中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030413

三角形能容多少方

學校名稱：苗栗縣立照南國民中學

作者：	指導老師：
國二 李曜宇	蔡宛均
國二 洪承宇	林淑慧
國二 林祐安	

關鍵詞：勾股容方、斜邊容方、畢氏定理

摘　要

本研究探討在直角三角形勾股中容一個正方形，即為「勾股容方」，其正方形邊長、周長與面積會有什麼關係？若不斷重覆延伸此圖形，觀察這樣的圖形模式，最後又會有什麼結果？發現同一層內正方形周長的總和，其值會相等，也觀察到勾股容方與黃金比例的關聯性。

另外，如果將正方形邊長擺放在直角三角形的斜邊上，我們稱為「斜邊容方」，同樣逐步討論其正方形邊長、周長與面積的關係。當不斷重覆延伸此圖形時，發現在勾股容方或斜邊容方中，將所有正方形的面積加總後，其面積和皆會等於原直角三角形的面積，以及勾股容方的邊長會大於斜邊容方的邊長。

壹、前言

一、研究動機

八年級上學期時，老師在介紹畢氏定理單元時，給我們挑戰一道 2005 年 JHMC 的數學競賽試題，原題目內容是：「如圖 1，$\angle A = 90°$，$\overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 3$，其中S_1，S_2， … ，S_7均為正方形，試求這七個正方形周長的總和。」（答：$\frac{144}{7}$）

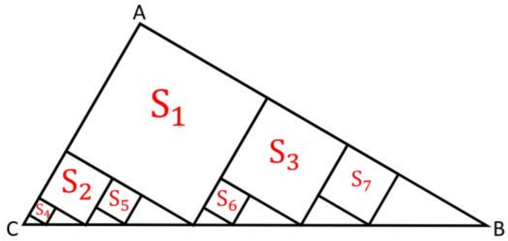


圖 1　2005 年 JHMC 數學試題

這個圖形引起我們的興趣，不禁思考，若是在直角三角形內部放上更多正方形，則其正方形邊長、周長或面積又會是多少？若是直角三角形三內角為特殊角度時，其正方形邊長、周長及面積又會有什麼關係？在不斷的討論過程中，我們靈機一想，若是將正方形用不同方式擺放時，其正方形邊長、周長及面積又會有什麼變化？於是我們就開始著手進入研究。

二、研究目的

（一）探討在直角三角形中，當內接正方形相鄰兩邊長擺放在「勾股」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。

（二）探討勾股容方中，直角三角形之長短股比率，與其內接正方形邊長的關係討論。

（三）探討在直角三角形中，當內接正方形邊長擺放在「斜邊」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。

（四）探討斜邊容方中，直角三角形之三邊長比，與其內接正方形邊長的關係討論。

三、圖形名稱定義

（一）勾股容方

將內接正方形相鄰兩邊長擺放在直角三角形的勾股上，是為「勾股容方」，之後會各自再形成小直角三角形，接著不斷重覆在直角三角形中放置正方形，如圖 2。原直角三角形的勾股容方是為第一層，其正方形稱為$S_{1,1}$；這時會形成兩個小直角三角形，是為第二層，且以相同方式所放置的正方形，由短股至長股方向依序稱為$S_{2,1}$和$S_{2,2}$；再延伸此圖形，會形成四個更小的直角三角形，是為第三層，其所放置的正方形，由短股至長股方向依序稱為$S_{3,1}$、$S_{3,2}$、$S_{3,3}$和$S_{3,4}$。爾後，不斷重覆放置的內接正方形，將按此規則依序命名。

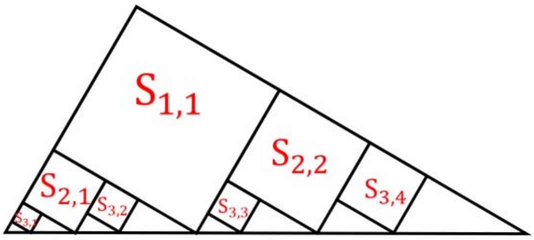


圖 2 勾股容方中正方形名稱

（二）斜邊容方

將內接正方形某一邊長擺放在直角三角形的斜邊上，我們稱為「斜邊容方」，之後也會各自再形成小直角三角形，接著不斷重覆在直角三角形中放置正方形，如圖 3。原直角三角形的斜邊容方是為第一層，其正方形稱為$T_{1,1}$；這時會形成三個小直角三角形，是為第二層，且以相同方式放置正方形，將落在斜邊最短之小直角三角形中的正方形稱為$T_{2,1}$，落在斜邊次短之小直角三角形中的正方形稱為$T_{2,2}$，最後落在斜邊最長之小直角三角形中的正方形稱為$T_{2,3}$；再延伸此圖形，將形成九個更小的直角三角形，是為第三層，其所放置的小正方形，以第二層命名規則，依序稱為$T_{3,1}$、$T_{3,2}$、……、$T_{3,8}$和$T_{3,9}$。爾後，不斷重覆放置的內接正方形，也以此規則依序命名。

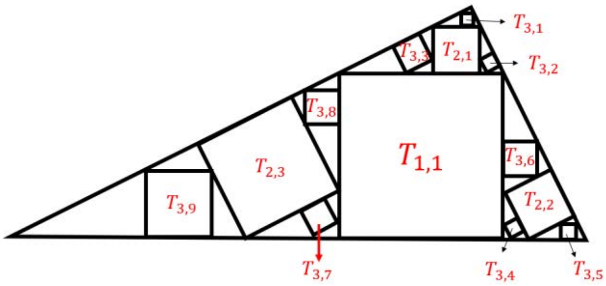


圖 3 斜邊容方中正方形名稱

貳、研究設備及器材

筆、紙、直尺、黑板、Word、Power point

參、研究過程

一、探討在直角三角形中，當內接正方形相鄰兩邊長擺放在「勾股」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。

（一）勾股容方—正方形邊長公式

若直角三角形邊長比為a：b：c，如圖 4，利用相似三角形對應邊成比例性質，可推導出內接正方形$S_{1,1}$邊長為 $\frac{ab}{a+b}$。

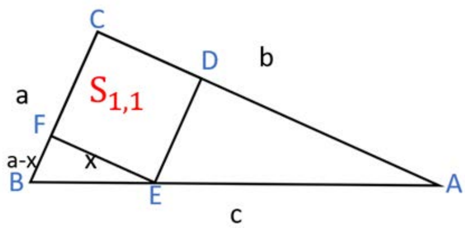


圖 4 勾股容方正方形邊長

證明：假設$S_{1,1}$邊長為 x

因為△ BFE~ △ BCA（AA 相似性質）

所以 $(\mathrm{a}-x):x=a:\mathrm{b}$

$$\mathrm{x}=\frac{ab}{a+b}\cdots\cdots \text{式（1）}$$

（二）直角三角形三內角$45°-45°-90°$

首先從直角三角形的特殊角度開始進行研究，當三角形內角為$45°-45°-90°$時，其對應邊長比為$1:1:\sqrt{2}$，如圖 5。以下將每層內接正方形邊長、周長及面積的計算結果整理於表 1。

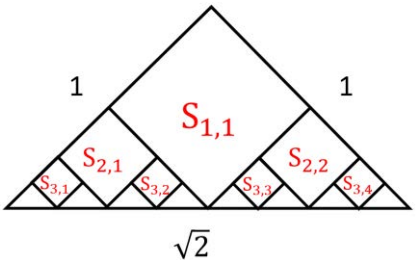


圖 5 邊長比$1:1:\sqrt{2}$

表 1 勾股容方邊長比$1:1:\sqrt{2}$

正方形	第一層 $S_{1,1}$	第二層 $S_{2,1}$=$S_{2,2}$	第三層 $S_{3,1}$=$S_{3,2}$=$S_{3,3}$=$S_{3,4}$	……	第 n 層 $S_{n,1}$=…=$S_{n,2^{n-1}}$
邊長	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	……	$\frac{1}{2^n}$
周長	2	1	$\frac{1}{2}$	……	$\frac{1}{2^n}\times 4=2^{2-n}$
面積	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	……	$(\frac{1}{2^n})^2=\frac{1}{4^n}$

1. 正方形邊長

利用式（1）可求得$S_{1,1}$邊長為 $\frac{1}{2}$，分割後內部小直角三角形，皆會與原直角三角形相似。同樣，利用式（1）求得第二層、第三層、……、第 n 層的正方形邊長。由表 1 可觀察得到，若是不斷重覆在直角三角形中放入正方形，其邊長的值由大到小是為等比數列。

2. 正方形周長

正方形周長是其邊長的 4 倍，因此可得出每一個正方形周長，如表 1。若將同一層內的正方形周長加總後，可得：

$$S_{1,1}\text{周長}=2$$

$$S_{2,1}\text{周長}+S_{2,2}\text{周長}=1\times 2=2$$

$$S_{3,1}\text{周長}+S_{3,2}\text{周長}+S_{3,3}\text{周長}+S_{3,4}\text{周長}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{周長}+S_{n,2}\text{周長}+\cdots\cdots+S_{n,2^{n-1}}\text{周長}=2^{2-n}\times 2^{n-1}=2$$

根據計算後結果，發現若加總同一層內所有正方形周長後，其周長的值皆會等於 2。

3. 正方形面積

正方形面積是其邊長的平方，也可得出每一個正方形面積，如表 1。將加總同一層正方形的面積後，可得：

$$S_{1,1}\text{面積} = \frac{1}{4}$$

$$S_{2,1}\text{面積} + S_{2,2}\text{面積} = \frac{1}{16} \times 2 = \frac{1}{8}$$

$$S_{3,1}\text{面積} + S_{3,2}\text{面積} + S_{3,3}\text{面積} + S_{3,4}\text{面積} = \frac{1}{64} \times 4 = \frac{1}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{面積} + S_{n,2}\text{面積} + \cdots\cdots + S_{n,2^{n-1}}\text{面積} = \frac{1}{4^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

根據計算後結果，發現若將同一層內所有正方形面積加總後，其值皆為上一層正方形面積總和的 $\frac{1}{2}$ 倍，且若不斷重覆在直角三角形中放入正方形，當加總同一層內所有正方形面積後，其面積的值由大到小是為等比數列。研究動機中 2005 年 JHMC 試題，是為求 7 個正方形周長的總和（如圖 1），於是激發我們是否也可以進一步的將每一層內所有正方形面積累加起來，於是得出以下的推導：

$$S_{1,1}\text{面積}+S_{2,1}\text{面積} \times 2 + \cdots\cdots + S_{n,1}\text{面積} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}$$

此等比數列中，首項為 $\frac{1}{4}$ ，公比為 $\frac{1}{2}$ ，透過以下無窮等比級數求和公式後，可得所有正方形面積總和是為 $\frac{1}{2}$，發現會與原直角三角形的面積（$\frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$）相等。

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{，} |r| < 1$$

（三）直角三角形三內角$30° - 60° - 90°$

當三角形內角為$30° - 60° - 90°$時，其對應邊長比為$1：\sqrt{3}：2$，如圖 6。

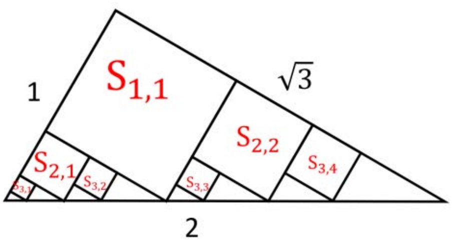


圖 6 邊長比$1：\sqrt{3}：2$

1. 正方形邊長

利用式（1）求得$S_{1,1}$邊長為 $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$，分割後內部小直角三角形，也皆與原直角三角形相似，依序在小直角三角形中放入正方形，因為直角三角形長短股的長度不同，故其內部同一層正方形邊長也會不相等，將計算結果整理於表 2。

表 2 勾股容方邊長比$1:\sqrt{3}:2$

正方形	第一層	第二層	第三層
邊長	$S_{1,1}=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$S_{2,1}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}$	$S_{3,1}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^3}$
		$S_{2,2}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$S_{3,2}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^3}$
			$S_{3,3}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^3}$
			$S_{3,4}=\frac{3\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^3}$

由表 2 可觀察得到：

(1)每一層分母的底數均為$1+\sqrt{3}$，而其指數的關係與所在的層數有關聯性。

(2)$S_{3,2}$邊長與$S_{3,3}$邊長相等 。

2. 正方形周長

由正方形邊長可得出每個正方形周長，再將同一層內正方形的周長加總後，可得：

$$S_{1,1}\text{周長}=\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$S_{2,1}\text{周長}+S_{2,2}\text{周長}=\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$S_{3,1}\text{周長}+S_{3,2}\text{周長}+S_{3,3}\text{周長}+S_{3,4}\text{周長}=\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{周長}+S_{n,2}\text{周長}+\cdots\cdots+S_{n,2^{n-1}}\text{周長}=\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

觀察計算後結果，發現若加總同一層內所有正方形的周長後，其值皆等於 $\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$。

3. 正方形面積

由正方形邊長也可得出每個正方形面積，將同一層內正方形的面積加總後，可得：

$$S_{1,1}\text{面積} = \frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$S_{2,1}\text{面積} + S_{2,2}\text{面積} = \frac{12}{\left(1+\sqrt{3}\right)^4}$$

$$S_{3,1}\text{面積}+S_{3,2}\text{面積}+S_{3,3}\text{面積}+S_{3,4}\text{面積} = \frac{48}{\left(1+\sqrt{3}\right)^6}$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{面積} + S_{n,2}\text{面積} + \cdots\cdots + S_{n,2^{n-1}}\text{面積} = \frac{3\times4^{n-1}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}}$$

觀察計算後結果，發現若加總同一層所有正方形的面積後，其值是為上一層正方形面積總和的$\frac{4}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = (\frac{2}{1+\sqrt{3}})^2$倍。接著，也進一步將每一層內所有正方形面積累加起來，計算如下：

$$S_{1,1}\text{面積} = \frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$S_{1,1}\text{面積}+ S_{2,1}\text{面積} + S_{2,2}\text{面積} = \frac{24+6\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^4}$$

$$S_{1,1}\text{面積}+ S_{2,1}\text{面積} + \cdots\cdots + S_{3,3}\text{面積} + S_{3,4}\text{面積} = \frac{132+72\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^6}$$

$$\vdots$$

$$S_{1,1}\text{面積}+ S_{2,1}\text{面積} + \cdots\cdots\cdots + S_{n,2^{n-1}}\text{面積} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{4^n}{(1+\sqrt{3})^{2n}}\right)$$

此等比數列中，首項為$\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$ ，公比為$(\frac{2}{1+\sqrt{3}})^2$ ，透過無窮等比級數求和公式後，可得所有正方形面積總和為$\frac{\sqrt{3}}{2}$，發現會與原直角三角形的面積（$\frac{1\times\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$）相等。

（四）直角三角形的邊長比a：b：c

1. 正方形邊長

由式（1）已知圖 7 中的$S_{1,1}$邊長為 $\frac{ab}{a+b}$，同樣使用式（1）可推得第二層、第三層的正方形邊長，如表 3，且其$S_{3,2}$與$S_{3,3}$的邊長也是相等。

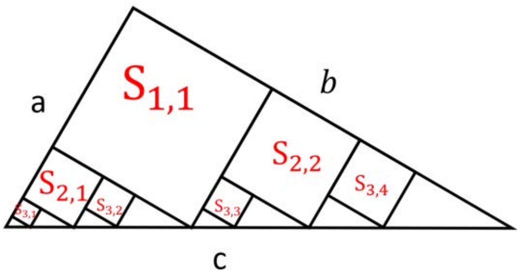


圖 7 邊長比a：b：c

表 3 勾股容方邊長比a：b：c

正方形	第一層	第二層	第三層
邊長	$S_{1,1} = \frac{ab}{a+b}$	$S_{2,1} = \frac{a^2b}{(a+b)^2}$	$S_{3,1} = \frac{a^3b}{(a+b)^3}$
		$S_{2,2} = \frac{ab^2}{(a+b)^2}$	$S_{3,2} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,3} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,4} = \frac{ab^3}{(a+b)^3}$

2. 正方形周長

由正方形邊長得出每個正方形周長後，將加總同一層內正方形的周長後，可得：

$$S_{1,1}\text{周長} = \frac{4ab}{a+b}$$

$$S_{2,1}\text{周長} + S_{2,2}\text{周長} = \frac{4ab}{a+b}$$

$$S_{3,1}\text{周長} + S_{3,2}\text{周長} + S_{3,3}\text{周長} + S_{3,4}\text{周長} = \frac{4ab}{a+b}$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{周長} + S_{n,2}\text{周長} + \cdots\cdots + S_{n,2^{n-1}}\text{周長} = \frac{4ab}{a+b}$$

觀察計算後結果，若加總同一層內所有正方形周長後，其周長的值皆等於 $\frac{4ab}{a+b}$。

3. 正方形面積

由正方形邊長得出每個正方形面積後，將加總同一層內正方形的面積後，可得：

$$S_{1,1}\text{面積} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$S_{2,1}\text{面積} + S_{2,2}\text{面積} = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^4}$$

$$S_{3,1}\text{面積}+S_{3,2}\text{面積}+S_{3,3}\text{面積}+S_{3,4}\text{面積} = \frac{a^2b^2c^4}{(a+b)^6}$$

$$\vdots$$

$$S_{n,1}\text{面積}+S_{n,2}\text{面積}+\cdots\cdots+S_{n,2^{n-1}}\text{面積} = \frac{a^2b^2c^{2n-2}}{(a+b)^{2n}}$$

觀察計算後結果，得到若加總同一層所有正方形面積後，其值是為上一層正方形面積總和的 $\frac{c^2}{(a+b)^2}$ 倍，也就是說，當不斷重覆在直角三角形中放入正方形後，將同一層內正方形面積加總後，其值由大到小是為等比數列。再進一步將每一層內所有正方形面積累加起來，計算如下：

$$S_{1,1}\text{面積} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$S_{1,1}\text{面積}+S_{2,1}\text{面積}+S_{2,2}\text{面積} = \frac{2a^2b^2(c^2+ab)}{(a+b)^4}$$

$$S_{1,1}\text{面積}+S_{2,1}\text{面積}+\cdots\cdots+S_{3,3}\text{面積}+S_{3,4}\text{面積}= \frac{4(c^2+ab)^2-c^2(a+b)^2}{(a+b)^6}$$

因此，若加總第一層到第 n 層的面積總和是為：

$$S_{1,1}\text{面積}+S_{2,1}\text{面積}+\cdots\cdots+S_{n,2^{n-1}-1}\text{面積}+S_{n,2^{n-1}}\text{面積}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}} S_{i,j}\text{的面積} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{(a^2+b^2)^n}{(a+b)^{2n}}\right)$$

此等比數列中，首項為$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$ ，公比為$\frac{c^2}{(a+b)^2}$，透過無窮等比級數的公式計算，當我們將正方形面積累加至第 n 層（$n\to\infty$）時，

$$\frac{\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}{1-\frac{c^2}{(a+b)^2}} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-c^2} = \frac{a^2b^2}{(a^2+2ab+b^2)-(a^2+b^2)} = \frac{ab}{2}$$

可得計算後結果為 $\frac{ab}{2}$，發現累加所有正方形面積總和是會與原三角形面積相等。

二、探討勾股容方中，直角三角形之長短股比率，與其內接正方形邊長的關係討論。

（一）正方形邊長與直角三角形兩股長之關係

我們也從表 3 中，發現每層第一個正方形邊長是其上一層第一個正方形邊長的 $\frac{a}{a+b}$ 倍，

更進一步觀察到，當內接正方形將三角形分割出兩個小三角形時，三角形中往短股方向的小正方形，其邊長為前一正方形邊長的 $\frac{a}{a+b}$ 倍，反之，往長股方向的小正方形，則是為 $\frac{b}{a+b}$ 倍，其說明如圖 8。

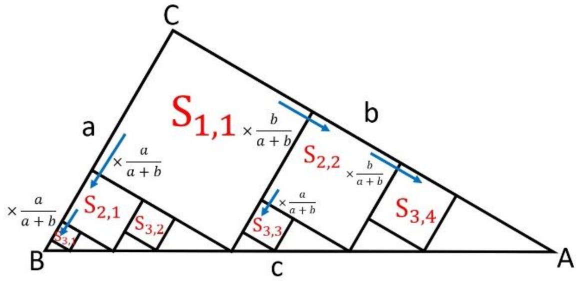


圖 8　勾股容方邊長倍數關係

由上述研究過程中，得知直角三角形的內接正方形邊長，都和原直角三角形的兩股長有關聯性，此時兩者的代數關係為：

$$\frac{a}{a+b}(S_{n,n'}\text{邊長}) = S_{n+1,2n'-1}\text{邊長}$$

$$\frac{b}{a+b}(S_{n,n'}\text{邊長}) = S_{n+1,2n'}\text{邊長}$$

（n：第 n 層正方形；n'：同層正方形中，由短股至長股的第 n'個正方形）

若將往短股方向的次數稱為 s，往長股方向的次數稱為 r，可得出，勾股容方中的每個正方形邊長的關係式：$\frac{a^{s+1}b^{r+1}}{(a+b)^n}$ 。並與表 3 的每個正方形邊長進行驗證，皆可驗證此關係式成立。故往後我們就可藉由此關係式，計算某正方形的邊長。

（二）討論$S_{3,2}$邊長 $=$ $S_{3,3}$邊長。

從一、(二）到一、(四）之討論中，發現 $S_{3,2}$邊長與$S_{3,3}$邊長相等，如圖 9，不禁令我們好奇這其中的關聯性，以下將對於構成這兩個正方形的直角三角形再做進一步的探討。

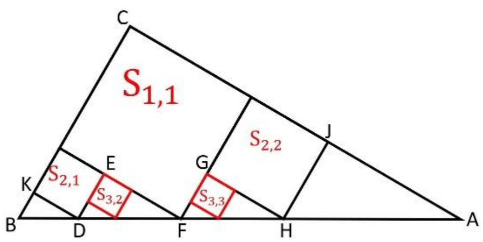


圖 9　$S_{3,2}$邊長與$S_{3,3}$邊長

證明：△ DEF ≅△ FGH

$\because$ $\angle CBA = \angle EDF = \angle GFH = \angle JHA$ 且 $\angle CAB = \angle GHF = \angle EFD = \angle KDB$

$\therefore$ 可得△ DEF ≈△ FGH（AA 相似性質）

又因相似三角形對應邊成比例性質，

假設$S_{1,1}$邊長 $= l_1$、$S_{2,1}$邊長 $= l_2$、$S_{2,2}$邊長 $= l_3$，得

$\overline{GH}:\overline{EF} = \overline{GF}:\overline{ED}$

$l_3 : (l_1 - l_2) = (l_1 - l_3) : l_2$

$(l_1 - l_2)(l_1 - l_3) = l_2 \times l_3$

$l_1^2 - l_1 l_3 - l_1 l_2 + l_2 l_3 = l_2 \times l_3$

$l_1 = l_2 + l_3$ … …式（2）

由式（2）可得： $\overline{ED} = \overline{GF} = l_2$ ； $\overline{GH} = \overline{EF} = l_3$

故△ DEF ≅△ FGH（ASA 全等性質），得證之。

由上述證明兩三角形全等的過程中，我們也就可以說明$S_{3,2}$邊長 $= S_{3,3}$邊長。

（三）在不同層的正方形周長總和皆是相等。

另外，也發現加總每一層內的正方形周長後，其周長和皆是相等。以下將說明第二層所有正方形周長總和與第一層正方形周長的關係，如圖 10。

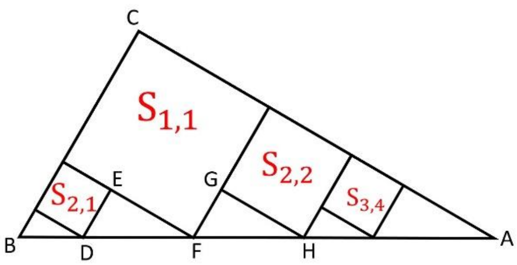


圖 10 正方形周長關係

從式（2）可得： $\overline{DE} + \overline{EF} = \overline{FG} + \overline{GH} = S_{1,1}$邊長

即第二層正方形邊長相加會等於第一層的正方形邊長，也就可以說明其同一層正方形周長總和也都會和第一層的正方形周長相等。

（四）勾股容方與黃金比例之關聯性

在繪製勾股容方的圖形時，我們猜想$S_{2,1}$的邊長與$S_{3,4}$的邊長似乎相等，於是想要進一步的驗證，這兩個正方形的邊長會有什麼關聯性呢？

假設 $S_{2,1}$邊長 $= S_{3,4}$邊長

$$S_{1,1}\text{邊長} \times \frac{a}{(a+b)} = S_{1,1}\text{邊長} \times \frac{b^2}{(a+b)^2}$$

$$\rightarrow\ a = \frac{b^2}{(a+b)}$$

$$\rightarrow\ a^2 + ab - b^2 = 0$$

解得 $a = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4b^2}}{2} = \frac{-b+b\sqrt{5}}{2} = \mathrm{b}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$a : b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

因此，我們找到直角三角形邊長比為$a：b：c$時，當$a：b$為黃金比例時，則$S_{2,1}$的邊長等於$S_{3,4}$的邊長。

三、探討在直角三角形中，當內接正方形邊長擺放在「斜邊」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。

（一）斜邊容方一正方形邊長公式

如圖 11，若直角三角形邊長比為$a：b：c$，連結三邊上的高$\overline{CI}$及$\overline{DI}$ 和$\overline{GI}$後，可分割為四邊形 CDIG、△ADI 及△BIG。當假設$T_{1,1}$邊長為 x，利用原直角三角形面積是為切割圖形面積總和，可得：

$$\frac{\overline{AI}\times x}{2} + \frac{\overline{CI}\times x}{2} + \frac{\overline{BI}\times x}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$\left(\mathrm{c} + \frac{ab}{c}\right) \times x = ab$$

$$x = \frac{abc}{ab+c^2} \cdots\cdots \text{式（3）}$$

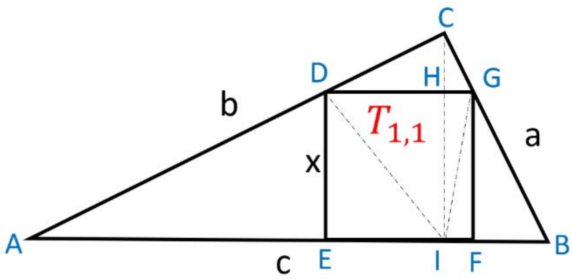


圖 11 斜邊容方正方形邊長

（二）直角三角形三內角$45° - 45° - 90°$

直接三角形內角為$45° - 45° - 90°$，其對應邊長比為$1:1:\sqrt{2}$，如圖 12。

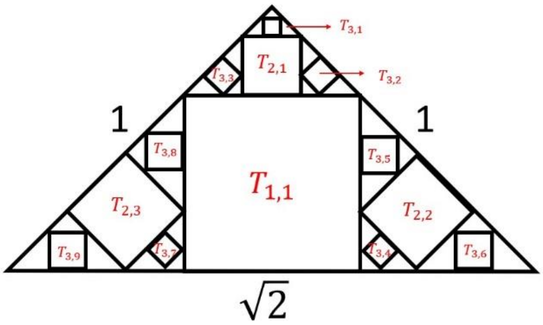


圖 12 斜邊容方名稱

1. 正方形邊長

由式（3）可求得正方形$T_{1,1}$邊長為 $\frac{\sqrt{2}}{3}$，接著同樣利用式（3）計算第二層與第三層的正方形邊長，將計算結果整理於表 4。

表 4 斜邊容方邊長比$1:1:\sqrt{2}$

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$T_{2,1} = \frac{\sqrt{2}}{9}$	$T_{3,1} = \frac{\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,2} = \frac{2}{27}$	$T_{3,3} = \frac{2}{27}$
		$T_{2,2} = \frac{2}{9}$	$T_{3,4} = \frac{2}{27}$	$T_{3,5} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,6} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$
		$T_{2,3} = \frac{2}{9}$	$T_{3,7} = \frac{2}{27}$	$T_{3,8} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,9} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$

從表 4 中，觀察第一層到第三層的正方形邊長關係，有以下的發現：

(1) $T_{1,1}$邊長、$T_{2,1}$ 邊長和$T_{3,1}$ 邊長均為前一個正方形邊長的 $\frac{1}{3}$ 倍。

(2) 由同一個直角三角形所延伸的三個正方形，其邊長之間均為放大$\sqrt{2}$ 倍。

2. 正方形周長

由正方形邊長求得第一層到第三層的每個正方形周長。若將同一層內正方形周長加總後，可得：

$$T_{1,1}\text{周長} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$T_{2,1}\text{周長} + T_{2,2}\text{周長} + T_{2,3}\text{周長} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{9}$$

$$T_{3,1}\text{周長} + T_{3,2}\text{周長} + \cdots\cdots + T_{3,9}\text{周長} = \frac{32 + 36\sqrt{2}}{27}$$

3. 正方形面積

由正方形邊長求得第一層到第三層的每個正方形面積，加總同一層內正方形面積後，其值整理於表 5。

表 5 斜邊容方邊長比$1:1:\sqrt{2}$

正方形	第一層	第二層	第三層		
面積	$T_{1,1}=\frac{2}{9}$	$T_{2,1}=\frac{2}{81}$	$T_{3,1}=\frac{2}{729}$	$T_{3,4}=\frac{4}{729}$	$T_{3,7}=\frac{4}{729}$
		$T_{2,2}=\frac{4}{81}$	$T_{3,2}=\frac{4}{729}$	$T_{3,5}=\frac{8}{729}$	$T_{3,8}=\frac{8}{729}$
		$T_{2,3}=\frac{4}{81}$	$T_{3,3}=\frac{4}{729}$	$T_{3,6}=\frac{8}{729}$	$T_{3,9}=\frac{8}{729}$
所在之層正方形面積總和	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{50}{729}$		

由表 5，可觀察得到：

(1) $T_{2,1}$面積是$T_{1,1}$面積的 $\frac{2}{9}$ 倍，$T_{3,1}$面積亦是$T_{2,1}$面積的 $\frac{2}{9}$ 倍。

(2) 每一層正方形的面積總和是為上一層的 $\frac{5}{9}$ 倍。

接著，進一步將每一層內所有正方形面積總和累加起來，計算如下：

$$T_{1,1}\text{面積} =\frac{2}{9}$$

$$T_{1,1}\text{面積}+T_{2,1}\text{面積}+T_{2,2}\text{面積}+T_{2,3}\text{面積} =\frac{28}{81}$$

$$T_{1,1}\text{面積}+T_{2,1}\text{面積}+\cdots\cdots+T_{3,9}\text{面積} =\frac{302}{729}$$

（三）直角三角形三內角$30°-60°-90°$

1. 正方形邊長

利用式（3）求出第一層到第三層的每個正方形邊長，計算結果整理於表 6。

表 6 斜邊容方邊長比$30° - 60° - 90°$

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1} = \frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$T_{2,1} = \frac{6}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,1} = \frac{6\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,4} = \frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,7} = \frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,2} = \frac{4\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,2} = \frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,5} = \frac{8\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,8} = \frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,3} = \frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,3} = \frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,6} = \frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,9} = \frac{24\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$

2. 正方形周長

由正方形邊長求得每個正方形周長，將同一層內正方形周長加總後，可得：

$$T_{1,1}\text{周長} = \frac{8\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

$$T_{2,1}\text{周長} + T_{2,2}\text{周長} + T_{2,3}\text{周長} = \frac{72+16\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$$

$$T_{3,1}\text{周長} + T_{3,2}\text{周長} + \cdots\cdots + T_{3,9}\text{周長} = \frac{288+248\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$$

3. 正方形面積

由正方形邊長求得每個正方形面積，將同一層內正方形面積加總後，其值整理於表 7。

表 7 斜邊容方邊長比$30° - 60° - 90°$

正方形	第一層	第二層	第三層		
面積	$T_{1,1} = \frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{2,1} = \frac{36}{(4+\sqrt{3})^4}$	$T_{3,1} = \frac{108}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,4} = \frac{144}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,7} = \frac{432}{(4+\sqrt{3})^6}$
		$T_{2,2} = \frac{48}{(4+\sqrt{3})^4}$	$T_{3,2} = \frac{144}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,5} = \frac{192}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,8} = \frac{576}{(4+\sqrt{3})^6}$
		$T_{2,3} = \frac{144}{(4+\sqrt{3})^4}$	$T_{3,3} = \frac{432}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,6} = \frac{576}{(4+\sqrt{3})^6}$	$T_{3,9} = \frac{1728}{(4+\sqrt{3})^6}$
所在之層正方形面積總和	$\frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\frac{228}{(4+\sqrt{3})^4}$	$\frac{4332}{(4+\sqrt{3})^6}$		

接著，再進一步將每一層內所有正方形面積總和累加起來，計算如下：

$$T_1\text{面積} = \frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$$

$$T_{1,1}\text{面積}+T_{2,1}\text{面積}+T_{2,2}\text{面積}+T_{2,3}\text{面積} = \frac{456+96\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^4}$$

（四）直角三角形邊長比 a：b：c

1. 正方形邊長

利用式（3）可求第一層到第三層每個正方形邊長，得出結果整理於表 8。

表 8 斜邊容方邊長比為a：b：c

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1} = \frac{abc}{ab+c^2}$	$T_{2,1} = \frac{a^2b^2c}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,1} = \frac{a^3b^3c}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,4} = \frac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,7} = \frac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,2} = \frac{a^2bc^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,2} = \frac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,5} = \frac{a^3bc^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,8} = \frac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,3} = \frac{ab^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,3} = \frac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,6} = \frac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,9} = \frac{ab^3c^3}{(ab+c^2)^3}$

由表 8，可以觀察得到：

(1)分母的底數都是 $\mathrm{ab}+c^2$，且分母指數部分為所在之第 n 層。

(2)不同大小的正方形邊長，其分子的 a、b、c 次方數字總和均為 7。

2. 正方形周長

由正方形邊長求出每個正方形周長，將同一層內正方形的周長加總起來，可得：

$$T_{1,1}\text{周長} = \frac{4abc}{ab+c^2}$$

$$T_{2,1}\text{周長}+T_{2,2}\text{周長}+T_{2,3}\text{周長} = \frac{4abc(ab+bc+ac)}{(ab+c^2)^2}$$

$$T_{3,1}\text{周長}+T_{3,2}\text{周長}+\cdots\cdots+T_{3,9}\text{周長} = \frac{4abc(ab+bc+ac)^2}{(ab+c^2)^3}$$

接著，將第一層到第 n 層內所有正方形周長進行加總，得出以下推導：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j} = \frac{4ab}{c-a-b}\left(1-\frac{(ab+ac+bc)^n}{(ab+c^2)^n}\right)$$

3. 正方形面積

由正方形邊長求出每個正方形面積，將同一層正方形的面積加總後，其值整理於表 9。

表 9 斜邊容方邊長比為a：b：c

正方形	第一層	第二層	第三層		
面積	$T_{1,1} = \frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{2,1} = \frac{a^4b^4c^2}{(ab+c^2)^4}$	$T_{3,1} = \frac{a^6b^6c^2}{(ab+c^2)^6}$	$T_{3,4} = \frac{a^6b^4c^4}{(ab+c^2)^6}$	$T_{3,7} = \frac{a^4b^6c^4}{(ab+c^2)^6}$
		$T_{2,2} = \frac{a^4b^2c^4}{(ab+c^2)^4}$	$T_{3,2} = \frac{a^6b^4c^4}{(ab+c^2)^6}$	$T_{3,5} = \frac{a^6b^2c^6}{(ab+c^2)^6}$	$T_{3,8} = \frac{a^4b^4c^6}{(ab+c^2)^6}$
		$T_{2,3} = \frac{a^2b^4c^4}{(ab+c^2)^4}$	$T_{3,3} = \frac{a^4b^6c^4}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,6} = \frac{a^4b^4c^6}{(ab+c^2)^6}$	$T_{3,9} = \frac{a^2b^6c^6}{(ab+c^2)^6}$
所在之層正方形面積總和	$\frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$\frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)}{(ab+c^2)^4}$	$\frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)^2}{(ab+c^2)^6}$		

從上述的推導，可以進一步求出在第 n 層內正方形面積總和為：

$$T_{n,1}\text{面積} + T_{n,2}\text{面積} + \cdots\cdots + T_{n,3^{n-1}}\text{面積} = \frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)^{n-1}}{(ab+c^2)^{2n}}$$

發現每一層內正方形面積總和是上一層正方形面積總和的 $\frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}$ 倍，也就是當加總同一層內正方形面積後，其值由大到小也是為等比數列。接著將第一層到第 n 層所有正方形面積進行加總：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j}\text{ 的面積} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{(a^2b^2+c^4)^n}{(ab+c^2)^{2n}}\right)$$

透過無窮等比級數公式的計算，此等比數列的首項為$\frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}$，公比為$\frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}$，將所有正方形面積累加至第 n 層(n → ∞)時，

$$\frac{\frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}}{1-\frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}} = \frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2-(a^2b^2+c^4)} = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2+2abc^2+c^4)-(a^2b^2+c^4)} = \frac{ab}{2}$$

得出結果為$\frac{ab}{2}$，加總所有正方形面積也是會與原三角形面積相等。

四、探討斜邊容方中，直角三角形之三邊長比，與其內接正方形邊長的關係討論。

（一）正方形邊長與直角三角形三邊長之倍數關係

從三、(四)之討論，當將各正方形邊長求出後，發現某些小正方形邊長和其上一層的大正方形邊長會呈現固定倍數關係。也就是當內接正方形將三角形分割出三個小三角形時，三角形中往遠離斜邊方向放置的小正方形，其邊長為原本正方形的$\frac{ab}{ab+c^2}$倍，往遠離短股方向的小正方形，其邊長為原本正方形的$\frac{bc}{ab+c^2}$倍，往遠離長股方向的小正方形，其邊長為原本正方形的$\frac{ac}{ab+c^2}$倍，其形說明如圖 13。

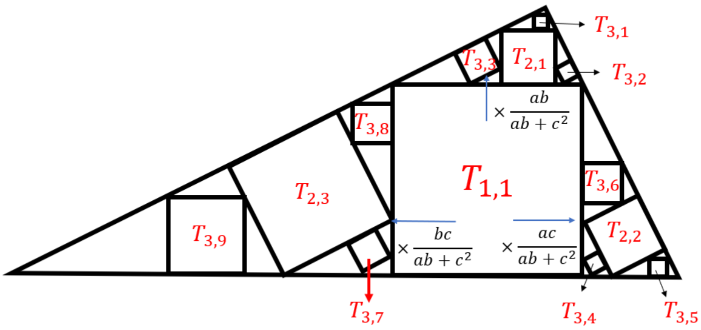


圖 13　斜邊容方邊長倍數關係

由上述研究過程中，得知直角三角形的內接正方形邊長，都和原直角三角形的三邊長有關聯性，此時兩者的代數關係為：

$$\frac{bc}{ab+c^2}(T_{n,n'}\text{邊長}) = T_{n+1,3n'}\text{邊長；}$$

$$\frac{ac}{ab+c^2}(T_{n,n'}\text{邊長}) = T_{n+1,3n'-1}\text{邊長；}$$

$$\frac{ab}{ab+c^2}(T_{n,n'}\text{邊長}) = T_{n+1,3n'-2}\text{邊長}$$

若將往遠離短股方向次數稱為 i、遠離長股方向次數稱為 j、遠離斜邊方向次數稱為 k，可得出，斜邊容方中的每個正方形邊長的關係式為：

$$\frac{(abc)^n}{(ab+c^2)^n a^i b^j c^k} = \frac{a^{n-i} b^{n-j} c^{n-k}}{(ab+c^2)^n}$$

並且與表 10 的每個正方形邊長進行驗證，皆可驗證此關係式成立。故往後我們就可藉由此關係式，來計算某一正方形邊長。

（二）勾股容方$S_{1,1}$邊長與斜邊容方$T_{1,1}$邊長之比較

由以上研究，我們已得知，勾股容方中$S_{1,1}$邊長為 $\frac{ab}{a+b}$，以及斜邊容方中$T_{1,1}$邊長為$\frac{abc}{ab+c^2}$。於是又不禁思考，那這兩個正方形邊長的大小關係呢？接著以下討論證明：

證明：$S_{1,1}$邊長 $-$ $T_{1,1}$邊長 $= ab\left\{\frac{ab+c^2-ac-bc}{(a+b)(ab+c^2)}\right\}$

因$c^2 = a^2 + b^2$ (直角三角形畢式定理)且$a + b > c$ (三角形任兩邊和大於第三邊)

$$\therefore ab + c^2 - ac - bc = a^2 + b^2 + ab - ac - bc$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + ab - ac - bc$$

$$= \frac{1}{2}(c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$$

$$= \frac{1}{2}(c^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - c)^2 > 0$$

故$S_{1,1}$邊長 $>$ $T_{1,1}$邊長，得證之。

肆、研究結果

一、勾股容方中，在不同直角三角形邊長比，其內部正方形關係的討論：

（一）邊長比 $1:1:\sqrt{2}$（內角為$45° - 45° - 90°$）

正方形	第一層 $S_{1,1}$	第二層 $S_{2,1}$=$S_{2,2}$	第三層 $S_{3,1}$=$S_{3,2}$=$S_{3,3}$=$S_{3,4}$
邊 長	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
所在之層正方形周長總和	2	2	2
所在之層正方形面積總和	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

（二）邊長比 $1:\sqrt{3}:2$（內角為$30°-60°-90°$）

正方形	第一層	第二層	第三層
邊 長	$S_{1,1}=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$S_{2,1}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}$	$S_{3,1}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^3}$
		$S_{2,2}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$S_{3,2}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^3}$
			$S_{3,3}=\frac{3}{(1+\sqrt{3})^3}$
			$S_{3,4}=\frac{3\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^3}$
所在之層正方形周長總和	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
所在之層正方形面積總和	$\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$\frac{12}{(1+\sqrt{3})^4}$	$\frac{48}{(1+\sqrt{3})^6}$
累加至第 n 層的面積總和	$\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$\frac{24+6\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^4}$	$\frac{132+72\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^6}$

（三）邊長比 a：b：c

正方形	第一層	第二層	第三層
邊長	$S_{1,1}$邊長 $=\frac{ab}{a+b}$	$S_{2,1}$邊長 $=\frac{a^2b}{(a+b)^2}$	$S_{3,1}$邊長 $=\frac{a^3b}{(a+b)^3}$
		$S_{2,2}$邊長 $=\frac{ab^2}{(a+b)^2}$	$S_{3,2}$邊長 $=\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,3}$邊長 $=\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,4}$邊長 $=\frac{ab^3}{(a+b)^3}$
所在之層正方形周長總和	$\frac{4ab}{a+b}$	$\frac{4ab}{a+b}$	$\frac{4ab}{a+b}$

所在之層 正方形 面積總和	$\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$	$\dfrac{a^2b^2c^2}{(a+b)^4}$	$\dfrac{a^2b^2c^4}{(a+b)^6}$
累加至第 n 層 的面積總和	$\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$	$\dfrac{2a^2b^2(c^2+ab)}{(a+b)^4}$	$\dfrac{4(c^2+ab)^2-c^2(a+b)^2}{(a+b)^6}$

二、在勾股容方中，邊長比對正方形的影響：

（一）每個內接正方形的邊長會依目前所在的位置，與上一層正方形邊長成倍數關係。

（二）透過每個所形成的小直角三角形彼此都相似性質，故當證明任意兩個直角三角形股長相等時，即可找到在勾股容方中的全等三角形。

（三）在計算每一層內正方形周長總和時，其值為一定值，與第一個正方形周長相等。

（四）當兩股長 a 與 b 的邊長比為黃金比例時，在第 n 層的正方形邊長會和第 n-1 層的正方形邊長相等。

三、斜邊容方中，在不同直角三角形邊長比，其內部正方形關係的討論：

（一）邊長比 $1:1:\sqrt{2}$（內角為$45°-45°-90°$）

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$T_{2,1}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$	$T_{3,1}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,4}=\dfrac{2}{27}$	$T_{3,7}=\dfrac{2}{27}$
		$T_{2,2}=\dfrac{2}{9}$	$T_{3,2}=\dfrac{2}{27}$	$T_{3,5}=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,8}=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$
		$T_{2,3}=\dfrac{2}{9}$	$T_{3,3}=\dfrac{2}{27}$	$T_{3,6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,9}=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$
所在之層 正方形 周長總和	$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$	$\dfrac{16+4\sqrt{2}}{9}$	$\dfrac{32+36\sqrt{2}}{27}$		
所在之層 正方形 面積總和	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{10}{81}$	$\dfrac{50}{729}$		

（二）邊長比 $1:\sqrt{3}:2$（內角為$30°-60°-90°$）

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$T_{2,1}=\frac{6}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,1}=\frac{6\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,4}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,7}=\frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,2}=\frac{4\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,2}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,5}=\frac{8\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,8}=\frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,3}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,3}=\frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,6}=\frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,9}=\frac{24\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$
所在之層 正方形 周長總和	$\frac{8\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$\frac{72+16\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\frac{288+248\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$		
所在之層 正方形 面積總和	$\frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\frac{228}{(4+\sqrt{3})^4}$	$\frac{4332}{(4+\sqrt{3})^6}$		

（三）邊長比 $a:b:c$

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\frac{abc}{ab+c^2}$	$T_{2,1}=\frac{a^2b^2c}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,1}=\frac{a^3b^3c}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,4}=\frac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,7}=\frac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,2}=\frac{a^2bc^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,2}=\frac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,5}=\frac{a^3bc^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,8}=\frac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,3}=\frac{ab^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,3}=\frac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,6}=\frac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,9}=\frac{ab^3c^3}{(ab+c^2)^3}$
所在之層 正方形 周長總和	$\frac{4abc}{ab+c^2}$	$\frac{4abc(ab+bc+ac)}{(ab+c^2)^2}$	$\frac{4abc(ab+bc+ac)^2}{(ab+c^2)^3}$		
所在之層 正方形 面積總和	$\frac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$\frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)}{(ab+c^2)^4}$	$\frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)^2}{(ab+c^2)^6}$		

四、在斜邊容方中，邊長比對正方形的影響：

（一）每個正方形的邊長會依目前所在的位置，與上一層正方形邊長成倍數關係。

（二）勾股容方中正方形$S_{1,1}$邊長會大於斜邊容方中正方形$T_{1,1}$邊長。

伍、討論

一、勾股容方與斜邊容方的**相同處**

（一）當$n \to \infty$，此時勾股容方與斜邊容方從第一層到第 n 層的所有面積總和會與原三角形面積相同，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}} S_{i,j}\text{ 的面積} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j}\text{ 的面積}$$

（二）加總兩者在不同層內的正方形面積總和，其值皆為等比數列。

（三）在延伸至第 n 層的各正方形邊長均和原三角形的長短股有關。

二、勾股容方與斜邊容方的**相異處**

（一）勾股容方與斜邊容方在第 n 層的周長總和不同，即勾股容方的周長總和均為定值，斜邊容方的周長總和成等比數列。

（二）在不同層的周長總和，前者相同，但後者不相同。

（三）只有勾股容方中會有黃金比例關係，斜邊容方無。

三、研究動機中 2005 年 JHMC 的數學競賽試題，驗證其解答為$\frac{144}{7}$

2005 年 JHMC 數學競賽試題，題目內容是：「如圖 1，$\angle A = 90°$，$\overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 3$，其中S_1，S_2，…，S_7均為正方形，試求這七個正方形周長的總和」。此試題是為求勾股容方中第一層到第三層內所有正方形的周長總和，其$a = 3$、$b = 4$，每一層正方形的周長和為$\frac{4ab}{a+b} = \frac{48}{7}$，則可求出所有七個正方形周長的總和為$\frac{48}{7} \times 3 = \frac{144}{7}$。

四、在任意三角形中，利用斜邊容方的方式，討論此時的正方形邊長，如圖 13。

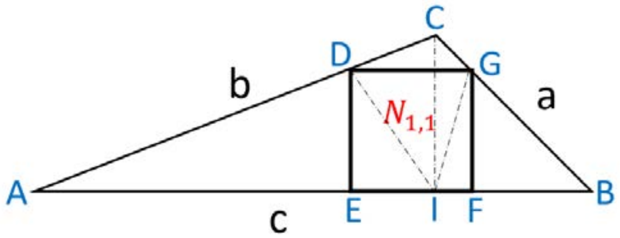


圖 13　任意三角形容方

假設$N_{1,1}$的邊長為 x，$\overline{AB}$邊上的高$\overline{CI} = h$

利用三角函數中的面積公式：△ABC 面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ch$，得$h = \frac{ab}{c}\sin C$

再依斜邊容方的計算方式：

$$\frac{\overline{AI} \times x}{2} + \frac{\overline{CI} \times x}{2} + \frac{\overline{BI} \times x}{2} = \frac{ab}{2}\sin C$$

$$\left(c + \frac{ab}{c}\sin C\right) \times x = ab\sin C$$

$$x = \frac{abc\sin C}{c^2 + ab\sin C}$$

若當$\angle C = 90°$時，$\sin C = 1$，正方形邊長為$x = \frac{abc}{c^2+ab}$，即為式（3）。

陸、研究結論

一、在勾股容方中，當邊長比不同時，此時每個正方形的邊長、周長與面積的關係。

（一）當邊長比為$1:1:\sqrt{2}$ 時，每一層正方形邊長皆為上一層的 $\frac{1}{2}$ 倍，每一層正方形周長總和皆為定值 2，每層的正方形面積和是上一層正方形面積和的 $\frac{1}{2}$ 倍。

（二）當邊長比為$1:\sqrt{3}:2$ 時，每一個正方形邊長由小到大放大$\sqrt{3}$倍，每一層正方形的周長總和皆為定值 $\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$，每層的正方形面積和是上一層正方形面積和的 $\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}$ 倍。

（三）當邊長比為$a:b:c$ 時，每個正方形邊長會與兩股的長度有不同的倍數關係，每層正方形的周長和皆為定值 $\frac{4ab}{a+b}$，每層的正方形面積和是上一層正方形面積和的 $\frac{c^2}{(a+b)^2}$ 倍。

二、在勾股容方中，其中的正方形邊長會和兩股邊長有關係。透過推導，可得其中的兩正方形邊長相等，每層正方形的周長總和均相同；每層正方形的面積和是成等比數列關係，在不同的三邊長比時，累加所有面積至第 n 層($n \to \infty$)時，其面積和都會等於原三角形面積。

三、在斜邊容方中，當邊長比不同時，此時每個正方形的邊長、周長與面積的關係。

（一）當邊長比為$1:1:\sqrt{2}$ 時，每一個正方形邊長由小至大放大$\sqrt{2}$倍，每一層的正方形面積和是上一層正方形面積和的 $\frac{5}{9}$ 倍。

（二）當邊長比為$1:\sqrt{3}:2$ 時，每一個正方形邊長放大$\sqrt{3}$倍，每一層的正方形面積和是上一層正方形面積和的 $\frac{19}{(4+\sqrt{3})^2}$ 倍。

（三）當邊長比為$a:b:c$ 時，每一個正方形邊長會與兩股及斜邊的長度有不同的倍數關係，每一層的正方形面積和是上一層正方形面積總的 $\frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}$ 倍。

四、在斜邊容方中，其中的正方形邊長會和兩股及斜邊有關係。透過推導，可得出勾股容方的正方形$S_{1,1}$邊長比斜邊容方的正方形$T_{1,1}$邊長大。每層正方形的面積和是成等比數列關係，在不同的三邊長比時，累加所有面積至第 n 層($n \to \infty$)時，其面積和都會等於原三角形面積。

柒、參考資料及其他

一、JHMC 2005 年競賽試題。

二、國中數學課本第三冊，新北市康軒文教公司。

三、高中數學課本第一冊，等比數列，龍騰文教。

【評語】030413

本作品考慮的是如下的問題：在給定的直角三角形內作一個內接正方形，此正方形會分切出一些小的直角三角形，對每個分切出的直角三角形作內接正方形，再考慮這些內接正方形所分切出的直角三角形，做它們的內接正方形…，重複這樣的步驟，我們會得出一序列的正方形。這一序列的正方形的邊長、周長總和、面積、面積和與原本直角三角形邊長間的關連性是什麼？有什麼特別的性質？作者們針對正方形有兩邊貼著兩股、一頂點落在斜邊上，以及一邊落在斜邊上、兩頂點落在兩股上的兩種情形作了討論，給出了完整的說明。這原本只是一個典型的等比數列問題。作者們發揮想像力，修改了部分條件，把問題變的有趣多了。想法頗具創意，值得鼓勵。整個說明的過程稍嫌繁瑣了些，有部分例子的分析其實是不必要的。問題最關鍵的一步應該是找出分切出的每個直角三角形和原始三角形邊長間的比例關係（分切出的每個直角三角形均與原本的直角三角形相似），一旦可以得出通則，原本的特例就會變成是可由通則導出的結果。如果可以把關鍵的部分交代清楚，將內容再進一步精簡，作品會更具可讀性也更好。

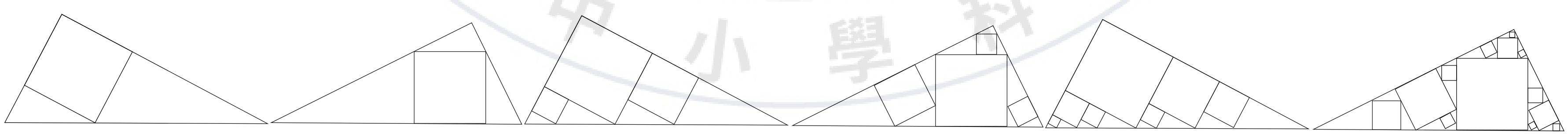
作品簡報

三角形能容多少方

科 別：數學科

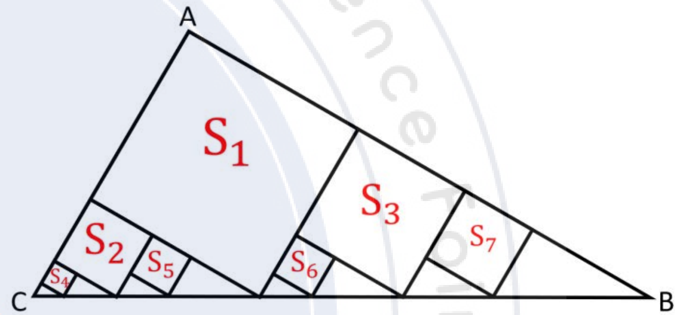
組 別：國中組

編 號：030413



一、研究動機

2005年JHMC的試題，題目內容是：「如圖，$\angle A = 90°$，$\overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 3$，其中S_1，S_2，…，S_7均為正方形，試求這七個正方形周長的總和。（答：$\frac{144}{7}$）

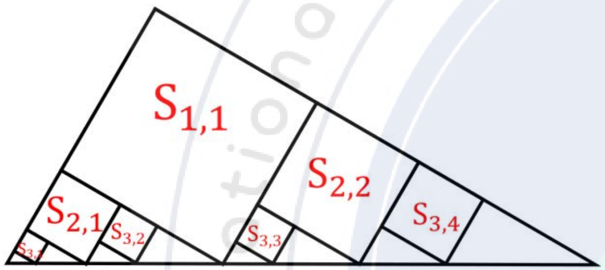


二、研究目的

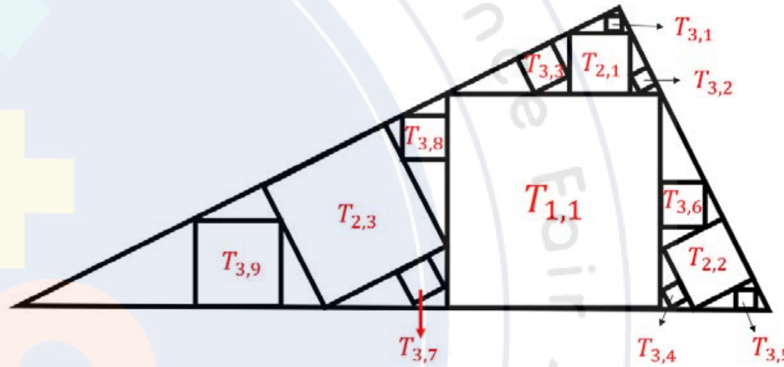
1. 探討在直角三角形中，當內接正方形相鄰兩邊長擺放在「勾股」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。
2. 探討勾股容方中，直角三角形之長短股比率，與其內接正方形邊長的關係討論。
3. 探討在直角三角形中，當內接正方形邊長擺放在「斜邊」上時，其正方形邊長、周長及面積的關聯性。
4. 探討斜邊容方中，直角三角形之三邊長比，與其內接正方形邊長的關係討論。

三、圖形定義

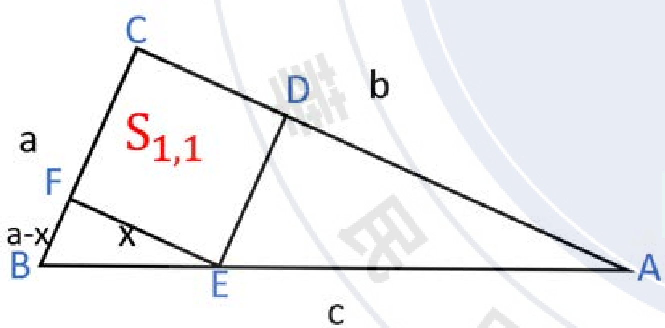
勾股容方（$S_{i,j}$）

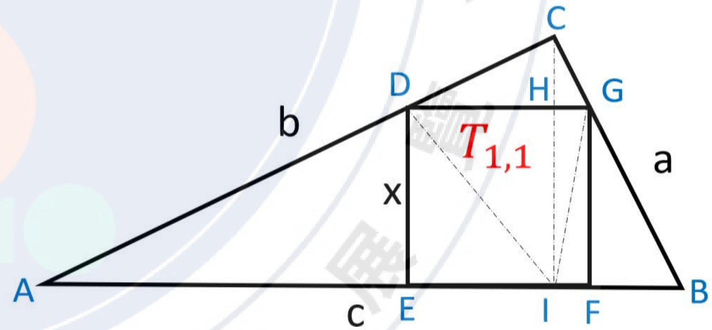


斜邊容方（$T_{i,j}$）



正方形邊長





∵△ BFE～△ BCA (AA相似性質)

故 $S_{1,1}$邊長 $= \dfrac{ab}{a+b}$ …… 式(1)

∵ △ ABC面積 =△ ADI +△ BGI + 四CDIG

故 $T_{1,1}$邊長 $= \dfrac{abc}{ab+c^2}$ …… 式(2)

一、勾股容方

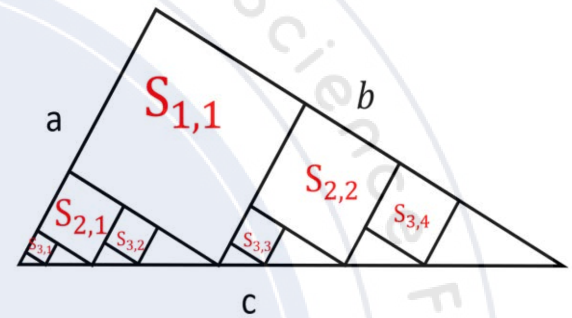
(一) $45° - 45° - 90°$

正方形	第一層 $S_{1,1}$	第二層 $S_{2,1}=S_{2,2}$	第三層 $S_{3,1}=S_{3,2}=S_{3,3}=S_{3,4}$	……	第 n 層 $S_{n,1}=\cdots=S_{n,2^{n-1}}$
邊長	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	……	$\frac{1}{2^n}$
所在之層正方形周長和	2	2	2	……	2
所在之層正方形面積和	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	……	$\frac{1}{2^{n+1}}$

(二) $30° - 60° - 90°$

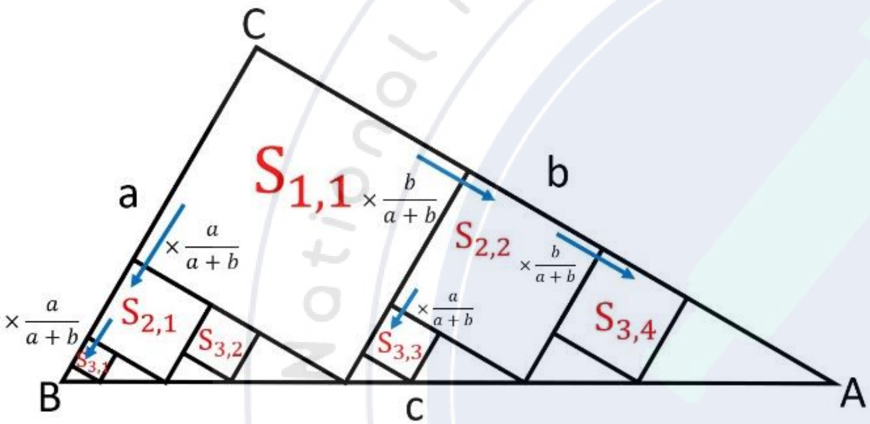
	第一層	第二層	第三層
所在之層正方形周長和	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
所在之層正方形面積和	$\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$\frac{12}{(1+\sqrt{3})^4}$	$\frac{48}{(1+\sqrt{3})^6}$
累加至第 n 層正方形的面積總和	$\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$	$\frac{24+6\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^4}$	$\frac{180+72\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^6}$

(三) 邊長比 a : b : c



	第一層	第二層	第三層
邊長	$S_{1,1}=\frac{ab}{a+b}$	$S_{2,1}=\frac{a^2b}{(a+b)^2}$	$S_{3,1}=\frac{a^3b}{(a+b)^3}$
		$S_{2,2}=\frac{ab^2}{(a+b)^2}$	$S_{3,2}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,3}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$
			$S_{3,4}=\frac{ab^3}{(a+b)^3}$
所在之層正方形周長和	$\frac{4ab}{a+b}$	$\frac{4ab}{a+b}$	$\frac{4ab}{a+b}$
所在之層正方形面積和	$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$	$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^4}$	$\frac{a^2b^2c^4}{(a+b)^6}$
累加至第 n 層正方形的面積總和	$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$	$\frac{2a^2b^2(c^2+ab)}{(a+b)^4}$	$\frac{a^2b^2(3c^4+6abc^2+4a^2b^2)}{(a+b)^6}$

(一) 兩股長與正方形邊長之關係

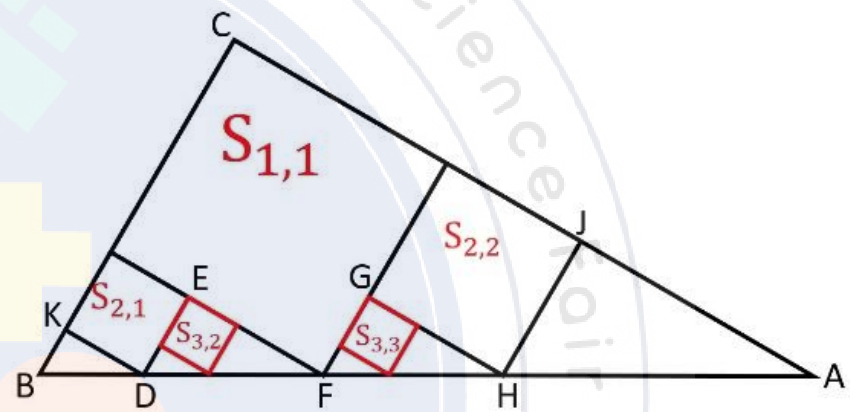


當正方形延伸出兩個直角三角形時，往短股方向的三角形中，其正方形邊長為上一層正方形邊長的$\frac{a}{a+b}$倍，反之，則為$\frac{b}{a+b}$倍

$$\frac{a}{a+b}(S_{i,j}\text{邊長}) = S_{i+1,2j-1}\text{邊長}$$

$$\frac{b}{a+b}(S_{i,j}\text{邊長}) = S_{i+1,2j}\text{邊長}$$

(二) 討論$S_{3,2}$邊長=$S_{3,3}$邊長

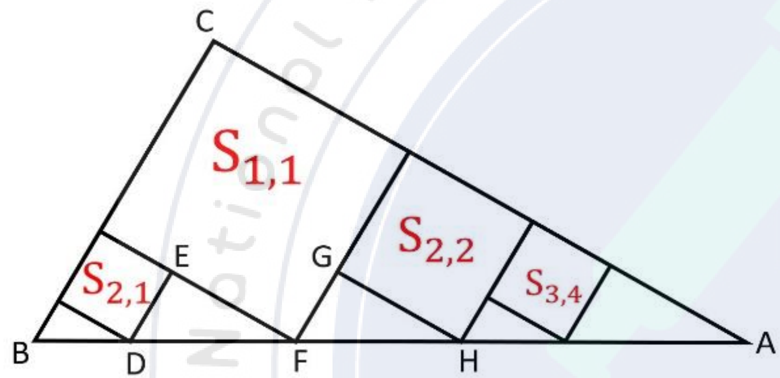


$\because S_{1,1}$邊長 $= S_{2,1}$邊長 $+ S_{2,2}$邊長

$\therefore$ **△ DEF ≅△ FGH** (ASA全等性質)

故 $S_{3,2}$邊長=$S_{3,3}$邊長

(三)每層的正方形周長和相等



$\because \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{GF} + \overline{GH} = S_{1,1}$邊長

且 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$

$\therefore S_{1,1}$邊長 $= S_{2,1}$邊長 $+ S_{2,2}$邊長

$= (S_{3,1}$邊長 $+ S_{3,2}$邊長$)$

$+ (S_{3,3}$邊長 $+ S_{3,4}$邊長$)$

故每一層的正方形**周長和皆相等**。

(四)討論$S_{2,1}$邊長$= S_{3,4}$邊長

$$S_{1,1}\text{邊長} \times \frac{a}{(a+b)} = S_{1,1}\text{邊長} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

$$a^2 + ab - b^2 = 0$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = b\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$a : b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

因此，當

兩股長a：b滿足**黃金比例**關係時，

其$S_{2,1}$邊長等於$S_{3,4}$邊長。

二、斜邊容方

(一) 45° − 45° − 90°

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$	$T_{2,1}=\frac{\sqrt{2}}{9}$	$T_{3,1}=\frac{\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,4}=\frac{2}{27}$	$T_{3,7}=\frac{2}{27}$
		$T_{2,2}=\frac{2}{9}$	$T_{3,2}=\frac{2}{27}$	$T_{3,5}=\frac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,8}=\frac{2\sqrt{2}}{27}$
		$T_{2,3}=\frac{2}{9}$	$T_{3,3}=\frac{2}{27}$	$T_{3,6}=\frac{2\sqrt{2}}{27}$	$T_{3,9}=\frac{2\sqrt{2}}{27}$
所在之層正方形周長和	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	$\frac{16+4\sqrt{2}}{9}$	$\times\frac{\mathbf{1+2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$ $\frac{32+36\sqrt{2}}{27}$		
所在之層正方形面積和	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{50}{729}$		

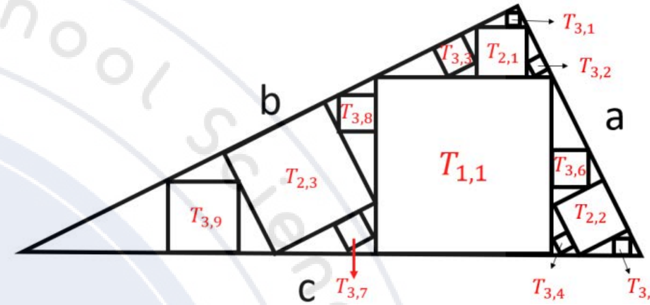
$\times\frac{5}{9}$ $\times\frac{5}{9}$

(二) 30° − 60° − 90°

正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$T_{2,1}=\frac{6}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,1}=\frac{6\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,4}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,7}=\frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,2}=\frac{4\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,2}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,5}=\frac{8\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,8}=\frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$
		$T_{2,3}=\frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$T_{3,3}=\frac{12\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,6}=\frac{24}{(4+\sqrt{3})^3}$	$T_{3,9}=\frac{24\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$
所在之層正方形周長和	$\frac{8\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$\frac{72+16\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\times\frac{\mathbf{2+3\sqrt{3}}}{\mathbf{4+\sqrt{3}}}$ $\frac{288+248\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})^3}$		
所在之層正方形面積和	$\frac{12}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\frac{228}{(4+\sqrt{3})^4}$	$\frac{4332}{(4+\sqrt{3})^6}$		

$$\times\frac{19}{(4+\sqrt{3})^2}$$

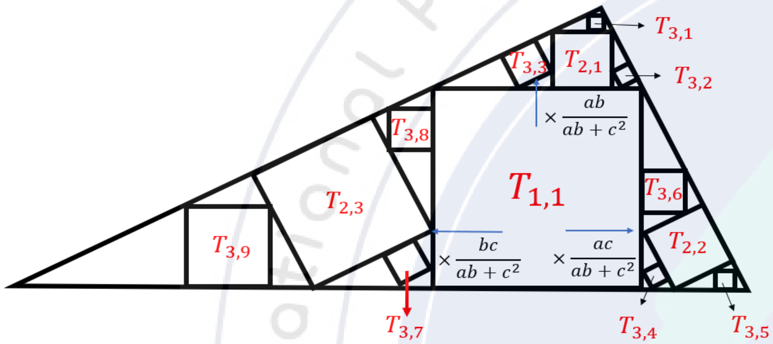
(三) 邊長比 a : b : c



正方形	第一層	第二層	第三層		
邊長	$T_{1,1}=\dfrac{abc}{ab+c^2}$	$T_{2,1}=\dfrac{a^2b^2c}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,1}=\dfrac{a^3b^3c}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,4}=\dfrac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,7}=\dfrac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,2}=\dfrac{a^2bc^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,2}=\dfrac{a^3b^2c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,5}=\dfrac{a^3bc^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,8}=\dfrac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$
		$T_{2,3}=\dfrac{ab^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$T_{3,3}=\dfrac{a^2b^3c^2}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,6}=\dfrac{a^2b^2c^3}{(ab+c^2)^3}$	$T_{3,9}=\dfrac{ab^3c^3}{(ab+c^2)^3}$
所在之層正方形周長和	$\dfrac{4abc}{ab+c^2}$	$\dfrac{4abc(ab+bc+ac)}{(ab+c^2)^2}$	$\times\ \dfrac{ab+bc+ac}{ab+c^2}$	$\dfrac{4abc(ab+bc+ac)^2}{(ab+c^2)^3}$	
所在之層正方形面積和	$\dfrac{a^2b^2c^2}{(ab+c^2)^2}$	$\dfrac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)}{(ab+c^2)^4}$		$\dfrac{a^2b^2c^2(a^2b^2+c^4)^2}{(ab+c^2)^6}$	

$$\times\ \frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}$$

(一) 三邊長與正方形邊長之關係



$$\frac{bc}{ab+c^2}(T_{i,j}\text{邊長}) = T_{i+1,3j}\text{邊長}$$

$$\frac{ac}{ab+c^2}(T_{i,j}\text{邊長}) = T_{i+1,3j-1}\text{邊長}$$

$$\frac{ab}{ab+c^2}(T_{i,j}\text{邊長}) = T_{i+1,3j-2}\text{邊長}$$

(二)討論$S_{1,1}$邊長> $T_{1,1}$邊長

$$S_{1,1}\text{邊長} - T_{1,1}\text{邊長} = ab\left\{\frac{ab+c^2-ac-bc}{(a+b)(ab+c^2)}\right\}$$

證明：$S_{1,1}$邊長 $>$ $T_{1,1}$邊長，

等價於證明 $\boldsymbol{ab+c^2-ac-bc>0}$。

$\because$ 畢氏定理及三角形三邊長關係得證

$$\begin{aligned} & c^2+ab-ac-bc \\ &= a^2+b^2+ab-ac-bc \\ &= \frac{1}{2}(a+b-c)^2 > 0 \end{aligned}$$

故$S_{1,1}$邊長 $>$ $T_{1,1}$邊長。

一.勾股容方與斜邊容方的**相同處**

1.當$n \to \infty$時，兩者累加到第n層的面積總和會與原直角三角形**面積相等**，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}} S_{i,j}\text{面積} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j}\text{面積}$$

2.兩者在不同層的面積和，皆成等比數列。

3.兩者在延伸至第n層的各正方形邊長均和原直角三角形的長短股有關。

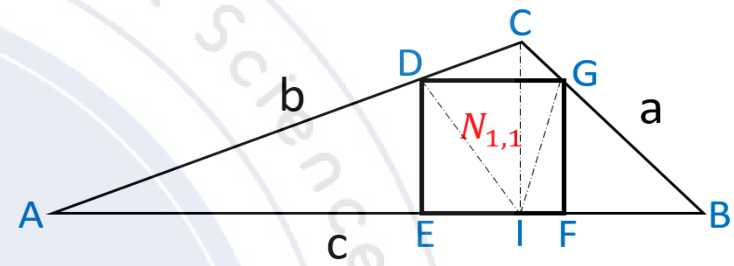
二.勾股容方與斜邊容方的**相異處**

1.在比較不同層的周長和，前者為**定值**，但後者為**等比數列**。

2.累加到第n層的周長總和，前者為定值×層數，後者成等比級數。

3.只有前者兩股長可有**黃金比例**關係，但後者無。

三. 任意三角形的正方形邊長



假設$N_{1,1}$的邊長為x，$\overline{AB}$邊上的高為$\overline{CI}$

$$\triangle ABC\text{面積} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}c \times \overline{CI}，$$

$$\overline{CI} = \frac{ab}{c}\sin C$$

$$\frac{\overline{AI}\times x}{2} + \frac{\overline{CI}\times x}{2} + \frac{\overline{BI}\times x}{2} = \frac{ab}{2}\sin C$$

$$\left(c + \frac{ab}{c}\sin C\right)\times x = ab\sin C$$

$$N_{1,1}\text{邊長} = x = \frac{abc\sin C}{c^2 + ab\sin C}$$

	勾股容方		
邊長比	$1:1:\sqrt{2}$	$1:\sqrt{3}:2$	a: b: c
周長和 定值	2	$\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{4ab}{a+b}$
面積和 公比	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}$	$\left(\frac{c}{a+b}\right)^2$

	斜邊容方		
邊長比	$1:1:\sqrt{2}$	$1:\sqrt{3}:2$	a: b: c
周長和 公比	$\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2+3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$	$\frac{ab+bc+ac}{ab+c^2}$
面積和 公比	$\frac{5}{9}$	$\frac{19}{(4+\sqrt{3})^2}$	$\frac{a^2b^2+c^4}{(ab+c^2)^2}$

- 第一層到第n層的面積總和 作品說明書p.9

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}} S_{i,j}\text{面積} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{(a^2+b^2)^n}{(a+b)^{2n}}\right)$$

- 第一層到第n層的周長總和 作品說明書p.17

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j}\text{周長} = \frac{4ab}{c-a-b}\left(1-\frac{(ab+ac+bc)^n}{(ab+c^2)^n}\right)$$

- 第一層到第n層的面積總和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3^{n-1}} T_{i,j}\text{面積} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{(a^2b^2+c^4)^n}{(ab+c^2)^{2n}}\right)$$

勾股容方

1. 正方形邊長可由三角形兩股長得出 $S_{1,1} = \frac{ab}{a+b}$。
2. 從第三層後，每層可證明兩直角三角形全等，由此得出特定的正方形邊長相等。
3. 同方向延伸的相鄰正方形邊長會有倍數關係。
4. 當兩股長呈黃金比例關係，則第i層第$2j-1$個正方形邊長會與第$i+1$層第$4j$個正方形邊長相等。

斜邊容方

1. 正方形邊長可由三角形三邊長得出 $T_{1,1} = \frac{abc}{ab+c^2}$。
2. 從第三層後，每層可證明兩直角三角形全等，由此得出特定的正方形邊長相等。
3. 遠離特定方向延伸下去的正方形邊長會有倍數關係。
4. 在同一直角三角形中，勾股容方邊長大於斜邊容方邊長。

參考資料 JHMC數學競賽試題(2005)