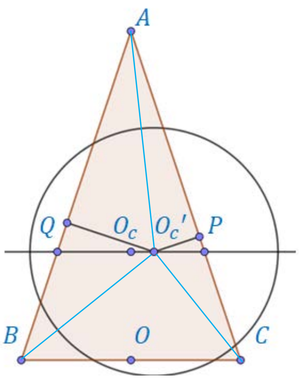
推論六：等腰三角形當$\mathrm{O_c}$ 落在底邊中垂線上任一點的覆蓋率，皆比該點左右移動時的覆蓋率大。

說明：將O_C坐標設為(m,n)。當m固定時，圓與三角形相割的三段弦心距和，

利用分割成三個三角形面積和等於原三角形，可以寫成：

$$n+(\frac{a-n}{a}+m)\div a\sqrt{a^2+1}+(\frac{a-n}{a}-m)\div a\sqrt{a^2+1}$$

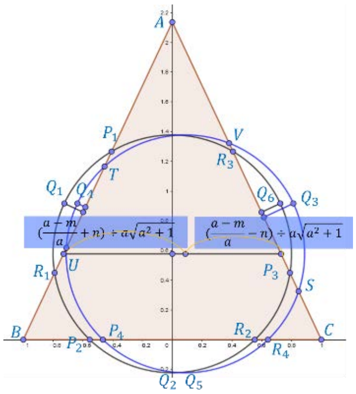
$$=n+\frac{a-n+ma}{a^2\sqrt{a^2+1}}+\frac{a-n-ma}{a^2\sqrt{a^2+1}}=n+2\times\frac{(a-n)}{a^2\sqrt{a^2+1}}$$

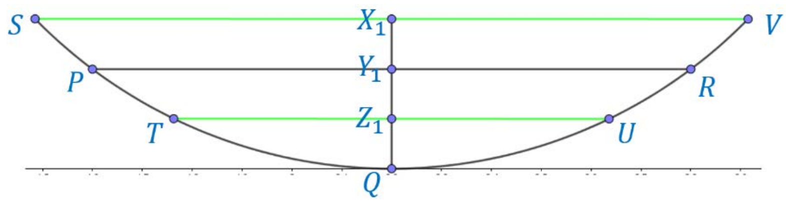


也就是當圓心位於$y=n$的直線上時，

左、右弦心距和並不會改變，其和為$2\times\frac{(a-n)}{a^2\sqrt{a^2+1}}$。

對正三角形的研究得知圓心位於中垂線上時覆蓋率大於圓心向左右移動，同理等腰三角形圓心向右移動時，由上述可得左右弦心距仍為定值，右弓形因距圓心較遠，增加量會大於左弓形減少量，覆蓋面積減少(向左同理)，因此圓心位於中垂線上移動覆蓋率大於圓心向左右移動，如下圖。

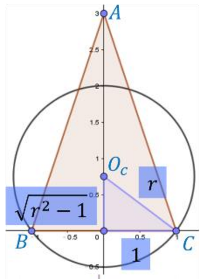




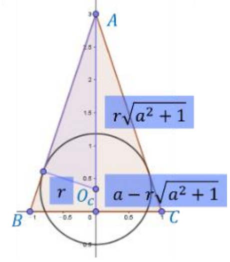
得到推論六後，接著我們要先討論覆蓋圓跟三角形會交於6點或4點，這會影響到覆蓋面積公式，因此我們先探討$O_c(m,n)$中n值的範圍為何，會與覆蓋圓三邊皆相交。

(1) 相交於六點十n的最小有效值：

最小有效值將分為兩種情況來分析：分別為直徑大於等於底邊 $(r \geq 1)$、與直徑小於底邊$(r < 1)$。



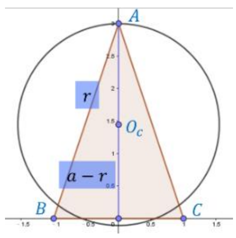
當$r \geq 1$時，如右圖，圓周接三角形底邊的兩個頂點後就無法再往下，所以相接兩點時的圓心為n的最小有效值，如右圖，可得$r \geq 1$時的最小有效值為$\sqrt{r^2-1}$。



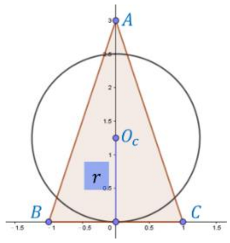
當$r < 1$時，如右圖，其最小有效值為圓與兩腰相切，如右圖，可得$r < 1$時的最小有效值為$a - r\sqrt{a^2+1}$。

(2) 相交於六點時n的最大有效值：

最大有效值同樣分成兩種情況分析：分別為直徑大於等於高$\left(r \geq \frac{a}{2}\right)$、直徑小於高$(r < \frac{a}{2})$。



當$r \geq \frac{a}{2}$時，如右圖，圓周接觸到上頂點時的圓心即為n的最大有效值，得最大有效值為$a - r$。



當$r < \frac{a}{2}$時，如右圖，圓周接觸到上頂點前會先與底邊失去交點，可得最大有效值即為r，如右圖。

由上述，我們得到n值的最大與最小有效值統整如底下推論七。

推論七：$a \geq 2$時，相交於六點n的有效範圍

當$r \geq 1$且$r \geq \frac{a}{2}$時，$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq a-r$ 。

當$r \geq 1$ 且$r < \frac{a}{2}$時，$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq r$ 。

當$r < 1$時， $a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq r$ 。

$a < 2$時：

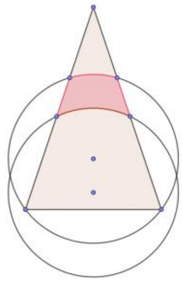
當$r \geq 1$且$r \geq \frac{a}{2}$時，的最小有效值為$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq a-r$。

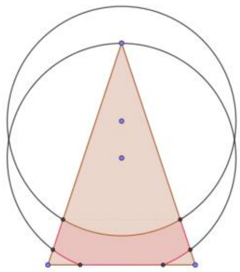
當$r < 1$且$r \geq \frac{a}{2}$時，$a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq a-r$。

當$r < \frac{a}{2}$時， $a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq r$。

討論完臨界值後，因O_c 必位於底邊的中垂線上，針對O_c 位於中垂線上進行進一步的分析，並將頂角分為銳角、直角、鈍角，且探討覆蓋率如下：

1. 等腰銳角三角形：

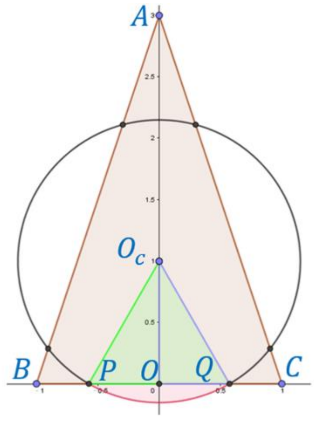




顯而易見地，如右圖，由於當覆蓋圓與等腰銳角三角形三邊皆相交時，覆蓋面積會比與其中一邊不相交大，而在討論完n的範圍後，為了求出最大覆蓋率，先求覆蓋面積。

覆蓋面積為圓面積πr^2減掉超出三角形外的弓形，我們想求下弓形與左、右弓形。

下弓形面積：



已知圓心$O_c(0,n)$

$\because \overline{O_cO} = n$,$\overline{O_cQ} = r$ $\therefore \overline{OQ} = \sqrt{r^2-n^2}$

$\Rightarrow \triangle\, O_cPQ = n\sqrt{r^2-n^2}$

又以$\overline{O_cO}$,$\overline{O_cQ}$可得$\angle QO_cO$為$\frac{2\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)}{2\pi}$

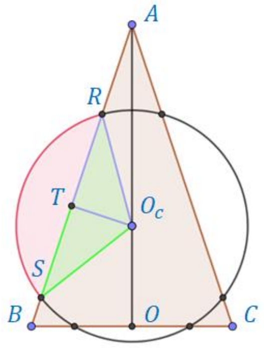
$\Rightarrow$下弓形面積$= \left(r^2 \times \cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right) - n\sqrt{r^2-n^2}\right)$

如右圖，扇形面積 $\pi r^2 \times \frac{2\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)}{2\pi}$減去三角形面積$n\sqrt{r^2-n^2}$，得出下弓形面積：

$$\left(r^2 \times \cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right) - n\sqrt{r^2-n^2}\right)$$

左、右弓形面積和：

已知$\overline{O_cR}=r$



$\because \triangle ABO \sim \triangle AO_cT(AA)\ \therefore \overline{O_cT}=\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}$

$\because \overline{O_cT}=\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}$ ，$\overline{O_cR}=r\ \therefore \overline{RT}=\sqrt{r^2-\left(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}$

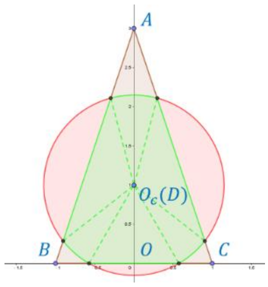
$\Rightarrow \triangle O_cRS=\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-\left(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}$

又以$\overline{O_cT}$ ，$\overline{O_cR}$可得$\angle RO_cT$為$\frac{2\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)}{2\pi}$

$\Rightarrow$左、右弓形面積$=2\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)-\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}})^2}\right)$

如右圖，扇形面積 $\pi r^2\times\frac{2\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)}{2\pi}$，減去三角形面積$\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-\left(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}$，得出左、右弓形面積和：$2\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)-\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}})^2}\right)$。

將以上算式總結，總覆蓋面積除以三角形面積a，便可得覆蓋率公式：

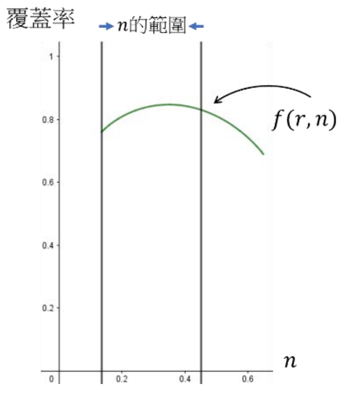


$$\frac{1}{a}\left(\pi r^2-\left(\frac{\pi r^2\times 2\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)}{2\pi}-n\sqrt{r^2-n^2}\right)-2\left(\frac{\pi r^2\times 2\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)}{2\pi}-\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-(\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}})^2}\right)\right)$$

統整以上可得定理一：

> **定理一**：當$r_I<r<r_O$， O_c 位於底邊中垂線上且圓周與三角形的三邊皆相交，$f(r,n)$=
>
> $\frac{1}{a}\left(\pi r^2-\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)-n\sqrt{r^2-n^2}\right)-2\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)-\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-\frac{(a-n)^2}{1+a^2}}\right)\right)$。

將 $f(r,n)$固定r繪製成函數圖形如右圖，要求得最大覆蓋率也就是求此函數的最高點。



一開始，我們想要跟正三角形一樣，利用弦心距的變化與弓形的疊合來找出最大覆蓋率時n的值，但因弦心距的和已不是定值，在找出底邊弦心距與兩側弦心距變化的差時，發現式子中依然存在反三角函數，因此我們改用微分的方式來求。

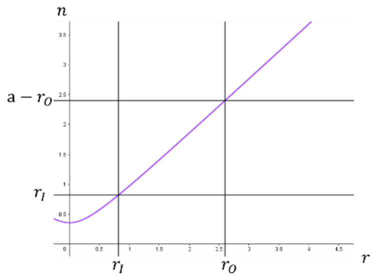
我們將覆蓋率公式寫入網路數學轉體$Wolfram\ \ Alpha$作一次微分求原式的最大值，得出以下式子：

$$\frac{-2(-(a-n)^2+(a^2+1)(r^2-\frac{(a-n)^2}{(a^2+1)})+r^2(a^2+1))}{(a^2+1)\sqrt{(a^2+1)}\times\sqrt{r^2-\frac{(a-n)^2}{(a^2+1)}}}+2\sqrt{r^2-n^2}=0$$

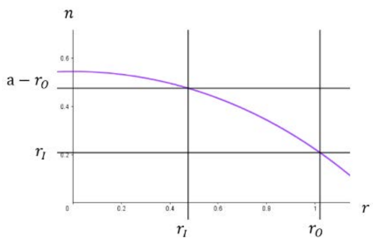
並將其化簡後可得下式：$4(r^2(a^2+1)-(a-n)^2)-(r^2-n^2)(a^2+1)^2=0$　得：

$$n=\frac{-4a+\sqrt{4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)}}{(a^2-1)(a^2+3)}$$

由此式子我們發現：



當$a>\sqrt{3}$，也就是當頂角小於60^o，$(a^4-9)(a^4-1)>0$，此函數為遞增函數。而此時三角形的內心比外心低，因此圓心會從內心往外心的方向直線移動。如右圖。

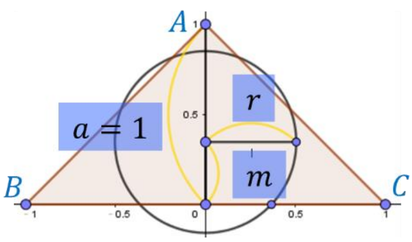


當$1<a<\sqrt{3}$，也就是當頂角大於60^o小於90^o，$(a^4-9)(a^4-1)<0$，此函數為遞減函數。而此時三角形的內心比外心高，因此圓心會從內心往外心的方向直線移動，如右圖。

我們將以上結果整理成底下定理二。

定理二：等腰銳角三角形當$r_I<r<r_O$，　O_c 位於$\left(0,\ \frac{-4a+\sqrt{4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)}}{(a^2-1)(a^2+3)}\right)$時有最大覆蓋率，且當$r$增加時，$O_c$ 由內心往外心的方向直線移動。

2. 等腰直角三角形：



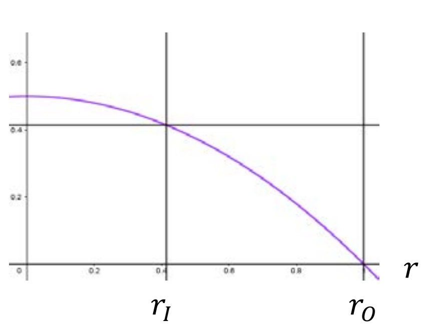
接續前述，等腰銳角三角形的內、外心皆在三角形內，但與等腰銳角三角形相異，等腰直角三角形$(a=1)$的外心在三角形的邊上，所以是無法直接套用定理二，如右圖。

雖然無法直接套用定理二，但求覆蓋率的方法與銳角等腰三角形時一樣，因此不再此贅述。我們將定理一的式子令$a=1$後微分，可得下式

$$4(2r^2-(1-n)^2)-4(r^2-n^2)=0$$

化簡得到$8n=4-4r^2$

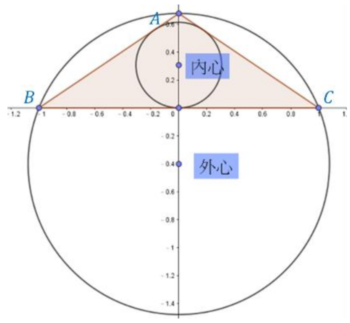
$$n=\frac{1-r^2}{2}$$



因此我們可得$\frac{1-r^2}{2}$為n的最佳值，此函數為遞減函數(n遞減至外心(原點))，因此也是圓心會**從內心往外心的方向直線移動**。將其畫成如右函數圖形並整理成定理三。

> 定理三：等腰直角三角形當$r_I<r<r_O$，圓心O_c 位於(0 , $\frac{1-r^2}{2}$)時覆蓋面積最大，且當r增加時，O_c 由內心往外心的方向直線移動。

3. 等腰鈍角三角形：

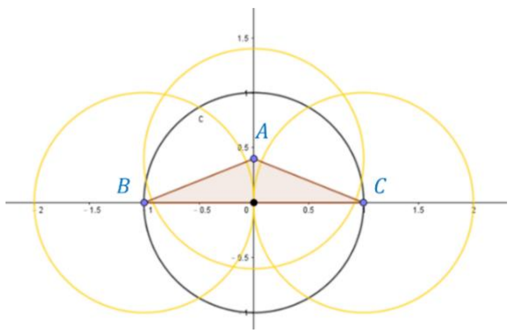


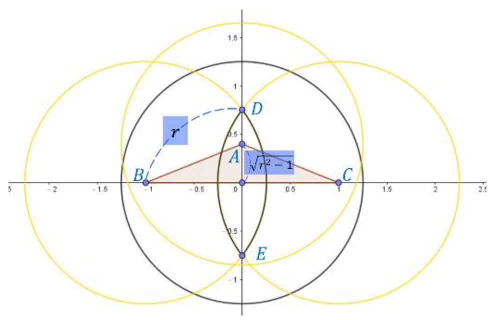
如前述做法，將覆蓋率公式套入等腰鈍角三角形的高(a)與半徑(r)時，發現三個與等腰銳角三角形的相異點。

第一個相異點為，等腰鈍角三角形的外心在圓外，但因圓心在三角形外時會比圓心在三角形內的覆蓋率更小，所以並不需探討圓心在圓外的情況。

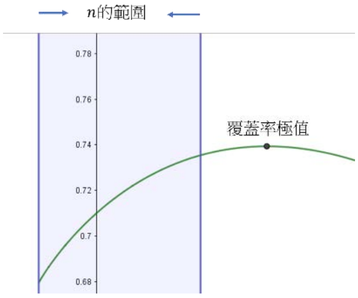
第二個相異點，因鈍角三角形的關係，導致了半徑$r\geq 1$時就可完全覆蓋三角形，也就是覆蓋圓半徑不須到外接圓半徑就可完全覆蓋三角形。

依據此相異點，便可分出第一個範圍，當$r\geq 1$時作圖方法與覆蓋圓半徑大於外接圓相同，以原三角形頂點作半徑為 r 的圓，圓心位於三圓重疊處時便可完全覆蓋三角形，所以三圓重疊處便可得圓心位置，由上述可畫出下圖，並由圖得知兩頂點坐標為$\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$(0,-\sqrt{r^2-1})$。將其寫為推論八。



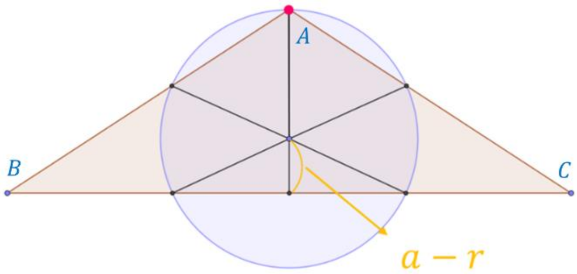


推論八：等腰鈍角三角形當$r \geq 1$， O_c在以B、C為圓心，r為半徑畫圓交兩點的範圍內有最大覆蓋率，$f(r)=1$，且兩點坐標：$D\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$E(0,-\sqrt{r^2-1})$。



最後一個相異點為套入高(a)與半徑(r)時，會發現部分定理二覆蓋率公式最大值並不在n值的範圍內，因此部份覆蓋率不成立，如右圖，所以必須探討圓未完全交三角形三邊的情況。

根據第三個相異點，在$r<1$內，分為適用定理一與不適用定理一兩種情況。



首先要求是否適用定理一半徑臨界值為何。

可由定理一的條件得知必交三邊，因此當圓周與上頂點相接時，為是否適用定理一的分界，並將O_c的y坐標$a-r$帶入定理二可得下式：

$$a-r=\frac{-4\ \ a+\sqrt{\left(4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)\right)}}{(a+1)(a-1)(a^2+3)}$$

整理上式可得$r=\ \frac{a^3+a}{2}$，因此$\frac{a^3+a}{2}$為是否適用定理一的半徑臨界值。

(1) $r \leq \frac{a^3+a}{2}$：

由於此情況為圓半徑小於等於臨界值，也就是其覆蓋率公式與定理一相同，便可得最大覆蓋率之圓心位置公式如定理二。

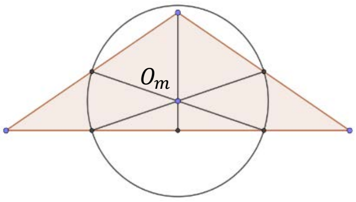
(2) $1>r>\frac{a^3+a}{2}$：

接續前述，可得知此情況的覆蓋率公式為**定理一**時，會發生覆蓋率極值並不在n值範圍內的的情況，因此我們猜測最大覆蓋率並不是發生在覆蓋圓與鈍角三角形相交6點，有可能是相交4點。決定以幾何性質下手，在模擬過程中試求n的最佳值。

首先我們利用$GeoGebra$模擬觀察、分析。觀察模擬結果，我們有一個重大發現。

發現一：鈍角三角形當$1 > r > \frac{a^3+a}{2}$，若覆蓋圓與三角形的四個交點交叉連線恰為直徑時，此圓的圓心為最佳位置。

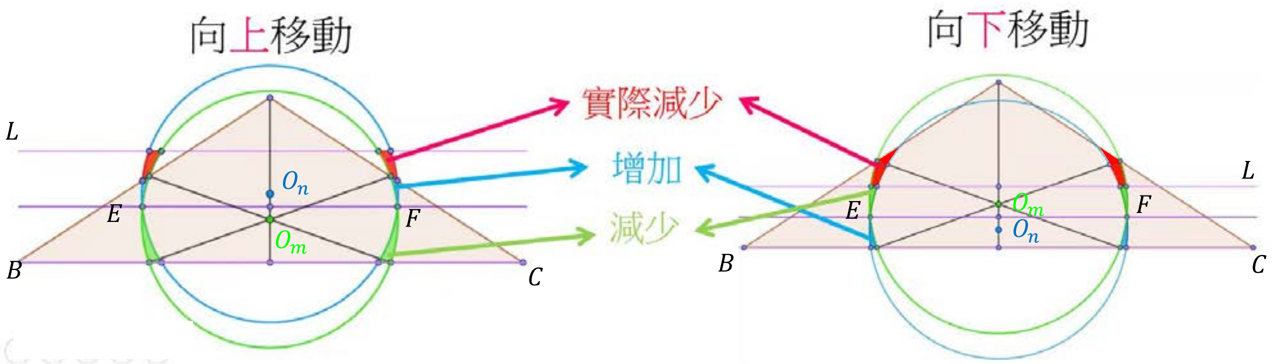
證明：令覆蓋圓與三角形的四個交點交叉連線恰為直徑時的圓心位置為O_m。



當覆蓋圓圓心由O_m向上或向下移動至O_n時，如下圖，圓O_m與圓O_n相交兩點 E、F，以$\overline{EF}$為對稱軸將三角形底邊$\overline{BC}$向上(下)折得直線L。

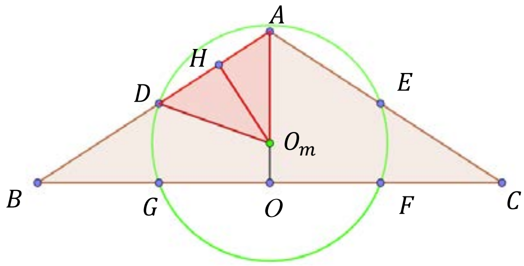
向上移時，如下左圖，兩圓與底邊$\overline{BC}$圍成的綠色區域為移動後減少的面積，跟直線L、兩圓與$\overline{EF}$圍成的區域面積因為對稱所以相等，而移動後只增加了藍色區域，因此實際減少了紅色區域，得到覆蓋面積會減少。

向下移時，如下右圖，兩圓與底邊$\overline{BC}$圍成的藍色區域為移動後增加的面積，跟綠色區域面積因為對稱所以相等，而移動後減少了綠色及紅色區域，因此實際減少了紅色區域，得覆蓋面積會減少。



以上證明了四個交點交叉連線恰為直徑時，則此圓的圓心為最佳位置。

由上述可得出$1 > r > \frac{a^3+a}{2}$當圓周與鈍角三角形所交的四點交叉連線為直徑，也就是四點呈一長方形時，此時的圓心O_m為最佳點，可求出O_m的 y 座標 n 方法如下：



已知$\overline{O_mO} = n, \overline{AO} = a, \overline{O_mD} = r$

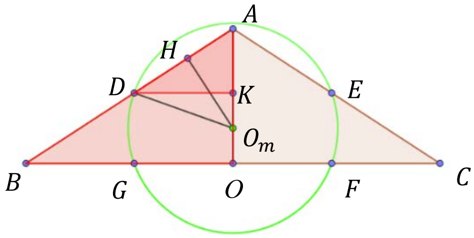
$\because \triangle ABO \sim \triangle AO_mH(AA)$ $\therefore \overline{AB} : \overline{AO_m} = \overline{BO} : \overline{O_mH}$

$$\Rightarrow \overline{O_mH} = \frac{a-n}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\because \overline{O_mD} = r$,$\overline{O_mH} = \frac{a-n}{\sqrt{a^2+1}}$ $\therefore \overline{HD} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}$

∵$\overline{AO_c} = a - n$,$\overline{O_mH} = \frac{a-n}{\sqrt{a^2+1}}$ ∴$\overline{AH} = \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}}$

$$\overline{AD} = \overline{HD} + \overline{AH} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)} + \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}}$$

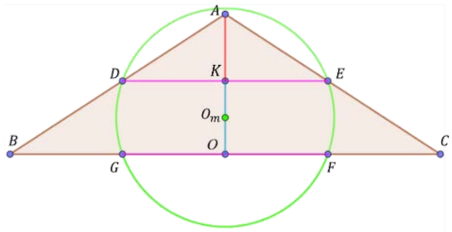


∵△ ABO~△ $ADK(AA)$ ∴$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AO} : \overline{AK}$

$\overline{AB} = \sqrt{a^2+1}$,$\overline{AO} = a$

$$\Rightarrow \overline{AK} = a \times \frac{\sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}} + \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$n = \frac{a - \overline{AK}}{2} = \frac{a - a\left(\sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}} + \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}\right)}{2\sqrt{a^2+1}}$$



$$= \frac{2a - \sqrt{-a^4 + 4a^2r^2 + a^4r^2}}{4 + a^2}$$

整理為定理四如下：

定理四：等腰鈍角三角形當$\frac{a^3+a}{2} < r < 1$時，O_C在$(0, \frac{2a-\sqrt{-a^4+4a^2r^2+a^4r^2}}{4+a^2})$有最大覆蓋率。

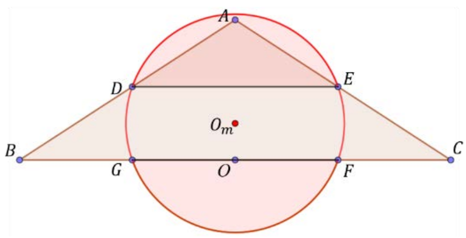
接著，求圓心位於最佳點時覆蓋率為何，覆蓋面積為圓面積減掉超出三角形外的弓形，但因此情況與三角形僅交四點，所以我們以三角形減去上下弓形後再將△ ADE補回，但又因圓心位於最佳點時，四個交點會呈現一個長方形，也就是上下弓形面積相等，我們先求上下弓形與△ ADE。

上下弓形面積和：

已知圓心$O_m(0, n)$

∵$\overline{O_mO} = n$,$\overline{O_mG} = r$ ∴$\overline{OG} = \sqrt{r^2 - n^2}$ ⇒△ $O_mGF = n\sqrt{r^2-n^2}$

又以$\overline{O_mO}$,$\overline{O_mF}$可得∠FO_mO為$\frac{2\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)}{2\pi}$



⇒下弓形面積= $\left(r^2 \times cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right) - n\sqrt{r^2-n^2}\right)$

因兩弓形面積相等所以上下弓形面積和為兩倍的下弓形面積

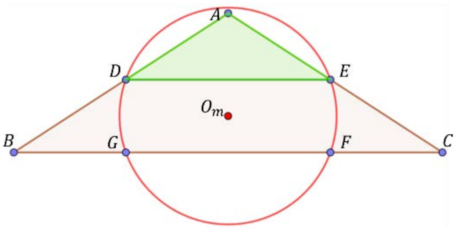
⇒上、下弓形面積= $2\left(r^2 \times cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right) - n\sqrt{r^2-n^2}\right)$

如右上圖，扇形面積 $\pi r^2 \times r^2 \times cos^{-1}(\frac{n}{r})$，減去△ O_mGF面積$n\sqrt{r^2 - n^2}$可得出下弓

形，而因兩弓形面積相等所以上下弓形面積和為兩倍的下弓形面積

得出上下弓形面積和：$2\left(r^2 \times cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right) - n\sqrt{r^2 - n^2}\right)$

$\triangle ADE$面積：



已知$\overline{O_m O} = n, \overline{AO} = a, \overline{O_m D} = r$

$\because \triangle ABO \sim \triangle AO_m H(AA) \quad \therefore \overline{AB} : \overline{AO_m} = \overline{BO} : \overline{O_m H}$

$\Rightarrow \overline{O_m H} = \dfrac{a-n}{\sqrt{a^2+1}}$

$\because \overline{O_m D} = r \ , \overline{O_m H} = \frac{a-n}{\sqrt{a^2+1}} \quad \therefore \overline{HD} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}$

$\because \overline{AO_c} = a - n \ , \overline{O_m H} = \frac{a-n}{\sqrt{a^2+1}} \quad \therefore \overline{AH} = \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}}$

$$\overline{AD} = \overline{HD} + \overline{AH} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)} + \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}}$$

$\because \triangle ABO \sim \triangle ADK(AA) \quad \therefore \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AO} : \overline{AK}$

$\overline{AB} = \sqrt{a^2+1} \ , \overline{AO} = a$

$$\Rightarrow \overline{AK} = a \times \frac{\sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}} + \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\because \triangle ABO \sim \triangle ADK(AA) \quad \therefore \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BO} : \overline{DK}$

$$\Rightarrow \overline{DK} = \frac{\sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}} + \sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)}}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\triangle ADE = \overline{AK} \times \overline{DK} = \frac{a\left(\sqrt{r^2 - \frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}} + \sqrt{(a\ -\ n)^2\ - \frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}}\right)^2}{a^2+1}$$

以畢氏定理求出$\overline{AD}$為$\sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)} + \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}}$，且再以$\triangle ADE \sim \triangle ABC$求出

$\triangle ADE$的底與高分別為$\frac{2\left(\sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)} + \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}}\right)}{\sqrt{a^2+1}}$與$\frac{a\sqrt{\left(r^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+1}\right)} + \sqrt{(a-n)^2 - \frac{(a-n)^2}{a^2+\ 1}}}{\sqrt{a^2+1}}$，

相乘後即可得到$\triangle ADE$面積：

$$\frac{a\left(\sqrt{r^2 - \frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}} + \sqrt{(a\ -\ n)^2\ - \frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}}\right)^2}{a^2+1}$$

將以上算式總結，總覆蓋面積除以三角形面積a，便可得覆蓋率公式如下

$$\frac{1}{a}(\pi\ r^2-2(r^2\times cos^{-1}(\frac{n}{r})-n\sqrt{r^2\ -\ n^2})+\frac{a\left(\sqrt{r^2-\frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}}+\sqrt{(a\ -\ n)^2\ -\frac{(a\ -\ n)^2}{a^2+\ 1}}\right)^2}{a^2+1}))$$

到這裡，我們已完整的探討完等腰三角形。

陸、結論

一、 正三角形覆蓋圓半徑小於內切圓半徑($\boldsymbol{r\le r_I}$)：

由推論一得圓心範圍頂點坐標$\left(0,\sqrt{3}-2r\right)$、$\left(-1+\sqrt{3}r,r\right)$、$(1-\sqrt{3}r,r)$，

且$f(r)=\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$。

二、 正三角形覆蓋圓半徑大於外接圓半徑($\boldsymbol{r\ge r_O}$)：

由推論二得圓心範圍頂點坐標$\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{r^2-1}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$，

且$f(r)=1$。

三、 正三角形覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外接圓($\boldsymbol{r_I<r<r_O}$)：

由推論三得圓心落在正三角形的內(外)心有最大覆蓋率，

且$f(r)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pi r^2-3r^2\times\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3r}-\sqrt{3r^2-1}\right)$。

四、 等腰三角形覆蓋圓半徑小於內切圓半徑($\boldsymbol{r\le r_I}$)：

由推論四得圓心範圍頂點坐標

$\left(0,a-r\sqrt{a^2-1}\right)$、$\left(-\frac{(a-r\sqrt{a^2-1}-r)}{a},r\right)$、$\left(\frac{(a-r\sqrt{a^2-1}-r)}{a},r\right)$，且$f(r)=\frac{\pi r^2}{a}$。

五、 等腰三角形覆蓋圓半徑大於外接圓半徑($\boldsymbol{r\ge r_O}$)：

由推論五得圓心範圍頂點坐標$\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}},\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$、

$\left(\frac{a\sqrt{4r^2-a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}},\frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$，且$f(r)=1$

六、 等腰銳角三角形覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外接圓($\boldsymbol{r_I<r<r_O}$)：

由定理二得圓心落在$\left(0,\frac{-4a+\sqrt{4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)}}{(a^2-1)(a^2+3)}\right)$有最大覆蓋率。

七、 等腰直角三角形覆蓋圓半徑大於內切圓、小於外接圓($r_I < r < r_O$)：

由定理三得圓心落在$(0\ ,\frac{1-r^2}{2})$有最大覆蓋率。

八、 等腰鈍角三角形覆蓋圓半徑($r \geq 1$)：

由推論八得圓心範圍頂點坐標$\left(0,\sqrt{r^2-1}\right)$、$\left(0,-\sqrt{r^2-1}\right)$，且$CR = 1$。

九、 等腰鈍角三角形覆蓋圓半徑($r \leq \frac{a^3+a}{2}$)：

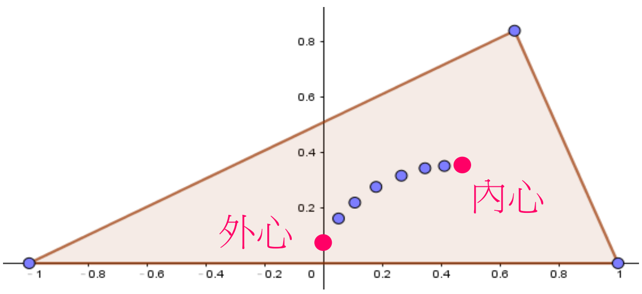
同定理二，圓心落在$\left(0,\frac{-4a+\sqrt{4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)}}{(a^2-1)(a^2+3)}\right)$有最大覆蓋率。

十、 等腰鈍角三角形覆蓋圓半徑($\frac{a^3+a}{2} < r < 1$)：

若四個交點交叉連線恰為直徑時，此點為圓心最佳位置，$O_c\left(0,\frac{2a-\sqrt{-a^4+4a^2r^2+a^4r^2}}{4+a^2}\right)$。

柒、未來展望

此次的研究將等腰三角形做了完整的討論，期間我們也對任意三角形做了研究，但因需要用到兩變數的微分，目前對我們來說能力尚有不足，我們先用了電腦模擬，發現當$r_I < r < r_O$，覆蓋圓半徑變大時圓心位置由內切圓圓心向外接圓圓心移動，但是是一條曲線，未來我們將持續閱讀及研究相關知識，希望能找到一個較佳的方法找出此條曲線的方程式。



捌、參考資料

一、國中第五冊第二章：圓　翰林書局

二、高中選修數學第二章：三角函數 南一書局

【評語】030416

本作品針對圓別覆蓋幾類三角形面積率進行研究，探討不同圓半徑覆蓋於正、等腰三角形當有最大覆蓋率時圓心位置或範圍及覆蓋率為何。藉由巧妙的分析方式，針對所給的三角形是正三角形或是等腰三角形的情況作了討論，給出了完整的分析。有部分的討論過程稍嫌繁複了些，應該可以進一步的精簡。對於直角三角形，是否可以藉助坐標化的方式給出解答？對於一般的三角形，有沒有辦法給出一些好的性質？作者先用了電腦模擬，發現當覆蓋圓半徑變大時圓心位置由內切圓圓心向外接圓圓心移動，得到一條曲線，未來希望能找到一個較佳的方法找出此條曲線的方程式。如果可以針對這些問題做更深入的討論，作品會更完整也更好。

作品簡報

當三角形遇見圓

最大覆蓋率之探討

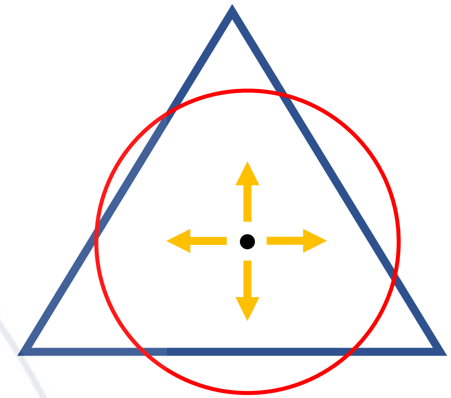
國中組

數學科

原題介紹

將一動圓置於正△上，求覆蓋面積最大時圓心位置及最大覆蓋率 $f(r)$。

(動圓圓心為 O_C、動圓半徑為 r、外接圓半徑為 r_O、內切圓半徑為 r_I)

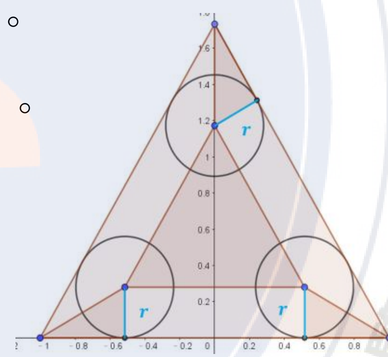


正三角形－ $r \le r_I$、$r \ge r_O$

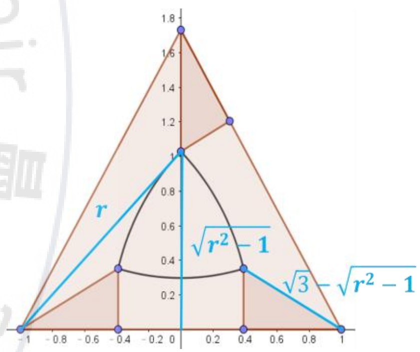
- 當 $r \le r_I$ 時，O_C 至正三角形「最近邊」的距離 $\ge r$。
- 當 $r \ge r_O$ 時，O_C 至正三角形「最遠邊」的距離 $\le r$。

推論 1

當 $r \le r_I$ 時，若 O_C 在由 $(0, \sqrt{3} - 2r)$、$(-1 + \sqrt{3}r, r)$、$(1 - \sqrt{3}r, r)$ 組成之正△內時有 最大覆蓋率 $f(r) = \frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$。



〔$r \le r_I$〕



〔$r \ge r_O$〕

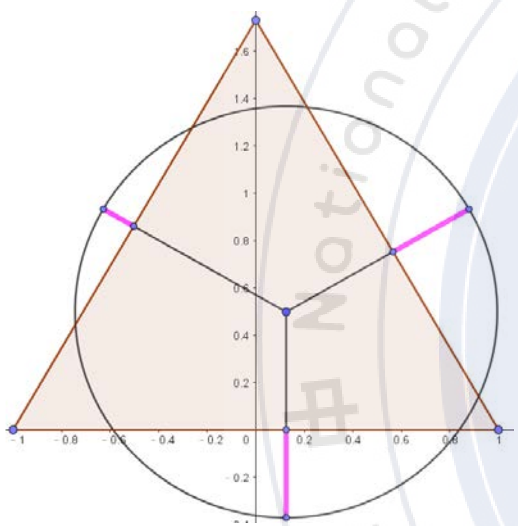
推論 2

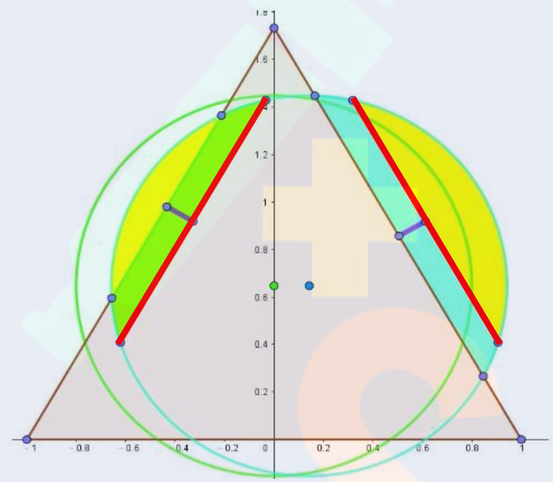
當 $r \ge r_O$ 時，若 O_c 在以正△頂點為圓心、r 為半徑畫弧所圍成之區域內時有 最大覆蓋率 $f(r) = 1$，且三弧交點分別為 $(0, \sqrt{r^2 - 1})$、$\left(\frac{1-\sqrt{3r^2-3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$、$\left(\frac{-1+\sqrt{3r^2-3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}}{2}\right)$。

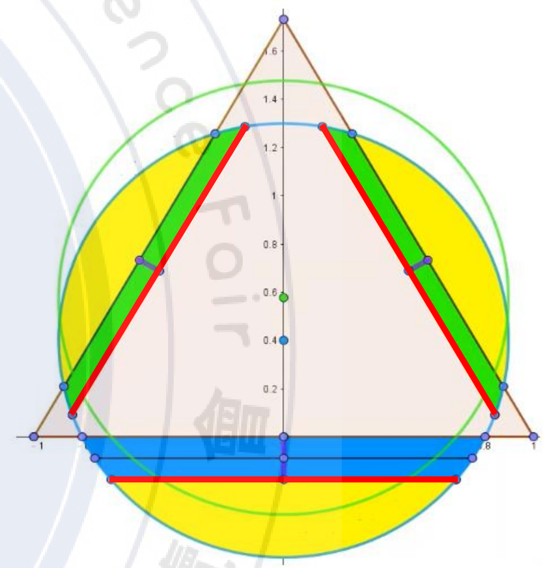
正三角形－ $r_I < r < r_O$

由「半徑−弦心距」之和為定值，可得：

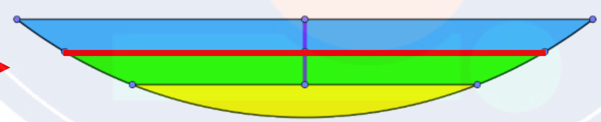
(1) O_C 在中垂線上較水平移動時覆蓋率大。 (2) O_C 在內或外心上時較鉛直移動時覆蓋率大。

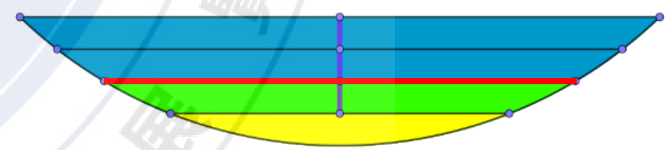






弓形疊合





推論 3

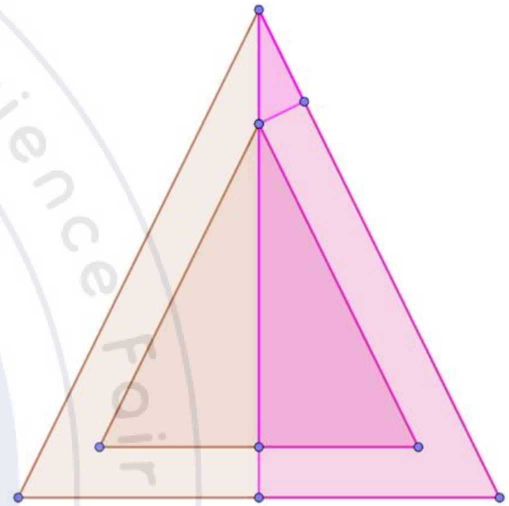
當 $r_I < r < r_O$ 時，若 O_c 在「內或外心」上時有最大覆蓋率 $f(r) = \dfrac{\pi r^2 - 3r^2 \times \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3r} - \sqrt{3r^2-1}}{\sqrt{3}}$。

等腰三角形－ $r \le r_I$、$r \ge r_O$

- 當 $\boldsymbol{r \le r_I}$ 時，O_C 至三角形**最近邊**的距離 $\ge r$ 。

推論 4

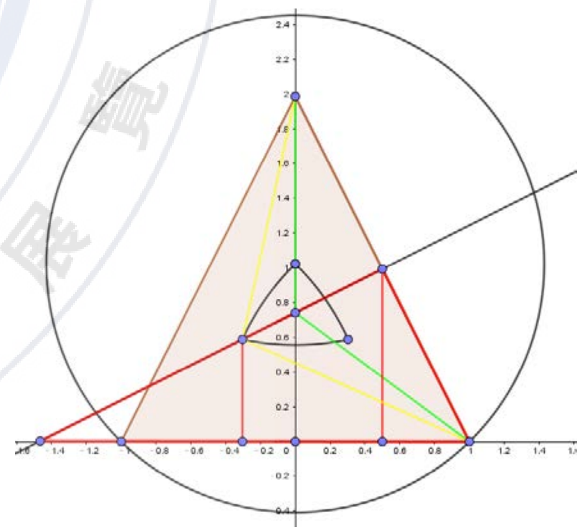
當 $r \le r_I$ 時， O_C 在由 $\left(0, a - r\sqrt{a^2+1}\right)$、$\left(-\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a}, r\right)$、$\left(\frac{(a-r\sqrt{a^2+1}-r)}{a}, r\right)$ 組成之等腰△內時有 **最大覆蓋率 $\boldsymbol{f(r) = \frac{\pi r^2}{a}}$** 。



- 當 $\boldsymbol{r \ge r_O}$ 時，O_C 至三角形**最遠邊**的距離 $\le r$ 。

推論 5

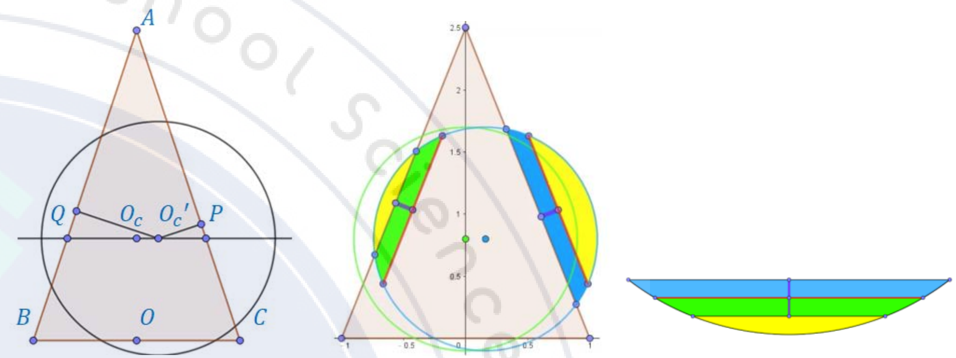
當$r \ge r_O$ 時，若 O_c 在以正△頂點為圓心、r 為半徑畫弧所圍成之區域內時有 **最大覆蓋率 $\boldsymbol{f(r) = 1}$**，且三弧交點分別為 $\left(0, \sqrt{r^2-1}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-a\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$、$\left(\frac{a\sqrt{4r^2-a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sqrt{a^2+1}-\sqrt{4r^2-a^2-1}}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$。



等腰三角形－ $r_I \leq r \leq r_O$

推論 6

將 O_C 左右平移時三段弦心距和皆為定值，故 O_c 落在「中垂線」上時覆蓋率才可為最大值。



推論 7

當 $a \geq 2$ 時，若相交六點，則 n 的範圍：

(1) 當 $r \geq 1$ 且 $r \geq \frac{a}{2}$，$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq a-r$ 。

(2) 當 $r \geq 1$ 且 $r < \frac{a}{2}$，$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq r$ 。

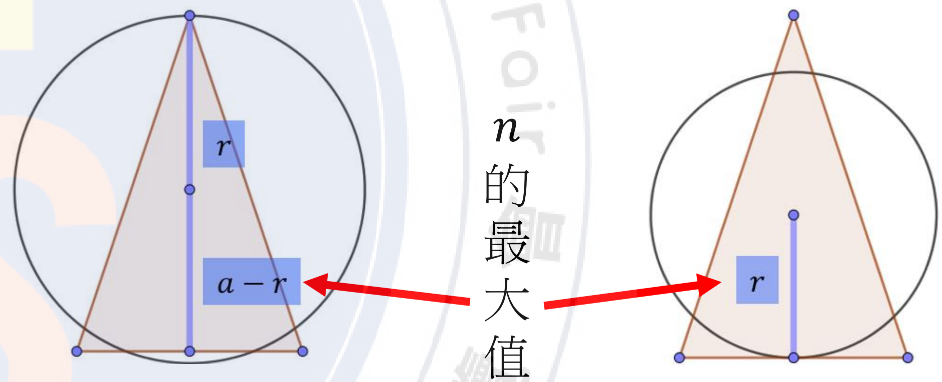
(3) 當 $r < 1$ 時， $a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq r$ 。

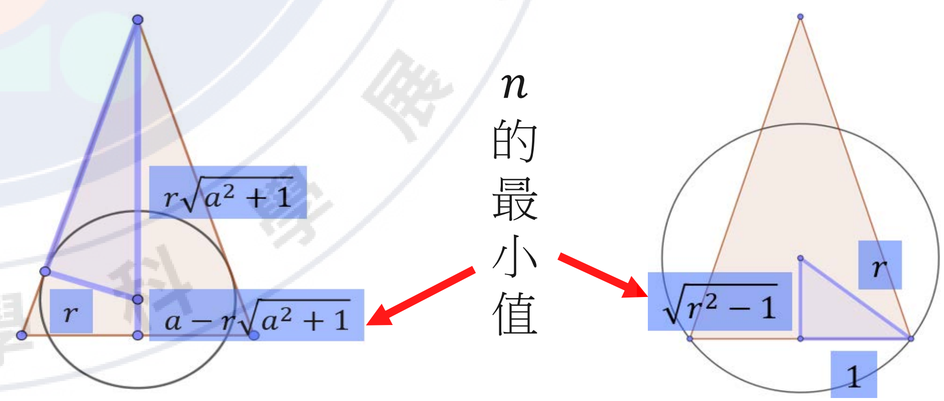
當 $a < 2$ 時，若相交六點，則 n 的範圍：

(1) 當 $r \geq 1$ 且 $r \geq \frac{a}{2}$ ，$\sqrt{r^2-1} \leq n \leq a-r$。

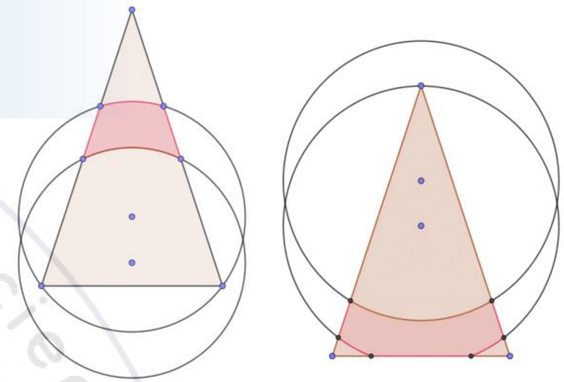
(2) 當 $r < 1$ 且 $r \geq \frac{a}{2}$ ，$a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq a-r$。

(3) 當 $r < \frac{a}{2}$ ， $a - r\sqrt{a^2+1} \leq n \leq r$。





等腰三角形 $r_I \leq r \leq r_O$ －銳角三角形



- 應用前述 n 的範圍，進而求覆蓋率。
- 當覆蓋圓與等腰銳角Δ的三邊皆相交時，覆蓋面積較大。

定理 1

當 $r_I < r < r_O$ 時，O_c 位於「中垂線」上且圓與Δ的三邊皆相交，則 **最大覆蓋率**

$$f(r,n)=\frac{1}{a}\left(\pi r^2-\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{n}{r}\right)-n\sqrt{r^2-n^2}\right)-2\left(r^2\times\cos^{-1}\left(\frac{a-n}{r\sqrt{1+a^2}}\right)-\frac{a-n}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{r^2-\frac{(a-n)^2}{1+a^2}}\right)\right)$$ 。

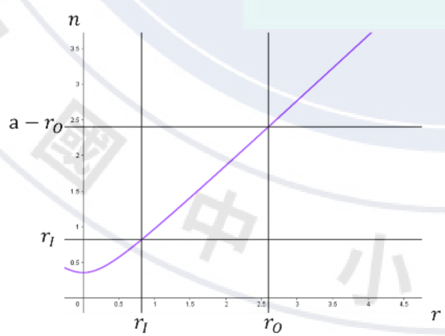
定理 2

當 $r_I < r < r_O$ 時，O_c 位於 $\left(0,\frac{-4a+\sqrt{4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1)}}{(a^2-1)(a^2+3)}\right)$ 時有最大覆蓋率， 且當 r 增加時，

O_c 將由「內心」往「外心」的方向直線移動。

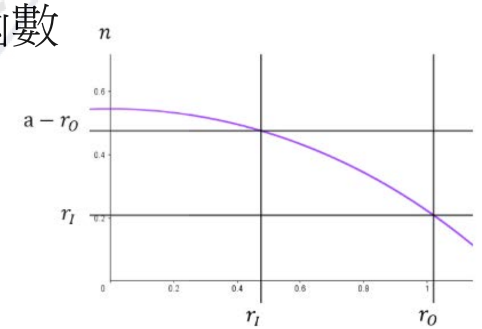
〔$a < \sqrt{3}$〕：遞減函數

- 頂角小於 60^o
- $(a^4-9)(a^4-1) > 0$
- 由內心向外心移動



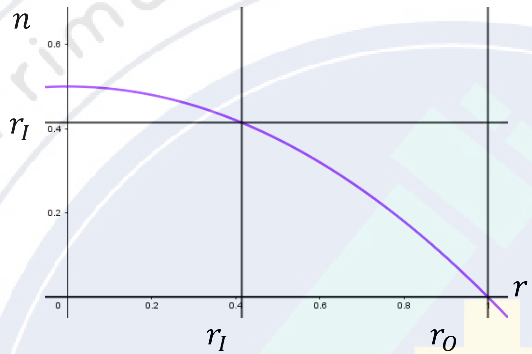
〔$1 < a < \sqrt{3}$〕：遞增函數

- 頂角大於 60^o
- $(a^4-9)(a^4-1) < 0$
- 由內心向外心移動



等腰三角形 $r_I \le r \le r_O$ －直角三角形

- $a = 1$ 代入覆蓋率公式。
- 結果呈遞減函數。
- 由內心往外心移動。

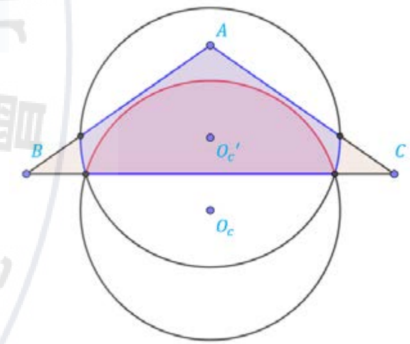


定理 3

當 $r_I < r < r_O$ 時， O_c 位於 $(0, \frac{1-r^2}{2})$ 有最大覆蓋率，且當 r 增加，**O_c 由「內心」往「外心」的方向直線移動。**

等腰三角形 $r_I \le r \le r_O$ －鈍角三角形

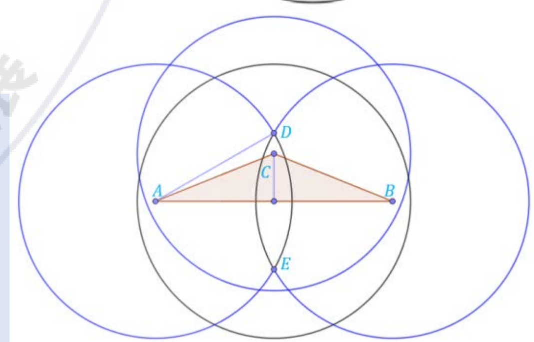
〔相異一〕：外心在圓外，因圓心在三角形外覆蓋率更小，不考慮此情形。



〔相異二〕：$r \ge 1$時即可完全覆蓋三角形，作法同$r \ge r_O$ 。

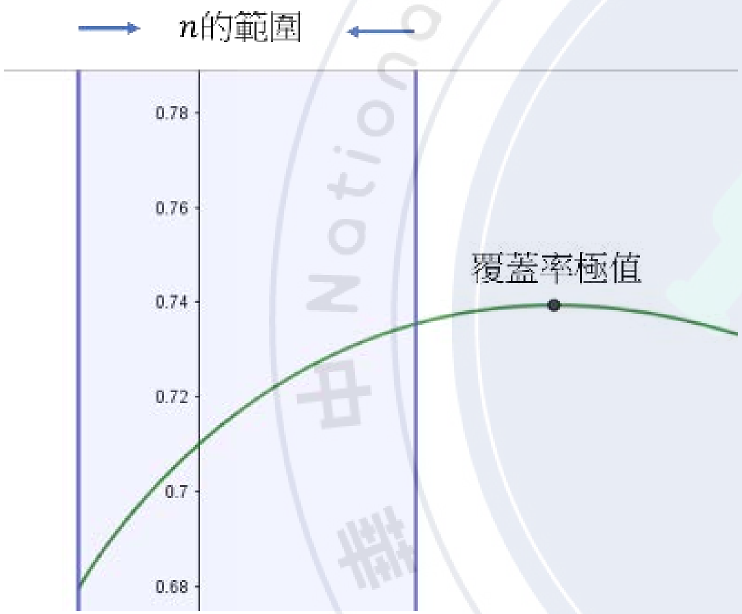
推論 8

當 $r \ge 1$ 時， 若 O_c 在以△頂點為圓心、r 為半徑畫弧所圍成之區域內時有 **最大覆蓋率 $f(r) = 1$**，且交點為 $(0, \sqrt{r^2 - 1})$、$(0, -\sqrt{r^2 - 1})$。

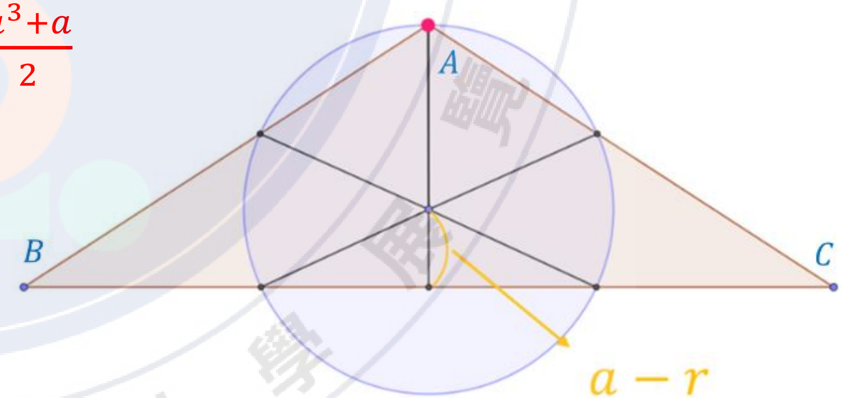


等腰三角形$r_I \le r \le r_O$－鈍角三角形

〔相異三〕：覆蓋率極值不在n的範圍內，求適用定理一半徑臨界值為何。



- 由於定理一的條件為交三邊，因此當圓周與上頂點相接時，為是否適用定理一的分界。
- 為了求r臨界值，將y坐標$a-r$帶入定理二。
- $a-r=\dfrac{-4a+\sqrt{(4(a^3+a)^2+r^2(a^4-9)(a^4-1))}}{(a+1)(a-1)(a^2+3)}$
- $r=\dfrac{a^3+a}{2}$



〔半徑小於等於臨界值($r \le \frac{a^3+a}{2}$)〕：

覆蓋率公式與定理一相同，最大覆蓋率之圓心位置公式如定理二。

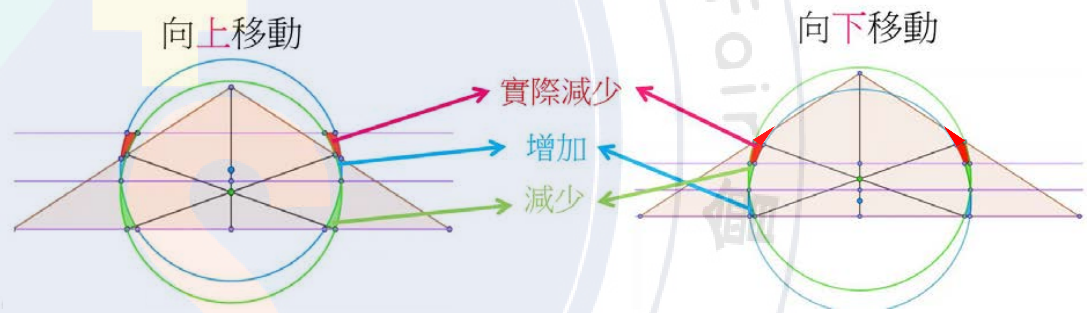
等腰三角形 $r_I \le r \le r_O$ －鈍角三角形

利用幾何性質找出圓心最佳位置

發現 1

當 $1 > r > \frac{a^3+a}{2}$ 時，若覆蓋圓與△的四交點交叉連線恰為直徑時，此時圓心為最佳位置。

- 取最佳圓心與移動後圓心之中點。
- 利用對稱，將面積對折重疊。
- 移動後覆蓋面積減少，如右圖。



- 利用弦心距、畢式、相似求得最佳圓心之 y 坐標並寫出定理 4。

定理 4

等腰鈍角三角形當 $\frac{a^3+a}{2} < r < 1$ 時，O_C在 $(0, \frac{2a-\sqrt{-a^4+4a^2r^2+a^4r^2}}{4+a^2})$ 有最大覆蓋率。

結論

正三角形、等腰三角形$r < r_I$、$r > r_O$：

- 利用相似、30 − 60 − 90的三角形，求得圓心範圍之頂點坐標、作圖方法。

正三角形$r_I \le r \le r_O$：

- 將弓形疊合，利用三弦心距和為定值證明O_C位於內(外)心最佳，並寫出覆蓋率。

等腰三角形$r_I \le r \le r_O$：

- 證明O_C位於中垂線上最佳、求出圓與三角形相交六點之範圍。

等腰銳角三角形（$r_I \le r \le r_O$）：

- 寫出覆蓋率，並由函數的遞增或遞減，推得當r增加時，O_c由內心往外心的方向直線移動。並將函數微分，得到圓心最佳位置。

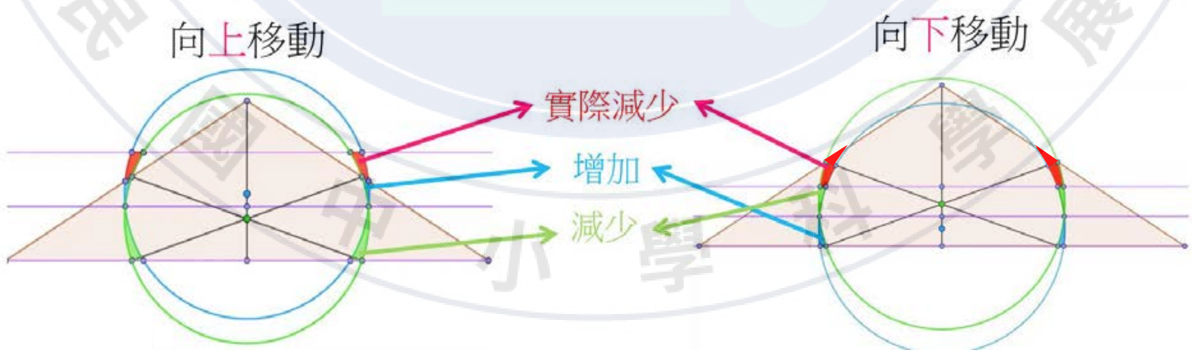
結論

等腰直角三角形（$r_I \leq r \leq r_O$）：

- 將$a = 1$帶入覆蓋率，得到圓心最佳位置。

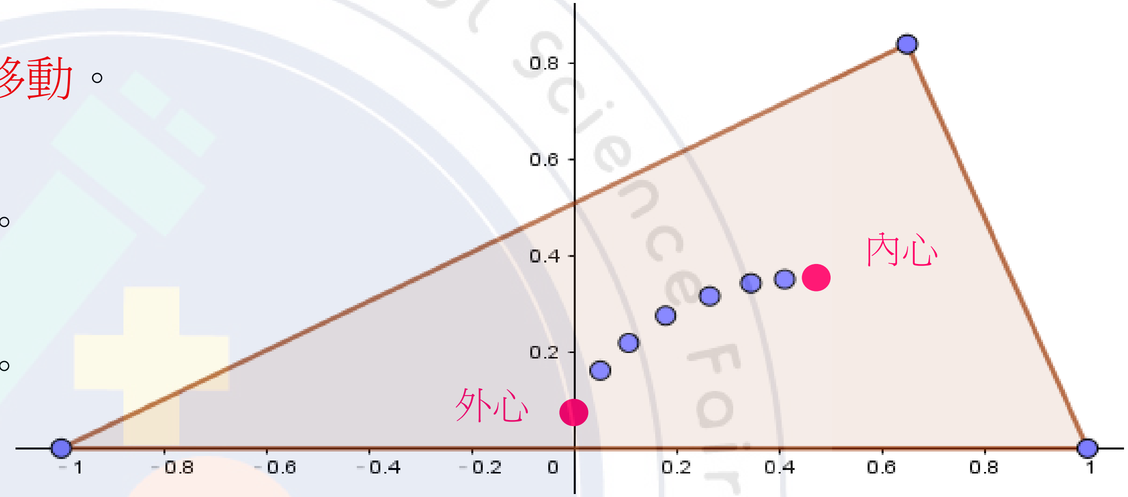
等腰鈍角三角形（$r_I \leq r \leq r_O$）：

- $r \geq 1$即可完全覆蓋，作法同$r \geq r_O$。
- 得出覆蓋圓半徑的臨界值。
- 大於臨界值時利用對稱，將面積對折重疊，**利用幾何性質**證明四交點交叉連線恰為直徑時，此時圓心為最佳位置。



未來展望

- 當 r 增加，圓心仍由內心往外心方向移動。
- 求極值時涉及「雙變數函數」的微分。
- 圓心移動路徑可能為「曲線方程式」。
- 圓置於「任意三角形」上時的覆蓋率。



參考資料

- 國中第五冊第二章：圓　翰林書局
- 高中選修數學第二章：三角函數 南一書局