中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030415

三角形與其垂足三角形的心不變量

學校名稱：高雄市立右昌國民中學

作者：	指導老師：
國二 林宥穎	李承恩 蕭偉智

關鍵詞：垂足三角形、垂直、共線

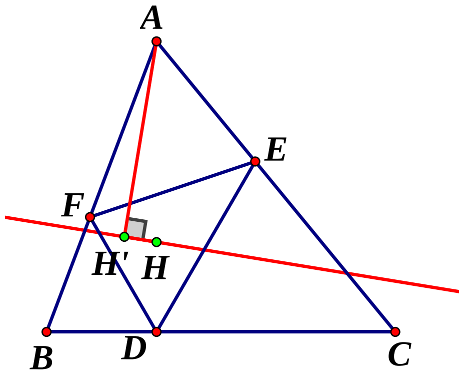
摘要

Abdilkadir Altinas 提出三角形 ABC 與其垂心三角形 DEF 的有趣問題：若角 A 為 60 度，則角 $AH'H$ 恆為 90 度[1]。本研究推廣此問題，我把垂心換成外心、九點圓圓心、重心，發現都有垂直關係。有趣的是，一般化討論歐拉線上所有的對應點都符合這樣的垂直關係，我先採取綜合幾何方法需逐個問題考慮而沒有共通性，較難找出歐拉線上所有的對應點的垂直關係的充要條件，所以改用解析幾何而給出了一般化的理論，這是本研究的亮點。接下來創新探究由其他形心所構造的垂足三角形之性質，不設定內角為 60 度，分別討論垂足三角形為正三角形（共有兩個）和相似三角形（共有五組，每組兩個），發現原三角形與垂足三角形的重心恆三點共線，其他形心皆無此現象。

壹、 前言

一、 動機與文獻探討

2015 年 2 月，加拿大數學雜誌 Crux Mathematicorum 第 41 卷第 2 期刊出一個由 Abdilkadir Altinas 提出有趣的平面三角形數學問題（編號 4011 題）：



▲ 圖1：原始問題。

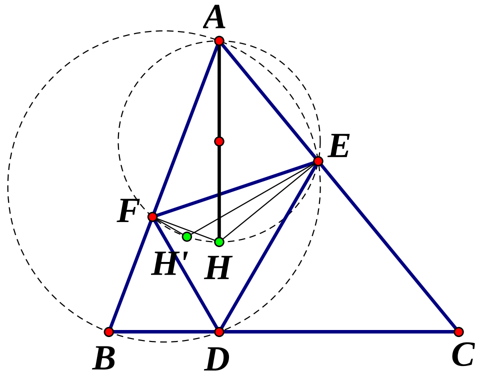
In non-equilateral triangle ABC, let H be the orthocenter of ABC and H' be the orthocenter of the orthic triangle DEF of ABC (that is the triangle formed by the feet of the altitudes of ABC).

If $\angle BAC = 60°$, show that $\overline{AH'} \perp \overline{H'H}$.

2016 年 2 月，Crux Mathematicorum 第 42 卷第 2 期刊出由 Ricardo Barroso Campos 所投稿的純幾何證明，簡述如下。

1. 因為點 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 A、F、H、E 四點共圓且 $\overline{AH}$ 為直徑，又 $\angle BAC = 60°$，得出 $\angle EHF = 120°$。
2. $\angle BEA = 90° = \angle ADB$，可得 A、E、D、B 四點共圓，所以 $\angle EDC = \angle BAC = 60°$，同理，$\angle FDB = 60°$，推得 $\angle EDF = 180° - 2 \times 60° = 60°$。因為 H' 是 $\triangle DEF$ 的垂心，所以 $\angle EH'F = 180° - \angle EDC = 120°$。
3. $\angle EH'F = 120° = \angle EHF$，因此點 H' 在以 $\overline{AH}$ 為直徑的圓上，故 $\angle AH'H = 90°$。

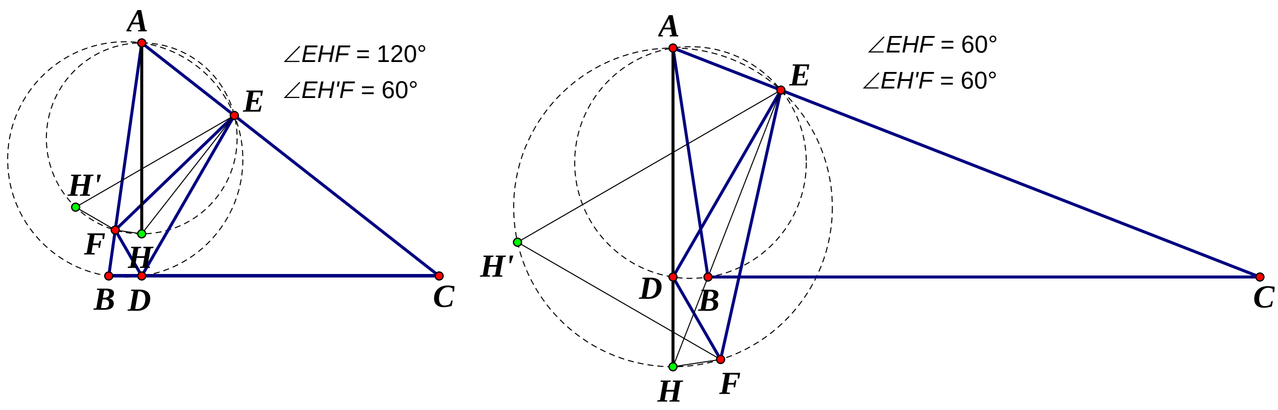
■



▲ 圖 2：證明 $\overline{AH'} \perp \overline{H'H}$。

該期編輯的評論寫到：「Ricardo Barroso Campos 的解法關鍵在於「$\angle EH'F = 120° = \angle EHF$」，但是垂心在三角形外部的時候，$\angle EH'F$ 或 $\angle EHF$ 並不會等於 120 度，這時候 $\angle EH'F$ 會等於 60 度，因此 Ricardo Barroso Campos 的解法必須做一些修正。」

我發現垂心在外部的情形如下的兩張圖所示，雖然不影響點 A、F、H、H'、E 五點共圓的結果，但是證明過程需要考慮此兩種情形才會較為完整。我在性質 2 會把垂心的情況完整證明完畢。

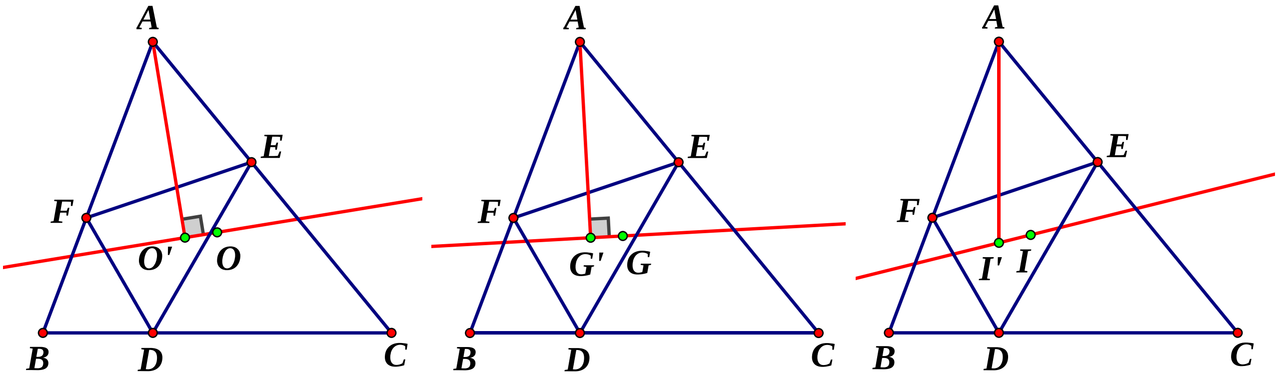


▲ 圖3：垂心在三角形的外部的情形。

這個問題有趣的地方在於，只要滿足 $\angle BAC = 60°$ 的任何三角形皆有這樣的垂直關係，可以看作一種不變量。

我做了一些實驗嘗試，如下圖所示，不僅是垂心，對於 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的外心 O

與 O' 也有相同的垂直關係，也就是 $\overline{AO'} \perp \overline{O'O}$。此外，對於 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的重心 G 與 G' 也恆有 $\overline{AG'} \perp \overline{G'G}$，但是內心沒有這樣的關係，此現象激發我繼續證明與研究的動力。



▲ 圖4：外心、重心與內心的情形。

二、 研究問題

（一） 特殊化：分別探討一內角為 60 度的三角形 ABC 與其垂心三角形 DEF 的各自垂心、外心、九點圓心與重心所構造的兩直線是否垂直？

（二） 一般化：探討一內角為 60 度的三角形 ABC 與其垂心三角形 DEF 的各自歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線相交角度是否垂直？

（三） 一般化：探討三角形 ABC 與其垂心三角形 DEF 的各自歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線垂直的充要條件是什麼？（內角除了 60 度以外，還有哪些度數？）

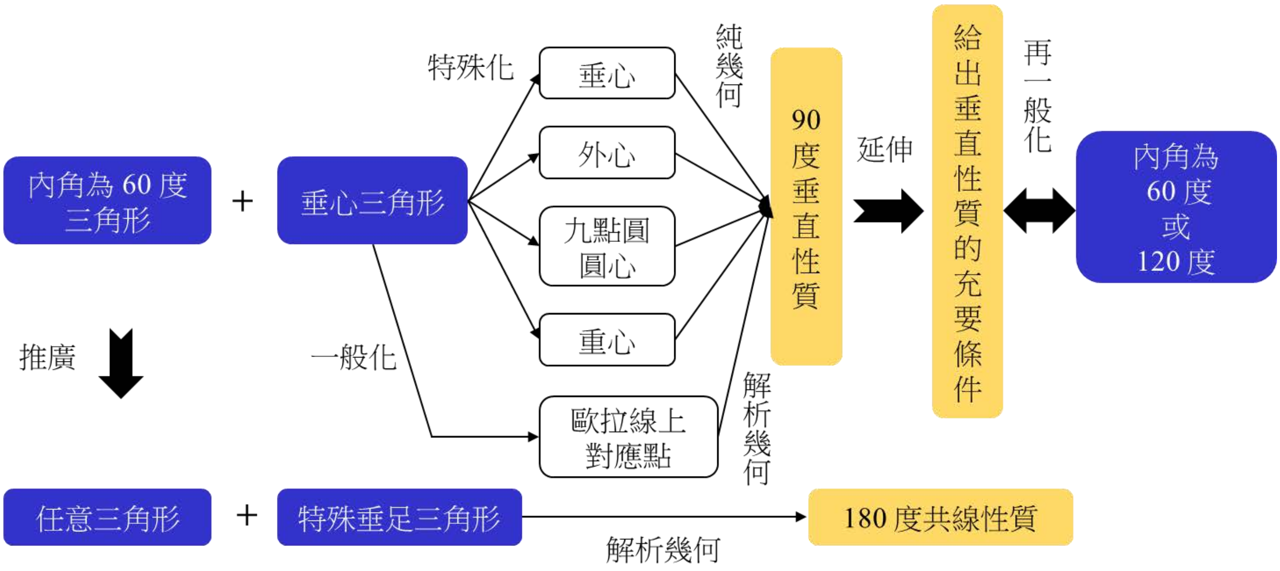
（四） 推廣到其他形心所構造的垂足三角形，探討三角形 ABC 與其垂足三角形分別所對應的形心是否有特殊性質？例如：共線（180 度）、垂直（90 度）等。

貳、 研究設備及器材

一、 軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0、Wolfram Mathematica 12.3

二、 網站：Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website, ETC

參、 研究架構



▲ 圖5：研究架構圖。

肆、　預備知識

一、　三角形的形心

（一）　垂心 H：三角形的三條高交於一點，此點為垂心。

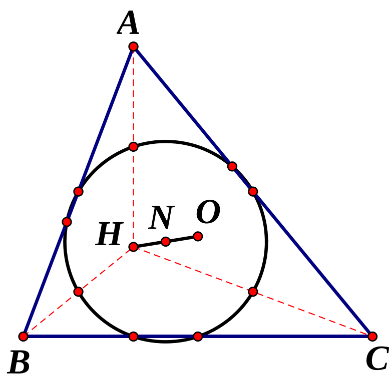
（二）　外心 O：三角形的三條中垂線交於一點，此點為外心。

（三）　重心 G：三角形的三條中線交於一點，此點為重心。

（四）　內心 I：三角形的三條角平分線交於一點，此點為內心。

（五）　九點圓圓心 N：三角形的垂心與外心連線的中點，此點為九點圓圓心。九點圓為通過各邊中點、各邊上的高之垂足，以及頂點與垂心的連線之中點。

（六）　歐拉線：三角形的外心、重心、垂心的連線稱為三角形的歐拉線。

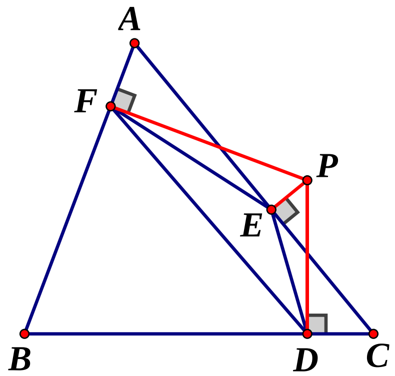


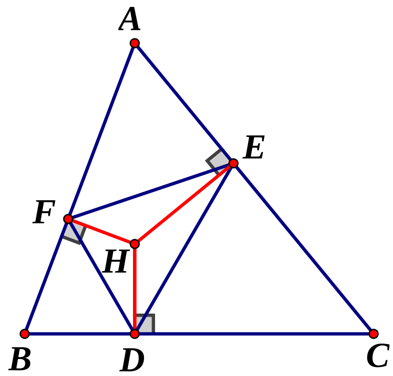
▲ 圖 6：九點圓與圓心 N。

二、　垂足三角形：

在 $\triangle ABC$ 所在平面上有一點 P，P 點關於三角形三邊或其延長線上的垂足 D、E、F 連線所得的三角形，稱為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。

當 P 點為 $\triangle ABC$ 的垂心 H 時，$\triangle DEF$ 稱為 $\triangle ABC$ 的垂心三角形。





▲ 圖 7：垂足三角形（左）與垂心三角形（右）。

伍、　研究過程與結果

一、　垂心、外心、九點圓心、重心所構造的兩直線之垂直關係

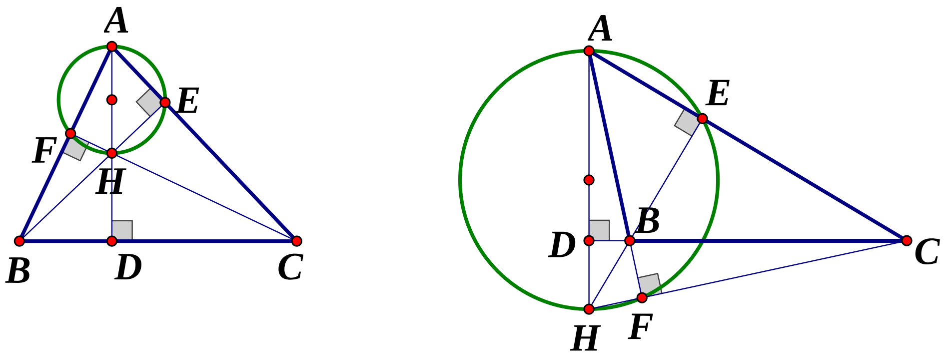
平面上，給定非正三角形的 $\triangle ABC$ 與其垂心三角形 $\triangle DEF$，其中 $\triangle ABC$ 的垂心為 H，$\triangle DEF$ 的垂心為 H'。

（一）　垂心

性質 1. 若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，則 $\angle BHC = 180° - \angle BAC$；若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形且 $\angle B > 90°$ 時，則 $\angle BHC = \angle BAC$。

證明：

1. 如下圖，$\triangle ABC$ 為銳角三角形時，邊上的高皆於三角形內部，所以垂心 H 在三角形內部。因為 $\angle AFH = \angle AEH = 90°$，所以 A、F、H、E 四點共圓，又 E 與 F 點在直徑 $\overline{AH}$ 的兩側，可得出外角 $\angle EHC = \angle BAC$，因此 $\angle BHC = 180° - \angle BAC$。
2. 如下圖，$\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，邊上的高僅一條於三角形內部，其餘兩條在三角形外部，所以垂心 H 在三角形外部。$\angle AFH = \angle AEH = 90°$，所以 A、E、F、H 四點圓，但是注意到 E 與 F 點在直徑 $\overline{AH}$ 的同側，可得出 $\angle BHC = \angle BHF = \angle FAE = \angle BAC$（對同弧），因此 $\angle BHC = \angle BAC$。



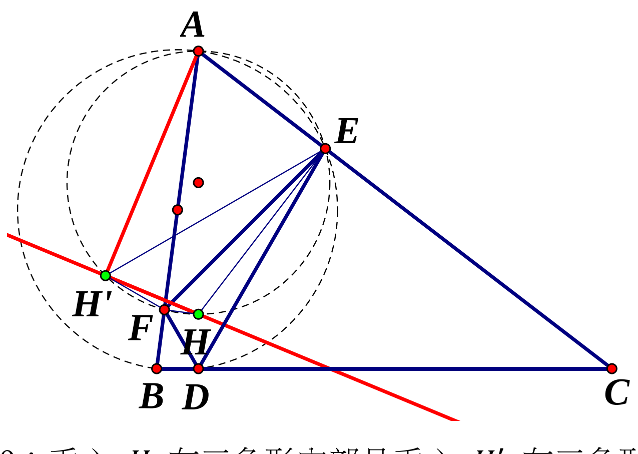
▲ 圖 8：銳角與鈍角三角形的垂心角度。

性質 2. 若 $\angle A = 60°$，則 $\overleftrightarrow{AH'} \perp \overleftrightarrow{H'H}$。

證明：

1. 當 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 都為銳角三角形時的證明如文獻探討與圖 2，在此省略。

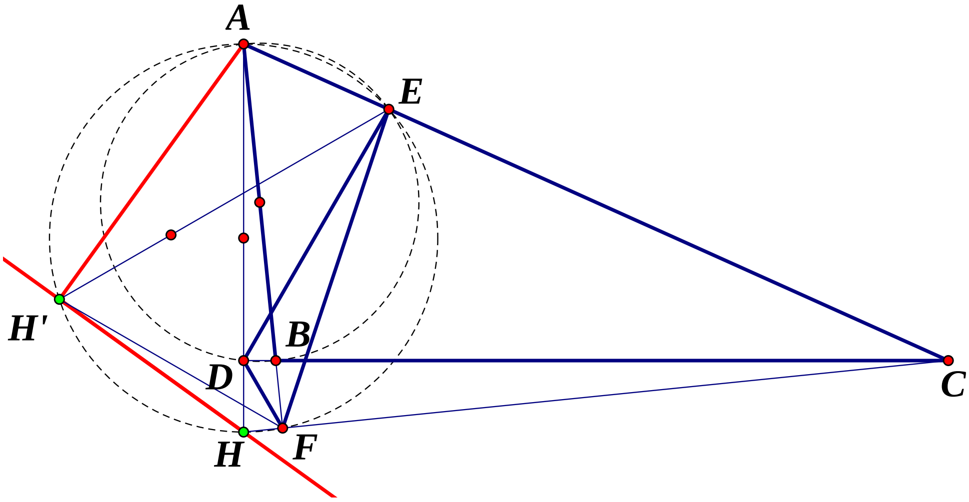
2. 如下圖，當 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，點 D、E、F 都在邊上，由垂心基本性質可得 A、E、H、F 四點共圓。同理，A、E、D、B 四點共圓，所以 $\angle EDC = \angle BAC = 60°$（外角），同理 $\angle FDB = 60°$，再得 $\angle EDF = 180° - 2 \times 60° = 60°$。再根據性質 1，$\triangle DEF$ 為鈍角三角形，點 H' 是 $\triangle DEF$ 的垂心，所以 $\angle EH'F = \angle EDF = 60°$，又 $\angle EH'F = 60° = \angle EAF$，因此點 H' 在以 $\overline{AH}$ 為直徑的圓上，故 $\angle AH'H = 90°$。



▲ 圖 9：垂心 H 在三角形內部且垂心 H' 在三角形外部。

3. 如下圖，當 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，垂心 H 在外部，由共圓性質可得 $\angle EDC = \angle BAC = 60°$（對同弧），同理 $\angle FDB = 60°$，再得 $\angle EDF = 2 \times 60° = 120°$。再根據性質 1，$\triangle DEF$ 為鈍角三角形，點 H' 是 $\triangle DEF$ 的垂心，所以 $\angle EH'D = \angle EFD$ 且

$\angle DH'F = \angle DEF$，所以 $\angle EH'F = \angle EH'D + \angle DH'F = \angle EFD + \angle DEF = 180° - 120° = 60° = \angle EAF$，因此點 H' 在以 $\overline{AH}$ 為直徑的圓上，故 $\angle AH'H = 90°$。



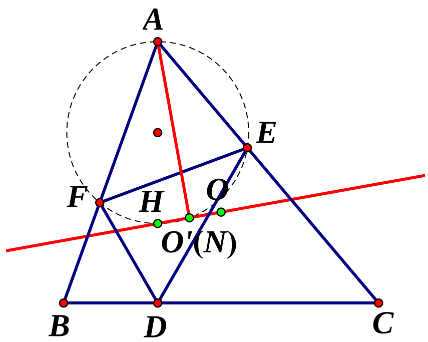
▲ 圖 10：垂心 H 在三角形外部且垂心 H' 在三角形外部。

■

（二） 外心

我接下來證明 $\triangle ABC$ 的外心為 O 與 $\triangle DEF$ 的外心為 O' 的情形。根據垂心的情形，本來猜想 A、E、F、O、O' 五點共圓，透過軟體作圖發現並非如此！因此無法仿照垂心的手法。

注意到 $\triangle DEF$ 的外心 O' 也會是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N，於是我發現一個巧妙的證明方法，我先將 $\triangle ABC$ 的垂心 H 引入。接著我需要常見的等角共軛性質（網路或書籍都可以找到證明），如下引理 3。



▲ 圖 11：分析外心的情形。

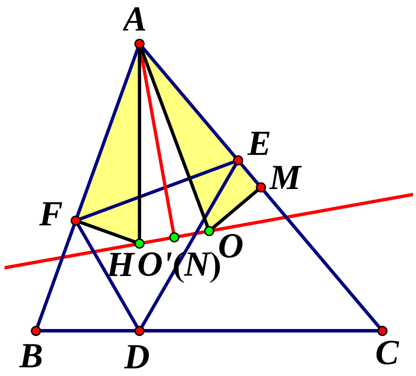
引理 3. 三角形的垂心 H 與外心 O 互為等角共軛點。

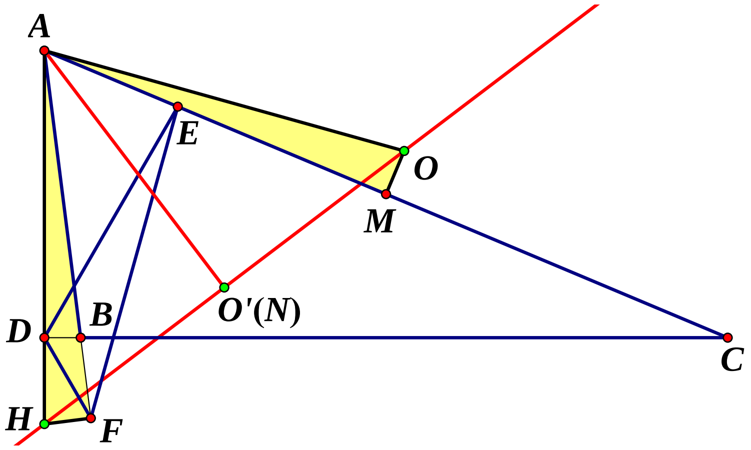
性質 4. 若 $\angle A = 60°$，則 $\overleftrightarrow{AO'} \perp \overleftrightarrow{O'O}$。

證明：

1. 如下圖，作 $\triangle ABC$ 的垂心 H 與 $\overline{AC}$ 的中點 M。在直角 $\triangle AHF$ 與 $\triangle AOM$ 中，$\angle HFA = \angle OMA = 90°$，又 H 與 O 互為等角共軛點，可得 $\angle HAF = \angle OAM$，再因為 $\angle BAC = 60°$，所以在直角 $\triangle CFA$ 中，$\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \overline{AM}$，因此 $\triangle AHF \cong \triangle AOM$。

2. 由 $\triangle AHF \cong \triangle AOM$ 可得 $\overline{AH} = \overline{AO}$。注意到，$\triangle DEF$ 的外心 O' 也會是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，所以 $\overline{OO'} = \overline{O'H}$ 且此三點共線，即 $\triangle AHO$ 是一個等腰三角形且底邊 $\overline{OH}$ 的中點為 O'，因此 $\overleftrightarrow{AO'} \perp \overleftrightarrow{O'O}$。注意到，外心無論在三角形內部或外部都不影響以上證明過程。





▲ 圖 12：$\overleftrightarrow{AO'} \perp \overleftrightarrow{O'O}$。

■

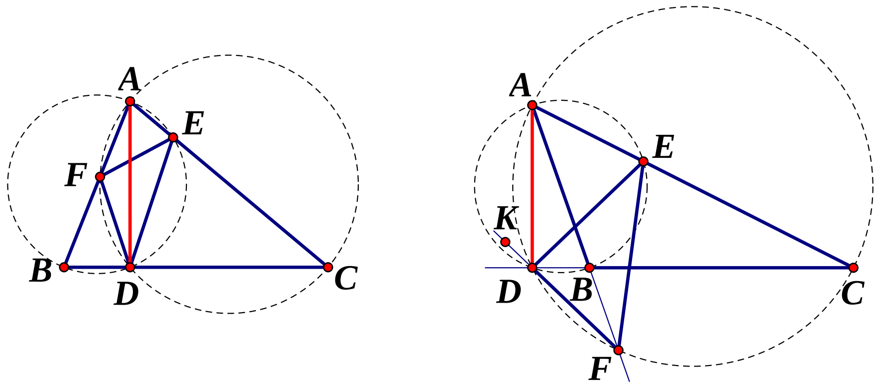
（三） 九點圓圓心

我接下來證明 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心為 N 與 $\triangle DEF$ 的九點圓圓心為 N' 的情形。

性質 5. 銳角三角形的高是其垂心三角形的角平分線；鈍角三角形在外部的高是其垂心三角形的外角平分線。

證明：

我分銳角三角形與鈍角三角形兩種情形來討論。如下圖，當 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，垂足都在三邊上，根據四點共圓可得 $\angle EDC = \angle BAC$、$\angle FDC = \angle BAC$（外角），又 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$，所以 $\angle EDA = 90° - \angle EDC = 90° - \angle FDB = \angle FDA$，即 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，也是 $\angle EDF$ 的角平分線。當 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，令 $\angle B > 90°$，則垂足 D 和 F 在邊的延長線上，根據四點共圓可得 $\angle EDC = \angle BAC = \angle FDC$（圓周角對同弧），又 $\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$，所以 $\angle ADK + \angle FDC = 90°$，因此 $\angle EDA = \angle ADK$，即 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高，也是 $\angle EDF$ 的外角平分線，反之亦然。



▲ 圖 13：原三角形的高與垂心三角形的角平分線。

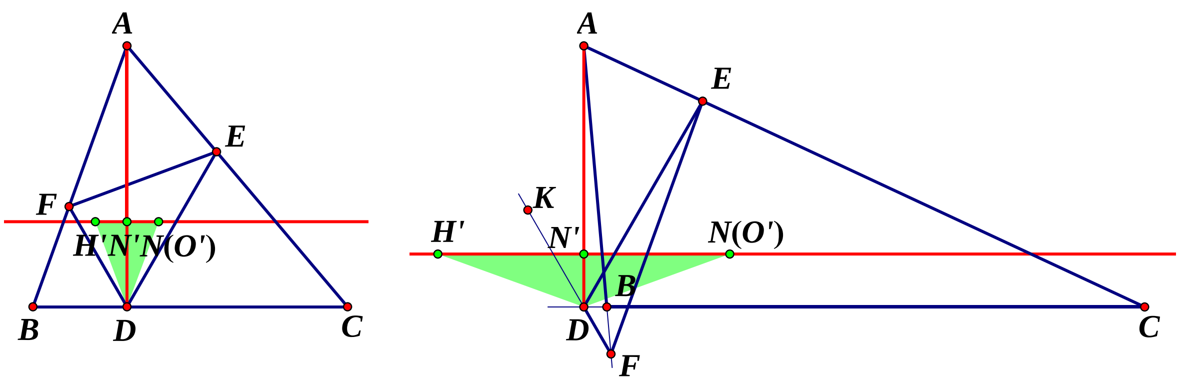
■

性質 6. 若 $\angle A=60°$，則 $\overleftrightarrow{AN'}\perp\overleftrightarrow{N'N}$。

證明：

作 $\triangle DEF$ 的垂心 H'，$\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N 也會是 $\triangle DEF$ 的外心 O'，所以 $\overline{NN'}=\overline{N'H'}$ 且此三點共線。我分別討論 $\triangle ABC$ 為銳角三角形與鈍角三角形的情形。

1. 若 $\triangle ABC$ 是銳角三角形時，$\angle EDF=\angle BAC=60°$。根據性質 4，$\triangle DNH'$ 是等腰三角形，可得 $\overline{DN'}\perp\overline{NH'}$ 且 $\overline{DN'}$ 是 $\angle EDF$ 的角平分線，再根據性質 5，$\overrightarrow{DN'}$ 也會是 $\overline{BC}$ 上的高，因此 $\overline{AN'}\perp\overline{N'N}$。
2. 若 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形時，$\angle EDF=2\times\angle BAC=2\times 60°=120°$，仿照性質 4 的 $\angle DEF=60°$ 時的證明方法，$N\,(O')$ 點與 H' 為等角共軛點，$\angle EDK=180°-120°=60°$，最後可得 $\overline{DN}=\overline{DH'}$，又 $\overline{NN'}=\overline{N'H'}$，所以 $\overline{DN'}\perp\overline{NH'}$ 且 $\overline{DN'}$ 是 $\angle EDF$ 的外角的角平分線，再根據性質 5，$\overrightarrow{DN'}$ 也會是 $\overline{BC}$ 上的高，因此 $\overline{AN'}\perp\overline{N'N}$。



▲ 圖 14：$\overleftrightarrow{AN'}\perp\overleftrightarrow{N'N}$。

■

性質 7. 若 $\angle A=60°$，則 $\overleftrightarrow{NN'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$（垂心三角形的歐拉線垂直 $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}$）。

證明：根據性質 6 可知 $\overline{AN'} \perp \overline{N'N}$，又 A、N'、D 三點共線，可得 $\overline{AN'} \perp \overline{BC}$，所以 $\overleftrightarrow{NN'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$。

■

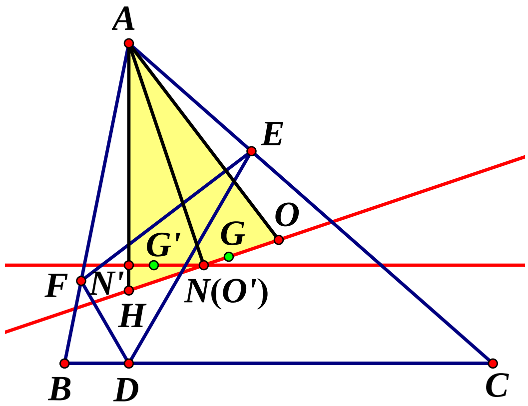
（四） 重心

接下來證明 $\triangle ABC$ 的重心為 G 與 $\triangle DEF$ 的重心 G' 的情形。有關重心 $\overline{AG'} \perp \overline{G'N}$ 的證明難度較高，過程需要用到前面的外心與九點圓圓心性質，以及三次的相似三角形來證明，這是本研究的巧思與價值之處！

性質 8. 若 $\angle A=60°$，則 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$。

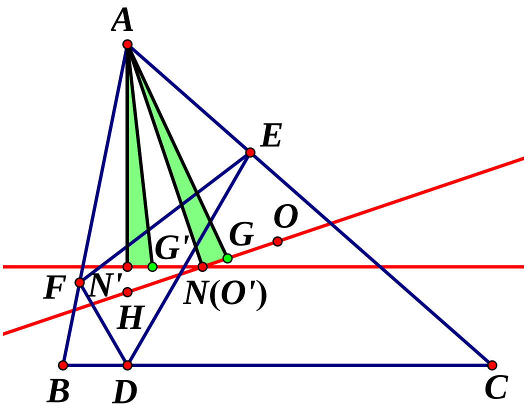
證明：

1. 如下圖，先考慮在 $\triangle AON$ 與 $\triangle AO'N'$ 中，根據性質 4 與性質 6 可得 $\angle ANO = \angle AN'O' = 90°$，又 $\triangle AHO$ 為等腰三角形且 $\overline{AN}$ 是 $\angle OAH$ 的角平分線且點 A、N'、H 共線（詳閱性質 4），所以 $\triangle AON \sim \triangle AO'N'$（$AA$ 相似），於是我有 $\overline{AO'}:\overline{AN'} = \overline{ON}:\overline{O'N'}$。



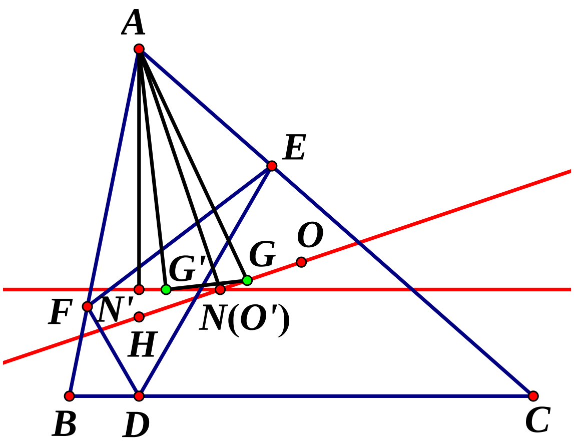
▲ 圖 15：$\triangle AON \sim \triangle AO'N'$。

2. 如下圖，再討論 $\triangle AGN$ 與 $\triangle AG'N'$ 中，根據歐拉線的比例性質 $3\overline{GN} = \overline{ON}$、$3\overline{G'N'} = \overline{O'N'}$，所以 $\triangle AGN \sim \triangle AG'N'$（$SAS$ 相似），於是我有 $\overline{AG}:\overline{AN} = \overline{AG'}:\overline{AN'}$ 且 $\angle GAN = \angle G'AN'$。



▲ 圖 16：$\triangle AGN \sim \triangle AG'N'$。

3. 如下圖，在 $\triangle AGG'$ 與 $\triangle ANN'$ 中，$\angle GAG' = \angle GAN + \angle NAG' = \angle NAG' + \angle G'AN' = NAN'$，又 $\overline{AG}:\overline{AN} = \overline{AG'}:\overline{AN'}$ 所以 $\triangle AGG' \sim \triangle ANN'$（$SAS$ 相似），因此 $\angle AG'G = \angle AN'N = 90°$。



▲ 圖 17：$\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$。

■

二、 一般化：歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線之垂直關係

（一） 綜合幾何方法進行證明

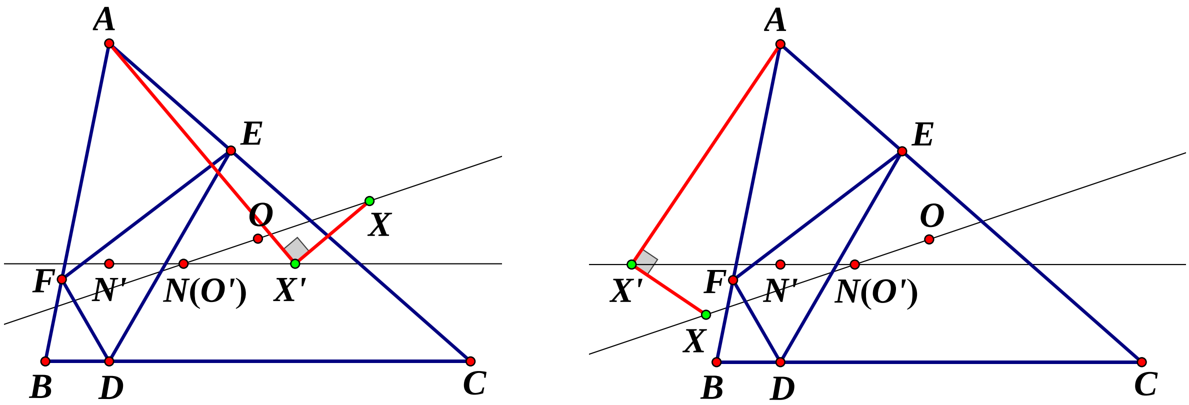
利用性質 8 的手法，我給出一般性的結論：

給定一內角 $\angle A = 60°$ 的 $\triangle ABC$ 與其垂心 $\triangle DEF$，分別取各自歐拉線上的對應動點 X 與 X' 所構造的兩直線恆垂直，即 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

定理 9. 若 $\angle A = 60°$，則 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

證明：

證明與性質 8 相同，如下圖，我可得出 $\triangle AON \sim \triangle AO'N'$（$AA$ 相似），於是有 $\overline{AO'}:\overline{AN'} = \overline{ON}:\overline{O'N'}$。再分別取 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的歐拉線上一點 X 和 X'，使得 $\overline{XN} = t\overline{ON}$、$\overline{X'N'} = t\overline{O'N'}$，其中 t 為實數，所以 $\triangle AXN \sim \triangle AX'N'$（$SAS$ 相似），可得 $\overline{AX}:\overline{AN} = \overline{AX'}:\overline{AN'}$ 且 $\angle XAN = \angle X'AN'$。最後，在 $\triangle AXX'$ 與 $\triangle ANN'$ 中，$\angle XAX' = \angle XAN + \angle NAX' = \angle NAX' + \angle X'AN' = NAN'$，又 $\overline{AX}:\overline{AN} = \overline{AX'}:\overline{AN'}$ 所以 $\triangle AXX' \sim \triangle ANN'$（$SAS$ 相似），因此 $\angle AX'X = \angle AN'N = 90°$。



▲ 圖 18：$\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

■

三、 歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線相互垂直的充要條件

【討論】

我在定理 9 證明了一個內角為 60 度的三角形與其垂心三角形各自歐拉線上的對應動點所構造的兩直線必垂直，然而證明此定理須先分別證明垂心、外心、九點圓圓心的三種情形，然後將其結果以作為引理繼續證明。

採取平面綜合幾何證明方法，通常都要逐個問題考慮，比較沒有共通性。所以我接下來將幾何問題化為代數處理，以代數解析觀點可以有統一的處理方式，並且給出一般化的理論，以下我採取三角幾何學常用的工具：Barycentric coordinate 重心坐標系統。

（一） 解析幾何方法進行證明：引入 Barycentric coordinate 重心坐標系統

我固定 $\triangle ABC$ 的頂點順序為逆時鐘，約定其三邊長長度分別為 $\overline{BC} = a$、$\overline{CA} = b$、$\overline{AB} = c$。

定義 10. 對於任意三點 P、Q、R，以 $[PQR]$ 表示由此三點圍成的三角形的有向面積，頂點 P、Q、R 逆時鐘方向為正，頂點順時鐘方向為負。

定義 11. 設平面上有一點 P，若 $[PBC]:[PCA]:[PAB] = x:y:z$，則 P 的重心坐標為

$$P\left(\frac{x}{x+y+z},\frac{y}{x+y+z},\frac{z}{x+y+z}\right) \text{ 或 } P(x:y:z)$$

當三個分量和為 1 時，稱為正規化的重心坐標。

因此我有△ABC 的頂點的重心坐標 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$。

引理 12. [2] 垂直線：正規化的重心坐標下，垂直線的方程式為兩個位移向量 $\overrightarrow{MN} = (u_1,v_1,w_1)$、$\overrightarrow{PQ} = (u_2,v_2,w_2)$。$\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ 的充要條件為

$$a^2(v_1w_2+w_1v_2)+b^2(w_1u_2+u_1w_2)+c^2(u_1v_2+v_1u_2)=0$$

其中，$M(x_1,y_1,z_1)$、$N(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{MN} = (x_2-x_1:y_2-y_1:z_2-z_1) = (u_1:v_1:w_1)$。

符號 13.[2] Conway Notation 康威符號

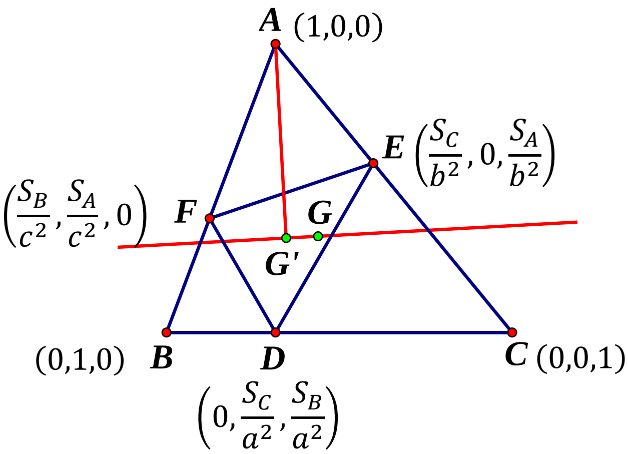
(1) 用 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「$S\cdot\cot\theta$」記為「S_θ」，對於任意的實數 θ 與 φ，把 $S_\theta\times S_\varphi$ 簡記為「$S_{\theta\varphi}$」。

(2) $S_A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$、$S_B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$、$S_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$。

(3) $S_{AB}+S_{BC}+S_{CA}=S^2$。

我利用重心坐標來證明性質 8 的垂直關係 $\overline{AG'}\perp\overline{G'G}$。

證明：



▲ 圖 19：重心坐標處理 $\overleftrightarrow{AG'}\perp\overleftrightarrow{G'G}$。

1. 以 $\triangle ABC$ 為參考三角形，考慮重心坐標，令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$，則可得 $\triangle ABC$ 的重心 $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，以及垂心 $H\left(\frac{1}{S_A}:\frac{1}{S_B}:\frac{1}{S_C}\right)$，可再得出垂心 H 關於三邊的垂足 $D(0:S_C:S_B)$、$E(S_C:0:S_A)$、$F(S_B:S_A:0)$，將其正規化可得 $D\left(0,\frac{S_C}{a^2},\frac{S_B}{a^2}\right)$、$E\left(\frac{S_C}{b^2},0,\frac{S_A}{b^2}\right)$、$F\left(\frac{S_B}{c^2},\frac{S_A}{c^2},0\right)$，於是我得出 $\triangle DEF$ 的重心 $G'\left(\frac{b^2S_B+c^2S_C}{3b^2c^2},\frac{c^2S_C+a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2S_A+b^2S_B}{3a^2b^2}\right)$。
2. 考慮兩個位移向量 $\overrightarrow{AG'}$ 與 $\overrightarrow{G'G}$

$$\overrightarrow{AG'}=\left(\frac{b^2S_B+c^2S_C-3b^2c^2}{3b^2c^2},\frac{c^2S_C+a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2S_A+b^2S_B}{3a^2b^2}\right)$$

$$\overrightarrow{G'G}=\left(\frac{b^2c^2-b^2S_B-c^2S_C}{3b^2c^2},\frac{c^2a^2-c^2S_C-a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2b^2-a^2S_A-b^2S_B}{3a^2b^2}\right)$$

根據引理 12 進行式 (1) 的化簡

$$\begin{aligned}\frac{1}{9a^2b^2c^2}\Big((c^2S_C+a^2S_A)(a^2b^2-a^2S_A-b^2S_B)&+(a^2S_A+b^2S_B)(c^2a^2-c^2S_C-a^2S_A)\\&+(b^2S_B+c^2S_C-3b^2c^2)(a^2b^2-a^2S_A-b^2S_B)\\&+(a^2S_A+b^2S_B)(b^2c^2-b^2S_B-c^2S_C)\\&+(b^2S_B+c^2S_C-3b^2c^2)(c^2a^2-c^2S_C-a^2S_A)\\&+(c^2S_C+a^2S_A)(b^2c^2-b^2S_B-c^2S_C)\Big)\end{aligned}$$

式 (1)

因為 $\angle A=60°$，根據餘弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-bc$，再得 $2S_A=bc$、$2S_B=2c^2-bc$、$2S_C=2b^2-bc$，將這些關係代回式 (1)，並化簡可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{18a^2bc}\Big((a^4b^2-a^4bc+a^4c^2+3a^2b^3c-6a^2b^2c^2+3a^2bc^3+2b^4c^2-5b^3c^3+2b^2c^4)\\&\qquad+b(-a^2b^3-a^2b^2c-a^2bc^2+a^2c^3+b^4\times(-c)+2b^3c^2-b^2c^3+2bc^4)\\&\qquad+c(a^2b^3-a^2b^2c-a^2bc^2-a^2c^3+2b^4c-b^3c^2+2b^2c^3-bc^4)\Big)\\&=\frac{1}{18a^2bc}\Big((a^2-b^2+bc-c^2)(a^2b^2-a^2bc+b^3c+a^2c^2-5b^2c^2+bc^3)\Big)\\&=\frac{1}{18a^2bc}\big(a^2-(b^2+c^2-bc)\big)(a^2b^2-a^2bc+b^3c+a^2c^2-5b^2c^2+bc^3)\\&=\frac{1}{18a^2bc}\times 0\times(a^2b^2-a^2bc+b^3c+a^2c^2-5b^2c^2+bc^3)\\&=0\end{aligned}$$

因此 $\overline{AG'} \perp \overline{G'G}$

■

事實上，利用重心坐標 Barycentric coordinate 解析幾何方法，我可以給出更強的結論，即 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$ 的充要條件是 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，其餘角度下兩直線都不垂直。

定理 14. 若 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，若且唯若 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$。

證明：

我將前面式 (1) 中的 S_A、S_B 與 S_C 以三邊邊長表示，即$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$、$S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$、$S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$，利用數學軟體 Wolfram Mathematica 化簡，我可將式 (1) 寫成式 (2)。

$$\frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)\big(a^2-(b^2+c^2+bc)\big)\big(a^2-(b^2+c^2-bc)\big)}{18a^2b^2c^2}$$

式 (2)

因為 a、b、c 為 $\triangle ABC$ 的三邊邊長，由海龍定理可知

$$(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c) = 16 \times \triangle ABC\ \text{面積}^2 > 0$$

因此 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$ 的充要條件為 $a^2-(b^2+c^2-bc)=0$ 或 $a^2-(b^2+c^2+bc)=0$，根據餘弦定理，也就是 $\angle A = 60°$ 或 $120°$。

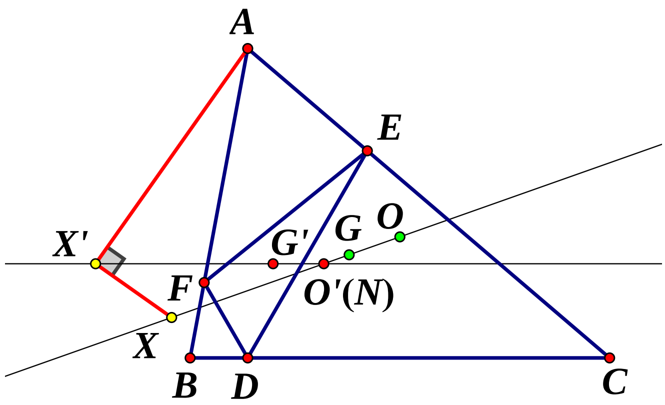
■

我發現以重心坐標 Barycentric coordinate 解析幾何方法進行證明，因為坐標本身就具備方向性並內建邊長長度（$\overline{BC} = a$、$\overline{CA} = b$、$\overline{AB} = c$），因此我不需討論心在 $\triangle ABC$ 或 $\triangle DEF$ 的內部或外部，這個方法具備高共通性，此外也不用建構在垂心、外心、九點圓圓心的基礎下的幾何性質才能完成證明。另外一方面，利用代數解析的作法也可以給出充要條件。

我接下來將用以重心坐標 Barycentric coordinate 解析幾何方法進行證明一般化的情形，對於任意非正三角形的 $\triangle ABC$ 與其垂心 $\triangle DEF$，分別取各自歐拉線上的對應動點 X 與 X' 所構造的兩直線恆有 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$，並且給出其充要條件。

定理 15. 若 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，若且唯若 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

證明：



▲ 圖 20：重心坐標處理 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

1. 以 $\triangle ABC$ 為參考三角形，考慮重心坐標，令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$，則可得 $\triangle ABC$ 的重心 $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，以及外心 $O(S^2-S_{BC}:S^2-S_{CA}:S^2-2S_{AB})$。垂心 H 關於三邊的垂足 $D(0:S_C:S_B)$、$E(S_C:0:S_A)$、$F(S_B:S_A:0)$，將其正規化可得 $D\left(0,\frac{S_C}{a^2},\frac{S_B}{a^2}\right)$、$E\left(\frac{S_C}{b^2},0,\frac{S_A}{b^2}\right)$、$F\left(\frac{S_B}{c^2},\frac{S_A}{c^2},0\right)$，於是我得出 $\triangle DEF$ 的重心 $G'\left(\frac{b^2S_B+c^2S_C}{3b^2c^2},\frac{c^2S_C+a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2S_A+b^2S_B}{3a^2b^2}\right)$。又因為 $\triangle DEF$ 的外心是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，所以 $O'(S^2+S_{BC}:S^2+S_{CA}:S^2+S_{AB})$
2. 讓點坐標的分量和都相同，我令其為 $4S^2$，所以

   有 $O(2S^2-2S_{BC}:2S^2-2S_{CA}:2S^2-2S_{AB})$、$G\left(\frac{4S^2}{3}:\frac{4S^2}{3}:\frac{4S^2}{3}\right)$，再令歐拉線上的點 X 滿足 $\overrightarrow{OX}=t\overrightarrow{OG}$，其中 t 為實數。

   化簡即可得出

$$X\left(\frac{4S^2t+6(S^2-S_{BC})(1-t)}{3}:\frac{4S^2t+6(S^2-S_{CA})(1-t)}{3}:\frac{4S^2t+6(S^2-S_{AB})(1-t)}{3}\right).$$

   有 $O'(S^2+S_{BC}:S^2+S_{CA}:S^2+S_{AB})$、$G'\left(\frac{4S^2(S^2+S_{BC})}{3(S^2+S_{AA})}:\frac{4S^2(S^2+S_{CA})}{3(S^2+S_{BB})}:\frac{4S^2(S^2+S_{AB})}{3(S^2+S_{CC})}\right)$，再令歐拉線上的點 X' 滿足 $\overrightarrow{OX'}=t\overrightarrow{OG'}$，其中 t 為實數。

   化簡即可得出

$$X'\left(\frac{(S^2+S_{BC})\left(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\right)}{3(S^2+S_{AA})}:\frac{(S^2+S_{CA})\left(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\right)}{3(S^2+S_{BB})}:\frac{(S^2+S_{AB})\left(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\right)}{3(S^2+S_{CC})}\right).$$

3. 考慮兩個位移向量 $\overrightarrow{AX'}$ 與 $\overrightarrow{X'X}$

$$\overrightarrow{AX'}=\left(\begin{array}{c}\dfrac{(S^2+S_{BC})\big(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\big)-12S^2(S^2+S_{AA})}{3(S^2+S_{AA})}: \\ \dfrac{(S^2+S_{CA})\big(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{BB})}: \\ \dfrac{(S^2+S_{AB})\big(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{CC})}\end{array}\right)$$

$$\overrightarrow{X'X}=\left(\begin{array}{c}\dfrac{3(S^2+S_{AA})(S^2-3S_{BC})+\big(S^2(-3S^2+5S_{BC})+S_{AA}(S^2+9S_{BC})\big)t}{3(S^2+S_{AA})}: \\ \dfrac{3(S^2+S_{BB})(S^2-3S_{CA})+\big(S^2(-3S^2+5S_{CA})+S_{BB}(S^2+9S_{CA})\big)t}{3(S^2+S_{BB})}: \\ \dfrac{3(S^2+S_{CC})(S^2-3S_{AB})+\big(S^2(-3S^2+5S_{AB})+S_{CC}(S^2+9S_{AB})\big)t}{3(S^2+S_{CC})}\end{array}\right)$$

利用兩位移向量垂直的充要條件進行式 (2) 的判斷

$$\begin{aligned}a^2\Bigg(&\frac{(S^2+S_{CA})\big(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{BB})} \\ &\times\frac{3(S^2+S_{CC})(S^2-3S_{AB})+\big(S^2(-3S^2+5S_{AB})+S_{CC}(S^2+9S_{AB})\big)t}{3(S^2+S_{CC})} \\ &+\frac{(S^2+S_{AB})\big(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{CC})} \\ &\times\frac{3(S^2+S_{BB})(S^2-3S_{CA})+\big(S^2(-3S^2+5S_{CA})+S_{BB}(S^2+9S_{CA})\big)t}{3(S^2+S_{BB})}\Bigg)+ \\ b^2\Bigg(&\frac{(S^2+S_{BC})\big(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\big)-12S^2(S^2+S_{AA})}{3(S^2+S_{AA})} \\ &\times\frac{3(S^2+S_{CC})(S^2-3S_{AB})+\big(S^2(-3S^2+5S_{AB})+S_{CC}(S^2+9S_{AB})\big)t}{3(S^2+S_{CC})} \\ &+\frac{(S^2+S_{AB})\big(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{CC})} \\ &\times\frac{3(S^2+S_{AA})(S^2-3S_{BC})+\big(S^2(-3S^2+5S_{BC})+S_{AA}(S^2+9S_{BC})\big)t}{3(S^2+S_{AA})}\Bigg)+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c^2\Bigg(&\frac{(S^2+S_{BC})\big(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\big)-12S^2(S^2+S_{AA})}{3(S^2+S_{AA})}\\
&\qquad\times\frac{3(S^2+S_{BB})(S^2-3S_{CA})+\big(S^2(-3S^2+5S_{CA})+S_{BB}(S^2+9S_{CA})\big)t}{3(S^2+S_{BB})}\\
&\qquad+\frac{(S^2+S_{CA})\big(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\big)}{3(S^2+S_{BB})}\\
&\qquad\times\frac{3(S^2+S_{AA})(S^2-3S_{BC})+\big(S^2(-3S^2+5S_{BC})+S_{AA}(S^2+9S_{BC})\big)t}{3(S^2+S_{AA})}\Bigg)
\end{aligned}
$$

式 (3)

注意到，因為

$$
\frac{1}{b^2c^2}=\frac{1}{(S_A+S_C)(S_A+S_B)}=\frac{1}{S^2+S_{AA}}
$$
$$
\frac{1}{c^2a^2}=\frac{1}{(S_A+S_B)(S_B+S_C)}=\frac{1}{S^2+S_{BB}}
$$
$$
\frac{1}{a^2b^2}=\frac{1}{(S_B+S_C)(S_A+S_C)}=\frac{1}{S^2+S_{CC}}
$$

我將式 (3) 同時提出 $a^2b^2c^2$，所以可得下式 (4)

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2b^2c^2}{9(S^2+S_{AA})(S^2+S_{BB})(S^2+S_{CC})} \\
&\qquad\times\Big(\Big((S^2+S_{CA})\big(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\big)\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{CC})(S^2-3S_{AB})+\big(S^2(-3S^2+5S_{AB})+S_{CC}(S^2+9S_{AB})\big)t\Big) \\
&\qquad+\Big((S^2+S_{AB})\big(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\big)\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{BB})(S^2-3S_{CA})+\big(S^2(-3S^2+5S_{CA})+S_{BB}(S^2+9S_{CA})\big)t\Big) \\
&\qquad+\Big((S^2+S_{BC})\big(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\big)-12S^2(S^2+S_{AA})\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{CC})(S^2-3S_{AB})+\big(S^2(-3S^2+5S_{AB})+S_{CC}(S^2+9S_{AB})\big)t\Big) \\
&\qquad+\Big((S^2+S_{AB})\big(4S^2t+3(S^2+S_{CC})(1-t)\big)\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{AA})(S^2-3S_{BC})+\big(S^2(-3S^2+5S_{BC})+S_{AA}(S^2+9S_{BC})\big)t\Big) \\
&\qquad+\Big((S^2+S_{BC})\big(4S^2t+3(S^2+S_{AA})(1-t)\big)-12S^2(S^2+S_{AA})\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{BB})(S^2-3S_{CA})+\big(S^2(-3S^2+5S_{CA})+S_{BB}(S^2+9S_{CA})\big)t\Big) \\
&\qquad+\Big((S^2+S_{CA})\big(4S^2t+3(S^2+S_{BB})(1-t)\big)\Big) \\
&\qquad\times\Big(3(S^2+S_{AA})(S^2-3S_{BC})+\big(S^2(-3S^2+5S_{BC})+S_{AA}(S^2+9S_{BC})\big)t\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

式 (4)

因為計算較為複雜，我利用數學軟體 Wolfram Mathematica 進行化簡，注意到我將 $S^2 = S_{AB}+S_{BC}+S_{CA}$ 條件放入，可將式 (4) 寫成式 (5)。

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2b^2c^2}{9(S^2+S_{AA})(S^2+S_{BB})(S^2+S_{CC})} \\
&\qquad\times\Big(2S^2(S^2-3S_{AA})\big(S^2(-3-t)-3S_{BB}(1-t)\big)\big(S^2(3+t)+3S_{CC}(1-t)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

式 (5)

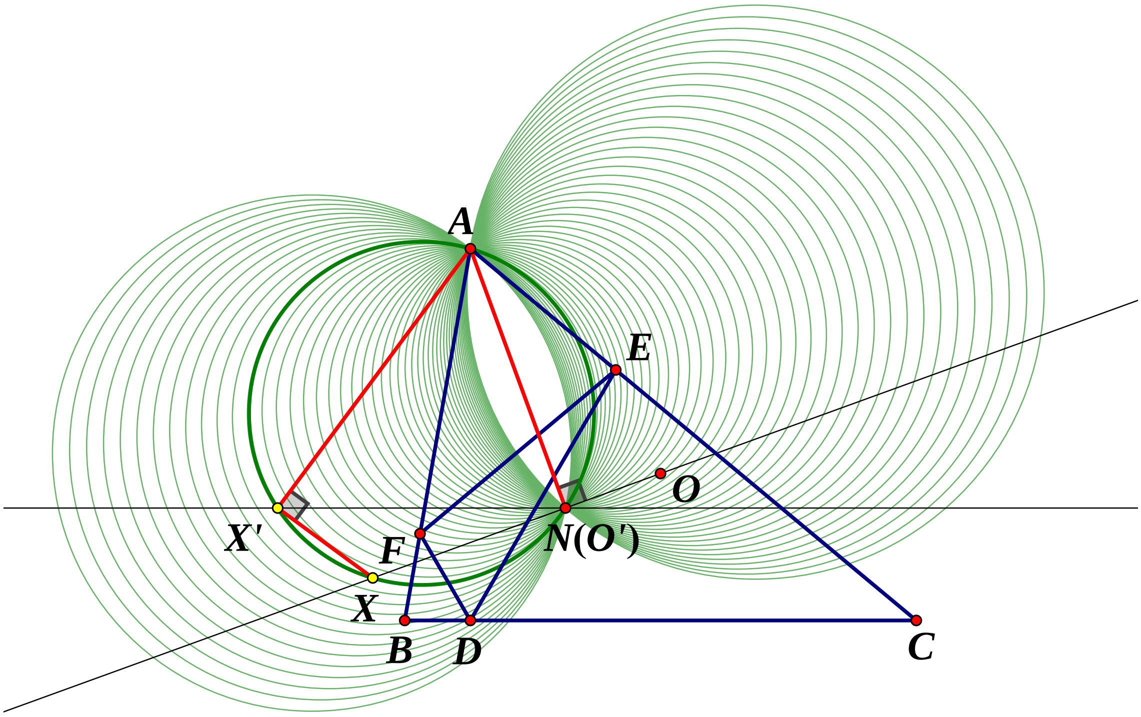
因為 t 為變動的實數，因此式 (5) 恆等於 0 的充要條件為 $S^2-3S_{AA}=0$，又因為先前定義 $S_A = S\cdot\cot A$，可得 $1-3\cot^2 A=0$，再得 $\cot A = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，故 $\angle A = 60°$ 或 $120°$。

■

定理 16. (共軸圓系 pencil of coaxial circles) 若 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，若且唯若定點 A、N 與動點 X、X' 四點恆共圓，此圓為以 $\overleftrightarrow{AN}$ 為根軸（等冪軸）的共軸圓系。

證明：

如下圖，由定理 15 可得 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$，其中點 X 與 X' 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 各自歐拉線上的對應點，再得出 $\overleftrightarrow{AO'} \perp \overleftrightarrow{O'O}$，又 O' 點是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N，又點 X、N 與 O 共線（歐拉線），即 $\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{NX}$，$\angle AX'X = 90° = \angle ANX$，可得出定點 A、N 與動點 X、X' 四點恆共圓。注意到，因為 A 點與 N 點為定點，因此這些圓都是以 $\overleftrightarrow{AN}$ 為根軸（等冪軸）的共軸圓系。



▲ 圖 21：以 $\overleftrightarrow{AN}$ 為根軸（等冪軸）的共軸圓系。

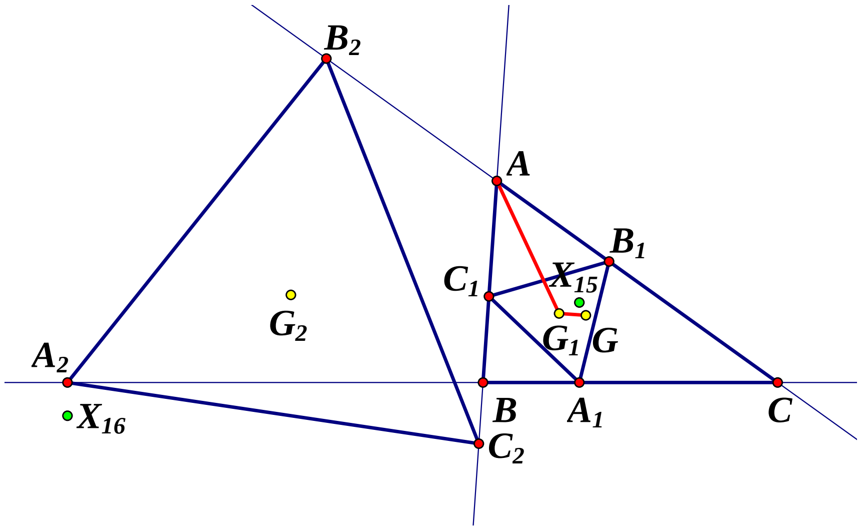
四、 由其他形心所構造的垂足三角形之性質探究

我前面的研究是 $\triangle ABC$ 與其垂心三角形的性質，其中因為 $\angle A = 60°$ 或 $120°$ 使得其垂心三角形（垂心所構造的垂足三角形）的一內角也為 60 度。

我後來繼續針對 $\triangle ABC$ 的外心、重心、九點圓圓心、內心去構造其垂足三角形，但是並沒有發現比較特殊的性質（外心的垂足三角形就是 $\triangle ABC$ 的中點三角形，其形心相關性質是很顯然已知的），於是我思考下一步的研究該如何深入呢？

我發現原先研究的設定因為 $\triangle ABC$ 與其垂心三角形有關聯性（兩者的某一個內角為 60 度或 120 度），於是我仿照這樣的結構去延伸，但是我放寬條件，不限定原始 $\triangle ABC$ 的內角度數（即 $\triangle ABC$ 是任意三角形），而是我討論垂心三角形為特定三角形的情形。搜尋全國科展作品，我發現黃靖堯、梁家瑋與李旻威（2020）討論了平面上那些特殊點關於任意 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為特殊三角形[4]。他們證明了平面上僅有 2 個點，第一等力點 X_{15} 與第二等力點 X_{16} 所構造的垂足三角形為「正三角形」；平面上僅有 11 個點所構造的垂足三角形與原三角形為「相似三角形」，其中一個為外心。以下研究我針對「垂足三角形為『正三角形』」以及「垂足三角形為『相似三角形』」這兩部分去推廣延伸。

我本來預期 $\overleftrightarrow{AG_1}$ 和 $\overleftrightarrow{G_1G}$ （$\overleftrightarrow{AG_2}$ 和 $\overleftrightarrow{G_2G}$）會有類似的垂直關係，利用軟體繪圖實驗後發現並沒有，即 $\angle AG_1G \neq 90°$ 且 $\angle AG_2G \neq 90°$。然而我後來將原本三角形的頂點 A 更換為原本三角形的重心 G 點而去觀察 G、G_1、G_2 的角度關係，驚喜的發現這三點的構造的角度也是不變量，$\angle GG_1G_2$ 恆為 180 度！



▲ 圖 22：$\angle AG_1G \neq 90°$。

（一） 垂足三角形為正三角形的情形

引理 17. (見 [4, pp.7-10]) 平面上有關 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為正三角形的投影點為第一等力點（First Isodynamic Point）與第二等力點（Second Isodynamic Point）。

定理 18. 令 $\triangle ABC$ 的重心為 G、正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心為 G_1、正 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心為 G_2，恆有點 G、G_1、G_2 三點共線（$\angle GG_1G_2 = 180°$）且有向線段比為

$$\frac{\overline{GG_2}}{\overline{GG_1}} = \frac{S_A + S_B + S_C + \sqrt{3}S}{S_A + S_B + S_C - \sqrt{3}S}$$

其中，第一等力點 X_{15} 構造的垂足三角形為 $\triangle A_1B_1C_1$、第二等力點 X_{16} 構造的垂足三角形為 $\triangle A_2B_2C_2$。

證明：

查詢 ETC 網站可得第一等力點 X_{15} 與第二等力點 X_{16} 的重心坐標為

$$X_{15}\left((S+\sqrt{3}\,S_A)(S_B+S_C):(S+\sqrt{3}\,S_B)(S_C+S_A):(S+\sqrt{3}\,S_C)(S_A+S_B)\right)$$

$$X_{16}\left((S-\sqrt{3}S_A)(S_B+S_C):(S-\sqrt{3}S_B)(S_C+S_A):(S-\sqrt{3}S_C)(S_A+S_B)\right)$$

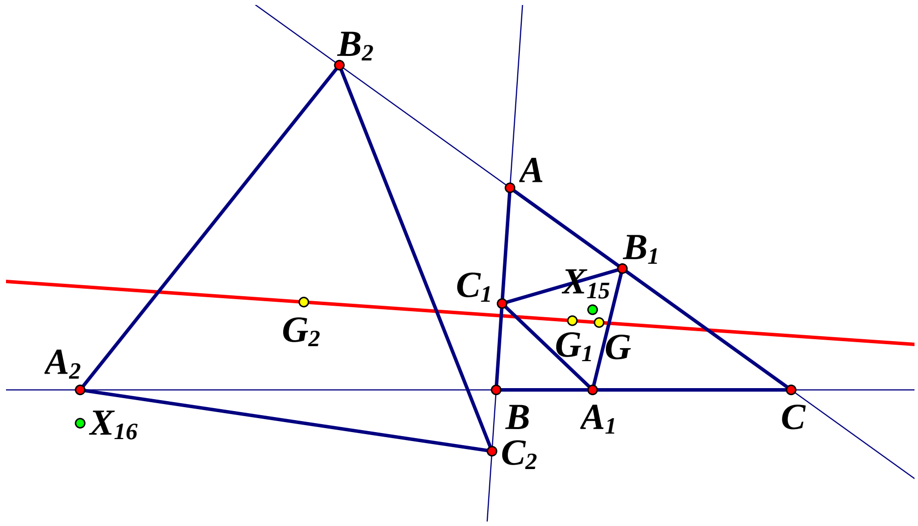
點 X_{15} 關於三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 的垂足分別為 $A_1\left(0:\sqrt{3}S+S_A+2S_C:\sqrt{3}S+S_A+2S_B\right)$、$B_1\left(\sqrt{3}S+S_B+2S_C:0:\sqrt{3}S+S_B+2S_A\right)$、$C_1\left(\sqrt{3}S+S_C+2S_B:\sqrt{3}S+S_C+2S_A:0\right)$

所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心 G_1

$$G_1\left(2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C:2\sqrt{3}S+3S_C+3S_A:2\sqrt{3}S+3S_A+3S_B\right)$$

同理可以得出 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心 G_2

$$G_2\left(-2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C:-2\sqrt{3}S+3S_C+3S_A:-2\sqrt{3}S+3S_A+3S_B\right)$$



▲ 圖 23：正三角形時，點 G、G_1、G_2 三點共線。

考慮重心 G、G_1、G_2 三點坐標的行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C & 2\sqrt{3}S+3S_C+3S_A & 2\sqrt{3}S+3S_A+3S_B \\ -2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C & -2\sqrt{3}S+3S_C+3S_A & -2\sqrt{3}S+3S_A+3S_B \end{vmatrix}$$

將第 3 列 $\times(-1)$ 加入第 2 列可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4\sqrt{3}S & 4\sqrt{3}S & 4\sqrt{3}S \\ -2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C & -2\sqrt{3}S+3S_C+3S_A & -2\sqrt{3}S+3S_A+3S_B \end{vmatrix} = 0$$

此時，將第 1 列與第 2 列成比例，所以其行列式值為 0，故點 G、G_1、G_2 三點共線

我繼續討論點 G、G_1、G_2 三點的有向線段比，先將此三點進行正規化，再利用其中一個分量化簡後可得出所求

$$\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}} = \frac{\dfrac{-2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C}{6\left(-\sqrt{3}S+S_A+S_B+S_C\right)} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{3}S+3S_B+3S_C}{6\left(\sqrt{3}S+S_A+S_B+S_C\right)} - \dfrac{1}{3}} = \frac{S_A+S_B+S_C+\sqrt{3}S}{S_A+S_B+S_C-\sqrt{3}S}$$

■

（二） 垂足三角形為相似三角形的情形

根據黃靖堯、梁家瑋與李旻威（2020）的研究，平面上垂足三角形為正三角形僅有 11 個點所構造的垂足三角形與原三角形為「相似三角形」（其實還有 1 個是無窮遠點，黃靖堯等人的研究並沒有納入）。扣除外心外，剩下的 10 個點，兩兩互為反演點（5 個點在三角形內部、5 個點在三角形外部）。我接下來就以一組反演點為進行探討。

引理 19. (見 [4, p.11-16]) 扣除外心與無窮遠點外，點 P 關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為相似三角形的投影點有五組。

(1) 第一組：點 P 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC} = bc:c^2:b^2$，一共有兩個點。

(2) 第二組：點 Q 滿足 $\overline{QA}:\overline{QB}:\overline{QC} = c^2:ac:a^2$，一共有兩個點。

(3) 第三組：點 R 滿足 $\overline{RA}:\overline{RB}:\overline{RC} = b^2:a^2:ab$，一共有兩個點。

(4) 第四組：點 S 滿足 $\overline{SA}:\overline{SB}:\overline{SC} = \frac{b}{a}:\frac{c}{b}:\frac{a}{c}$，一共有兩個點。

(5) 第五組：點 T 滿足 $\overline{TA}:\overline{TB}:\overline{TC} = \frac{c}{a}:\frac{a}{b}:\frac{b}{c}$，一共有兩個點。

在引理 19 中，黃靖堯等人的研究並非使用重心坐標 Barycentric coordinate，而是利用投影點與 $\triangle ABC$ 的三頂點的距離比來表示，對於我研究來說這個不是好的表示法，因此我須先將這些點的重心坐標 Barycentric coordinate 求出。

引理 20. (見 [3, p.256-257]) 若 $P_\pm$ 點關於 $\triangle ABC$ 三頂點的距離比 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC} = p:q:r$，其中 p、q、r 為正實數，則 $P_\pm$ 點的重心坐標 Barycentric coordinate 為

$$P_{\pm}\left((S_B+S_C)\left(\frac{S_A}{S}\pm\frac{S'_A}{S'}\right):(S_C+S_A)\left(\frac{S_B}{S}\pm\frac{S'_B}{S'}\right):(S_A+S_B)\left(\frac{S_C}{S}\pm\frac{S'_C}{S'}\right)\right)$$

其中，$S'_A=\frac{(bq)^2+(cr)^2-(ap)^2}{2}$、$S'_B=\frac{(cr)^2+(ap)^2-(bq)^2}{2}$ 與 $S'_C=\frac{(ap)^2+(bq)^2-(cr)^2}{2}$，以及 S' 是以 ap、bq 與 cr 為三邊長構造的三角形面積的 2 倍。

性質 21. 關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為相似三角形的投影點之重心坐標為

(1) 第一組：$P_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_A):(S_C+S_A)(S_B\pm S_C):(S_A+S_B)(S_C\pm S_B)\big)$。

(2) 第二組：$Q_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_C):(S_C+S_A)(S_B\pm S_B):(S_A+S_B)(S_C\pm S_A)\big)$。

(3) 第三組：$R_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_B):(S_C+S_A)(S_B\pm S_A):(S_A+S_B)(S_C\pm S_C)\big)$。

(4) 第四組：$S_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_B):(S_C+S_A)(S_B\pm S_C):(S_A+S_B)(S_C\pm S_A)\big)$。

(5) 第五組：$T_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_C):(S_C+S_A)(S_B\pm S_A):(S_A+S_B)(S_C\pm S_B)\big)$。

證明：

將引理 19 的距離比代入引理 20 的坐標轉換公式並化簡。這裡僅以第一組為例，其餘方法皆相同。因為 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=p:q:r=bc:c^2:b^2$，代入可得

$$S'_A:S'_B:S'_C=b^2c^2(b^2+c^2-a^2):b^2c^2(a^2+b^2-c^2):b^2c^2(c^2+a^2-b^2)=S_A:S_C:S_B$$

又 $S'=\sqrt{S'_A\times S'_B+S'_B\times S'_C+S'_C\times S'_A}$，所以 $\frac{S'_A}{S'}=\frac{S_A}{S}$、 $\frac{S'_B}{S'}=\frac{S_C}{S}$ 與 $\frac{S'_C}{S'}=\frac{S_B}{S}$，因此第一組的兩個點坐標 $P_{\pm}\big((S_B+S_C)(S_A\pm S_A):(S_C+S_A)(S_B\pm S_C):(S_A+S_B)(S_C\pm S_B)\big)$。

■

礙於篇幅，我僅針對第一組投影點 $P_{\pm}$ 所造的垂足三角形的重心共線性質進行詳細證明，其餘四組省略過程，但是以表格呈現結果。

定理 22. 令 $\triangle ABC$ 的重心為 G、相似 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心為 G_1、相似 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心為 G_2，恆有點 G、G_1、G_2 三點共線（$\angle GG_1G_2=180°$）且有向線段比為

$$\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}=\frac{(S_B+S_C)(4S_A+S_B+S_C)}{(S_B-S_C)^2}$$

其中，P_+ 構造的垂足三角形為 $\triangle A_1B_1C_1$、P_- 構造的垂足三角形為 $\triangle A_2B_2C_2$。

證明：

根據性質 21 可得 P_+ 與 P_- 點的重心坐標為

$$P_+\big((S_B+S_C)(S_A+S_A):(S_C+S_A)(S_B+S_C):(S_A+S_B)(S_C+S_B)\big)$$

$$P_-\big((S_B+S_C)(S_A-S_A):(S_C+S_A)(S_B-S_C):(S_A+S_B)(S_C-S_B)\big)$$

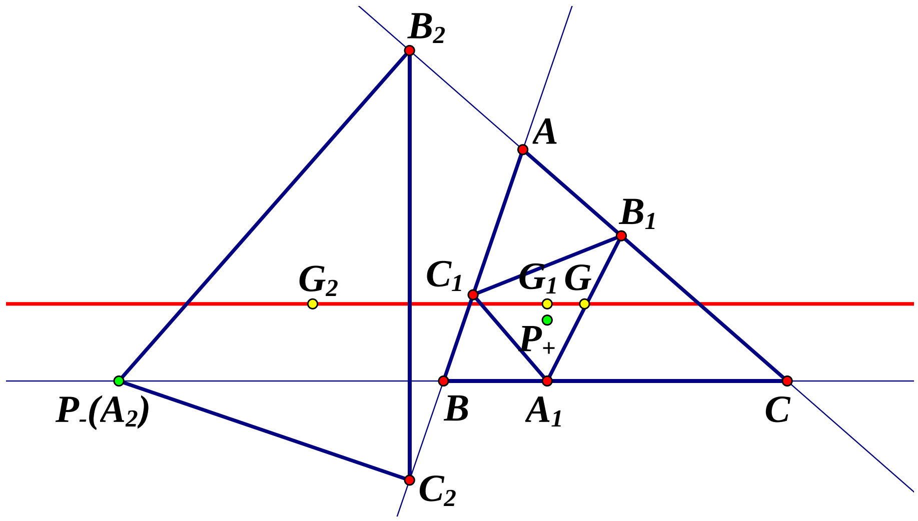
點 P_+ 關於三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 的垂足分別為 $A_1(0:S^2+2S_{CA}+S_{CC}:S^2+2S_{AB}+S_{BB})$、$B_1(2S_A+S_C:0:2S_A+S_B)$、$C_1(2S_{AA}+S_{BB}+3S_{AB}:S^2+2S_{AA}+S_{AB}:0)$

化簡可得 P_+ 構造的垂足三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心 G_1

$$G_1(4S_{AB}+4S_{AC}+2S_{BC}+S_{BB}+S_{CC}:S_{AB}+5S_{AC}+2S_{BC}+2S_{CC}:5S_{AB}+3S_{AC}+2S_{BC}+2S_{BB})$$

同理可以得出 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心 G_2

$$G_2(S_C-S_B:S_A+2S_C:-S_A-2S_B)$$



▲ 圖 24：相似三角形時，點 G、G_1、G_2 三點共線。

考慮重心 G、G_1、G_2 三點坐標的行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4S_{AB}+4S_{AC}+2S_{BC}+S_{BB}+S_{CC} & 3S_{AB}+5S_{AC}+2S_{BC}+2S_{CC} & 5S_{AB}+3S_{AC}+2S_{BC}+2S_{BB} \\ S_C-S_B & S_A+2S_C & -S_A-2S_B \end{vmatrix}$$

將第 1 行 $\times(-1)$ 分別加入第 2 行與第 3 行可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4S_{AB}+4S_{AC}+2S_{BC}+S_{BB}+S_{CC} & -S_{AB}+S_{AC}-S_{BB}+2S_{CC} & S_{AB}-S_{AC}+S_{BB}-S_{CC} \\ S_C-S_B & S_A+S_B+S_C & -S_A-S_B-S_C \end{vmatrix}=0$$

此時，將第 2 行與第 3 行成比例，所以其行列式值為 0，故點 G、G_1、G_2 三點共線

我繼續討論點 G、G_1、G_2 三點的有向線段比，先將此三點進行正規化，再利用其中一個分量化簡後可得出所求

$$\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}=\frac{\dfrac{S_A+2S_C}{3(S_C-S_B)}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3S_{AB}+5S_{AC}+2S_{BC}+2S_{CC}}{3(S_B+S_C)(4S_A+S_B+S_C)}-\dfrac{1}{3}}=\frac{(S_B+S_C)(4S_A+S_B+S_C)}{(S_B-S_C)^2}$$

■

性質 23. 點 G、G_1、G_2 三點共線且平行 $\overline{BC}$。

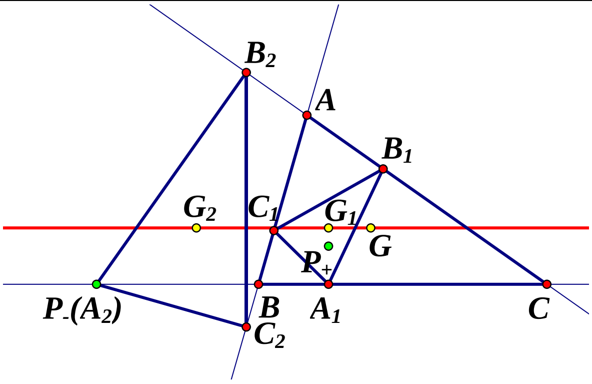
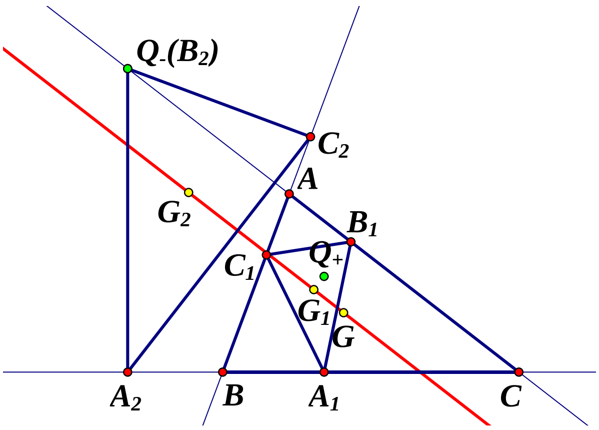
證明：

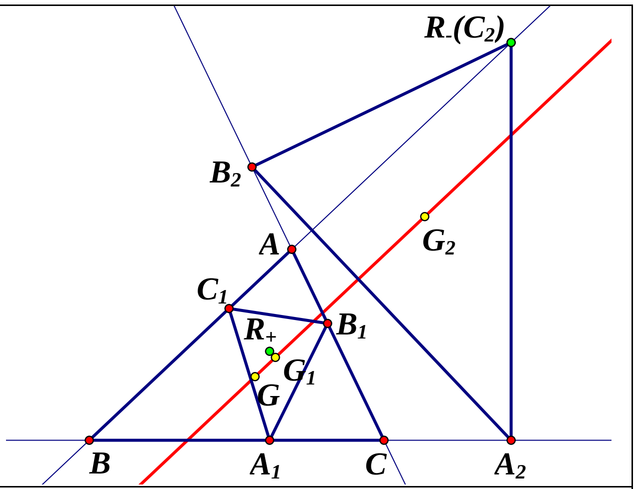
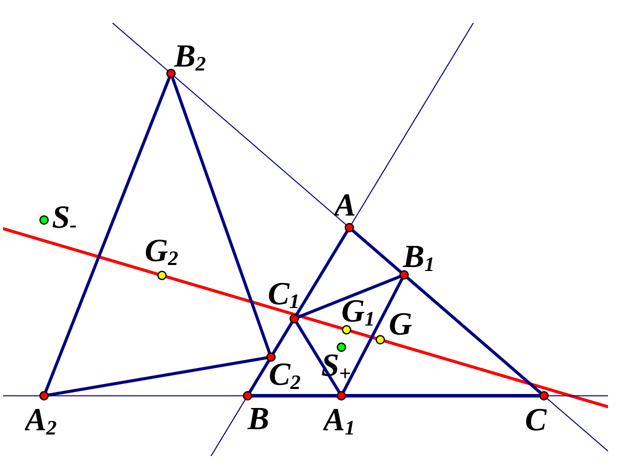
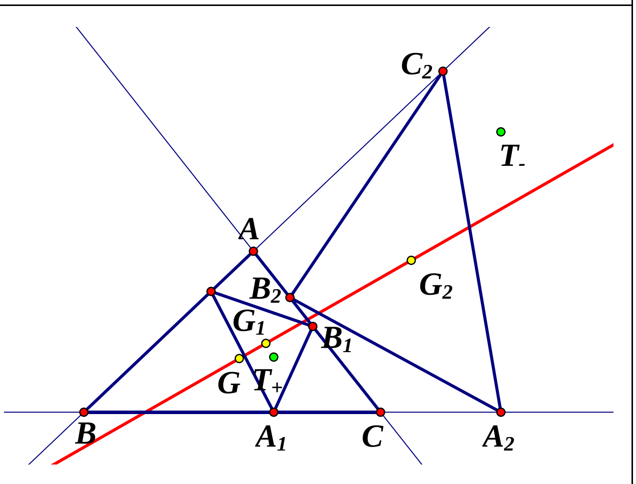
我在定理 22 正規化 G、G_1、G_2 三點時，發現有趣的事情，三個坐標的第一個分量皆為 $\frac{1}{3}$，即 $\triangle GBC$、$\triangle G_1BC$ 與 $\triangle G_2BC$ 的面積相同，因此 G、G_1、G_2 三點到 $\overline{BC}$ 等距離，故此重心連線平行 $\overline{BC}$。

■

以下我將五組投影點所造的垂足三角形的重心共線性質以表格呈現。

表 1：垂足三角形的重心共線性質

投影點	有向線段比 $\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}$	圖片
點 $P_\pm$	$\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}=\frac{(S_B+S_C)(4S_A+S_B+S_C)}{(S_B-S_C)^2}$ 平行 $\overline{BC}$	
點 $Q_\pm$	$\frac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}=\frac{(S_C+S_A)(S_A+4S_B+S_C)}{(S_C-S_A)^2}$ 平行 $\overline{CA}$	

點 $R_{\pm}$	$\dfrac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}} = \dfrac{(S_A+S_B)(S_A+S_B+4S_C)}{(S_A-S_B)^2}$ 平行 $\overline{AB}$	
點 $S_{\pm}$	$\dfrac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}} = \dfrac{S_{AA}+S_{BB}+S_{CC}+3S^2}{S_{AA}+S_{BB}+S_{CC}-S^2}$	
點 $T_{\pm}$	$\dfrac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}} = \dfrac{S_{AA}+S_{BB}+S_{CC}+3S^2}{S_{AA}+S_{BB}+S_{CC}-S^2}$	

陸、　進行中的研究

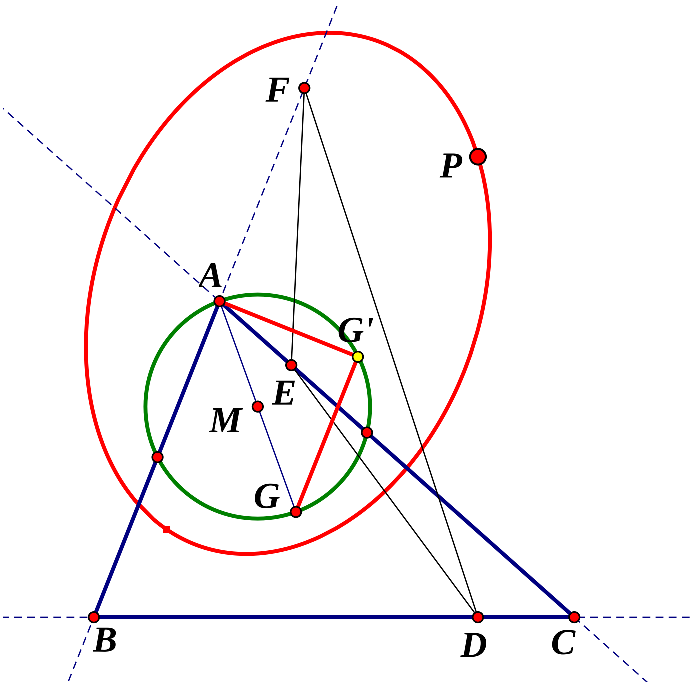
在本文的第一個研究中，給定一內角為 60 度或 120 度的 $\triangle ABC$，以及尤其垂心構造的垂心三角形 $\triangle DEF$，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 各自歐拉線上的點 X 和 X'，以及原始三角形的 A 點，三點恆有垂直關係，即 $\angle AX'X = 90°$。

在本文的第二個研究中，我放寬 $\triangle ABC$ 的條件，不設定其內角度數，同時也不限制投影點為垂心，改去討論其他形心構造的垂足三角形 $\triangle DEF$，同樣去探討 $\triangle ABC$ 和 $\triangle$

DEF 各自歐拉線上的點 X 和 X'，以及原始三角形的頂點是否具備垂直關係？雖然結果沒有出現此性質，但是我將頂點換成 $\triangle ABC$ 重心 G，兩個垂足三角形的重心 G_1 與 G_2，結果發現漂亮的角度不變量，即 $\angle GG_1G_2 = 180°$，但是垂心、外心、九點圓圓心並沒有這樣的性質。

目前我正在著手另外一個方向的有趣研究：平面上動點 P 關於任意 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為 $\triangle DEF$，考慮 $\triangle ABC$ 的形心 X 與 $\triangle DEF$ 的對應形心 X'，滿足 $\angle AX'X = 90°$ 的動點 P 的存在性與其軌跡。

下圖是重心的情形，因為 $\angle AG'G = 90°$，作 $\overline{AG}$ 為直徑的圓，垂足三角形的重心 G' 點在此圓周上，描繪出來的投影點 P 點有無限多個，我猜測其軌跡為一橢圓。



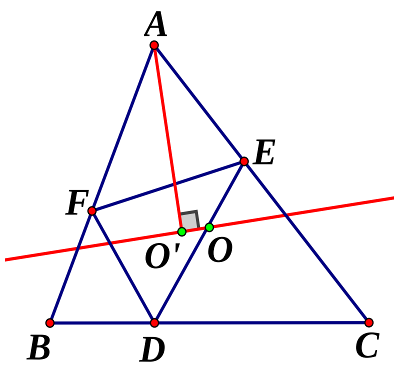
▲ 圖 25：模擬滿足 $\angle AG'G = 90°$ 的所有投影點 P。

柒、　結論

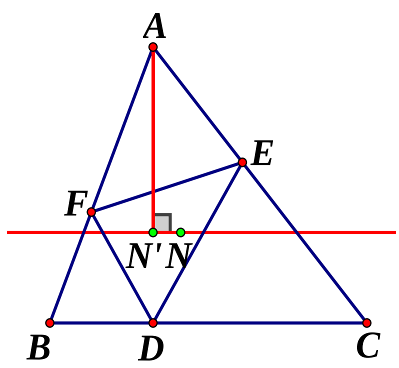
本研究推廣 Abdilkadir Altinas 提出三角形 ABC 與其垂心三角形 DEF 的垂心 H、H'，當 $\angle A = 60°$ 則 $\overline{AH'} \perp \overline{H'H}$ [1]。我把垂心換成外心、九點圓圓心、重心之後再一般化討論歐拉線上所有的對應點。接下來創新探究由其他形心所構造的垂足三角形之性質，且不設定內角為 60 度，分別討論了垂足三角形為正三角形（共有兩個）和相似三角形（共有五組，每組兩個），研究這些形心之間的角度不變量，其主要研究結果如下。

一、 探討一內角為 60 度的三角形與其垂心三角形的各自垂心、外心、九點圓心與重心所構造的兩直線的垂直性質

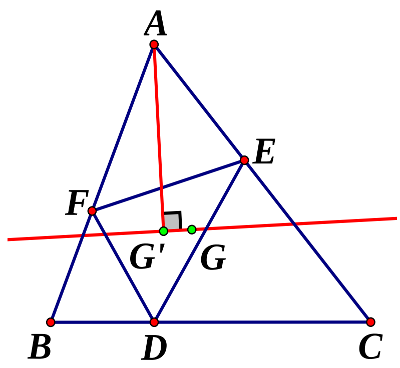
針對原始垂心問題，我以綜合幾何（純幾何）的方式補足了 Ricardo Barroso Campos 提出的證明的缺漏。接著推廣探討外心的情形，由於垂心三角形的的外心是原三角形的九點圓圓心，再利用垂心與外心的等角共軛性質給出了 $\overleftrightarrow{AO'}$ 恆垂直於 $\overleftrightarrow{O'O}$。接下來是九點圓心，我利用前面證明的垂心、外心作為工具而給出 $\overleftrightarrow{AN'}$ 恆垂直於 $\overleftrightarrow{N'N}$。最後是探討重心的情形，這是最難的項目，我花了不少時間去處理。先將前述的垂心、外心、九點圓心垂直性質作為工具，再巧妙利用三次相似三角形得出 $\overleftrightarrow{AG'}$ 恆垂直於 $\overleftrightarrow{G'G}$。



▲ 圖26：外心。



▲ 圖27：九點圓圓心。



▲ 圖28：重心。

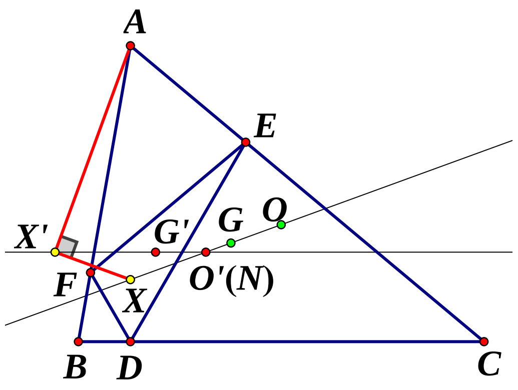
二、 給探討一內角為 60 度的三角形與其垂心三角形的各自歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線的垂直性質

我令原始三角形與其垂心三角形的歐拉線上相同構造法下的對應點分別為 X 點、X' 點，我仿照前述重心的相似三角形證明方法，可以得到 $\overleftrightarrow{AX'}$ 恆垂直於 $\overleftrightarrow{X'X}$。然而，綜合幾何的方法，須逐個問題考慮而沒有共通性，因此我採取三角幾何學常用的工具 Barycentric coordinate 重心坐標系統，用解析幾何的方法給出了一般化的理論。

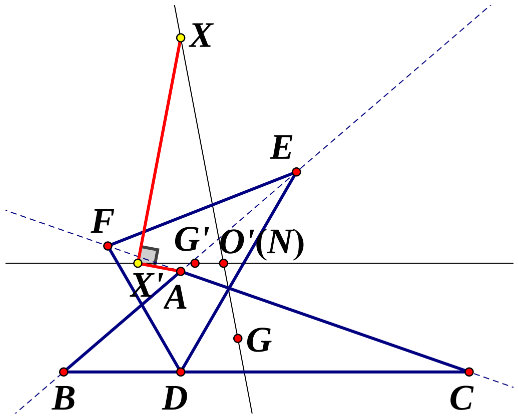
三、 探討歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線垂直的充要條件

當我系統化完整討論了某一內角為 60 度的三角形與其垂足三角形的垂直性質後，我好奇「如果內角不是 60 度呢？歐拉線上的所有對應點的垂直性質還存在嗎？」換句話說，我想找出歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線垂直的「充要條件」。

我以 Barycentric coordinate 重心坐標系統進行分析與證明，給出了 $\overleftrightarrow{AX'}$ 恆垂直於 $\overleftrightarrow{X'X}$ 的充要條件是某一內角為 60 度或 120 度，這個定理是本研究很重要的貢獻。



▲ 圖29：$\angle A = 60°$。



▲ 圖30：$\angle A = 120°$。

四、 推廣到其他形心所構造的垂足三角形

分析前面的研究對象，有一個很重要的特徵是原始三角形與其垂心三角形的某一內角都是 60 度或 120 度。於是我思考下一步的研究該如何深入呢？仿照這樣的結構去延伸，我不限定原始 $\triangle ABC$ 的內角度數（即 $\triangle ABC$ 是任意三角形），而是我討論垂心三角形為特定三角形的情形。

我分別討論了垂足三角形為正三角形（共有兩個）和相似三角形（共有五組，每組兩個），發現原三角形與其兩個垂足三角形的重心恆三點共線，即 $\angle GG_1G_2 = 180°$，這是另外一種角度不變量。

捌、 參考文獻

[1] Abdilkadir Altinas (2015). Problem 4011. *Crux Mathematicorum*, 41 (2), 73.

[2] C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website (ETC), https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] A. Hess (2015). Transforming Tripolar into Barycentric Coordinates. *Forum Geometricorum*, 15, 253–261.

[4] 黃靖堯、梁家瑋與李旻威（2020）。那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品，取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030419.pdf

【評語】030415

本作品推廣 Abadir Altinas 在 2015 年 2月於加拿大數學雜誌 Crux Mathematicorum 提出：當一角度為 60 度的三角形 ABC與其垂足三角形 DEF 的垂心相關垂直性質。作者推廣此問題將垂心換成外心、九點圓圓心、重心等，發現都有類似性質。利用重心坐標及解析幾何的方法找出歐拉線上所有的對應點的垂直關係的充要條件是此三角形的一個內角必須為 60 度或 120度，這個發現是此作品的其中一項重要亮點。更值得一提的是：此作品在最後一節(第四節)中，作者特別提到：仿照這樣的結構去延伸，考慮$\triangle ABC$是任意三角形的情況，並分別討論了垂足三角形為正三角形（共有兩個）和相似三角形（共有五組，每組兩個），作者發現原三角形與其兩個垂足三角形的重心恆三點共線，即 $\angle GG_1G_2 = 180^\circ$。作者若能同時再給出這些論述的詳細推導及證明，相信這些不變量的結果將有別於原參考著作的一項重要成果之一，也是此作品的另一項新亮點。整體而言，本作品的成果屬豐富，數學驗證部分，可以感覺出作者的努力，不少地方推理與證明相當有趣。附有一些巧思之處。尤其是本作品只有一位作者，特別難得。

作品簡報

三角形與其垂足三角形的心不變量

組別：國中組

科別：數學科

壹、前言

一、原始問題 Abdilkadir Altinas (2015)

2015 年 2 月，由 Abdilkadir Altinas 提出有趣的平面三角形數學問題：

In non-equilateral triangle ABC, let H be the orthocenter of ABC and H' be the orthocenter of the orthic triangle DEF of ABC (that is the triangle formed by the feet of the altitudes of ABC).

If $\angle BAC = 60°$, show that $\overline{AH'} \perp \overline{H'H}$.

二、本文研究方向

（一）利用綜合幾何（純幾何）的方法發現其中各種形心環環相扣。

（二）採取解析幾何（重心坐標）建立一般化理論，給出了歐拉線上的對應點構造的兩直線垂直不變量的充要條件。

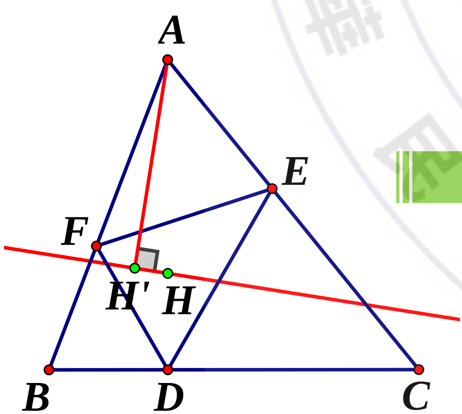


圖1：原始問題

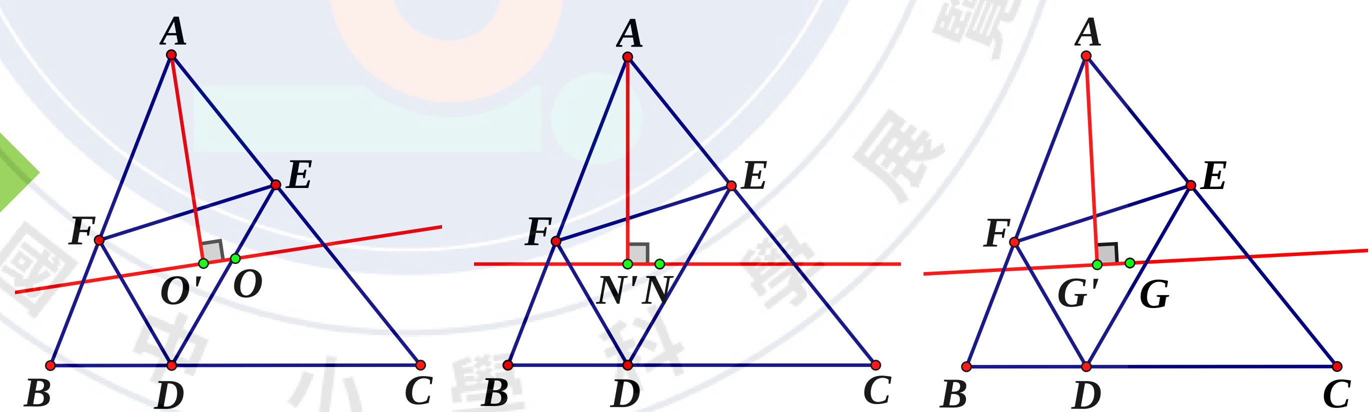


圖2：推廣到外心、九點圓圓心、重心

貳、預備知識

一、形心與垂足三角形

- 垂心 H、外心 O、重心 G、內心 I、九點圓圓心 N
- 歐拉線：外心、重心、垂心的連線。
- 垂足三角形：P 點關於 $\triangle ABC$ 三邊或其延長線上的垂足分別為 D、E、F，其連線所得的三角形。

二、三角形的形心之間常見性質

- 三角形的垂心 H 與外心 O 互為等角共軛點。
- 銳角三角形的高是其垂心三角形的角平分線；鈍角三角形在外部的高是其垂心三角形的外角平分線。

三、重心坐標 Barycentric Coordinates

- 以有向面積來定義坐標 $P(x{:}y{:}z)=P(\Delta PBC{:}\Delta PCA{:}\Delta PAB)$。
- 兩位移向量 $\overrightarrow{MN}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直的充要條件。
- 三點共線的充要條件：三階行列式值為 0
- 三角形 Conway 符號

$S=2\triangle ABC$、$S_\alpha=2\triangle ABC\cdot\cot\alpha$、$S_{\alpha\beta}=S_\alpha\cdot S_\beta$

$S_A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$、$S_B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$、$S_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

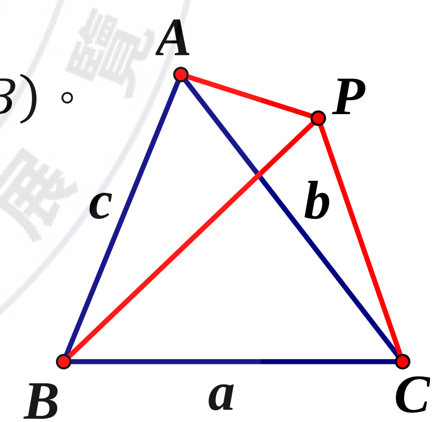


圖3：重心坐標

一、特殊化：垂心、外心、九點圓心與重心

性質1. (垂心) 若 $\angle A = 60°$，則 $\overleftrightarrow{AH'} \perp \overleftrightarrow{H'H}$。

證明： 分別針對給出點 A、F、H、H'、E 五點共圓，即以 $\overline{AH'}$ 為直徑的圓

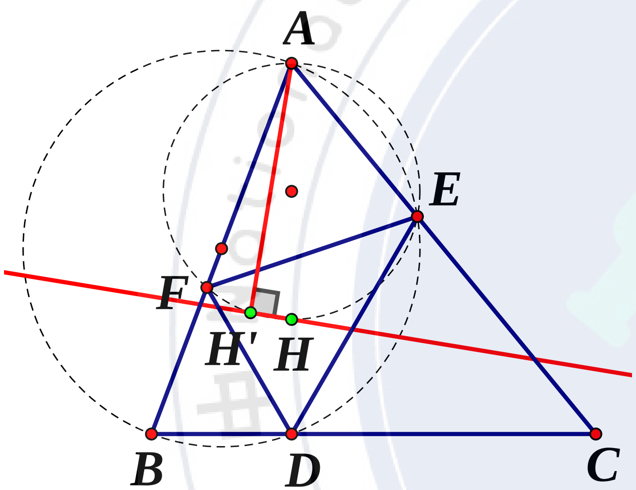


圖4-1：垂心

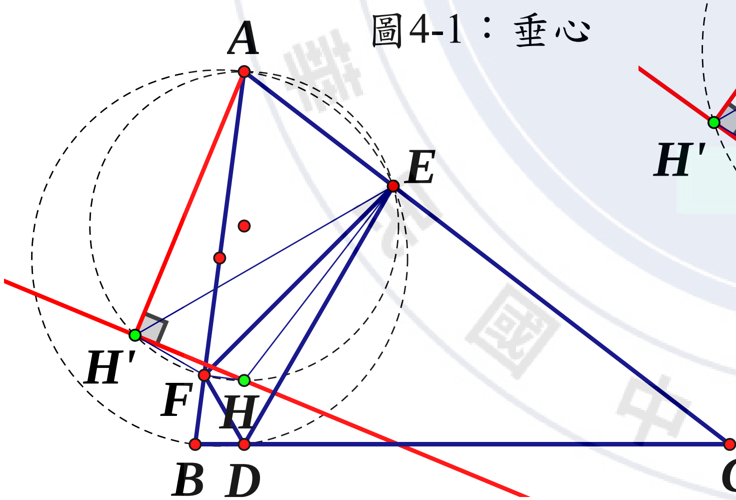


圖4-2：垂心

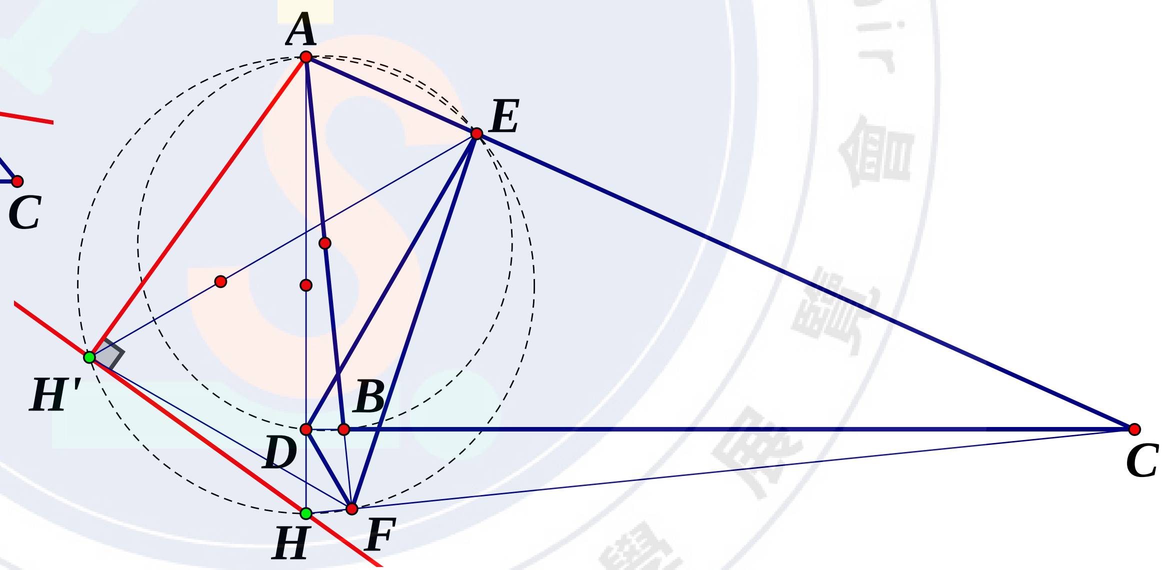


圖4-3：垂心

性質2. (外心) 若 $\angle A = 60^\circ$，則 $\overleftrightarrow{AO'} \perp \overleftrightarrow{O'O}$。

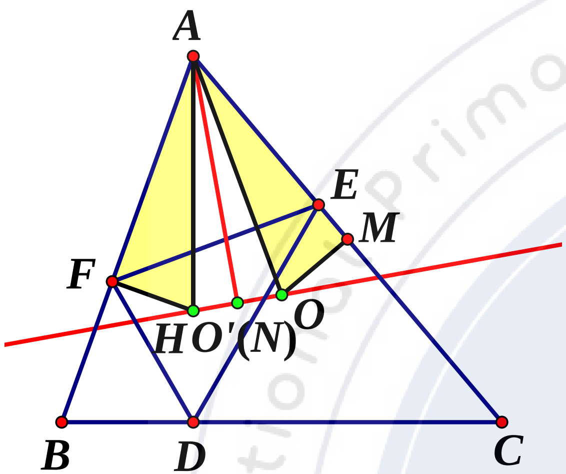


圖5-1：外心

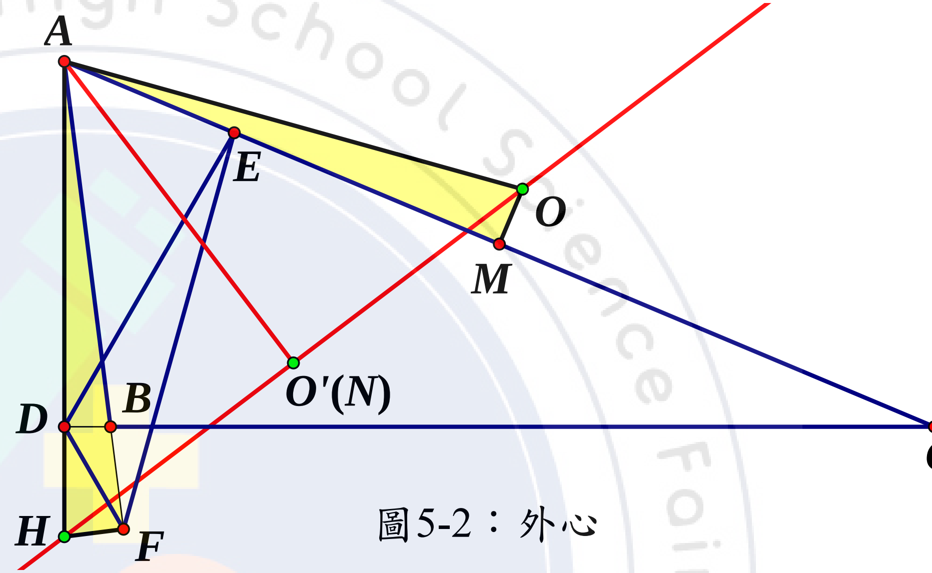


圖5-2：外心

性質3. (九點圓圓心) 若 $\angle A = 60^\circ$，則 $\overleftrightarrow{AN'} \perp \overleftrightarrow{N'N}$。

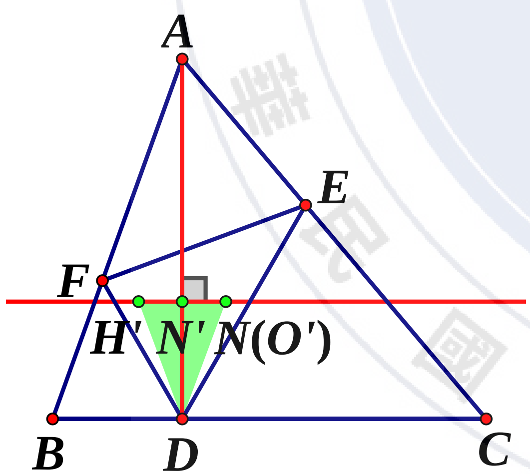


圖6-1：九點圓圓心

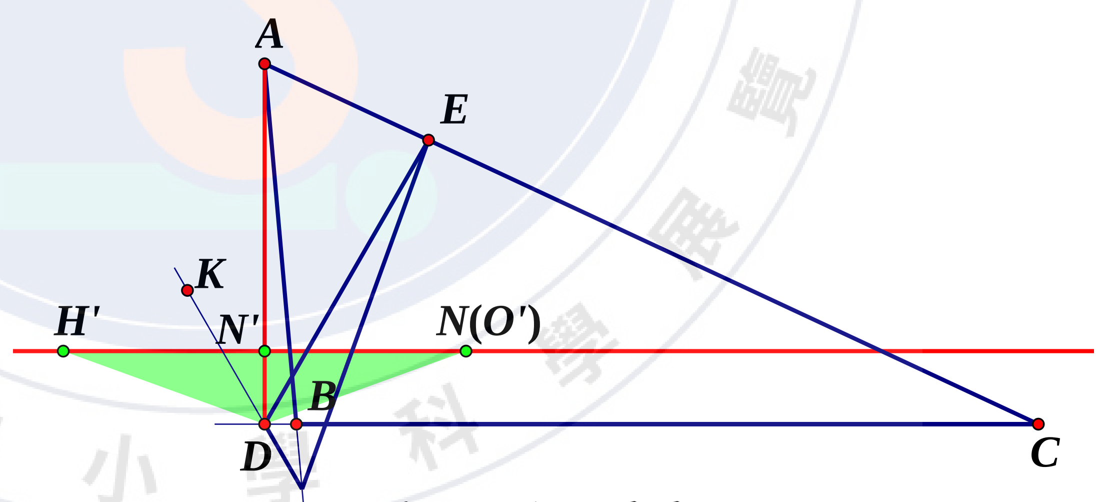


圖6-2：九點圓圓心

性質4. (重心) 若 $\angle A=60°$，則 $\overleftrightarrow{AG'}\perp\overleftrightarrow{G'G}$。

證明：

【綜合幾何方法】

此證明需要用到許多幾何性質，環環相扣，是本研究精彩之處。

① 利用性質 2 的外心與性質 3 的九點圓圓心的性質得出 $\triangle AON\sim\triangle AO'N'$（$AA$ 相似）。

② 由前相似可得 $\overline{AN}:\overline{AN'}=\overline{ON}:\overline{O'N'}$，再利用歐拉線的比例性質得出 $3\overline{GN}=\overline{ON}$、$3\overline{G'N'}=\overline{O'N'}$，所以 $\triangle AGN\sim\triangle AG'N'$（$SAS$ 相似）。

③ 由前相似可得 $\overline{AG}:\overline{AN}=\overline{GG'}:\overline{NN'}$，再考慮其夾角，最後可給出 $\triangle AGG'\sim\triangle ANN'$（$SAS$ 相似）。

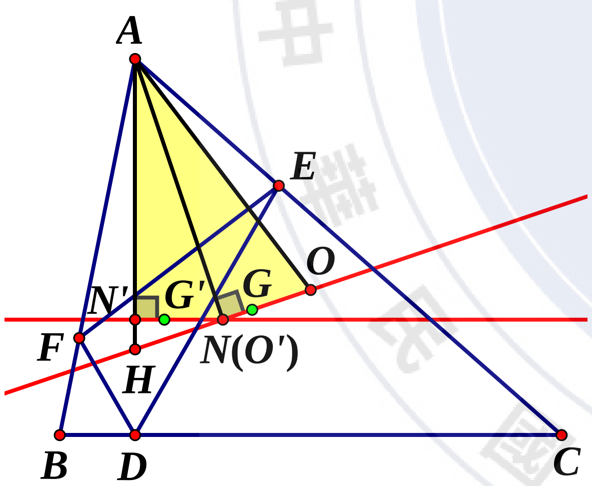


圖7-1：$\triangle AON\sim\triangle AO'N'$

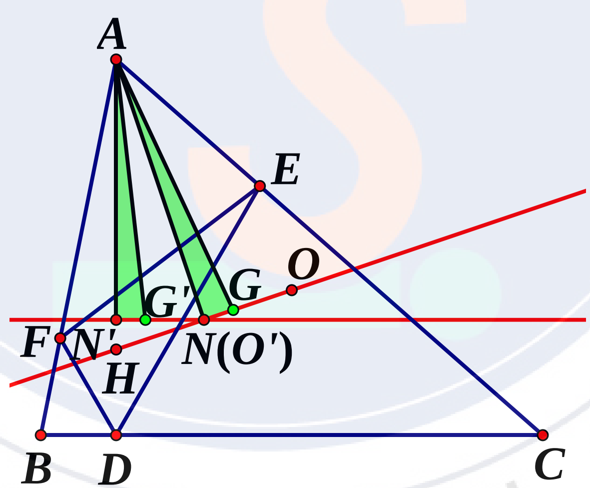


圖7-2：$\triangle AGN\sim\triangle AG'N'$

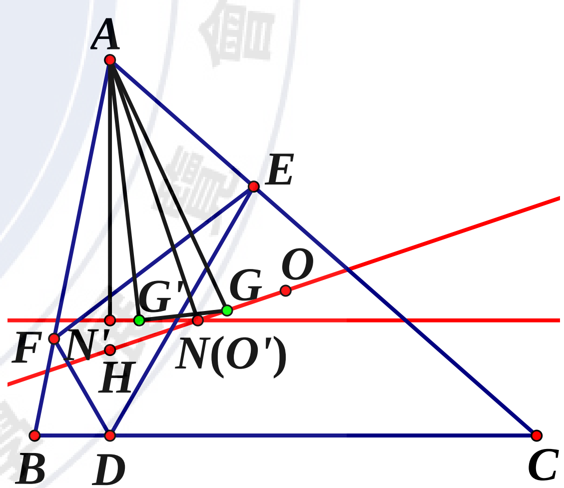


圖7-3：$\triangle AGG'\sim\triangle ANN'$

性質4. (重心) 若 $\angle A = 60°$，則 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$。

證明：

【解析幾何】

若沒先有垂心、外心、九點圓圓心的性質時，就很難處理重心的垂直性質，所以改用代數來處理，讓孤立的形心有統一的處理方式。

引入 Barycentric Coordinate，令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$ 可得

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)、G'\left(\frac{b^2S_B+c^2S_C}{3b^2c^2},\frac{c^2S_C+a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2S_A+b^2S_B}{3a^2b^2}\right)$$

考慮兩個位移向量 $\overrightarrow{AG'}$ 與 $\overrightarrow{G'G}$

$$\overrightarrow{AG'} = \left(\frac{b^2S_B+c^2S_C-3b^2c^2}{3b^2c^2},\frac{c^2S_C+a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2S_A+b^2S_B}{3a^2b^2}\right),$$

$$\overrightarrow{G'G} = \left(\frac{b^2c^2-b^2S_B-c^2S_C}{3b^2c^2},\frac{c^2a^2-c^2S_C-a^2S_A}{3c^2a^2},\frac{a^2b^2-a^2S_A-b^2S_B}{3a^2b^2}\right).$$

根據預備性質的垂直充要條件，我可以給出式子（詳閱研究報告書）

又因為 $\angle A = 60°$，由餘弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ 代入式子即可證明。

事實上，利用重心坐標系統 Barycentric coordinate 解析幾何方法，我給出 $\overleftrightarrow{AG'} \perp \overleftrightarrow{G'G}$ 的充要條件是 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，其餘角度下兩直線都不會垂直

令 $\triangle ABC$ 與其垂足 $\triangle DEF$ 的歐拉線上有一動點 X 和 X'，滿足 $\overline{OX} = t\overline{OG}$、$\overline{OX'} = t\overline{O'G'}$，其中 t 為實數。

定理5. 若 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，若且唯若 $\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$。

證明：

求出兩位移向量 $\overrightarrow{AX'}$ 與 $\overrightarrow{X'X}$，代入垂直充要條件式子並化簡得出下式

$$\frac{a^2b^2c^2}{9(S^2+S_{AA})(S^2+S_{BB})(S^2+S_{CC})}$$

$$\times\left(2S^2\left(\boldsymbol{S^2-3S_{AA}}\right)\left(S^2(-3-t)-3S_{BB}(1-t)\right)\left(S^2(3+t)+3S_{CC}(1-t)\right)\right)$$

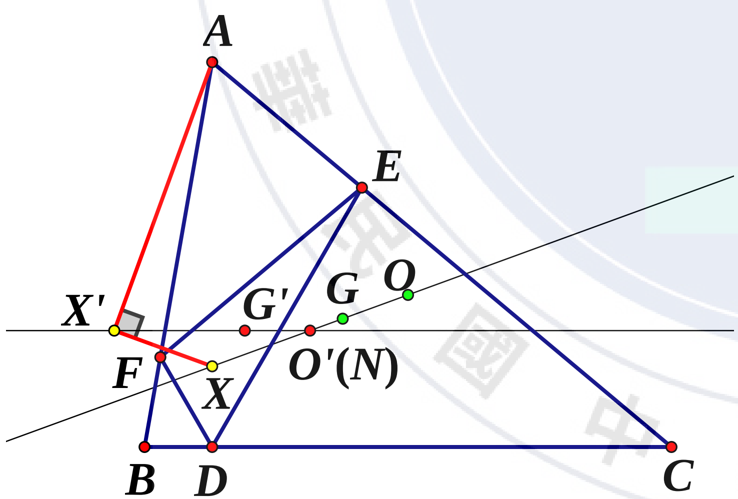


圖8：$\overleftrightarrow{AX'} \perp \overleftrightarrow{X'X}$

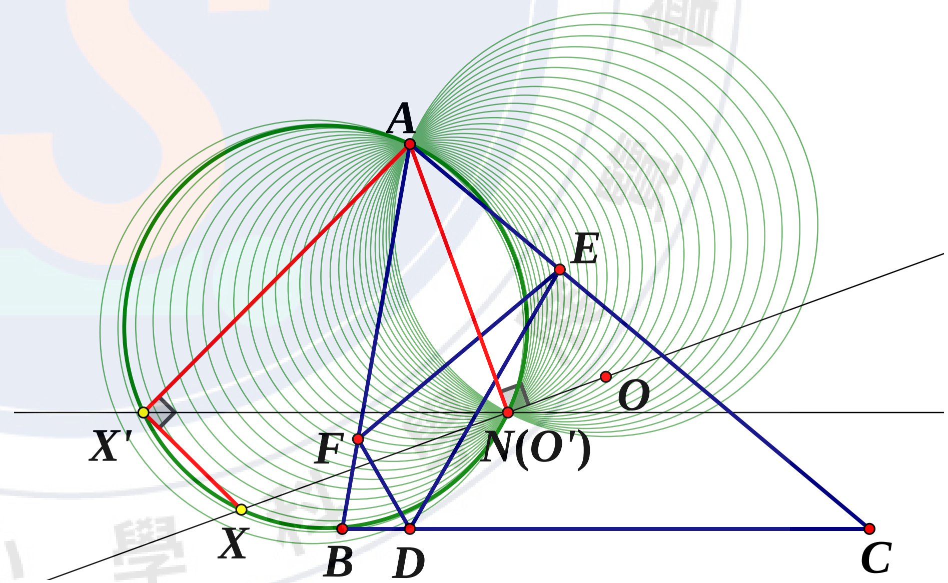


圖9：以 $\overleftrightarrow{AN}$ 為根軸的共軸圓系

三、推廣：其他形心所構造的垂足三角形之性質探究

原先預期 $\overleftrightarrow{AG_1}$ 和 $\overleftrightarrow{G_1G}$ （$\overleftrightarrow{AG_2}$ 和 $\overleftrightarrow{G_2G}$）有類似的垂直關係，但並沒有發現。然而將原本三角形的頂點 A 更換為原三角形的重心 G 點而有驚喜的發現！

(一) 探討垂足三角形為「正三角形」

引理6. (見 [4]) 平面上有關 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為正三角形的投影點為第一等力點 X_{15} 與第二等力點 X_{16}。

定理7. $\triangle ABC$ 的重心為 G、正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心為 G_1、正 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心為 G_2，恆有點 G、G_1、G_2 三點共線且

有向線段比為 $\dfrac{\overline{GG_2}}{\overline{GG_1}}=\dfrac{S_A+S_B+S_C+\sqrt{3}S}{S_A+S_B+S_C-\sqrt{3}S}$

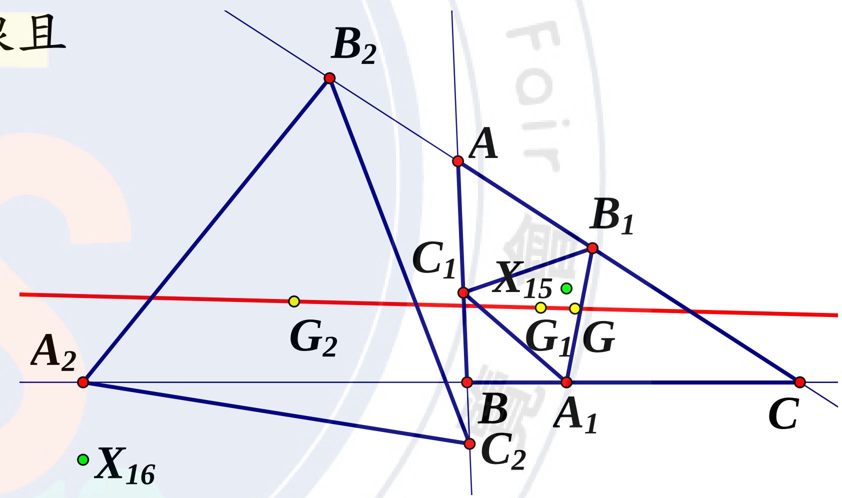


圖10：垂足三角形為正三角形。

(二) 探討垂足三角形為「相似三角形」

引理8. (見 [4]) 扣除外心與無窮遠點外，關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為相似三角形的投影點有五組，每組有兩個點，並給出這些點與三頂點的距離比。

引理9. (見 [3]) 將 P 點關於 $\triangle ABC$ 三頂點的距離比轉換為重心坐標系統。

定理10. 關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為相似三角形的投影點之重心坐標。

定理11. $\triangle ABC$ 的重心為 G、$\triangle A_1B_1C_1$ 的重心為 G_1、$\triangle A_2B_2C_2$ 的重心為 G_2，恆有點 G、G_1、G_2 三點共線，$\dfrac{\overrightarrow{GG_2}}{\overrightarrow{GG_1}}$ 如下圖所示。

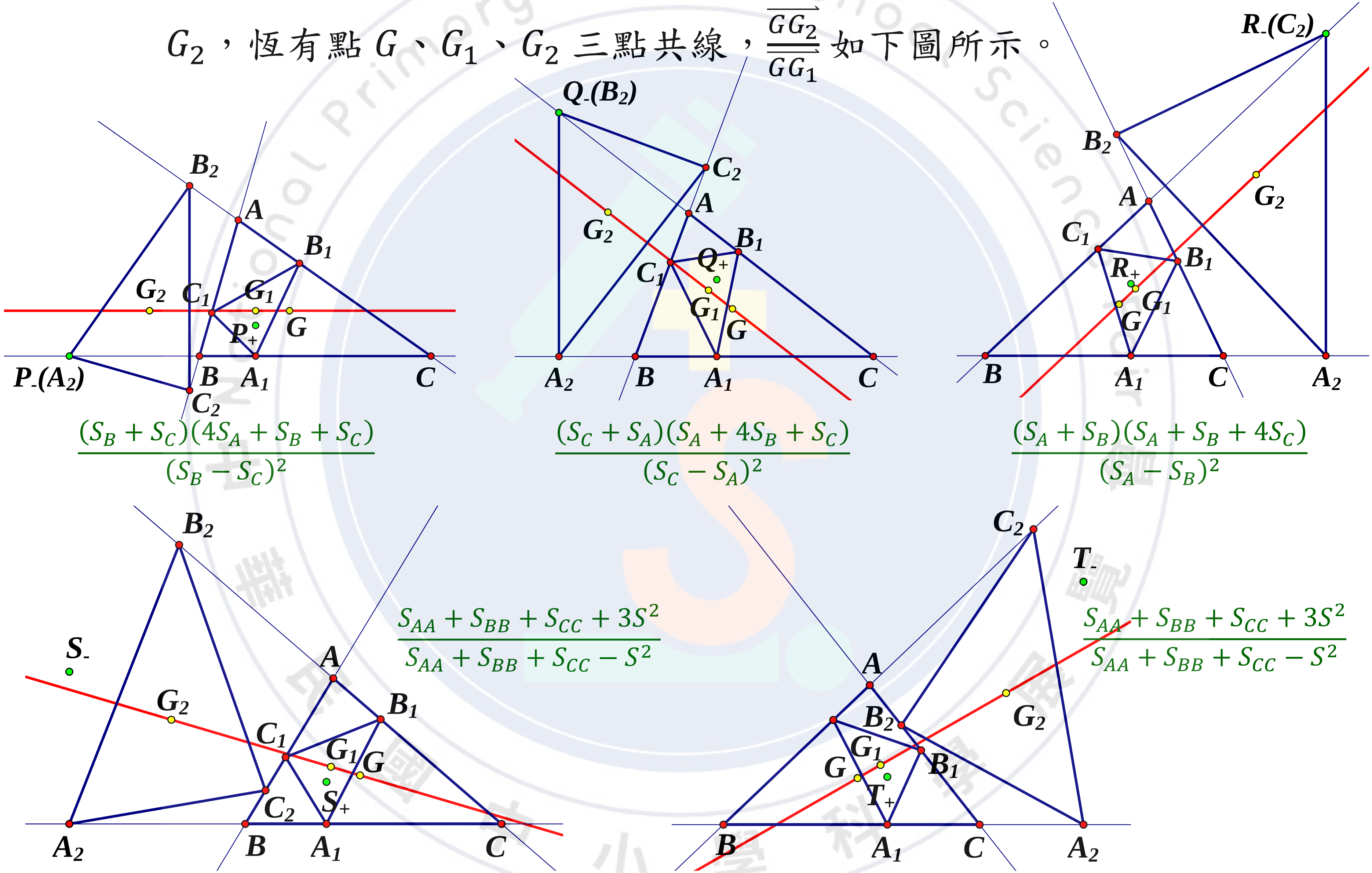


圖11：垂足三角形為相似三角形

肆、新的問題

再次關注垂直關係

動點 P 關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形為 $\triangle DEF$

考慮 $\triangle ABC$ 的形心 X 與
$\triangle DEF$ 的對應形心 X'
滿足 $\angle AX'X = 90°$
動點 P 的存在性與唯一性（軌跡）

我以繪圖軟體進行實驗
右圖是重心 $\angle AG'G = 90°$ 的情形
描繪出來的投影點 P 點有無限多個
猜測其軌跡為一橢圓

其他形心的垂直關係也值得關注

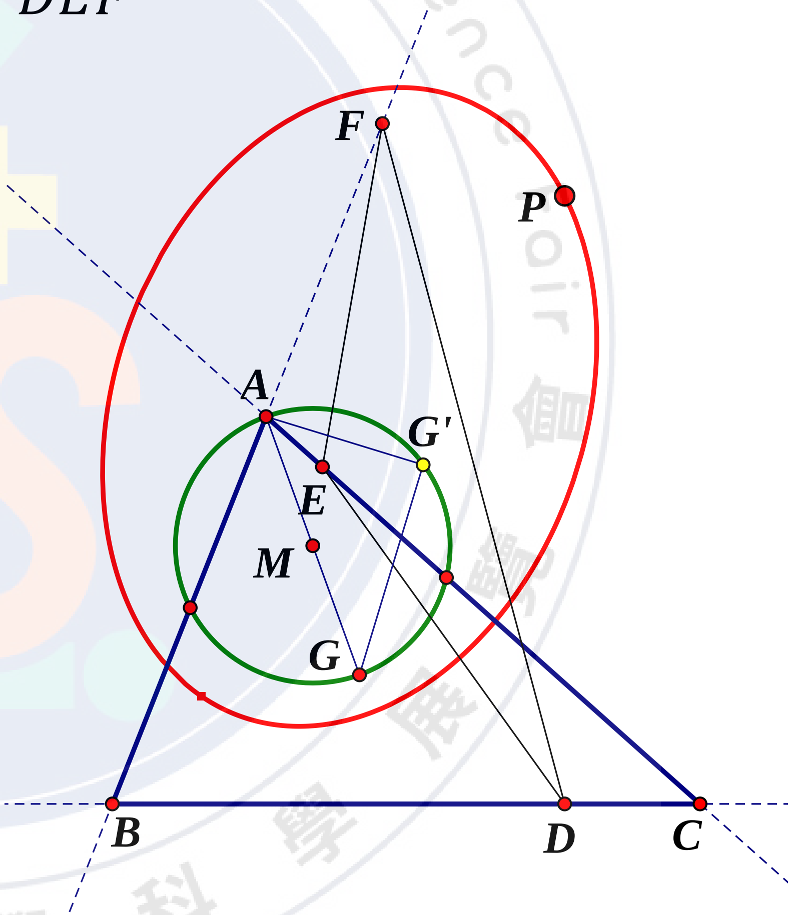


圖12：模擬滿足 $\angle AG'G = 90°$ 的所有投影點 P

伍、結論

一、給出一內角為 60 度的三角形與其垂心三角形的各自垂心、外心、九點圓圓心與重心所構造的兩直線的垂直性質。

二、給出一內角為 60 度的三角形與其垂心三角形的各自歐拉線上的所有對應點構造的兩直線的垂直性質。

三、建立一般化理論：原三角形與垂心三角形的歐拉線上的所有對應點所構造的兩直線垂直的充要條件是原三角形的某一內角為 60 度或 120 度。

四、垂足三角形為正三角形（共有兩個）和相似三角形（共有五組，每組兩個），給出原三角形與其兩個垂足三角形的重心恆三點共線性質與其有向線段比例常數。

陸、參考文獻

[1] Abdilkadir Altinas (2015). Problem 4011. *Crux Mathematicorum*, *41* (2), 73.

[2] *C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website (ETC),* https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[3] A. Hess (2015). Transforming Tripolar into Barycentric Coordinates. *Forum Geometricorum*, *15*, 253–261.

[4] 黃靖堯、梁家瑋與李旻威（2020）。那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品，取自https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030419.pdf