中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030411

X-mirrOr~三角形全等點位置與性質討論

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 張宸閎	魏子超
國二 趙子涵	蘇錦霞
國二 陳亭涵	

關鍵詞：全等、軌跡、共圓

摘要

本作品主要研究點對三角形各邊鏡射，再將鏡射點連接形成鏡射圖形，並探討鏡射圖形和點的變化。發現有些點有不變性，並且可以將原本向外發散的鏡射圖形收斂使其互相重疊並全等，我們稱其為全等點。我們從正三角形開始研究，發現正三角形有六個全等點，因對稱性將其分為兩組。接著延伸至等腰三角形，觀察固定底為 2，改變高之等腰三角形全等點軌跡，發現許多特殊現象，接著再將其轉為函數圖形進行討論，進一步利用代數式結合鏡射性質，計算出全等點的座標，並證明觀察時發現的現象以及發生的時機。另外，我們觀察並證明各個鏡射圖形的頂點和全等點會形成五大類共圓之現象，我們也嘗試進行正多邊形全等點之觀察，希望有機會推廣到一般化。

壹、研究動機

我們在研讀第 61 屆全國科展國中組數學科：由繁化簡～鏡射多邊形退化之探討這篇文章時，從這篇文章的未來展望發現一個待探討的問題「全等點」，並從此問題著手。全等點和其鏡射圖形之間的關係是個未知，因特殊原因其鏡射圖形會分組全等並重疊，任意三角形基本上皆會有六個不同的全等點。深入探討後，發現各個三角形對應的全等點形成的軌跡有不同的規則，因此我們想觀察全等點的出現位置並加以討論。

貳、研究目的

一、正三角形全等點位置之探討

二、等腰三角形全等點位置及全等點軌跡之探討

三、三角形偏移時相對應全等點軌跡之探討

四、全等點與其鏡射三角形所形成的共圓情形之探討

名詞釋疑：

(一)鏡射三角形：如圖 1-1，

已知△ ABC及任意點 P，P 點分別對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$作鏡射得三點 A_1、B_1、 C_1，這三點連成的三角形△ $A_1B_1C_1$即為△ABC的第一層鏡射三角形，若 P 點再對 △ $A_1B_1C_1$三邊作鏡射，所得的鏡射三角形△ $A_2B_2C_2$即為△ABC的第二層鏡射三角形，以此類推，且原△ ABC定義為第 0 層。

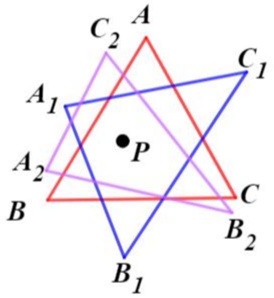


圖 1-1

(二){3k}：如圖 1-2

P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三整除的層數皆屬於{3k}這組，例：第 0 , 3 , 6 層

(三){3k+1}：如圖 1-2

P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三餘一的層數皆屬於{3k+1}這組，例：第 1 , 4 , 7 層

(四){3k+2}：如圖 1-2

P 點對原三角形作鏡射三角形，重複疊作後的三角形之疊作層數，除以三餘二的層數皆屬於{3k+2}這組，例：第 2 , 5 , 8 層

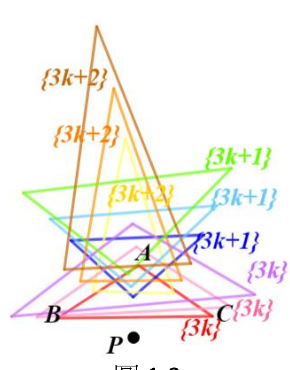


圖 1-2

(五)全等點：如圖 1-3

當 P 點於特定位置使{3k}層重疊、{3k+1}層重疊、{3k+2}層重疊時，則 P 點稱為全等點，以符號 X 表示

※註記：不同的三角形有不同的全等點。

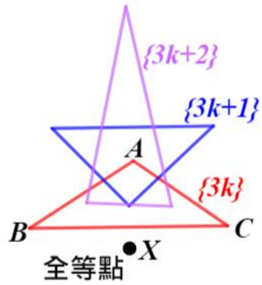


圖 1-3

參、研究設備及器材

Geogebra、紙、筆、方程式計算機

肆、文獻引用

第 61 屆 全國科展國中組數學科 [由繁化簡～鏡射多邊形退化之探討]

p.2 名詞定義

伍、研究過程與方法

一、正三角形全等點位置之觀察與探討：

在觀察正三角形時，移動 P 點位置發現在六個特定位置會有符合全等點性質的現象，因此利用幾何性質證明我們的猜想，並將六個全等點分為兩大類。以下接著說明研究方法

(一) 正三角形頂對全等點之探討

1. 作圖法 1：

如圖 2-1，△ABC 中，$\overline{BC}$為底邊。以 A 為圓心，$\overline{AB}$長為半徑畫圓，可得此圓和$\overline{BC}$之中垂線的其中一交點 X_{A1}。同理可得 X_{B1}、X_{C1}。發現當 P 點位於 X_{A1}、X_{B1}、X_{C1}時，會符合全等點性質，因此猜測這三個點是正三角形全等點位置。

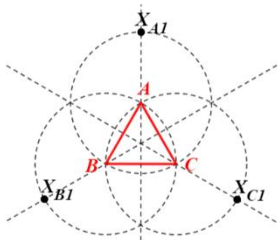


圖 2-1 全等點作圖

2. 猜想之證明：

經過上述猜想，我們試著證明上述作圖形成的點為全等點

已知：如圖 2-2，△ABC 為正三角形，以 A 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫圓交$\overline{BC}$中垂線於P_1點及P_2點。

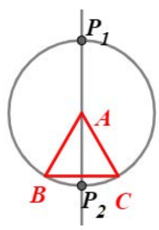


圖 2-2 已知條件

求證：P_1點為△ABC 的全等點

證明脈絡：如圖 2-3，欲證明P_1點符合全等點

=>則須證明 {3k+3}重疊於{3k}，以下分為兩種情況討論

1. 證明 A_3重疊於 A

=>則須證明P_1對$\overline{A_2B_2}$鏡射的鏡射點 A_3 重疊於 A

=>則須證明$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_1}$且$A_2$、$B_2$、$A_1$、$C_1$四點共線

2. 證明 C_3重疊 C (同理 B_3重疊 B)

=>則須證明P_1對$\overline{A_2C_2}$鏡射的鏡射點 C_3 重疊於 C

=>則須證明$\angle P_1AA_2 = \angle CAA_2$

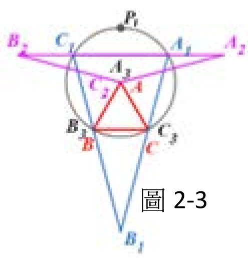


圖 2-3

證明：

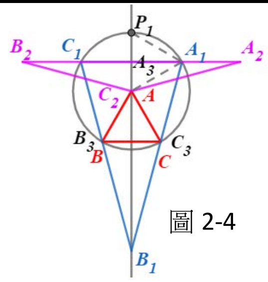
<table>
<tr><th>步驟</th><th>內容</th><th>圖示</th></tr>
<tr><td>步驟 1：
先證明
$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP}$</td><td>令$\overleftrightarrow{AC}$與圓交於 D 點，底邊$\overline{BC}$的中垂線與圓交於$P_2$點
∵$\angle P_1\mathrm{AD}=\angle P_2\mathrm{AC}=30°=\frac{1}{2}P_1\mathrm{AC}_1$ 且$\overline{AP_1}=\overline{AC_1}$
∴$\triangle P_1\mathrm{AC}_1$為正三角形
∵$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\angle \mathrm{AC}_1P_1$，且為$\overline{AP_1}$的中垂線
∴$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_1}$</td><td>

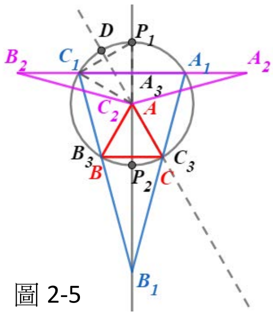
圖 2-4</td></tr>
<tr><td>步驟 2：
再證明
A_2、B_2、A_1、C_1
四點共線
則可得A_3=A</td><td>∵$\angle P_1\mathrm{AC}_1+\angle P_1\mathrm{A}P_2+\angle \mathrm{C_1AB}$
$=60°+30°+\angle \mathrm{C_1AB}=180°$
$\angle \mathrm{C_1AB}=90°$ 且$\overline{AB}=\overline{AC_1}$
∴$\triangle \mathrm{ABC_1}$為等腰直角三角形
$\angle \mathrm{AC_1B}=45°$
∵$\angle P_1\mathrm{C_1B}=\angle \mathrm{B_2C_1B}=\angle P_1\mathrm{C_1A}+\angle \mathrm{AC_1B}$
$=105°$
$\angle \mathrm{A_1C_1B}=\angle \mathrm{A_1C_1A}+\angle \mathrm{AC_1B}=75°$
∴$\angle \mathrm{A_2C_1B_2}=\angle \mathrm{A_1C_1B}+\angle \mathrm{B_2C_1B}=180°$
故A_2、B_2、C_1三點共線
同理可證A_1、A_2、B_2三點共線
所以A_2、B_2、A_1、C_1四點共線
⇒P_1點對$\triangle A_2B_2C_2$作鏡射圖形得頂點 A_3 重疊於點 A</td><td>

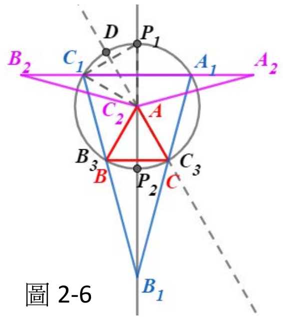
圖 2-5</td></tr>
<tr><td>步驟 3：
接著證明
$\angle P_1\mathrm{AA_2}=\angle \mathrm{CAA_2}$
則可得C_3= C
同理可得 B_3= B</td><td>∵$\overline{A_1P_1}=\overline{A_1A_2}$ (鏡射)，$\angle P_1\mathrm{AC}=150°$
且$\angle \mathrm{A_2A_1A}=180°-\angle \mathrm{C_1A_1A}=150°$
∴$\triangle \mathrm{A_2A_1A}$ 為等腰三角形，$\angle \mathrm{A_1AA_2}=15°$
$\angle P_1\mathrm{AA_2}=\angle \mathrm{CAA_2}=75°$
又由步驟 1：$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_1}$，則$C_2=A$
故P_1對$\overline{A_2C_2}$鏡射的鏡射點 C_3 重疊於 C
則可得C_3= C ，同理可得 B_3= B
⇒P_1點對$\triangle A_2B_2C_2$各邊鏡射的鏡射圖形
$\triangle A_3B_3C_3$與$\triangle$ABC 重疊
⇒P_1點為正三角形的全等點</td><td>

圖 2-6</td></tr>
</table>

3. 定義：頂對全等點

通過以上討論，我們可以找出 X_{A1}、X_{B1}、X_{C1} 三個全等點，我們稱這三個全等點為正三角形之頂對全等點。(圖 2-7)

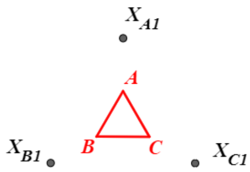


圖 2-7 頂對全等點

(二) 正三角形邊對全等點之探討

1. 作圖法 2：

我們仿照頂對全等點的觀察方法。

如圖 2-8，△ABC 中，$\overline{BC}$為底邊。以 A 為圓心，$\overline{AB}$長為半徑畫圓，此圓和$\overline{BC}$之中垂線的其中一交點 X_{A2}。同理可得 X_{B2}、X_{C2}。發現當 P 點位於 X_{A2}、X_{B2}、X_{C2}時，會符合全等點性質，因此猜測這三個點是正三角形全等點位置。

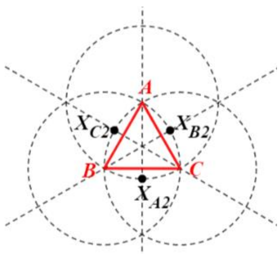


圖 2-8 全等點作圖

2. 猜想之證明：

已知：如圖 2-9，△ABC 為邊長為 2 的正三角形，以 A 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫圓交$\overline{BC}$中垂線於P_1點及P_2點。

求證：P_2點為△ABC 的全等點

證明脈絡：如圖 2-10，欲證明P_2點符合全等點

=>則須證明 {3k+3}重疊於{3k}，以下分為兩種情況討論：

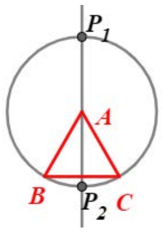


圖 2-9 已知條件

1. 證明 A_3 重疊於 A

=>則須證明P_2對$\overline{A_2B_2}$鏡射的鏡射點 A_3 重疊於 A

=>則須證明 (1)$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_2}$

(2)A_1、B_1、C 三點共線

(3)A_2、B_2、A_1、C_1四點共線

2. 證明 C_3重疊 C (同理 B_3重疊 B)

=>則須證明P_2對$\overline{A_2C_2}$鏡射的鏡射點 C_3 重疊於 C

=>則須證明$\angle FB_2C_1=\angle AB_2A_2$

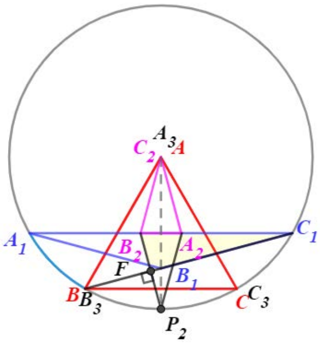
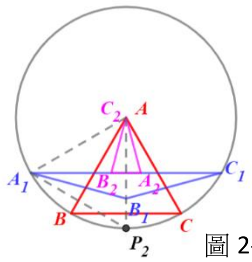
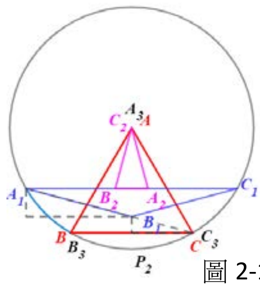
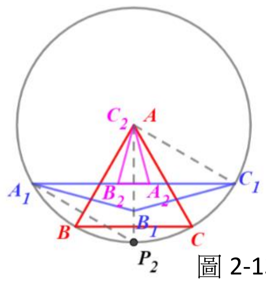
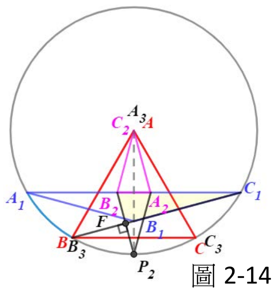
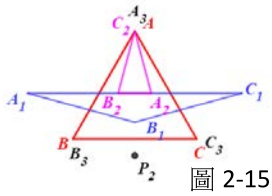


圖 2-10

證明：

步驟	內容	圖式
步驟 1： 先證明 $\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_2}$	∵ $2\angle P_2AB=\angle P_2AA_1=60°$,$\overline{AP_2}=\overline{AA_1}$ =圓半徑 ∴$\triangle AA_1P_2$為正三角形 ∵$\angle P_2A_1C_1=\frac{1}{2}\angle P_2AC_1=30°$(圓周角) $\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\angle AA_1P_2$所以是$\overline{AP_2}$的中垂線 ∴$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_2}$	 圖 2-11
步驟 2： 證明 A_1、B_1、C 共線	令$\overline{B_1C}$的斜率為 m_1 ,$\overline{A_1B_1}$的斜率為 m_2 A(0,0)、B(-1,$-\sqrt{3}$)、C(1,$-\sqrt{3}$) ∵$\overline{AB}=\overline{AP_2}=\mathbf{2}$ ∴$\frac{1}{2}\overline{B_1P_2}=\sqrt{3}-2$,$m_1=\frac{\sqrt{3}-2}{1}=\sqrt{3}-2$ 同理可得 $m_2=\frac{1-2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2^2-1^2}}=\sqrt{3}-2$ ∴A_1、B_1、C 共線(斜率相等、共點)	 圖 2-12
步驟 3： 證明 A_2、B_2、A_1、C_1 四點共線	∵$\angle P_2AC=\angle CAC_1=30°$(鏡射) ∴$\angle P_2A_1C=\angle CA_1C_1=\angle\frac{1}{2}CAC_1=15°$(圓周角) 點$P_2$對$\overline{A_1B_1}$做鏡射點 A_2必在$\overline{A_1C_1}$上 同理可得：B_2必在$\overline{A_1C_1}$上 所以A_2、B_2、A_1、C_1四點共線	 圖 2-13
步驟 4： 證明 A_3 =A	∵$\overline{A_2B_2}$重疊於$\overline{A_1C_1}$,且$\overleftrightarrow{A_1C_1}$平分$\overline{AP_2}$ $\overline{A_2B_2}$重疊於$\overline{A_1C_1}$ ∴點P_2對$\triangle A_2B_2C_2$ 鏡射的鏡射圖形頂點 A_3 重疊於點 A	

步驟 5： 證明 $C_3 = C$ ，$B_3 = B$	已知$\overleftrightarrow{B_1C_1} \perp \overline{B_2P_2}$,交於 F 點 且$\angle A_1C_1B = \angle B_2C_1F = 15°$ $\because \triangle AA_2B_2 \cong \triangle P_2A_2B_2$ $\angle B_2C_1F + \angle B_2FC_1 + \angle FB_2C_1 = 180°$ $\angle FB_2C_1 = \angle AB_2A_2 = 75°$ $\therefore \angle P_2AA_2 = 15°$ 則點P_2對$\triangle A_2B_2C_2$鏡射的鏡射圖形頂點 B_3 重疊於點 B；同理 C_3 重疊於 C	 圖 2-14
步驟 6： 證明 $\triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_3$	由步驟 4、5 可知，P_2點對$\triangle A_2B_2C_2$ 做下一層鏡射圖形時，圖形會重疊於 $\triangle ABC$ $\Rightarrow P_2$點為正三角形的全等點	 圖 2-15

3.定義：邊對全等點

通過以上討論，我們可以找出 X_{A2}、X_{B2}、X_{C2} 三個全等點，並且我們稱這三個全等點為正三角形之邊對全等點。(圖 2-16)

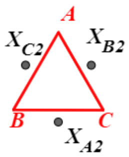


圖 2-16 邊對全等點

(三)結論

透過作圖法 1 及作圖法 2，我們可找出正三角形的六個全等點，並且依其特性分為(圖 2-17)：

頂對全等點 X_{A1}、X_{B1}、X_{C1}，邊對全等點 X_{A2}、X_{B2}、X_{C2}，且作圖法正確無誤。

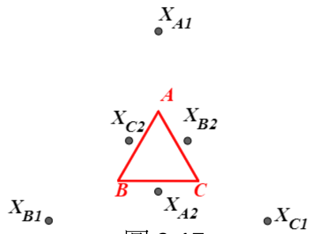
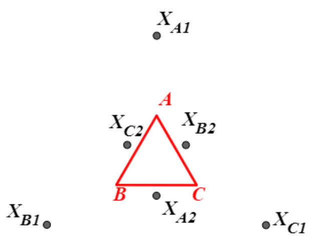


圖 2-17

推論：

我們猜測一般三角形也都有類似正三角形的六個全等點，於是在接下來討論中我們將全等點分為六類。

全等點分類：(圖 2-18)

圖形	對應角	對應邊	全等點名稱	全等點位置	圖 2-18 全等點位置圖
$\triangle ABC$	$\angle A$		**一類全等點**	X_{A1}	
		$\overline{BC}$	**二類全等點**	X_{A2}	
	$\angle B$		**三類全等點**	X_{B1}	
		$\overline{AC}$	**四類全等點**	X_{B2}	
	$\angle C$		**五類全等點**	X_{C1}	
		$\overline{AB}$	**六類全等點**	X_{C2}	

探討完正三角形全等點之位置後，接著研究等腰三角形的全等點位置。

二、等腰三角形高度變化與對應全等點位置變化之關係

為了瞭解等腰三角形之全等點性質，我們觀察固定底、改變高之全等點位置變化，為了討論的一致性，我們固定底邊長為 2，高以每次增加 0.1 單位進行觀察。

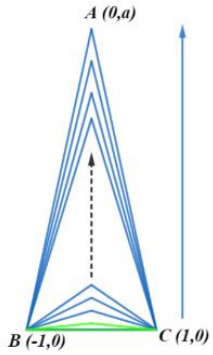


圖 3-1

如圖 3-1，原圖形等腰△ABC，底邊$\overline{BC}$為 2，高固定在 y 軸上移動，令 B(-1,0)、C(1,0)，A 點從(0,0.1)開始，每次增加 0.1 單位，形成數個底相同高不相同的三角形，將每個三角形所對應的全等點畫成軌跡。接著，我們發現函數圖形可以更清楚的呈現軌跡的變化，於是利用函數圖形畫出全等點的軌跡加以討論。

(一) 一、二類全等點軌跡變化之觀察：

首先我們針對 X_{A1}、X_{A2} 進行探討。按照上述觀察方法，先觀察固定底、改變高之全等點位置變化，再利用函數圖形進行討論

1. 一類全等點軌跡變化之觀察

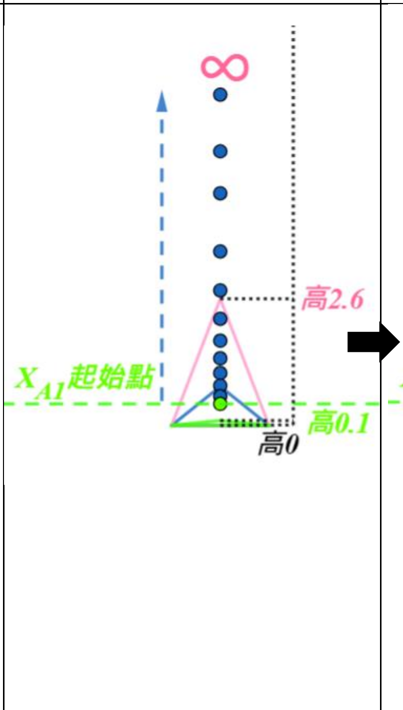
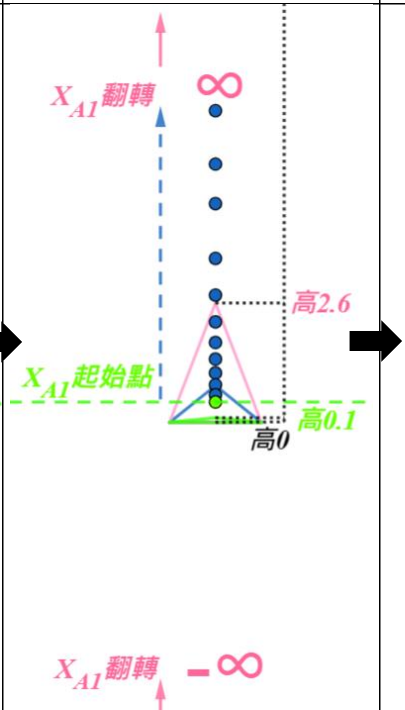
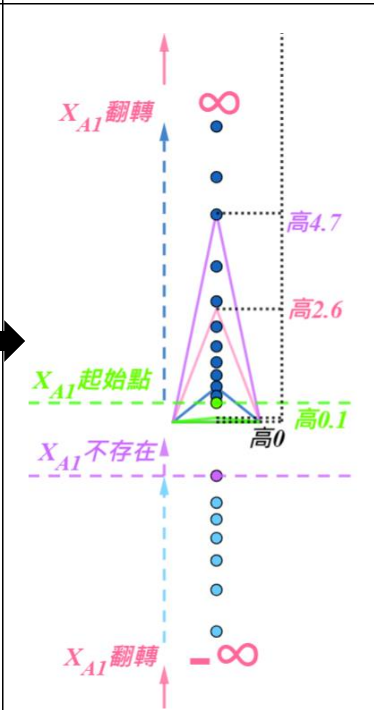
首先是 X_{A1}，我們發現全等點軌跡會有以下現象：

(1)如圖 3-2，當 A 座標從(0 , 0.1)開始向上移動，全等點軌跡會往上；當全等點軌跡上升到無限遠時，此時 A 點座標為(0 , 2.6)

(2)如圖 3-3，A 點繼續往上，全等點軌跡從三角形異側跑到三角形同側，稱為翻轉

(3)如圖 3-4，接著全等點軌跡從無限遠，隨著 A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡向上移動

(4)如圖 3-4，最後當 A 點座標為(0 , 4.7)時，全等點消失(不存在)

圖例	圖 3-2	圖 3-3	圖 3-4
全等點位置圖形變化			
三角形高之變化	0.1~2.6	2.6	0.1~4.7

名詞釋疑

1. **三角形異側、三角形同側：**在△ABC 中，令$\overline{BC}$為底邊，$\overline{BC}$之對應頂點為 A，過頂點 A 作一平行線平行底邊$\overline{BC}$，以平行線為基準，和三角形不同側區域稱為三角形異側，和三角形同側區域稱為三角形同側(圖 3-5)
2. **全等點翻轉：**當三角形全等點軌跡由三角形異側轉到三角形同側或由同側轉到異側時，此現象稱為全等點翻轉

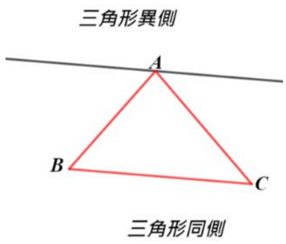


圖 3-5 三角形異側、同側

函數圖形觀察

觀察後，為了能更清楚觀察一類全等點軌跡的變化，我們將軌跡轉換成**函數圖形**，令 x 座標為三角形高，即 A 點之 y 座標，y 座標為一類全等點的 y 座標，如圖 3-6 所示，接著我們將 x 軸比例增大，如圖 3-7，因為這可以讓軌跡更清楚。我們將函數圖形對應到上述觀察整理如表 1-1：

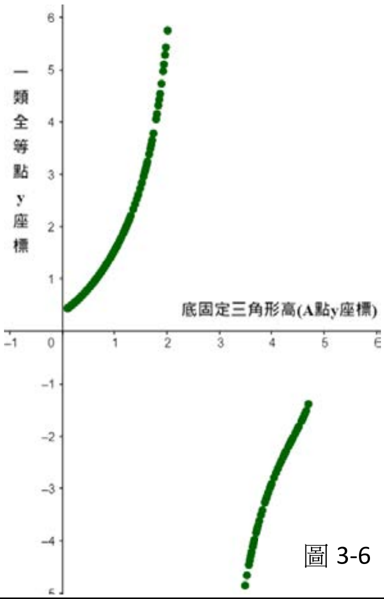


圖 3-6

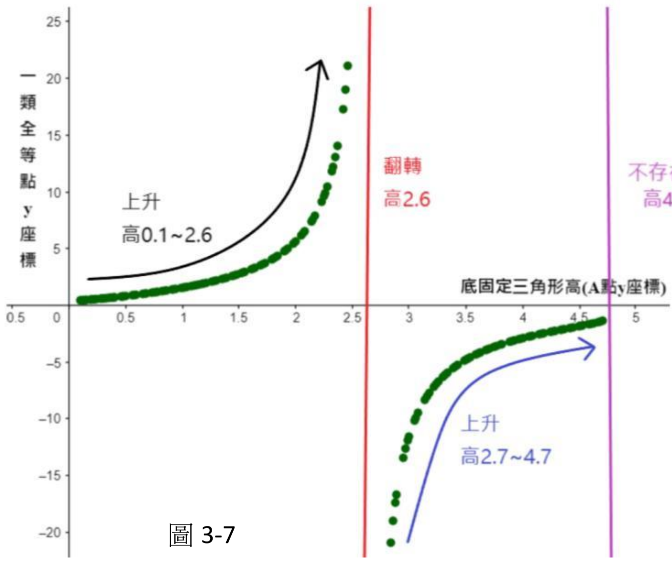


圖 3-7

表 1-1 函數圖形之一類全等點軌跡變化				
高	位置	現象	圖標	備註
0.1~2.6	三角形同側	上升	黑色箭頭	全等點軌跡隨著高增加而往上移動，逐漸遠離三角形
2.6 (奇異點)	無限遠	翻轉	紅色漸進線	全等點軌跡從正無窮遠處翻轉到負無窮遠處
2.7~4.7	三角形異側	上升	藍色箭頭	全等點軌跡逐漸向上接近三角形
4.7	不存在		紫色	全等點不存在

2.二類全等點軌跡變化之觀察：

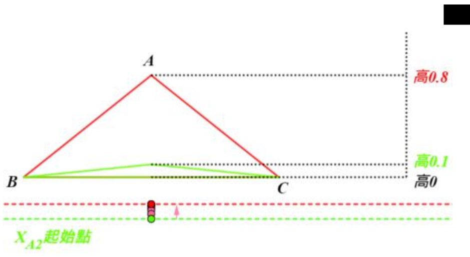
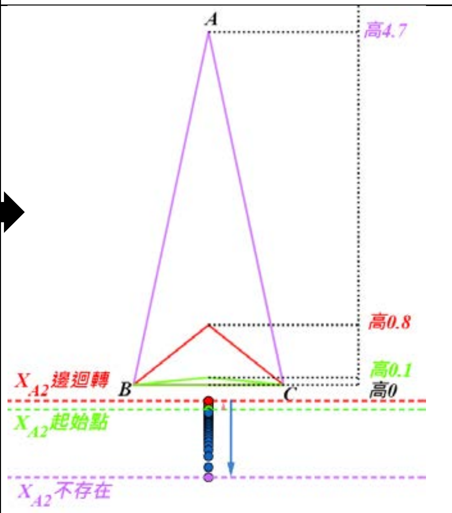
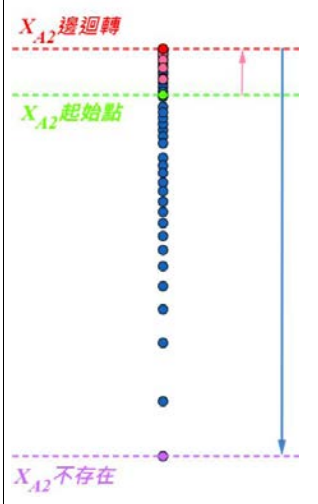
接著是 X_{A2}，我們發現全等點軌跡會有以下現象：

(1)如圖 3-8，當 A 座標從(0 , 0.1)開始向上移動，全等點軌跡會往上，靠近三角形

(2)如圖 3-9、3-10，當 A 座標上升到(0 , 0.8)時，全等點發生邊迴轉

(3)如圖 3-9，A 點座標繼續增加，全等點軌跡往下移動

(4)如圖 3-9，當 A 點座標增加到(0 , 4.7)時，全等點軌跡消失(不存在)

圖例	圖 3-8	圖 3-9	圖 3-10
全等點位置圖形變化			
三角形高之變化	0.1~0.7	0.8~4.7	0.1~4.7

名詞釋疑：

邊迴轉：二四六類全等點軌跡與三角形底邊距離由長變短再變長的現象稱為邊迴轉

函數圖形觀察

觀察後，為了能更清楚觀察二類全等點軌跡的變化，我們將軌跡轉換成**函數圖形**，如圖 3-11，令 x 座標為三角形高(A 點之 y 座標)，y 座標為二類全等點的 y 座標，將函數圖形對應到上述觀察如表 1-2：

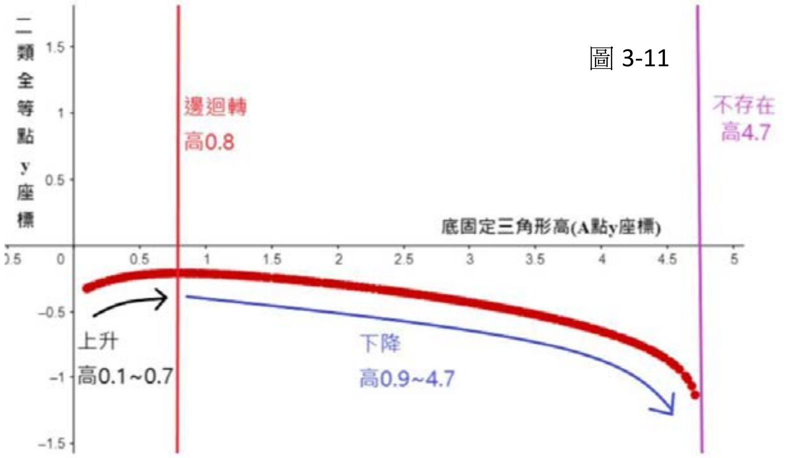


圖 3-11

表 1-2 函數圖形之二類全等點變化				
高	位置	現象	圖標	備註
0.1~0.7	三角形同側	上升	黑色箭頭	全等點軌跡會隨著 A 點 y 座標增加而往上，靠近三角形
約 0.8		邊迴轉	紅色線	全等點和三角形底邊的距離由遠變近再變遠
0.9~4.7		下降	藍色箭頭	全等點軌跡隨著 A 點座標增加而下降，遠離三角形
約 4.7	不存在		紫色線	全等點不存在

3.一二類全等點軌跡：

我們將一二類函數圖形軌跡合併一起觀察如圖 3-12，發現一、二類全等點在消失前會有「重合」的現象，將函數軌跡整理如表 1-3：

<table>
<tr><th colspan="9">表 1-3 函數圖形之一二類全等點變化</th></tr>
<tr><td colspan="2">階段</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">高</td><td>0.1~0.7</td><td>0.8</td><td>0.9~2.6</td><td>2.6</td><td>2.7~4.7</td><td>4.7</td><td>4.8~</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一類</td><td>位置</td><td colspan="3">三角形異側</td><td>無限遠</td><td>三角形同側</td><td rowspan="4">重合</td><td rowspan="4">消失</td></tr>
<tr><td>現象</td><td colspan="3">上升</td><td>翻轉</td><td>上升</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二類</td><td>位置</td><td colspan="5">三角形同側</td></tr>
<tr><td>現象</td><td>上升</td><td>邊迴轉</td><td colspan="3">下降</td></tr>
<tr><td colspan="2">圖標</td><td>黑色箭頭</td><td>紅色線</td><td>藍色箭頭</td><td>粉色線</td><td>淺藍箭頭</td><td>紫色圈</td><td>紫色線</td></tr>
</table>

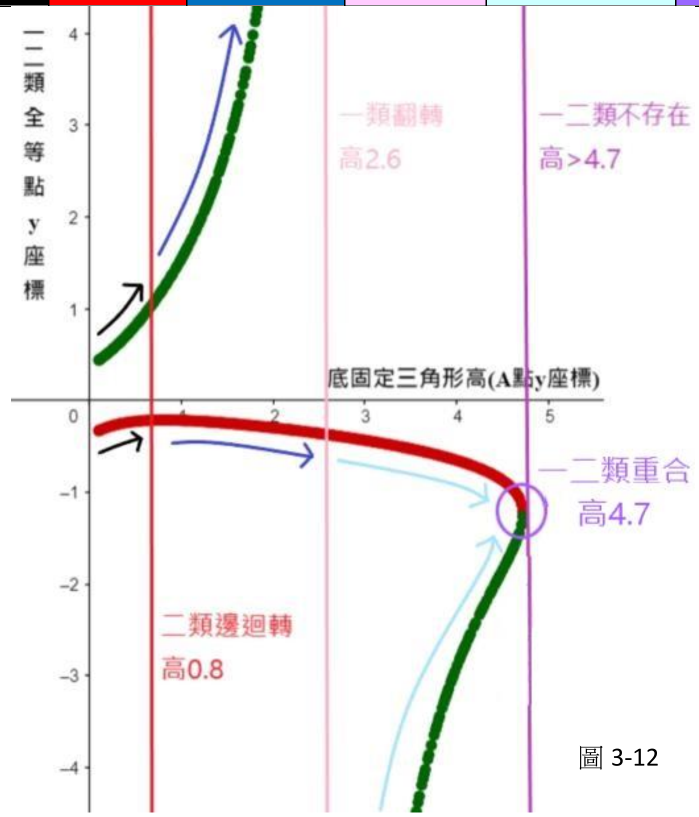


圖 3-12

(二) 三類、四類(五、六類)全等點變化之觀察：

仿照一二類的觀察方式，先分別觀察，再合併比較。因為等腰三角形左右對稱，所以將三、五類合併討論；四、六類合併討論。

1. 三、五類全等點變化之觀察

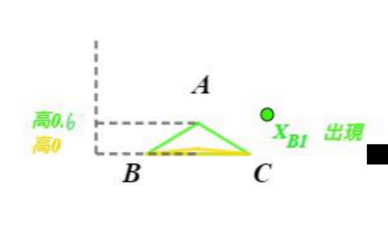
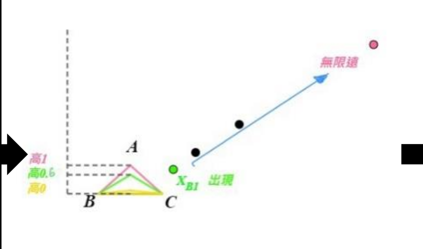
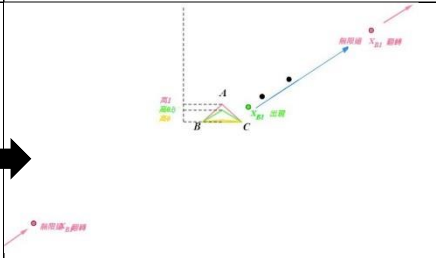
我們同樣觀察固定底、改變高之全等點位置變化，同上討論方式，我們固定底邊長為 2，高以每次增加 0.1 單位進行觀察。令原圖形等腰△ABC 之 B(-1,0)、C(1,0)，頂點 A 固定在 y 軸上移動，觀察後發現三類全等點 X_{B1} 有以下現象(X_{C1} 同理)：

(1)如圖 4-1，當 A 點 y 座標<0.6 時，全等點不存在

(2)如圖 4-1，當 A 點座標為(0 , 0.6)時，全等點出現

(3)如圖 4-2，當 A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡往右上移動，遠離三角形

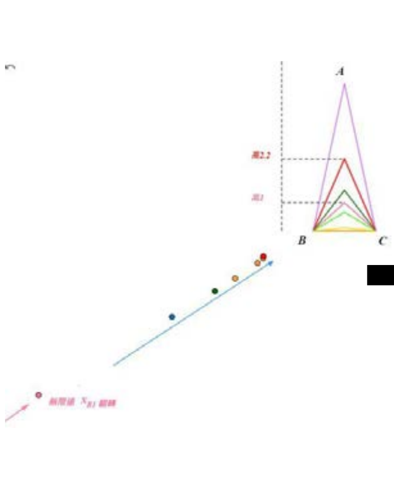
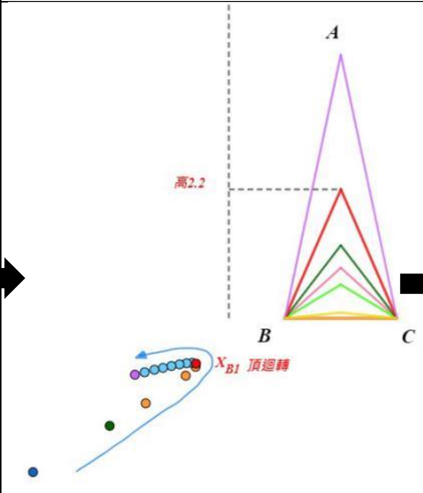
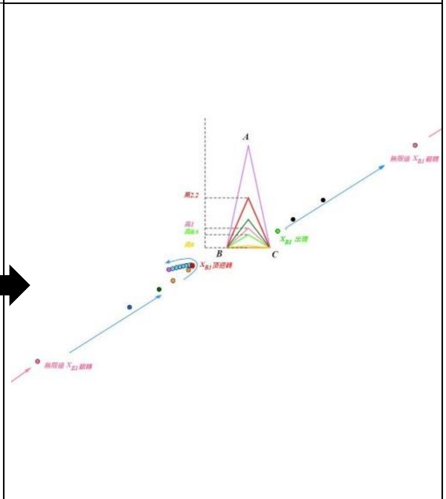
(4)如圖 4-3，當 A 點座標為(0 , 1)時，全等點從三角形同側無限遠，翻轉到異側

圖標	圖 4-1	圖 4-2	圖 4-3
全等點位置圖形變化			
三角形高之變化	0.1~0.6	0.6~0.9	1

(5)如圖 4-4，A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡從無限遠靠近三角形

(6)如圖 4-5，當 A 點座標為(0,2.2)時，全等點發生頂迴轉

(7)如圖 4-5，A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡遠離三角形

圖標	圖 4-4	圖 4-5	圖 4-6
全等點位置圖形變化			
三角形高之變化	1.1~2.1	2.2~	0.1~2.3

名詞釋疑：

頂迴轉：一三五類全等點軌跡與三角形所對應的頂點距離由長變短再變長的現象稱為頂迴轉

2.四類、六類全等點變化之觀察：

按照三(五)類的討論方式，觀察四(六)類全等點的軌跡變化，我們令原圖形等腰△ABC之 B(-1,0)、C(1,0)，頂點 A 固定在 y 軸上移動，觀察後發現四類全等點 X_{B2} 有以下現象(X_{C2} 同理)：

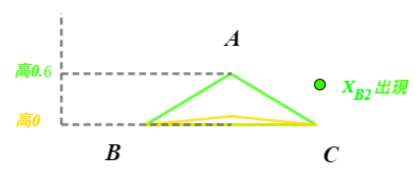
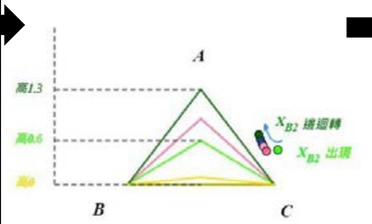
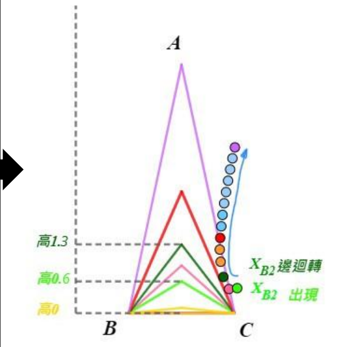
(1)如圖 4-7，當 A 點座標<0.6 時，全等點不存在

(2)如圖 4-7，當 A 點座標為(0,0.6)時，全等點出現

(3)如圖 4-8，A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡往上移動，並靠近三角形

(4)如圖 4-9，當 A 點座標為(0,1.3)時，全等點發生邊迴轉

(5)如圖 4-9，A 點 y 座標繼續增加，全等點軌跡往右上移動，並遠離三角形

<table>
<tr><td>圖標</td><td>圖 4-7</td><td>圖 4-8</td><td>圖 4-9</td></tr>
<tr><td>全等點位置圖形變化</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>三角形高之變化</td><td>0.1~0.6</td><td>0.6~1.3</td><td>1.3~</td></tr>
</table>

3.三類、四類(五、六類)全等點軌跡之觀察：

將三、四類全等點軌跡合併如圖 4-10 三四類全等點會在 A 點座標為(0,0.6)時，同時出現於同一位置(重合)，將軌跡整理於表 1-4：

<table>
<tr><td colspan="11">表 1-4 三四類全等點軌跡變化一覽表</td></tr>
<tr><td colspan="2">階段</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">高</td><td>0.1~0.5</td><td>0.6</td><td>0.7~0.9</td><td>1</td><td>1.1~1.2</td><td>1.3</td><td>1.4~2.1</td><td>2.2</td><td>2.3~</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三類</td><td>位置</td><td rowspan="4">不存在</td><td rowspan="4">出現&重合</td><td>三角形同側</td><td>無限遠</td><td colspan="5">三角形異側</td></tr>
<tr><td>現象</td><td>遠離△</td><td>翻轉</td><td colspan="3">靠近△</td><td>頂迴轉</td><td>遠離△</td></tr>
<tr><td rowspan="2">四類</td><td>位置</td><td colspan="7">三角形同側</td></tr>
<tr><td>現象</td><td colspan="3">靠近△</td><td>邊迴轉</td><td colspan="3">遠離△</td></tr>
<tr><td colspan="2">圖標</td><td>黃</td><td>淺綠</td><td>黑</td><td>粉</td><td>藍</td><td>深綠</td><td>橘</td><td>紅</td><td>淺藍</td></tr>
</table>

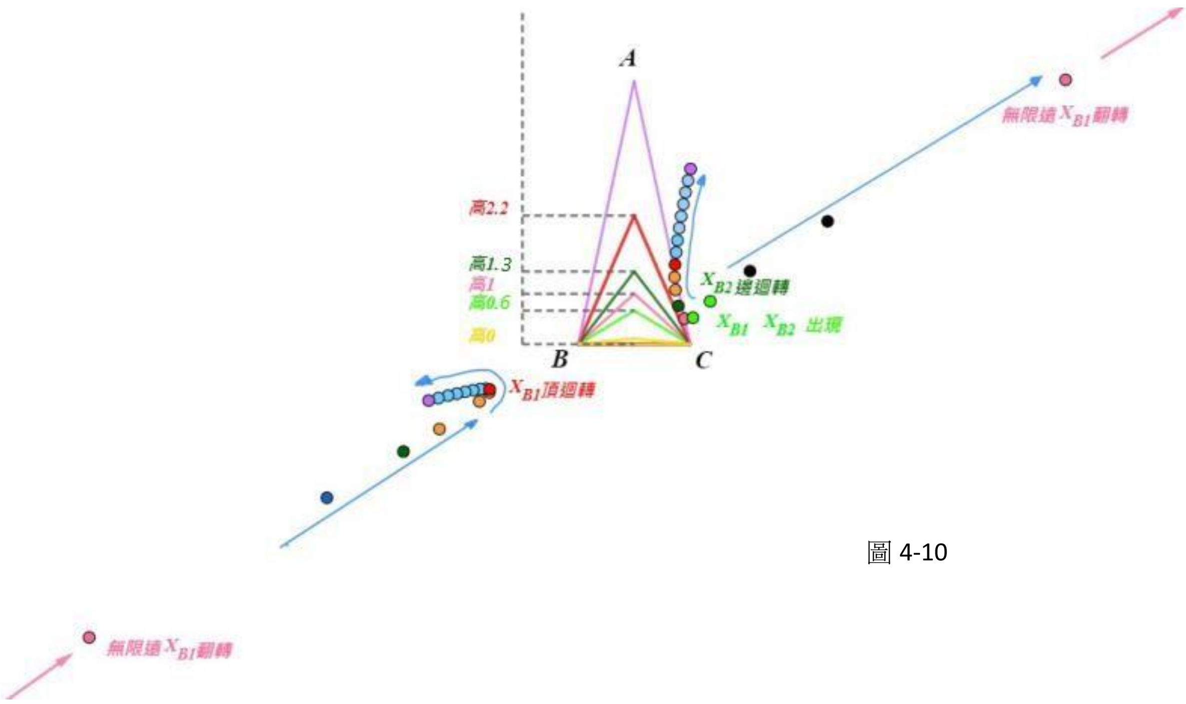


圖 4-10

(三)一類全等點頂迴轉現象

觀察完三、四類全等點後，我們猜測定義同樣是對應角的一類全等點也應該要有頂迴轉的現象，於是我們按照頂迴轉的定義，將全等點和三角形 A 點的距離算出，並畫出函數圖形，如圖 4-11

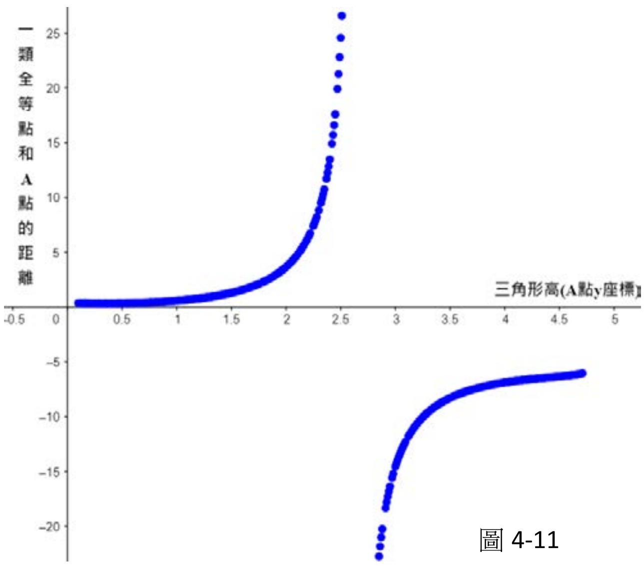


圖 4-11

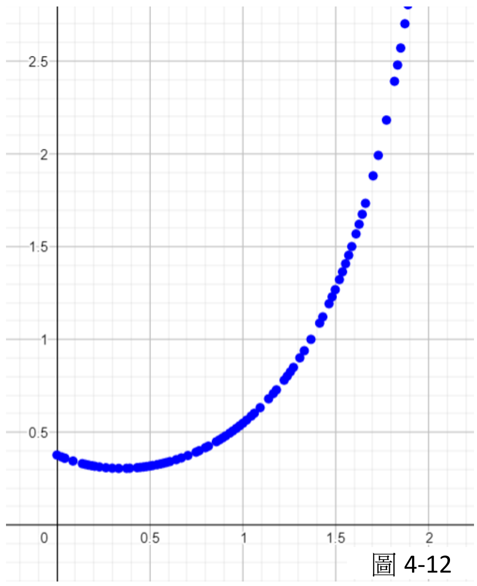


圖 4-12

x 軸為底固定之三角型的高(A 點 y 座標)，y 軸為全等點和 A 點的距離，將圖形放大後，如圖 4-12，由此可看出當三角形高約為 0.3 時，全等點和 A 點的距離最短，一類全等點在 **A 點座標為(0,0.3)**時發生頂迴轉。

三、三角形疊作鏡射圖形之頂中垂交點圖形性質

在找出全等點位置的過程中，我們偶然發現以下性質，觀察後，發現此性質可以推廣應用至代數解推導的過程，說明如下：

(一)定義：頂中垂交點圖形

如圖 5-1，已知△ABC 及其一全等點 P，將 P 和△ABC 頂點連線得$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$三線段，作$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$的中垂線，此三條中垂線兩兩相交於A_2、B_2、C_2三點，則△$A_2B_2C_2$稱之為△ABC 之頂中垂交點圖形。

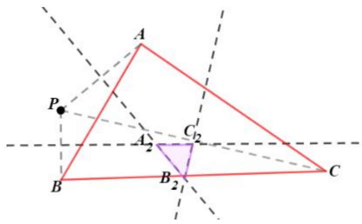


圖 5-1 頂中垂交點圖形

(二){3k}、{3k+1}、{3k+2}頂中垂交點圖形性質

已知△ABC 為任意三角形，P 為此三角形的全等點，

則：{3k}的頂中垂交點圖形為{3k+2}

{3k+1}的頂中垂交點圖形為{3k}

{3k+2}的頂中垂交點圖形為{3k+1}

(三)頂中垂交點圖形關係之證明：(圖 5-2)

已知：△ABC 為任意三角形，P 為此三角形的全等點

求證：$\overline{PA}$的中垂線為$\overleftrightarrow{A_2B_2}$，$\overline{PB}$的中垂線為$\overleftrightarrow{B_2C_2}$，$\overline{PC}$的中垂線為$\overleftrightarrow{A_2C_2}$

證明：∵P 為全等點，則 P 對$\overleftrightarrow{A_2B_2}$做鏡射得$A_3$ =A，

∴$\overline{PA}$的中垂線為$\overleftrightarrow{A_2B_2}$

同理得證：$\overline{PB}$的中垂線為$\overleftrightarrow{B_2C_2}$，$\overline{PC}$的中垂線為$\overleftrightarrow{A_2C_2}$

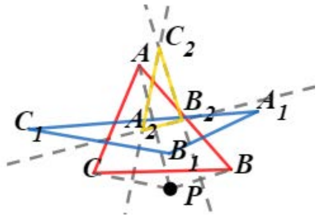


圖 5-2 頂中垂交點圖形

陸、研究分析與討論

從上面的觀察與討論，我們對於全等點位置之變化有了一定的了解，進一步我們希望可以利用代數表示全等點位置，透過鏡射的特性來計算，希望能用代數解來表示全等點座標，因此我們開始以下的探討。

一、等腰三角形全等點位置之分析與探討

(一)等腰三角形一、二類全等點代數解

經過討論，發現等腰三角形一、二類全等點會位於底邊中垂線上，因此可以利用這個特點來分析全等點的確切座標。

1.等腰三角形一、二類全等點代數解之觀察與探討

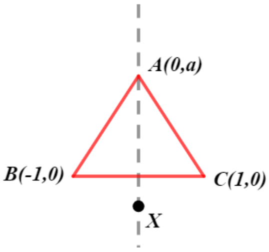


圖 6-1

觀察 1：首先我們將上面的問題座標化，固定等腰△ABC 底為 2，高為 a，如圖 6-1，再利用兩點式、斜率和解三次方程式程，計算概念大略如下：

1.算出三邊方程式，如圖 6-2

2.鏡射出第一層：算出與其垂線之交點，並將交點與全等點距離翻倍，如圖 6-3

3.同理算出第二層其中兩頂點，如圖 6-4

4.最後算出第三層頂點，與 A 點重和，進而算出全等點座標

5.算出全等點座標為$\left(0,\frac{9u^2(7-a^2)^2+(a^3-15a)^2-3(7a^2-1)(7-a^2)-3u(a^3-15a)(7-a^2)}{9u(7-a^2)^2}\right)$，其中

$$u^3=\frac{-27(7-a^2)^2(a^3+a)+9(7-a^2)(7a^2-1)(a^3-15a)-2(a^3-15\,a)^3}{54(7-a^2)^3}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{27(7-a^2)^2(a^3+a)-9(7-a^2)(7a^2-1)(a^3-15a)+2(a^3-15\,a)^3}{108(7-a^2)^3}\right)\right)^2+\frac{-(a^3-15a)^2+3(7a^2-1)(7-a^2)}{81(7-a^2)^2}}$$

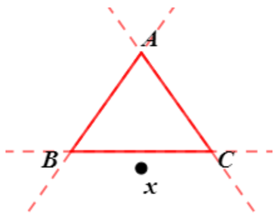


圖 6-2

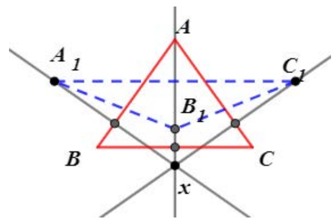


圖 6-3

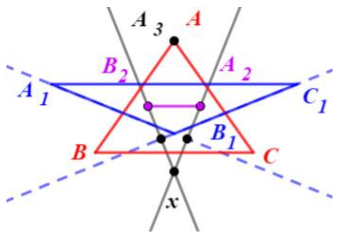


圖 6-4

由於我們算出的全等點座標過於複雜，無法進行探討，因此我們調整算法如下。

觀察 2：我們更改座標的定法為圖 6-5，證明脈絡相同，過程如下：

已知：圖 6-1，將等腰三角形三頂點定義為 A(0,0) B(-1,a) C(1,a)且 a<0，高為$|a|$。因一、二類位於底邊中垂線上，因此令一、二類全等點座標為(0,b)

求證：一、二類全等點坐標(以 a 表示)

證明：利用鏡射圖形的特性，計算出第三層頂點 A_3座標與 A 點相等

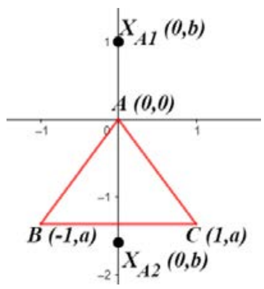
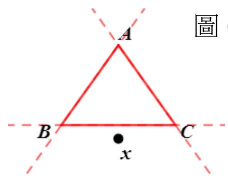
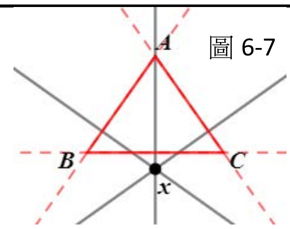
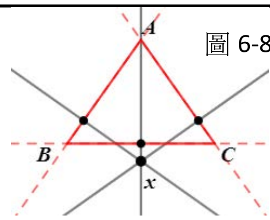
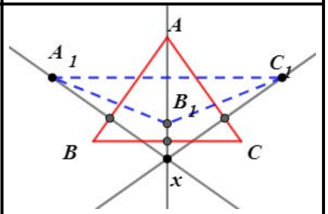
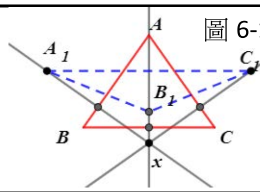


圖 6-5

(1)求出第零層鏡射圖形的斜、底邊方程式

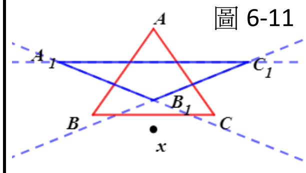
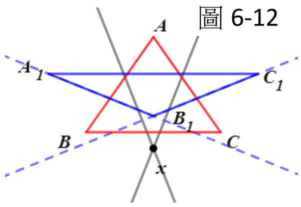
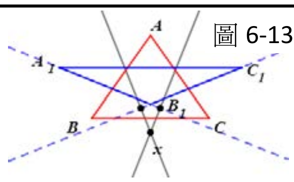
步驟	原理/方法	過程	圖
解出原圖形三邊方程式	兩點式	原圖形頂點：A(0,0)、B(-1,a)、C(1,a) 邊方程式： y=-ax、y=ax、y=a	圖 6-6 

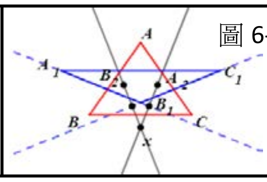
(2)求出第一層鏡射圖形頂點

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)畫出過全等點且垂直於原圖形兩邊的垂線，並利用點斜式解得上述兩條線的垂線方程式	兩線垂直時，斜率相乘為-1	垂線方程式 $y=\frac{x}{a}+b$ $y=-\frac{x}{a}+b$	 圖 6-7
(ⅱ)解原圖形兩邊與過全等點且垂直於兩邊的垂線兩線之交點	聯立方程式	垂線和邊的交點 $(\frac{ab}{a^2+1}，\frac{a^2b}{a^2+1})$ $(\frac{-ab}{a^2+1}，\frac{a^2b}{a^2+1})$	 圖 6-8
(ⅲ)求第一層左右兩個頂點	鏡射圖形，A_1 為 X 對 $\overline{AB}$ 的鏡射點，因此利用中點概念解得 A_1 座標，同理得 B_1、C_1 之座標	將兩線交點的 x 座標乘 2，並將兩線交點的 y 座標乘 2 再減 b 得兩座標 $A_1(\frac{2ab}{a^2+1}，\frac{a^2b-b}{a^2+1})$ $C_1(\frac{-2ab}{a^2+1}，\frac{a^2b-b}{a^2+1})$	 圖 6-9
(iv)第一層在 y 軸上的頂點		將三角形平行 x 軸的邊的 y 座標乘 2 再減 b 得：$B_1(0, 2a-b)$	 圖 6-10

(3)求出第二層鏡射圖形頂點座標

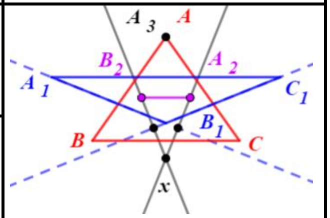
註：令 $a^2+1=c$ 計算

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)解出第一層三邊方程式	兩點式	三邊方程式 $\overline{A_1B_1}$：$y=\frac{a^2+1-ab}{b}x+2a-b$ $\overline{B_1C_1}$：$y=\frac{a^2b-b}{a^2+1}x+2a-b$ $\overline{A_1C_1}$：$y=\frac{a^2b-b}{a^2+1}$	 圖 6-11
(ⅱ)畫出過全等點且垂直於第一層兩邊的垂線，並利用點斜式解得上述兩條線的垂線方程式	兩線垂直時，斜率相乘為-1	$y=\frac{b}{ab-a^2-1}x+b$ $y=\frac{-b}{ab-a^2-1}x+b$	 圖 6-12
(ⅲ)解第一層兩邊與過全等點垂直於兩邊兩線的交點	聯立方程式	$x=\pm\frac{2b(a-b)(ab-a^2-1)}{cb^2-2acb+c^2}$ $y=\frac{2b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}+b$	 圖 6-13

(iv)求第二層左右兩個頂點的 y 座標	利用中點概念解鏡射點	將交點的 y 座標乘 2 再減 b，得： $y=\dfrac{4b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}$	 圖 6-14

(4)求出第三層鏡射圖形頂點座標

因為只要透過第三層其中一個頂點使它的座標和原圖形重合，就可利用座標相等解聯立方程式求出全等點座標，所以選用疊作後位在 y 軸上的點，因此，只要算出第二層底邊方程式，便可知道第三層在 y 軸上的頂點

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)解出第二層鏡射圖形的底邊方程式	兩點式	底邊方程式： $\overline{A_2B_2}：y=\dfrac{4b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}$	 圖 6-15
(ⅱ)第三層的頂點座標	利用中點概念解鏡射點	將第二層鏡射圖形底邊 y 座標乘 2 在減 b，得： $A_3(0,\frac{8b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}+b)$	

(5)求出全等點座標

(ⅰ)∵(0,b)為全等點，第三層會和原圖形重合，所以$(0,\frac{8b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}+b)$和(0,0)重合

$\therefore\frac{8b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}+b=0$

(ⅱ)解$\frac{8b^2(a-b)}{cb^2-2acb+c^2}+b=0$

$\Rightarrow\frac{8b^2(a-b)+cb^3-2acb^2+c^2b}{cb^2-2acb+c^2}=0$

$\Rightarrow 8b^2(a-b)+cb^3-2aab^2+c^2b=0\ (a\neq 0\ \Rightarrow\ b\neq 0)$

$\Rightarrow 8ab-8b^2+cb^2-2acb+c^2=0$

$\Rightarrow 8ab-8b^2+(a^2+1)b^2-2a(a^2+1)b+(a^2+1)^2=0$

$\Rightarrow(a^2-7)b^2+2a(3-a^2)b+(a^2+1)^2=0$

$\Rightarrow b=\frac{a^3-3a\pm\sqrt{^4+22a^2+7}}{a^2-7}$ ⇒得全等點座標為$(0,\frac{a^3-3a\pm\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7})$

2.等腰三角形一、二類全等點代數解與其圖形變化之分析

(1)一、二類全等點座標

(ⅰ)$(0,\frac{a^3-3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7})$為 X_{A1} 的座標，$(0,\frac{a^3-3a+\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7})$為 X_{A2} 的座標

(2)代數解判別式之分析

由頂點座標可知，令$-a^4+22a^2+7$為判別式，

當判別式>0，則此方程式有兩個解，也就是有兩個點，即一、二類全等點；

判別式=0，則只有一個解，兩點重合；

判別式<0，則無解，無全等點

解$-a^4+22a^2+7>0$ 得 $a^2<8\sqrt{2}+11\Rightarrow|a|<\sqrt{8\sqrt{2}+11}$

(ⅰ)底為 2 的三角形的高$|a|<\sqrt{8\sqrt{2}+11}$ ⇒ $-a^4+22a^2+7>0$ ⇒ **x 軸上有兩個全等點**

(ⅱ)底為 2 的三角形的高$|a|=\sqrt{8\sqrt{2}+11}$ ⇒ $-a^4+22a^2+7=0$ ⇒ **X_{A1} 和 X_{A2} 重合**

(ⅲ)底為 2 的三角形的高$|a|>\sqrt{8\sqrt{2}+11}$ ⇒ $-a^4+22a^2+7<0$ ⇒ **x 軸上全等點消失**

(3)一類全等點翻轉時機之分析

(ⅰ)底為二的三角形的高< $\sqrt{7} \Rightarrow a^2-7<0$ 且 $a^3-3a—\sqrt{-a^4+22a^2+7}<0$

$\Rightarrow \frac{a^3-3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}>0 \Rightarrow$ X_{A1} 在三角形異側

(ⅱ)底為二的三角形的高> $\sqrt{7} \Rightarrow a^2-7>0$ 且 $a^3-3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}<0$

$\Rightarrow \frac{a^3-3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}<0 \Rightarrow$ X_{A1} 在三角形同側

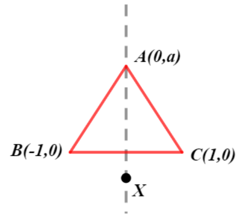


圖 6-16

3.等腰三角形一、二類全等點代數解結論

從上述結論，我們平移轉換座標成為原來圖形後，如圖 6-16，

可得$X_{A1}(0,\frac{-a^3+3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}+a)$，$X_{A2}(0,\frac{-a^3\mp3a+\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}+a)$，

而且其全等點軌跡變化之結果與表 1-3 的觀察各變化之完全符合

表 2-1 等腰三角形一、二類全等點高對應之變化					
高$\|a\|$範圍	$\|a\|<\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$≒2.645	$\sqrt{7}<\|a\|<\sqrt{8\sqrt{2}+11}$	$\|a\|=\sqrt{8\sqrt{2}+11}$≒4.723	$\|a\|>\sqrt{8\sqrt{2}+11}$
X_{A1} 位置	三角形異側	翻轉	三角形同側	重合	消失
X_{A2} 位置	三角形同側				

(二)等腰三到六類全等點代數解之探討：

1.等腰三角形三到六類全等點代數解

已知：將等腰三角形三頂點定義為(0,0) (-1,a) (1,a)且 a<0，三~六類的座標為(b,c)且 b<0

求證：三到六類全等點坐標(以 a 表示)

證明：

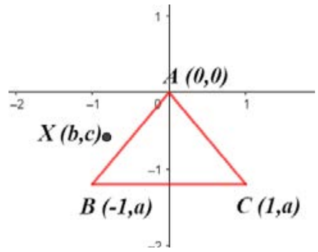
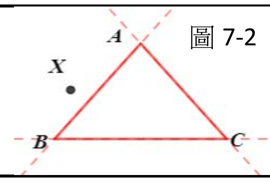
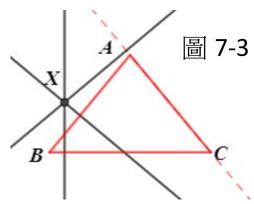
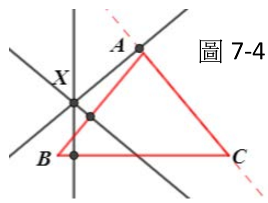
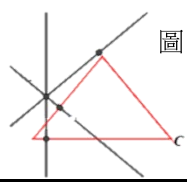


圖 7-1

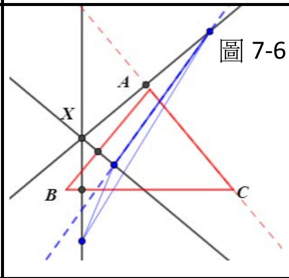
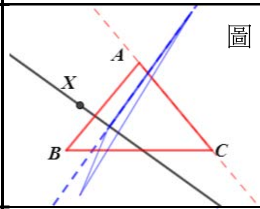
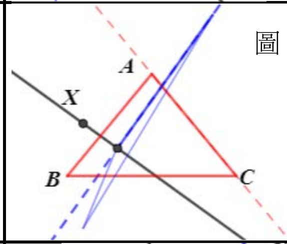
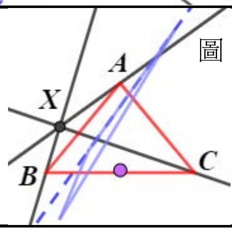
(1)求出第零層鏡射圖形的三邊方程式

步驟	原理/方法	過程	圖
解出原圖形三邊方程式	兩點式	原圖形頂點： A(0,0)、B(-1,a)、C(1,a) 邊方程式： y=ax，y=-ax，y=a	 圖 7-2

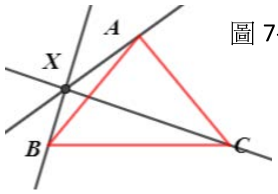
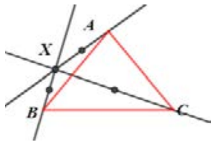
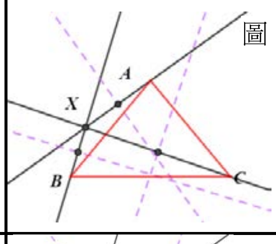
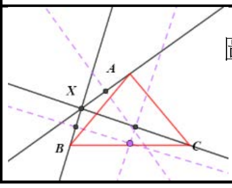
(2)求出第一層鏡射圖形頂點

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)畫出過全等點且垂直於原圖形三邊的垂線，並利用點斜式解得上述兩條線的垂線方程式	兩線垂直時，斜率相乘為-1	垂線方程式 $y=-\frac{1}{a}x+\frac{b+ac}{a}$ $x=b$ $y=\frac{1}{a}x+\frac{-b+ac}{a}$	 圖 7-3
(ⅱ)解原圖形三邊與過全等點垂直於三邊三線的交點	聯立方程式	垂線和邊的交點 $(\frac{b+ac}{a^2+1},\frac{ab+a^2c}{a^2+1})$ (b,a) $(\frac{b-ac}{a^2+1},\frac{-ab+a^2c}{a^2+1})$	 圖 7-4
(ⅲ)求第一層三頂點	利用中點概念解鏡射點	三頂點座標: $(\frac{b+2ac-a^2b}{a^2+1},\frac{2ab+a^2c-c}{a^2+1})$ $(b,2a-c)$ $(\frac{b-2ac-a^2b}{a^2+1},\frac{-2ab+a^2c-c}{a^2+1})$	 圖 7-5

(3)求出第二層鏡射圖形中其中一個頂點

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)用兩點式解出過第一層鏡射圖形其中一邊方程式	兩點式	第一層頂點: $(\frac{b+2ac-a^2b}{a^2+1},\frac{2ab+a^2c-c}{a^2+1})$ $(\frac{b-2ac-a^2b}{a^2+1},\frac{-2ab+a^2c-c}{a^2+1})$ 邊方程式: $y=\frac{b}{c}x+\frac{-b^2+a^2b^2+a^2c^2-c^2}{ca^2+c}$	 圖 7-6
(ⅱ)畫出過全等點且垂直於第一層的邊的垂線，並利用點斜式解得垂線方程式	兩線垂直時，斜率相乘為-1	垂線方程式 $y=-\frac{c}{b}x+2c$	 圖 7-7
(ⅲ)解第一層的邊與過全等點且垂直於邊的垂線之交點	聯立方程式	垂線和邊的交點 $x=\frac{c(b^2-a^2b^2+a^2c^2+3c)}{(b^2+c^2)(a^2+1)}$ $y=\frac{c(b^2+3a^2b^2+a^2c^2-c^2)}{(b^2+c^2)(a^2+1)}$	 圖 7-8
(ⅳ)求第二層頂點	利用中點概念解鏡射點	第二層頂點座標 $x=b\frac{b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2}{(a^2+1)(b^2+c^2)}$ $y=c\frac{(a^2+1)(b^2+c^2)+4(a^2b^2-c^2)}{(a^2+1)(b^2+c^2)}$	 圖 7-9

(4)用頂中垂交點圖形之性質求出第二層鏡射圖形的頂點

步驟	原理/方法	過程	圖
(ⅰ)求出過全等點和原圖形三頂點的直線的方程式	兩點式	全等點：(b,c)，原圖形頂點：(0,0)、(1,a)、(-1,a) 直線方程式：$y=\frac{c}{b}x$、 $y=\frac{c-a}{b-1}x+\frac{ab-c}{b-1}$、 $y=\frac{c-a}{b+1}x+\frac{ab+c}{b+1}$	 圖 7-10
(ⅱ)求出全等點和原圖形頂點的中點		原圖形頂點：(0,0)、(1,a)、(-1,a) 中點： $(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$、$(\frac{b+1}{2},\frac{a+c}{2})$、$(\frac{b-1}{2},\frac{a+c}{2})$	 圖 7-11
(ⅲ)求出過(ⅱ)且垂直於(ⅰ)得直線的方程式	兩線垂直時，斜率相乘為-1	垂線方程式 $y=-\frac{b}{c}x+\frac{b^2+c^2}{2c}$、 $y=\frac{b-1}{a-c}x+\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c}$ $y=\frac{b+1}{a-c}x+\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c}$	 圖 7-12
(ⅳ)算出其中兩直線的交點(需和步驟 3-ⅳ的第二層頂點為同一點)	聯立方程式	$(0,\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c})$	 圖 7-13

(5)求出全等點座標

(ⅰ) $\because (0,\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c})$和$(b\frac{b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2}{(a^2+1)(b^2+c^2)}, c\frac{(a^2+1)(b^2+c^2)+4(a^2b^2-c^2)}{(a^2+1)(b^2+c^2)})$為同一點

$\therefore b\frac{b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2}{(a^2+1)(b^2+c^2)} = 0$ ----①

$\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c} = c\frac{(a^2+1)(b^2+c^2)+4(a^2b^2-c^2)}{(a^2+1)(b^2+c^2)}$ ----②

(ⅱ)解①式

$b\frac{b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2}{(a^2+1)(b^2+c^2)} = 0$

$\Rightarrow b(b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2) = 0$

因$b<0 \Rightarrow b^2-3a^2b^2+a^2c^2+5c^2 = 0$

$\Rightarrow b^2(1-3a^2)+c^2(a^2+5) = 0$

$\Rightarrow b^2(1-3a^2) = -c^2(a^2+5)$

$\Rightarrow b^2 = \frac{c^2(a^2+5)}{3a^2-1}$ ----③

(ⅲ)解②式

$\frac{a^2+1-(b^2+c^2)}{2a-2c} = c\frac{(a^2+1)(b^2+c^2)+4(a^2b^2-c^2)}{(a^2+1)(b^2+c^2)}$

交叉相乘得$(a^2+1)^2(b^2+c^2)-(a^2+1)(b^2+c^2)^2+(a^2c^2+b^2+5a^2b^2-3c^2)(2c^2-2ac)=0$

又$c^2 = \frac{b^2(3a^2-1)}{a^2+5} \Rightarrow \ b^2+c^2 = b^2+\frac{b^2(3a^2-1)}{a^2+5} = \frac{4b^2(a^2+1)}{a^2+5}$代入得

$(a^2+1)^2\frac{4b^2(a^2+1)}{a^2+5}-(a^2+1)(\frac{4b^2(a^2+1)}{a^2+5})^2+(a^2c^2+b^2+5a^2b^2-3c^2)(2c^2-2ac) = 0$

$(a^2+1)^3\frac{4b^2}{a^2+5}-(a^2+1)^3(\frac{4b^2}{a^2+5})^2+(a^2\frac{b^2(3a^2-1)}{a^2+5}+b^2+5a^2b^2-3\frac{b^2(3a^2-1)}{a^2+5})(2c^2-2ac) = 0$

$b^2[(a^2+1)^3(\frac{4}{a^2+5}-b^2(\frac{4}{a^2+5})^2)+(a^2\frac{3a^2-1}{a^2+5}+1+5a^2-3\frac{3a^2-1}{a^2+5})(2c^2-2ac)] = 0$

$\frac{b^2[(a^2+1)^3(4-\frac{16b^2}{a^2+5})+(8a^4+16a^2+8)(2c^2-2ac)]}{a^2+5} = 0$

$\frac{4b^2(a^2+1)^2((a^2+1)\frac{a^2+5-4b^2}{a^2+5}+4(c^2-ac))}{a^2+5} = 0$

(同乘a^2+5)

$4b^2(a^2+1)^2[(a^2+1)(a^2+5-4b^2)+4c(c-a)(a^2+5)] = 0$

$4b^2(a^2+1)^2[(a^2+1)(a^2+5)-4b^2(a^2+5-4)+(4c^2-4ac)(a^2+5)] = 0$

$4b^2(a^2+1)^2[(a^2+1-4ac-4b^2+3c^2+c^2)(a^2+5)+16b^2] = 0$

$4b^2(a^2+1)^2[(a^2+1-4ac-4b^2+3c^2+\frac{b^2(3a^2-1)}{a^2+5})(a^2+5)+16b^2] = 0$

$4b^2(a^2+1)^2[(a^2+1-4ac-4b^2+3c^2)(a^2+5)+3a^2b^2+15b^2] = 0$

$4b^2(a^2+1)^2(a^2+1-4ac-b^2+3c^2)(a^2+5) = 0$

因 b<0 且 a 為實數$\Rightarrow a^2+1 \neq 0, b \neq 0, a^2+5 \neq 0$

$\Rightarrow -b^2+a^2+1-4ac+3c^2 = 0$

③帶入$-\frac{c^2(a^2+5)}{3a^2-1}+a^2+1-4ac+3c^2 = 0$

$\Rightarrow (3-\frac{a^2+5}{3a^2-1})c^2-4ac+a^2+1 = 0$

$\Rightarrow$c=$\frac{3a^3-a\pm\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}$、b=$\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}\pm\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4}$

2.等腰三角形三到六類全等點代數解與其圖形變化之分析

(1)三~六類全等點座標

(ⅰ)$(\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4}, \frac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4})$為 X_{B1} 的座標

$(-\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4})$為 X_{B2} 的座標

$(-\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4})$為 X_{C1} 的座標

$(\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4})$為 X_{C2} 的座標

(2)代數解判別式之分析

由全等點座標可知，若根號內的數$(a^2+5)(3a^2-1)$、$(a^2+5)(a^4-a^2+2)$、$(a^4-a^2+2)(3a^2-1)$其一小於 0，則全等點不存在，又$a^2+5>0$，且$a^4-a^2+2=a^2(a^2-1)+2$

$\boxed{\text{Case 1}}$ $a^2-1<0$

$\Rightarrow 0<a^2<1$

$\Rightarrow -1<a^2-1<0$

$\Rightarrow -1<a^2(a^2-1)<0$

$\Rightarrow 1<a^2(a^2-1)+2<2$

$\Rightarrow a^2(a^2-1)+2>0$

$\boxed{\text{Case 2}}$ $a^2-1>0$

$\Rightarrow a^2>1$

$\Rightarrow a^2(a^2-1)>0$

$\Rightarrow a^2(a^2-1)+2>0$

所以當$3a^2-1$小於 0，全等點不存在$\Rightarrow 3a^2-1<0\Rightarrow a<\frac{\sqrt{3}}{3}$

解$3a^2-1>0$ 得 $|a|>\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ⅰ)底為二的三角形的高$>\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3a^2-1>0\Rightarrow$ **三到六類全等點存在**

(ⅱ)底為二的三角形的高$=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3a^2-1=0\Rightarrow$ **X_{B1} 和 X_{B2} 重合，X_{C1} 和 X_{C2} 重合**

(ⅲ)底為二的三角形的高$<\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3a^2-1<0\Rightarrow$ **三到六類全等點消失**

(3)三、五類全等點翻轉時機之分析

(ⅰ)底為二的三角形的高$<1\Rightarrow 4a^2-4<0$ 且$3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}<0$

$\Rightarrow\frac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}>0\Rightarrow$ **X_{B1} 和 X_{C1} 在異側**

(ⅱ)底為二的三角形的高$>1\Rightarrow 4a^2-4>0$ 且$3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}<0$

$\Rightarrow\frac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}<0\Rightarrow$ **X_{B1} 和 X_{C1} 在同側**

3. 等腰三角形三~六類全等點代數解結論

表 2-2 等腰三角形三~六類全等點高對應之變化

高$\lvert a\rvert$範圍	$\lvert a\rvert<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\lvert a\rvert=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}<\lvert a\rvert<1$	$\lvert a\rvert=1$	$\lvert a\rvert>1$
X_{B1} (X_{C1})位置	不存在	重合	三角形同側	翻轉	三角形異側
X_{B2}(X_{C2})位置				三角形同側	

從上述結論，發現代數解所得結果與表 1-4 的觀察各變化之高度數據符合，因此判斷代數解、觀察吻合。

二、等腰三角形一、二類全等點與其鏡射三角形形成之共圓觀察與探討

為了找出全等點的幾何作圖，於是觀察一二類全等點和鏡射圖形的關係，發現將一、二類全等點與其鏡射三角形作於同一圖形上，三角形的頂點與全等點會產生數個共圓。

(一)名詞定義：

1. **Wx**：等腰三角形一、二類全等點與其鏡射三角形形成之共圓，x 作為判斷共圓種類的標示，由 1 開始。ex：W1。(圖 8-1)
2. **W_x**：Wx 對等腰三角形底邊中垂線鏡射所形成的圓。ex：W1 鏡射後為 W_1。(圖 8-2)
3. **Ox**：Wx 的圓心。ex：W1 的圓心為 O1。(圖 8-1)
4. **O_x**：W_x 的圓心。ex：W_1 的圓心為 O_1，且為 O1 鏡射形成的點(圖 8-2)
5. **nA_m、nB_m、nC_m**：用於表示第 n 類全等點鏡射的第 m 層鏡射圖形頂點(圖 8-3)

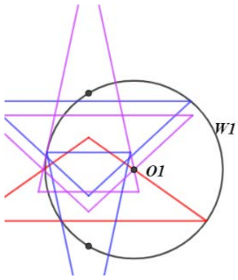


圖 8-1 Wx、Ox

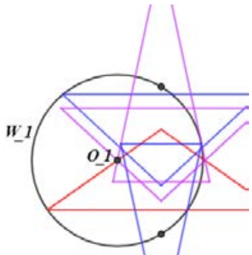


圖 8-2 W_x、O_x

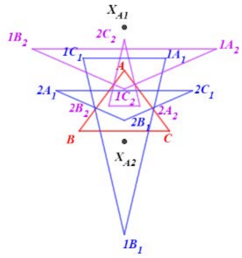


圖 8-3 nA_m、nB_m、nC_m

(二) 等腰三角形一、二類全等點與其鏡射三角形形成之共圓總數目之探討

在研究共圓問題時，發現共圓有非常多種組合，這些圓是由 17 個不同的點構成(圖 8-3)。為了檢查共圓情況的總數目。以原三角形底邊做一條中垂線，利用左右對稱的特性，只檢查中垂線上及右側的 12 個點所形成的組合類型。為了避免重複，將原三角形高固定。並依照以下步驟檢查是否有共圓形成。

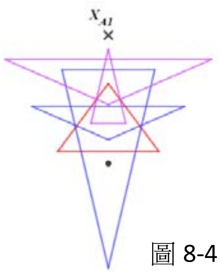
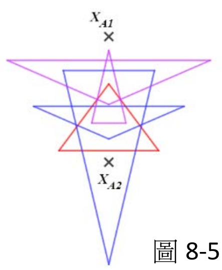
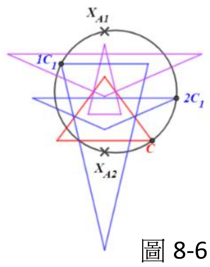
1.選定兩點

2.依次改變第三點並觀察由第一~三點做成的圓上是否有其他的點

3.待所有組合皆試過後更改第二點及第一點

在選擇點時，有一套[選擇規則]，規定統一先選擇 X_{A1}、X_{A2}，接著為 A、B、C，剩下的 nA_m、nB_m、nC_m 依次選擇，且 n、m 從 1 開始遞增，1 次增加 1 來改變。因為每次檢查都是選擇三個偏右和正中間的點，另外地四、五點可以在右或在左，因此依照上面的步驟能夠確認所有圓心在右、正中側的圓。剩餘在左方的只需將右側的圓對底邊中垂線做對稱即可。

觀察一：

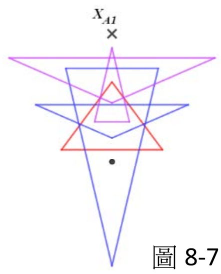
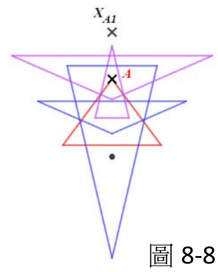
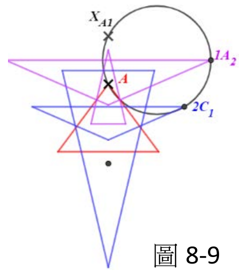
第一步	第二步	第三步
 圖 8-4	 圖 8-5	 圖 8-6
選擇第一點(X_{A1})	選擇第二點(依[選擇規則]為(X_{A2})	選擇第三點(依[選擇規則])在選擇 A、B 時，並沒有發現共圓現象，因此選擇 C 點，發現 $1C_1$、$2C_1$ 皆在此圓上，因此判定為共圓現象。

第四步

組成點 / 四點共圓名稱	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			

將觀察到的圓 W1 紀錄於表格中

觀察二：

第一步	第二步	第三步
 圖 8-7	 圖 8-8	 圖 8-9
選擇第一點(X_{A1})	選擇第二點(依[選擇規則]為 X_{A1}、X_{A2}) 若選擇 X_{A2} 則會找到圓 W1，因此接續動作選擇 A 點	選擇第三點(依[選擇規則]) 在選擇 $1A_2$ 時，發現 $2C_1$ 也會為於圓上，因此判定此為共圓現象。

第四步

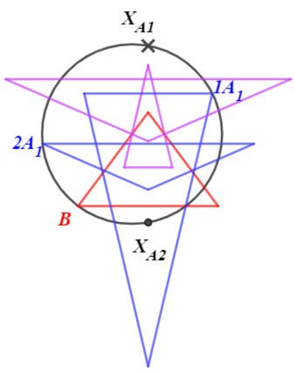
組成點 / 四點共圓名稱	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			
W2	✔			✔				✔						✔			

將觀察到的圓 W2 紀錄於表格中

觀察三：

在觀察共圓時，先將右邊的點的組合試過一次，因此紀錄時只會記錄到右側的圓，所以將左邊的圓也紀錄一遍。

第一步



將 W1 對底邊中垂線鏡射

第二步

組成點 / 四點共圓名稱	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$	個數
W1			✔	✔			✔				✔			✔				2
W_1		✔		✔	✔						✔	✔						

紀錄左邊圓上的五點

紀錄完成後將兩個對稱的圓記為同一類，並且以右邊的為討論重點。經過討論，發現共有 20 個共圓，只有兩個五點共圓(左右各一)，其餘的皆為四點共圓，如下表所記錄(表 3-1)

表 3-1 共圓紀錄

組成點 / 四點共圓名稱	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			
W2	✔			✔				✔						✔			
W3	✔				✔						✔					✔	
W4	✔		✔			✔	✔										
W5	✔		✔										✔	✔			
W6	✔		✔					✔		✔							
W7	✔		✔												✔		✔
W8						✔	✔		✔	✔							
W9													✔	✔		✔	✔
W10							✔	✔						✔	✔		

(三)等腰三角形一、二類全等點與其鏡射三角形形成之共圓的分類

在經過討論後，發現有些圓有共通性，並且可以通過其中一個圓組成的點類推其餘有共通性的圓。於是依照組成圓的點做分類，其中組成的點的規則大多可從鏡射三角形的層數看出，因此以下用第 n 類、第 m 層中 n、m 的共通性分類。

1.第一類 W1、W_1：

(1)觀察：

觀察到 20 個共圓中，只有 W1、W_1 是五點共圓，其餘的皆為四點共圓，因此將 W1、W_1 定為第一類(圖 8-11)。

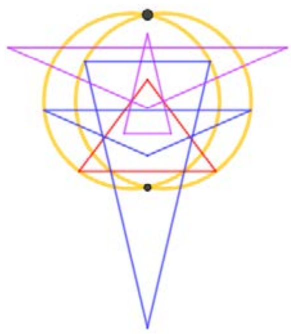


圖 8-11

2.第二類 W2、W_2、W3、W_3：

(1)觀察：觀察到 20 個共圓中，除了第一類圓以外，過全等點的只有 W2、W_2、W3、W_3，且 W2、W3 的組成皆是一個原圖形頂點、一個全等點、一個{3k+1}頂點、一個{3k+2}頂點。(圖 8-12)

表 3-2 第二類觀察

圓	組成點			
W2	原圖形頂點 (A)	全等點一類 (X_{A1})	一類{3k+2}頂點 ($1A_2$)	二類{3k+1}頂點 ($2C_1$)
W3		全等點二類 (X_{A2})	二類{3k+2}頂點 ($2B_2$)	一類{3k+1}頂點 ($1A_1$)
共通性	原圖形頂點	全等點	{3k+2}頂點	{3k+1}頂點

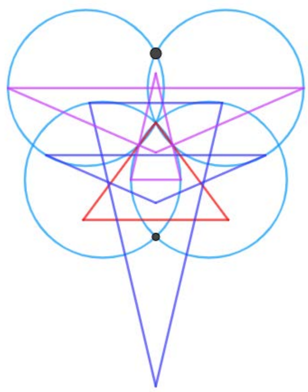


圖 8-12

3.第三類 W4~W7、W_4~W_7：

(1)觀察：將圓上有兩原圖形底點、兩{3k+1}或{3k+2}頂點的圓分為第二類，包含 W4~W7、W_4~W_7(圖 8-13)

<table>
<tr><th colspan="5">表 3-3 第三類觀察</th></tr>
<tr><td>圓</td><td colspan="4">組成點</td></tr>
<tr><td>W4</td><td rowspan="4">原圖形頂點(A)</td><td rowspan="4">原圖形頂點(C)</td><td>一類{3k+1}頂點($1B_1$)</td><td>一類{3k+1}頂點($1C_1$)</td></tr>
<tr><td>W5</td><td>二類{3k+1}頂點($2B_1$)</td><td>二類{3k+1}頂點($2C_1$)</td></tr>
<tr><td>W6</td><td>一類{3k+2}頂點($1A_2$)</td><td>一類{3k+2}頂點($1C_2$)</td></tr>
<tr><td>W7</td><td>二類{3k+2}頂點($2A_2$)</td><td>二類{3k+2}頂點($2C_2$)</td></tr>
<tr><td>共通性</td><td>點 A</td><td>點 C</td><td colspan="2">兩個{3k+1}或{3k+2}頂點</td></tr>
</table>

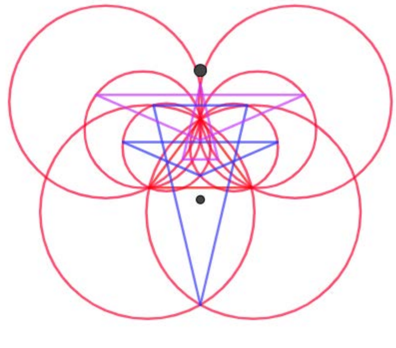


圖 8-13

(2)第三類四點共圓之探討

(ⅰ)四點共圓 W4 之證明(圖 8-14)

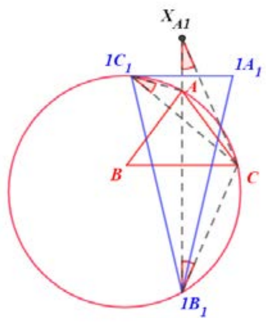


圖 8-14

已知：△ABC 為原圖形且 X_{A1}為頂對全等點，做一圓過 A、C、$1B_1$

求證：A、C、$1B_1$、$1C_1$四點共圓

證明脈絡：證明 A、C、$1B_1$、$1C_1$四點共圓

=> 所對同弧圓周角相同

=> $\angle C1C_1A=\angle C1B_1A$

證明：設$\angle CX_{A1}A=\alpha$

步驟一：∵$1B_1$為 X_{A1} 對$\overline{BC}$鏡射的鏡射點

∴$\angle C1B_1A=\angle CX_{A1}A=\alpha$

步驟二：∵$1C_1$為 X_{A1} 對$\overline{AC}$鏡射的鏡射點

∴$\angle C1C_1A=\angle CX_{A1}A=\alpha$

由一、二⇒$\angle C1C_1A=\angle C1B_1A$(對同弧圓周角相同)

⇒得證 A、C、$1B_1$、$1C_1$四點共圓

(ⅱ)四點共圓 W5 之證明(圖 8-15)

已知：△ABC 為原圖形且 X_{A2} 為邊對全等點，做一圓過 A、$2B_1$、C

求證：A、$2B_1$、$2C_1$、C 四點共圓

證明脈絡：證明 A、$2B_1$、$2C_1$、C 四點共圓

=> 圓內接四邊形對角互補

=> $\angle A2B_1C+\angle A2C_1C=180^\circ$

證明：設$\angle 2B_1X_{A2}C=\alpha$

步驟一：∵$2B_1$為 X_{A2}對$\overline{BC}$鏡射的鏡射點

∴ $\angle X_{A2}2B_1C=\angle 2B_1X_{A2}C=\alpha$

⇒$\angle A2B_1C=180^\circ-\alpha$

步驟二：∵$2C_1$為 X_{A2} 對$\overline{AC}$鏡射的鏡射點

∴$\angle A2C_1C=\angle 2B_1X_{A2}C=\alpha$

由一、二⇒$\angle A2B_1C+\angle A2C_1C=180^\circ-\alpha+\alpha=180^\circ$(圓內接四邊形)

⇒得證 A、$2B_1$、$2C_1$、C 四點共圓

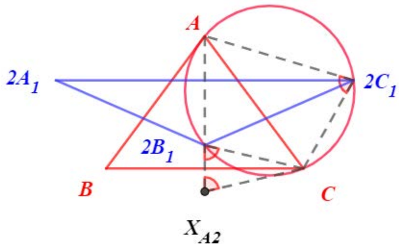


圖 8-15

(iii)四點共圓 W6 之證明(圖 8-16)

已知：△ABC 為原圖形且 X_{A1} 為頂對全等點，做一圓過 $1C_2$、A、$1A_2$

求證：A、$1A_2$、$1C_2$、C 四點共圓

證明脈絡：證明 A、$1A_2$、$1C_2$、C 四點共圓

=> 圓內接四邊形對角互補

=> $\angle 1A_2A1C_2+\angle 1A_2C1C_2=180^{\circ}$

證明：設 $\angle 1A_2X_{A1}A=\alpha$

步驟一：∵A 為 X_{A1} 對 $\overline{1A_21B_2}$ 鏡射的鏡射點

∴ $\angle 1A_2AX_{A1}=\angle 1A_2X_{A1}A=\alpha$

⇒ $\angle 1A_2A1C_2=180^{\circ}-\alpha$

步驟二：∵C 為 X_{A1} 對 $\overline{1A_21C_2}$ 鏡射的鏡射點

∴ $\angle 1A_2C1C_2=\angle 1A_2X_{A1}A=\alpha$

由一、二⇒ $\angle 1A_2A1C_2+\angle 1A_2C1C_2$

$=180^{\circ}-\alpha+\alpha=180^{\circ}$(圓內接四邊形)

⇒得證 A、$1A_2$、$1C_2$、C 四點共圓

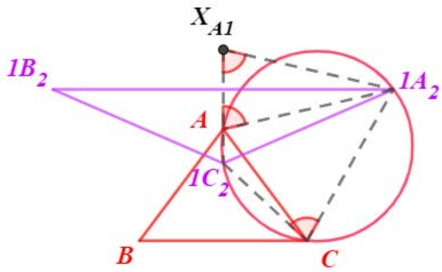


圖 8-16

(iv)四點共圓 W7 之證明(圖 8-17)

已知：△ABC 為原圖形且 X_{A2} 為邊對全等點，做一圓過 $2A_2$、$2C_2$、C

求證：A、$2A_2$、$2C_2$、C 四點共圓

證明脈絡：證明 A、$2A_2$、$2C_2$、C 四點共圓

=> 圓內接四邊形對角互補

=> $\angle 2C_2A2A_2+\angle 2C_2C2A_2=180^{\circ}$

證明：設 $\angle 2C_2C2A_2$為 α

步驟一：∵C 為 X_{A2} 對 $\overline{2C_22A_2}$ 鏡射的鏡射點

∴ $\angle 2C_2X_{A2}2A_2=\angle 2C_2C2A_2=\alpha$

步驟二：∵A 為 X_{A2} 對 $\overline{2B_22A_2}$ 鏡射的鏡射點

∴ $\angle X_{A2}A2A_2=\angle 2C_2X_{A2}2A_2=\alpha$

⇒ $\angle 2C_2A2A_2=180^{\circ}-\alpha$

由一、二 $\angle 2C_2A2A_2+\angle 2C_2C2A_2=180^{\circ}-\alpha+\alpha=180^{\circ}$(圓內接四邊形)

⇒得證 A、$2A_2$、$2C_2$、C 四點共圓

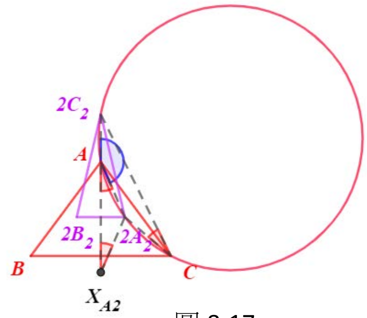


圖 8-17

4.第四類 W8、W9、W_8、W_9：

(1)觀察：

四點共圓之中，四點皆屬於同類全等點所做鏡射三角形{3k+1}、{3k+2}，且兩點取自{3k+1}，兩點取自{3k+2}。包含 W8、W9、W_8、W_9。(圖 8-18)

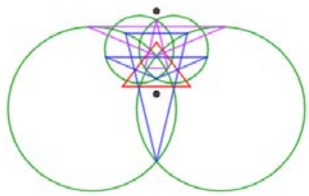


圖 8-18

表 3-4 第四類觀察				
圓	組成點			
W8	一類{3k+1}頂點 ($1B_1$)	一類{3k+1}頂點 ($1C_1$)	一類{3k+2}頂點 ($1B_2$)	一類{3k+2}頂點 ($1C_2$)
W9	二類{3k+1}頂點 ($2B_1$)	二類{3k+1}頂點 ($2C_1$)	二類{3k+2}頂點 ($2B_2$)	二類{3k+2}頂點 ($2C_2$)
共通性	皆為{3k+1}頂點		皆為{3k+2}頂點	

(2)第四類四點共圓之探討

(ⅰ)四點共圓 W8 之證明(圖 8-19)

已知：X_{A1}為邊對全等點，做一圓過 $1A_1$、$1A_2$、$1B_1$

求證：$1C_2$、$1A_1$、$1A_2$、$1B_1$四點共圓

證明脈絡：證明 $1C_2$、$1A_1$、$1A_2$、$1B_1$四點共圓

=> 圓內接四邊形對角互補

=> $\angle 1A_11A_21B_1+\angle 1A_11C_21B_1=180^\circ$

證明：設$\angle 1A_1X_{A1}1B_1=\alpha$

步驟一：∵$1A_2$為 X_{A1} 對$\overline{1A_11B_1}$鏡射的鏡射點

∴$\angle 1A_11A_21B_1=\angle 1A_1X_{A1}1B_1=\alpha$

步驟二：∵$1C_2$為 X_{A1}對$\overline{1C_11A_1}$鏡射的鏡射點

∴$\angle 1A_11C_2X_{A1}=\angle 1A_1X_{A1}1B_1=\alpha$

⇒$\angle 1A_11C_21B_1=180^\circ-\alpha$

由步驟一、二可得 $\angle 1A_11A_21B_1+\angle 1A_11C_21B_1$

$=\alpha+180^\circ-\alpha=180^\circ$(圓內接四邊形)

得證 $1C_2$、$1A_1$、$1A_2$、$1B_1$四點共圓

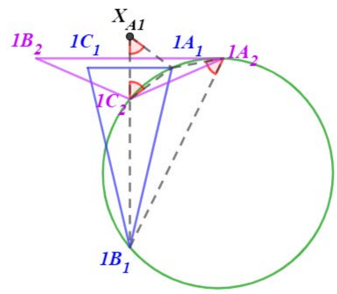


圖 8-19

(ⅱ)四點共圓 W9 之證明(圖 8-20)

已知：X_{A2}為邊對全等點，$\overline{2C_2X_{A2}}$和$\overline{2C_12B_2}$和交點為 O，做一圓過 $2B_1$、$2B_2$、$2C_2$

求證：$2B_1$、$2B_2$、$2C_2$、$2C_1$四點共圓

證明脈絡：證明 $2B_1$、$2B_2$、$2C_2$、$2C_1$四點共圓

=> 所對同弧圓周角相同

=> $\angle 2C_12C_2X_{A2}=\angle 2C_12B_22B_1$

證明：設$\angle 2C_12C_2X_{A2}=\alpha$

步驟一：∵$2C_2$為 X_{A2} 對$\overline{2C_12A_1}$鏡射的鏡射點

∴$\angle 2C_1X_{A2}2C_2=\angle 2C_12C_2X_{A2}=\alpha$

步驟二：∵$2B_2$為 X_{A2} 對$\overline{2C_12B_1}$鏡射的鏡射點

∴$\angle 2C_1X_{A2}2B_1=\angle 2C_12B_22B_1=\alpha$

由一、二⇒$\angle 2C_12C_2X_{A2}=\alpha=\angle 2C_12B_22B_1$ (對同弧圓周角相同)

⇒得證 $2B_1$、$2B_2$、$2C_2$、$2C_1$四點共圓

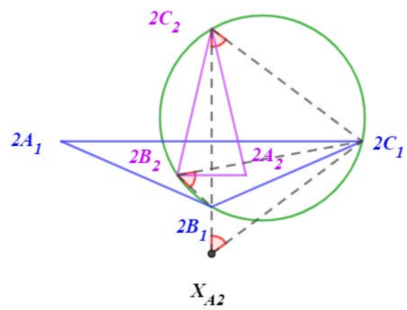


圖 8-20

5.第五類 W10、W_10：

(1)觀察：

共圓之中，四點分別為 $2A_2$、$2C_1$、$1C_1$、$1A_2$以及其鏡射圓皆屬於此類(右側)。包含 W10、W_10。(圖 8-21)

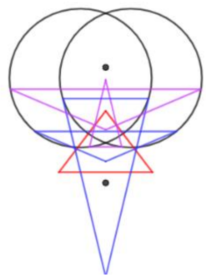


圖 8-21

6.結論：

經過觀察 1~5，將 20 個共圓分為五類，如表 3-5 所示，其中同顏色的屬於同一類。

表 3-5 四點共圓分類

四點共圓名稱 \ 組成點	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			
W2	✔			✔				✔						✔			
W3	✔				✔						✔					✔	
W4	✔		✔			✔	✔										
W5	✔		✔										✔	✔			
W6	✔		✔					✔		✔							
W7	✔		✔												✔		✔
W8						✔	✔		✔	✔							
W9													✔	✔		✔	✔
W10							✔	✔						✔	✔		

三、等腰三角形一、二類全等點與對應鏡射圖形{3k+1}之性質探討

在觀察共圓現象時，還另外發現兩個特別的圓。

(一){3k+1}外接圓

發現一類{3k+1}的外接圓圓心是二類全等點(圖 8-22)，二類{3k+1}的外接圓圓心是一類全等點(圖 8-23)。除此之外，兩圓大小一致。(圖 8-24)

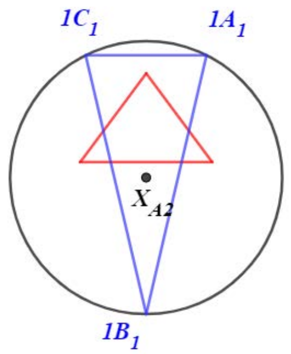


圖 8-22 一類{3k+1}外接圓

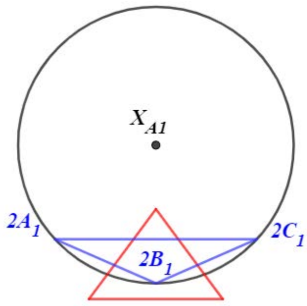


圖 8-23 二類{3k+1}外接圓

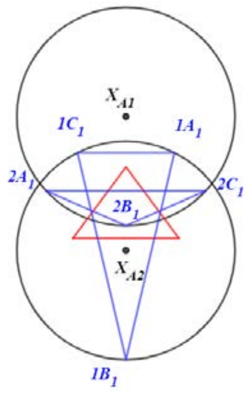


圖 8-24 兩外接圓

(二)證明一、二類{3k+1}外接圓大小一致(圖 8-25)

已知：原圖形、一、二類全等點位置，且外接圓圓心為全等點

求證：一、二類{3k+1}外接圓大小一致

證明：令底邊中點為 D 點，$\overline{X_{A1}D} = \overline{1B_1D} = x$，$\overline{X_{A2}D} = \overline{2B_1D} = y$

$\because \overline{X_{A2}1B_1} = \overline{X_{A1}D} - \overline{2B_1D} = x - y,$

$\overline{X_{A2}1B_1} = \overline{1B_1D} - \overline{X_{A2}D} = x - y$

$\therefore \overline{X_{A1}2B_1} = \overline{X_{A2}2B_1} = x - y$

兩外接圓半徑相等，則大小相等

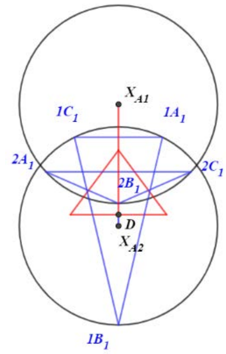


圖 8-25 外接圓大小證明

四、等腰三角形一二類全等點作圖法

我們解出代數解的結果和觀察完共圓後，想到可以利用有過全等點的共圓找出全等點的位置，於是我們結合代數解，將代數轉換成幾何作圖，利用作圖法，找出全等點位置。

作圖性質：如圖 9-1

$\overline{BC} = a$、$\overline{AB} = b$且$\overline{CB} \perp \overline{AB}$

作$\overline{AC}$中垂線交$\overleftrightarrow{BC}$於 D

以 D 為圓心$\overline{DC}$為半徑畫圓，交$\overline{AC}$於 E

設$\overline{BE} = c$

由子母相似可得$a:b = b:c$

$\overline{AB} = b = \sqrt{ac}$

$\overline{BE} = c = \frac{b^2}{a}$

$\overline{CE} = a + c = a + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{a}$

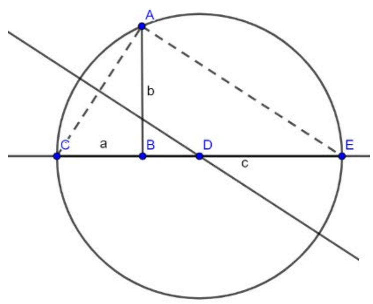


圖 9-1

已知：如圖，△ABC 為等腰三角形，高為 a

求證：X_{A1}、X_{A2}座標位置

原理：利用代數解所求出的 X_{A1}、X_{A2}座標$\left(\frac{a^3-3a\pm\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$的中點$\left(\frac{a^3-3a}{a^2-7}\right)$

再利用五點共圓找出 X_{A1}、X_{A2}座標位置

作法：**1.求出$|a^2-7|$**

如圖 9-2

作$\overline{BC}$中垂線交$\overleftrightarrow{AC}$於 D

以 D 為圓心$\overline{DC}$為半徑畫圓，交$\overline{AC}$於 F，$\overline{CF}=\frac{a^2+1^2}{1}=a^2+1$

以 A 為圓心$\overline{AC}$為半徑畫圓，交$\overline{AC}$於 E，$\overline{CE}=4$

以 E 為圓心$\overline{EC}$為半徑畫圓，交$\overline{AC}$於 G，$\overline{CE}=8$

$\overline{FG}=|(a^2+1)-8|=|a^2-7|$即為所求

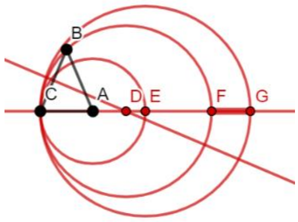


圖 9-2

2.求出$|a^3-3a|$

如圖 9-3

作$\overline{AC}$中垂線交$\overline{BF}$中垂線於 H，交弧 CFB 於 I，$\overline{IB}=2a$

以 I 為圓心$\overline{IB}$為半徑畫圓，交$\overleftrightarrow{BI}$於 J，$\overline{JB}=4a$

以 H 為圓心$\overline{HB}$為半徑畫圓，交$\overleftrightarrow{BI}$於 K，$\overline{KB}=a^3+a$

$\overline{JK}=|a^3+a-4a|=|a^3-3a|$即為所求

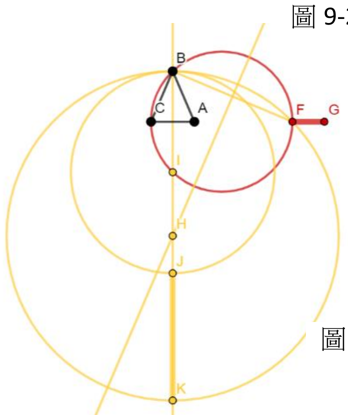


圖 9-3

3.求出 X_{A1}、X_{A2} 中點$\frac{a^3-3a}{a^2-7}$

如圖 9-4

作 CA 中點 L

以 J 為圓心$\overline{LA}$為半徑畫圓，交$\overleftrightarrow{BL}$於 M

(註：M 不在$\overline{JK}$上)

作 MK 中點 N

以 N 為圓心$\overline{MN}$為半徑畫圓

作$\overrightarrow{JO}\perp\overleftrightarrow{BL}$於 J，交前圓於 O，$\overline{JO}=\sqrt{a^3-3a}$

以 G 為圓心$\overline{JO}$為半徑畫圓

作$\overrightarrow{GP}\perp\overleftrightarrow{CA}$於 G，交前圓於 P

作$\overline{FP}$中垂線交$\overleftrightarrow{CA}$於 Q

以 Q 為圓心$\overline{AF}$為半徑畫圓交$\overleftrightarrow{CA}$於 R

$\overline{GR}=\frac{\sqrt{a^3-3a}^2}{a^2-7}=\frac{a^3-3a}{a^2-7}$即為所求

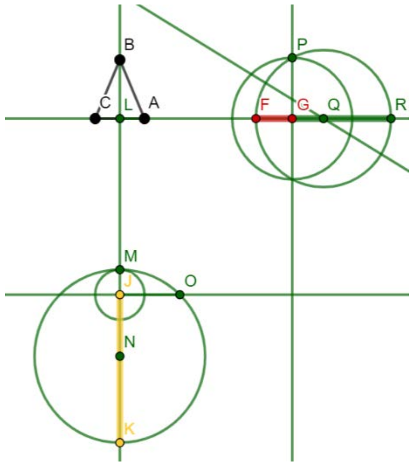


圖 9-4

4.利用五點共圓求出全等點座標

如圖 9-5

以 B 為圓心$\overline{GR}$為半徑畫圓交$\overline{AC}$中垂線於 S

(註：此以三角形高＜$\sqrt{7}$為例)

作$\overleftrightarrow{ST}\perp\overline{AC}$中垂線於 S，交$\overleftrightarrow{BA}$於 T

以 T 為圓心$\overline{TA}$為半徑畫圓交$\overline{AC}$中垂線於 X_{A1}、X_{A2}

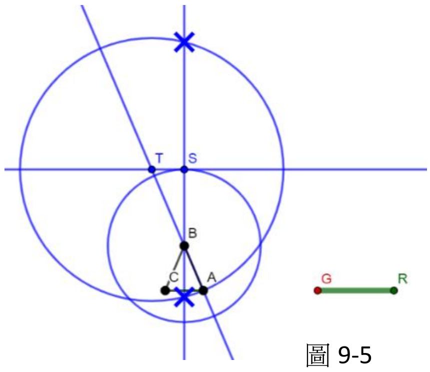


圖 9-5

五、偏移三角形全等點軌跡觀察

在觀察等腰三角形的全等點時，為了將討論延伸至任意三角形，於是將三角形的高等距離平行移動(紅~綠)(圖 10)，形成偏移三角形，並觀察全等點位置變化，發現：

名詞釋疑

偏移三角形：將三角形的底$\overline{BC}$固定，A 點以平行$\overline{BC}$的方向移動，形成同底等高的三角形稱為偏移三角形

(一)偏移三角形也和等腰三角形一樣，有迴轉、翻轉、重合、消失的現象
(二)一類全等點軌跡會隨著三角形往右偏移而往左，且越來越遠離三角形
(三)二類全等點軌跡會隨著三角形往右偏移而往右，且越來越遠離三角形
(四)三類全等點在三角形異側，全等點軌跡會三角形往右偏移而往左下
(五)四類全等點軌跡會隨著三角形往右偏移而往右
(六)五類全等點軌跡會隨著三角形往右偏移而往左上(接近三角形)
(七)六類全等點軌跡會隨著三角形往右偏移而往右

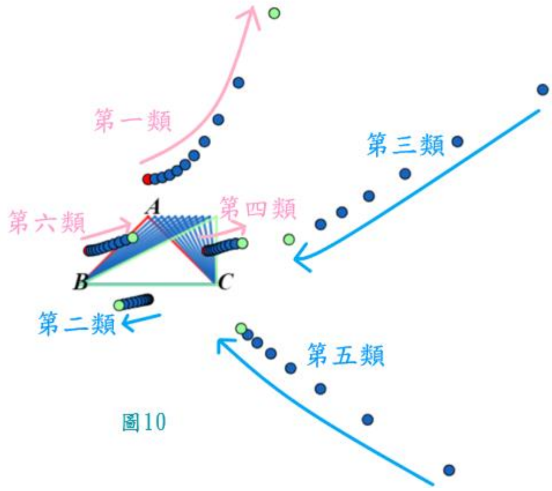


圖10

六、正多邊形全等點之觀察與討論

(一)正多邊形全等點個數

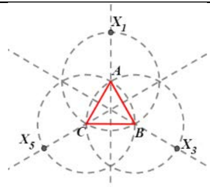
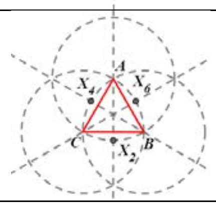
想觀察正多邊形的全等點個數是否存在什麼規律，於是找出正 n 邊形全等點的個數：

表 4-1 正多邊形全等點個數			
圖形	角平分線(個/線)	中垂線(個/線)	總數
正三角形	2		6
正方形	2	4	12
正五邊形	6		30
正六邊形	4	4	24
正七邊形	6		42
正八邊形	6	6	48
正九邊形	8		72
正十邊形	8	8	80
正十一邊形	10		110
正十二邊形	10	10	120
正二十邊形	18	18	360

發現正多邊形的全等點總數有一定的規律：
奇數邊形個數[n(n-1)];偶數邊形個數[n(n-2)](正方形、正五邊形不合)

柒、結論

一、正三角形共有六個全等點，其中三個為頂對全等點，三個為邊對全等點。

表 5-1 正三角形全等點結論			
類別	**個數**	**作圖法**	**圖**
頂對全等點	3	△ABC 中，$\overline{BC}$為底邊。以 A 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫圓，此圓和$\overline{BC}$的中垂線在三角形異側形成的交點即為頂對全等點	
邊對全等點	3	△ABC 中，以 A 為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫圓，$\overline{BC}$為底邊，此圓和$\overline{BC}$的中垂線在三角形同側形成的交點即為邊對全等點	

二、等腰三角形全等點可以用代數式完全表示，同時可以從代數式完全對應其軌跡之變化

觀察底為 2，高為 a 之等腰三角形，令等腰△ABC 的頂點 A(0,a) B(-1,0) C(1,0)

(一)一、二類全等點座標及其對應全等點軌跡變化

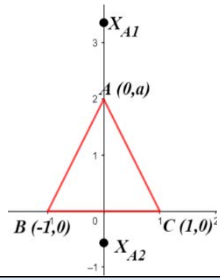
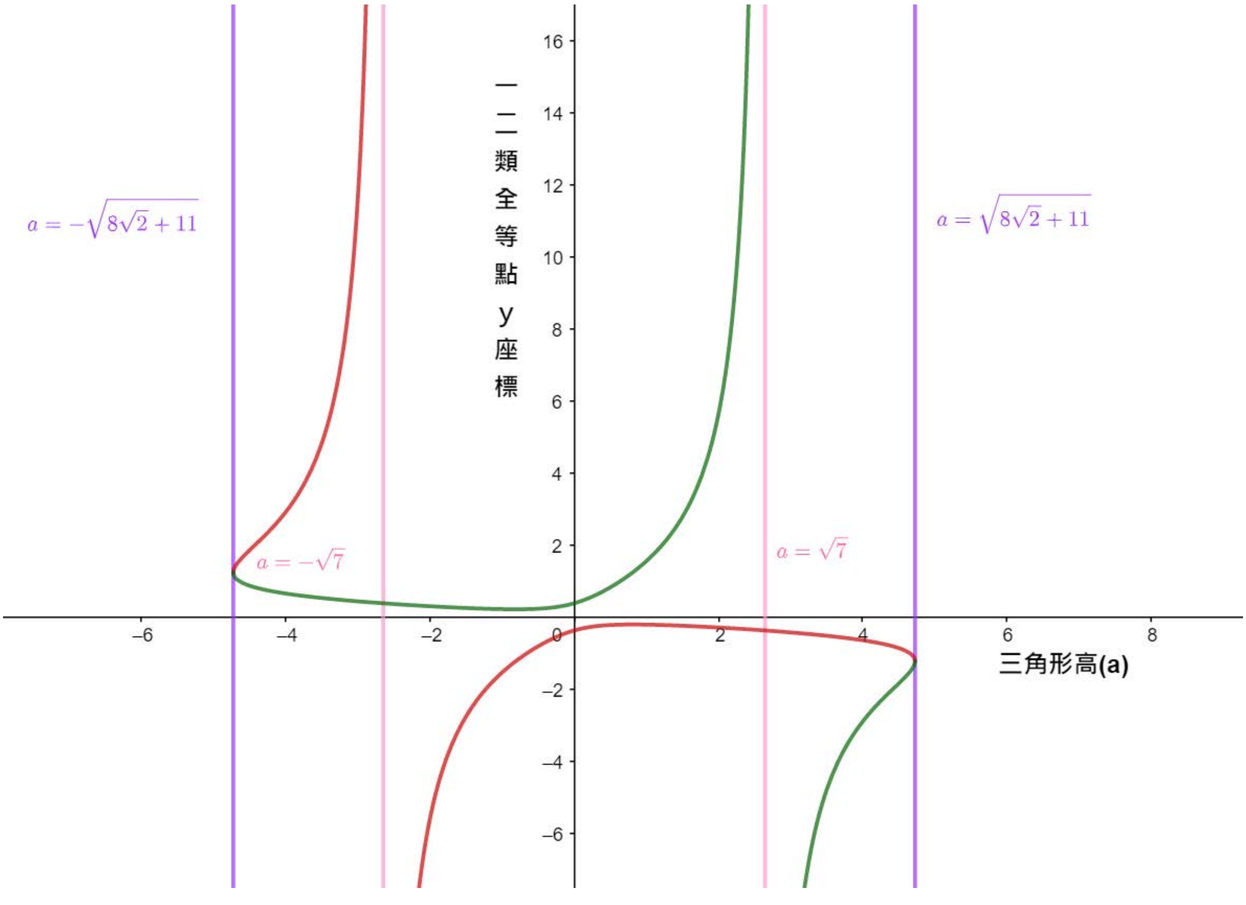


表 5-3 一、二類全等點座標

全等點	全等點座標
X_{A1}	$\left(0,\dfrac{-a^3+3a-\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}+a\right)$
X_{A2}	$\left(0,\dfrac{-a^3+3a+\sqrt{-a^4+22a^2+7}}{a^2-7}+a\right)$

<table>
<tr><th colspan="6">表 2-1 等腰三角形一、二類全等點高對應之變化</th></tr>
<tr><td>高$|a|$範圍</td><td>$|a|<\sqrt{7}$</td><td>$|a|=\sqrt{7}$</td><td>$\sqrt{7}<|a|<\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td><td>$|a|=\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td><td>$|a|>\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td></tr>
<tr><td>X_{A1} 位置</td><td>△異側</td><td>翻轉</td><td>△同側</td><td rowspan="2">重合</td><td rowspan="2">消失</td></tr>
<tr><td>X_{A2} 位置</td><td colspan="3">△同側</td></tr>
</table>



(二)三、四類全等點座標及其對應全等點軌跡變化(同理五、六類)

觀察底為 2，高為 a 之等腰三角形，令等腰△ABC 的頂點 A(0,0) B(-1,a) C(1,a)且 a<0，

表 5-3 一~六類全等點座標

全等點	全等點座標
X_{B1}	$\left(\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{B2}	$\left(-\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C1}	$\left(-\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C2}	$\left(\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$

表 2-2 等腰三角形三~六類全等點高對應之變化					
高$\|a\|$範圍	$\|a\|<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\|a\|=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}<\|a\|<1$	$\|a\|=1$	$\|a\|>1$
X_{B1} 位置	不存在	重合	△同側	翻轉	△異側
X_{B2} 位置			△同側		

四、等腰三角形一、二類全等點與其鏡射圖形頂點所形成之共圓觀察

四點共圓名稱＼組成點	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			
W2	✔			✔				✔						✔			
W3	✔				✔						✔					✔	
W4	✔		✔			✔	✔										
W5	✔		✔										✔	✔			
W6	✔		✔					✔		✔							
W7	✔		✔												✔		✔
W8						✔	✔		✔	✔							
W9													✔	✔		✔	✔
W10							✔	✔						✔	✔		

表 3-5 四點共圓分類

五、可以利用尺規作圖找出等腰三角形一二類全等點位置

六、偏移三角形全等點軌跡觀察(如右圖)

(一) 偏移三角形也和等腰三角形一樣，有迴轉、翻轉、重合、消失的現象

(二) 一、四、六類全等點軌跡會隨著偏移三角形往右而往右

(三) 二、三、五類全等點軌跡會隨著偏移三角形往右而往左

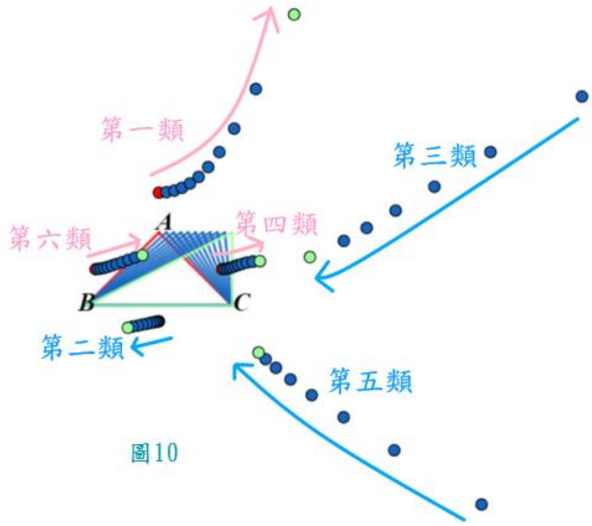


圖10

七、正多邊形全等點數量觀察

(一)奇數邊形全等點個數為[n(n-1)]個($n \neq 5$)

(二)偶數邊形全等點個數為[n(n-2)]個($n > 4$)

捌、未來展望

一、本篇研究範圍只包含等腰三角形的研究，希望未來能夠延伸到任意三角形、多邊形。

二、希望未來能夠利用代數解證明等腰三角形迴轉的現象和確切位置。

三、共圓觀察止步於等腰三角形一、二類，希望未來能夠加入三六類的全等點及其鏡射三角形討論。

四、探討共圓的種類能否在多邊形延用。

五、在共圓方面只證明出部分共圓，希望未來能將剩餘的圓證明完成。

玖、參考文獻

一、第 61 屆 全國科展國中組數學科 [由繁化簡～鏡射多邊形退化之探討]

【評語】030411

本作品研究全等點，從正三角形開始研究，有六個全等點。接著延伸至等腰三角形。除此之外，也研究點對三角形各邊鏡射，再將鏡射點連接形成鏡射圖形，探討鏡射圖形和點的變化。數學內容部分將全等點軌跡以函數圖形呈現，讓我們更清楚了解它的變化。作者們也發現全等點與其鏡射三角形所形成的共圓情形，以圖形顯現，充滿數學之美。最後，本作品也可以算是延續之前已經探討但尚未解決的問題做研究。在參考先前的文獻之下，可以很快進入核心問題。內容很值得鼓勵，需要不少的耐心與觀察來驗證結果。這是很好的作品！

作品簡報

X-mirrOr~
三角形全等點位置與性質討論

國中組 數學科

壹、研究問題

一、研究動機

- 第61屆全國科展國中組數學科：*由繁化簡～鏡射多邊形退化之探討*，發現「***全等點***」，並從此問題著手。
- 鏡射圖形會分組全等並重疊；任意三角形基本上皆會有六個不同的全等點。
- 各個三角形對應的全等點形成的軌跡有不同的規則，因此我們想觀察全等點的出現位置並加以討論。

二、研究目的

一、正三角形全等點位置之探討

二、等腰三角形全等點位置及全等點軌跡之探討

三、三角形偏移時相對應全等點軌跡之探討

四、全等點與其鏡射三角形所形成的共圓情形之探討

貳、研究過程與方法

一、名詞定義

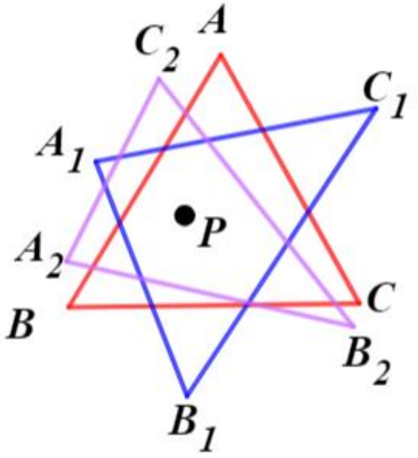


圖1-1 鏡射三角形

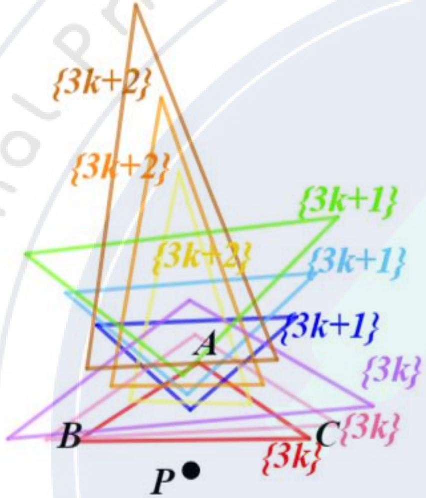


圖1-2 {3k}、{3k+1}、{3k+2}

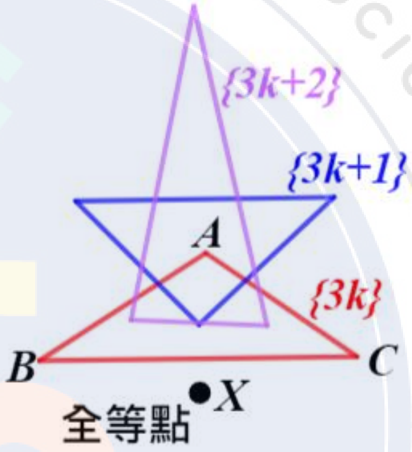


圖1-3 全等點

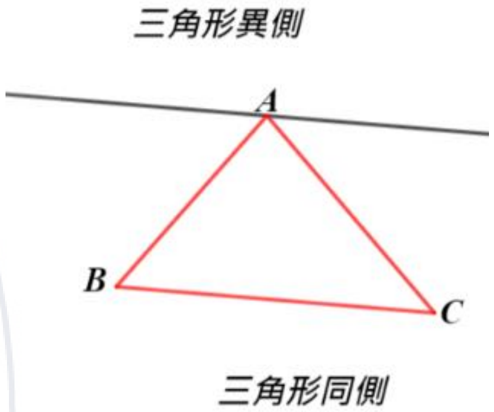


圖1-4 三角形同側、異側

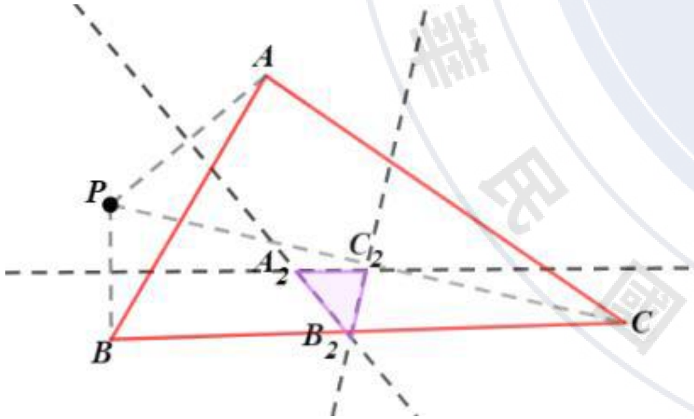


圖1-5 頂中垂交點圖形

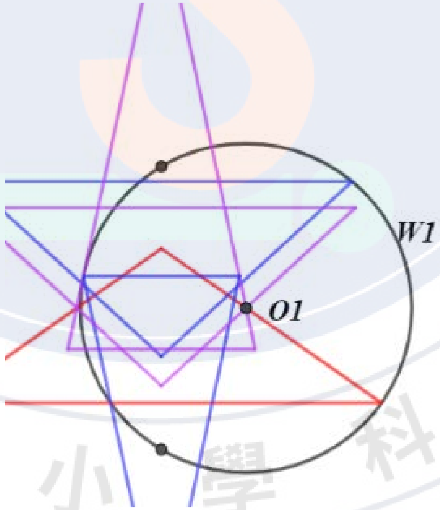


圖1-6 共圓W1

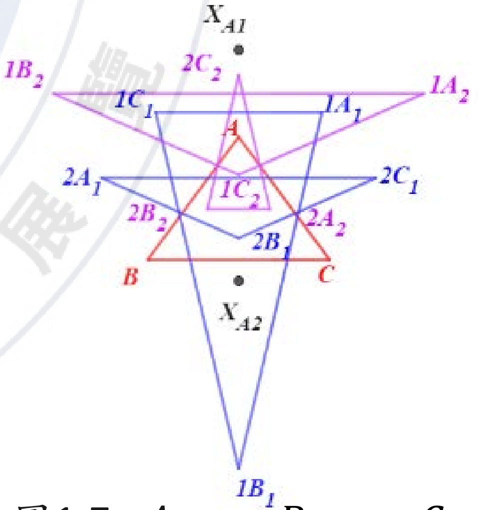


圖1-7 nA_m、nB_m、nC_m

貳、研究過程與方法

二、正三角形全等點探討

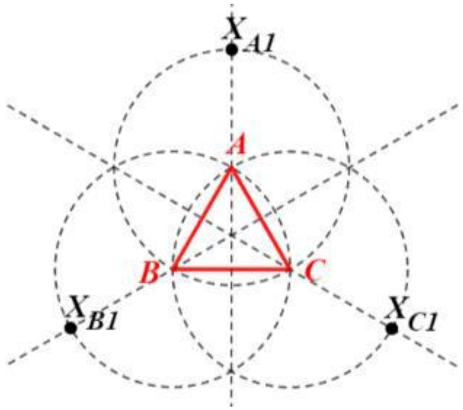


圖2-1 頂對全等點作圖

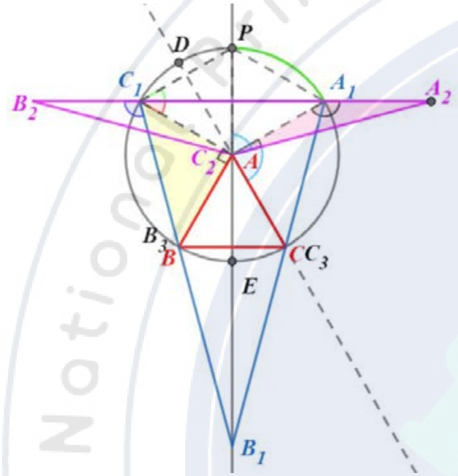


圖2-2頂對全等點作圖證明

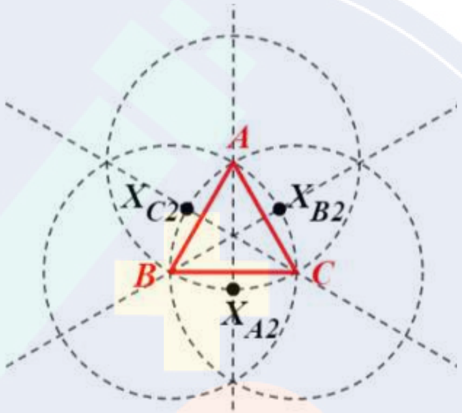


圖2-3邊對全等點作圖

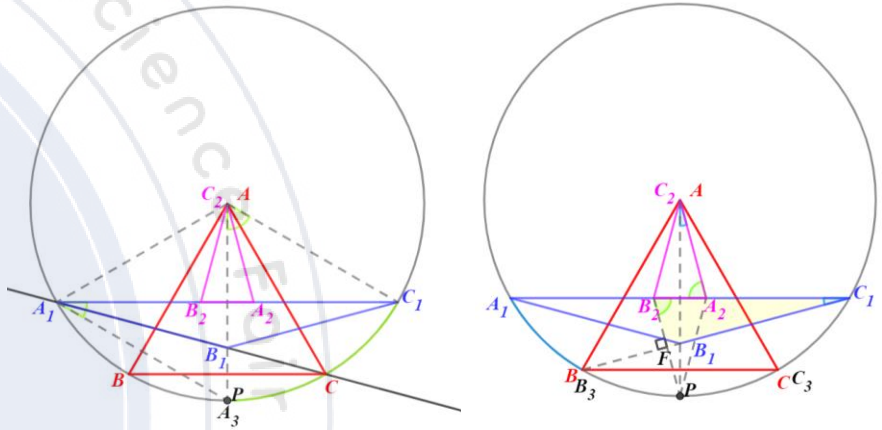
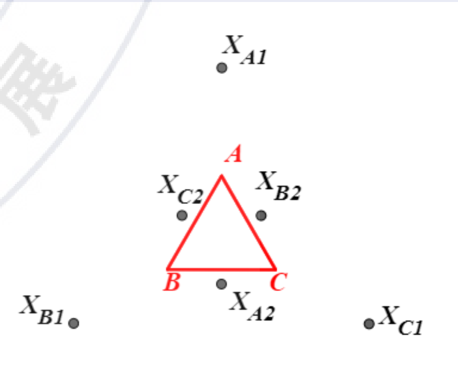


圖2-4邊對全等點作圖證明

表1 三角形全等點定義

圖形	對應角	對應邊	全等點名稱	全等點位置
△ABC	∠A		一類全等點	X_{A1}
		$\overline{BC}$	二類全等點	X_{A2}
	∠B		三類全等點	X_{B1}
		$\overline{AC}$	四類全等點	X_{B2}
	∠C		五類全等點	X_{C1}
		$\overline{AB}$	六類全等點	X_{C2}

圖2-5 全等點位置圖



貳、研究過程與方法

三、等腰三角形全等點軌跡觀察

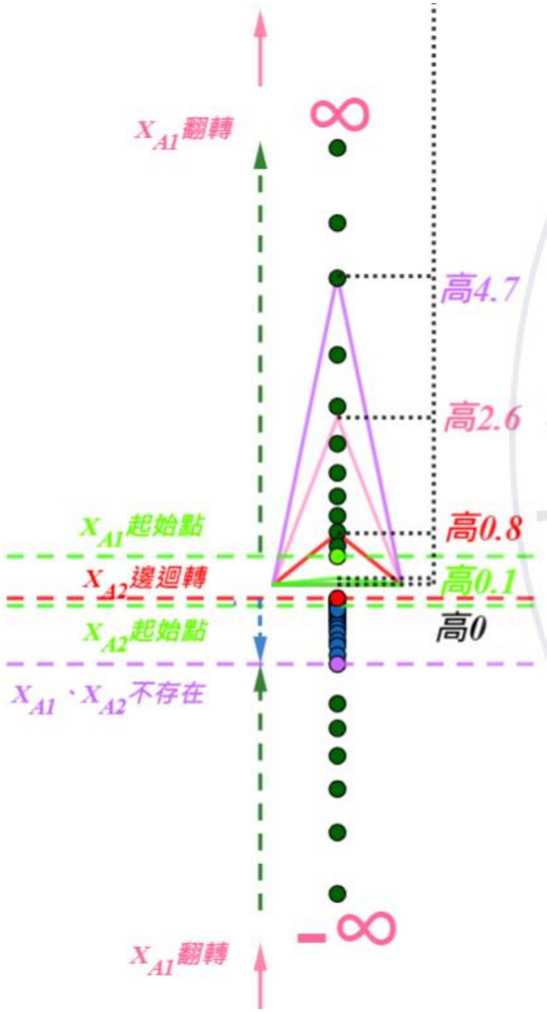


圖3-1 等腰三角形一二類軌跡

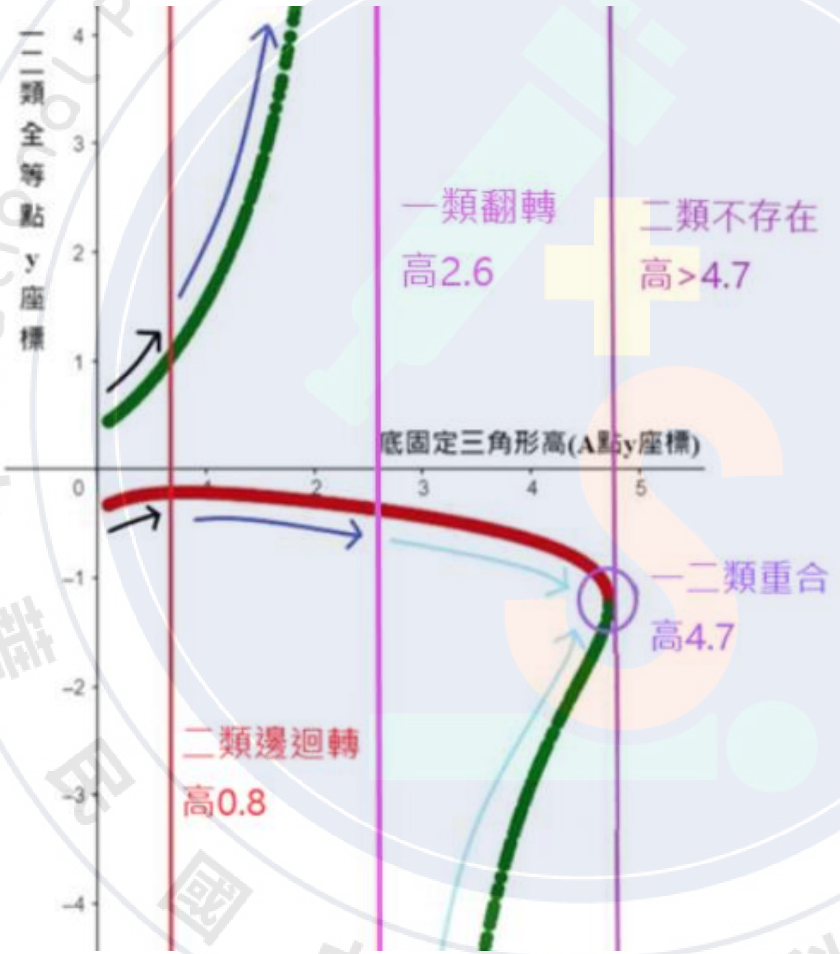


圖3-2 等腰三角形一二類函數圖形

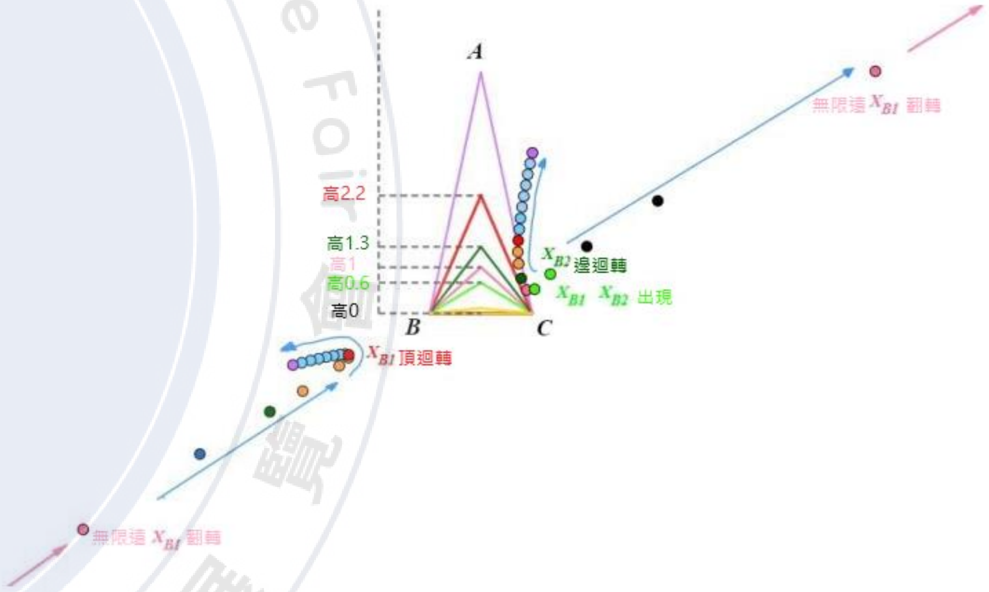


圖3-3 等腰三角形三四類軌跡

貳、研究過程與方法

四、等腰三角形一二類全等點代數解探討

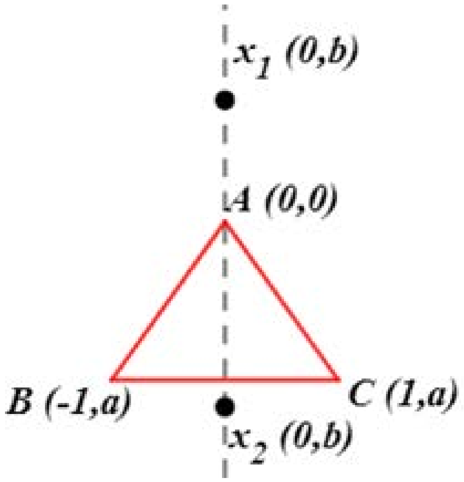


圖4-1各點座標定義

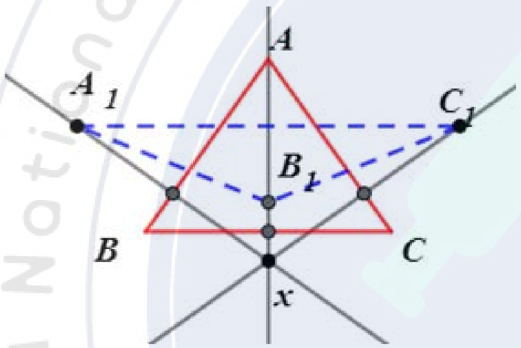


圖4-2第一層

鏡射

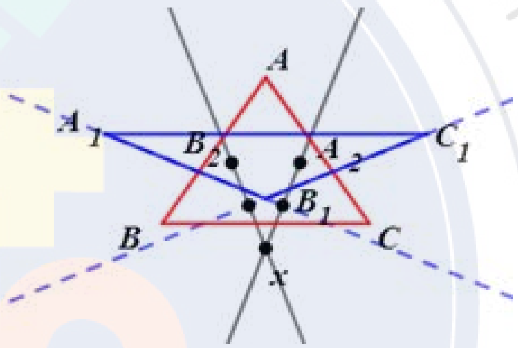


圖4-3第二層底邊

鏡射

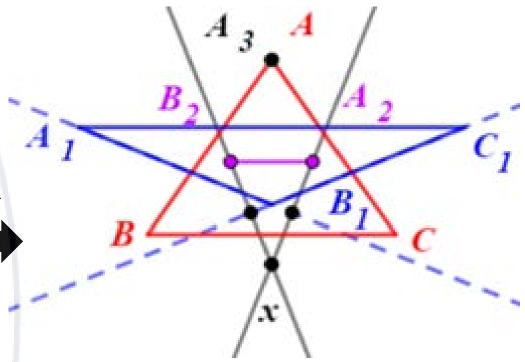


圖4-4第三層頂點

表2-1 一、二類全等點座標

全等點	座標
X_{A1}	$\left(0, \dfrac{a^3-3a-\sqrt{a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$
X_{A2}	$\left(0, \dfrac{a^3-3a-\sqrt{a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$

表2-2 等腰三角形一、二類全等點高對應之變化

高	$<\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7} \sim \sqrt{8\sqrt{2}+11}$	$\sqrt{8\sqrt{2}+11}$	$>\sqrt{8\sqrt{2}+11}$
X_{A1}	異側	翻轉	同側	重合	消失
X_{A2}	同側				

貳、研究過程與方法

五、等腰三角形三到六類全等點代數解探討

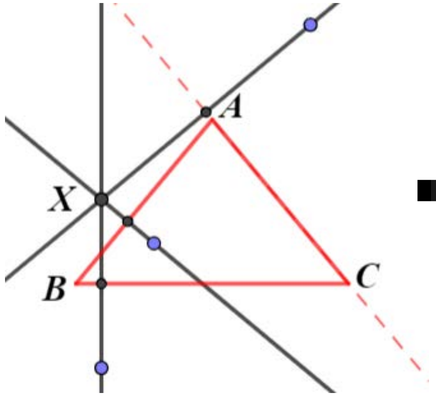


圖5-1 第一層頂點

鏡射

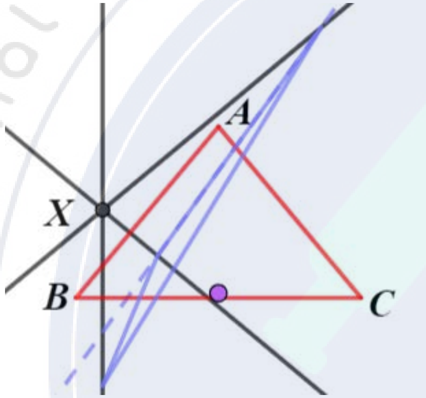


圖5-2 第二層其一頂點

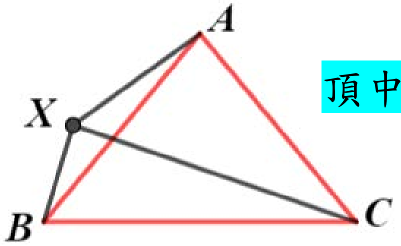


圖5-3 全等點與座標連線

頂中垂交點圖形

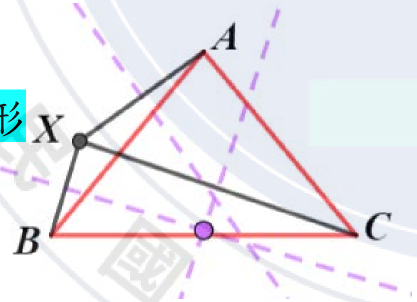


圖5-4 第二層同一頂點

表3-1 三到六類全等點座標

全等點	座標
X_{B1}	$\left(\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{B2}	$\left(-\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C1}	$\left(-\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C2}	$\left(\frac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\frac{3a^3-a+s\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$

表3-2 等腰三角形三到六類全等點高對應之變化

<table>
<tr><td>高</td><td>$<\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$~1</td><td>1</td><td>>1</td></tr>
<tr><td>X_{B1}、C1</td><td rowspan="2">不存在</td><td rowspan="2">重合</td><td rowspan="2">同側</td><td>翻轉</td><td>異側</td></tr>
<tr><td>X_{B2}、C2</td><td colspan="2">同側</td></tr>
</table>

參、研究分析與討論

一、等腰三角形一二類全等點與鏡射三角形形成之共圓觀察

表4-1 共圓紀錄

組成點 / 四點共圓名稱	A	B	C	X_{A1}	$1A_1$	$1B_1$	$1C_1$	$1A_2$	$1B_2$	$1C_2$	X_{A2}	$2A_1$	$2B_1$	$2C_1$	$2A_2$	$2B_2$	$2C_2$
W1			✔	✔			✔				✔			✔			
W2	✔			✔				✔						✔			
W3	✔				✔						✔					✔	
W4	✔		✔			✔	✔										
W5	✔		✔										✔	✔			
W6	✔		✔					✔		✔							
W7	✔		✔												✔		✔
W8						✔	✔		✔	✔							
W9													✔	✔		✔	✔
W10							✔	✔						✔	✔		

表4-2 各類共圓共通性

類別	圓	共通性
一類	W1	五點共圓
二類	W2、W3	點A、全等點、{3k+1}、{3k+2}
三類	W4~W7	點B、點C、兩個{3k+1}或{3k+2}
四類	W8、W9	兩個{3k+1}、兩個{3k+2}
五類	W10	

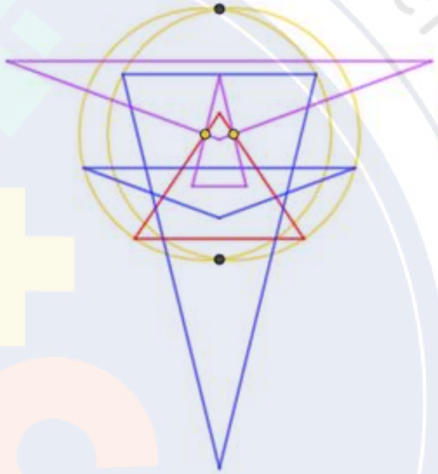


圖6-1 一類

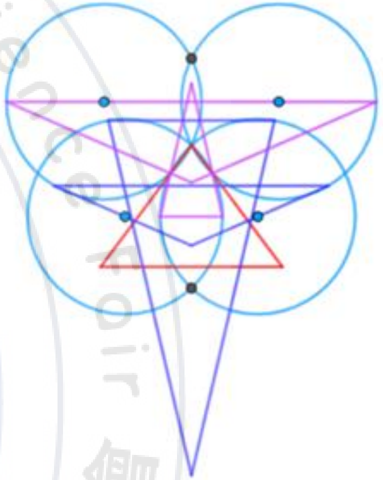


圖6-2 二類

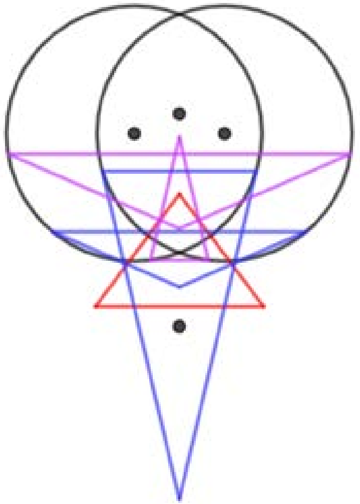


圖6-5 五類

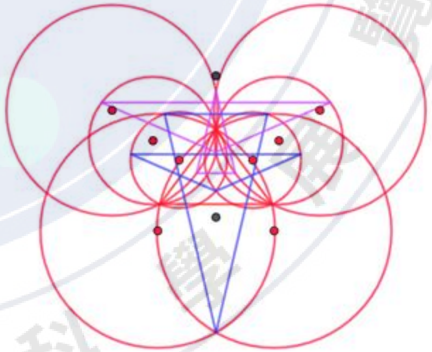


圖6-3 三類

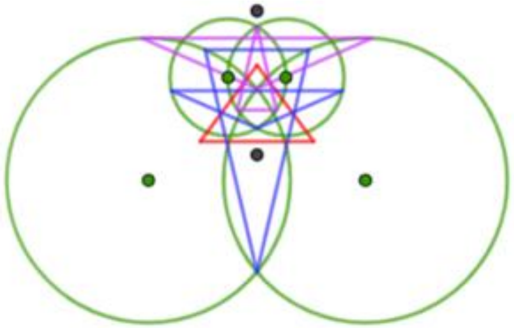


圖6-4四類

參、研究分析與討論

二、共圓證明

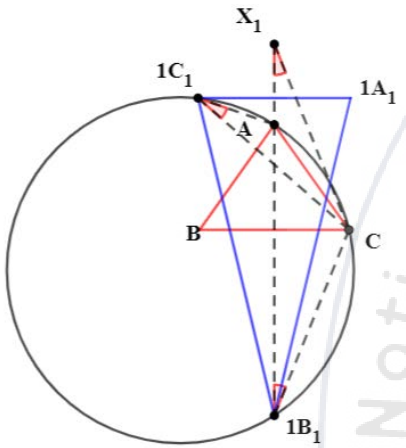


圖6-6 共圓4

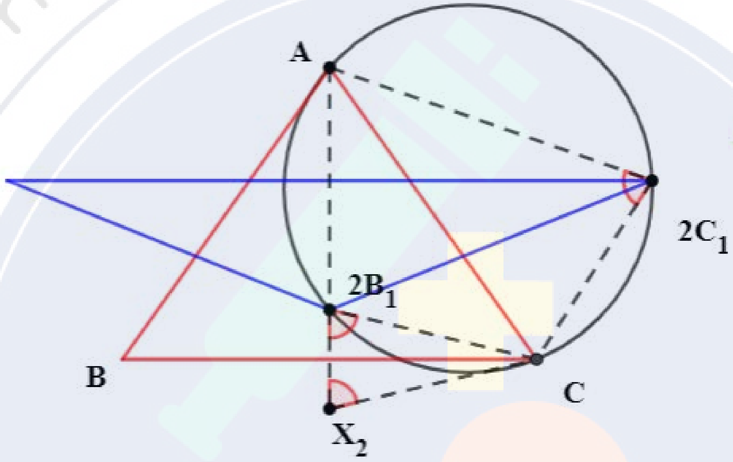


圖6-7 共圓5

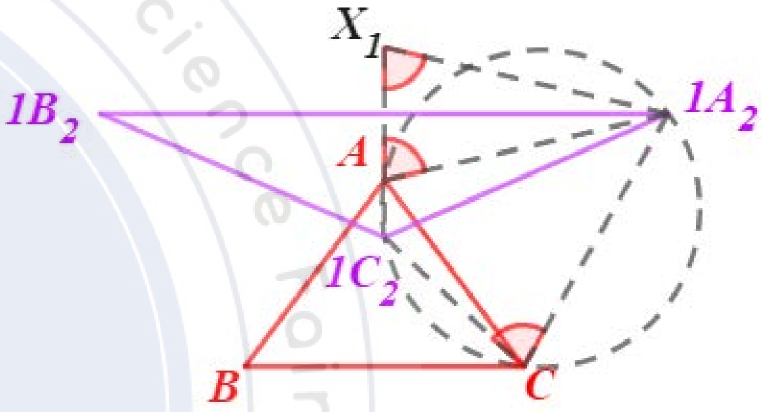


圖6-8 共圓6

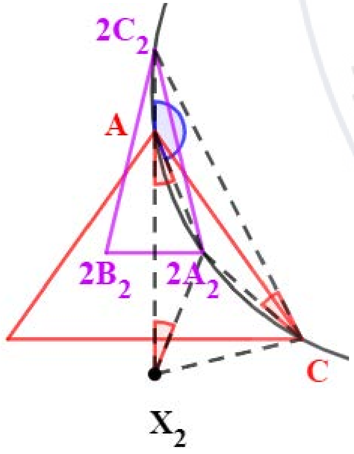


圖6-9 共圓7

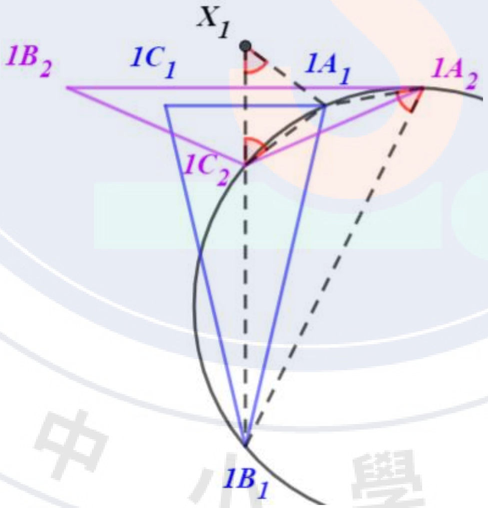


圖6-10 共圓8

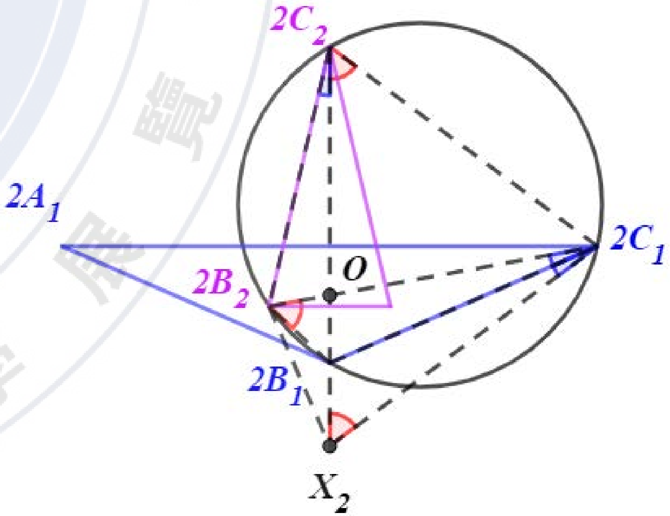


圖6-11 共圓9

參、研究分析與討論

三、全等點作圖法

已知：△ABC為等腰三角形，高為a

求證：X_{A1}、X_{A2}座標位置

原理：1. 利用代數解所求出的X_{A1}、X_{A2}座標$\left(0,\frac{a^3-3a\pm\sqrt{a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$的中$\frac{a^3-3a}{a^2-7}$點

2. 利用五點共圓找出X_{A1}、X_{A2}座標位置

作圖性質：子母相似

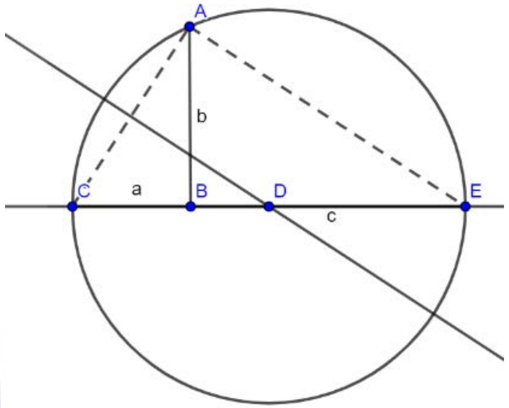


圖7-1 子母相似

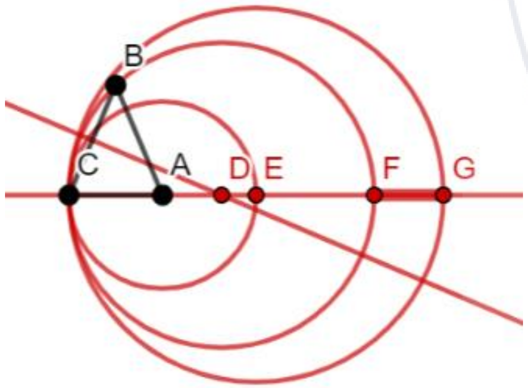


圖7-2 $|a^2-7|$

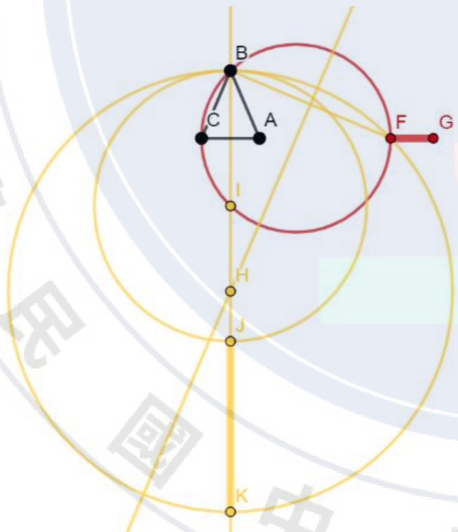


圖7-3 $|a^3-3a|$

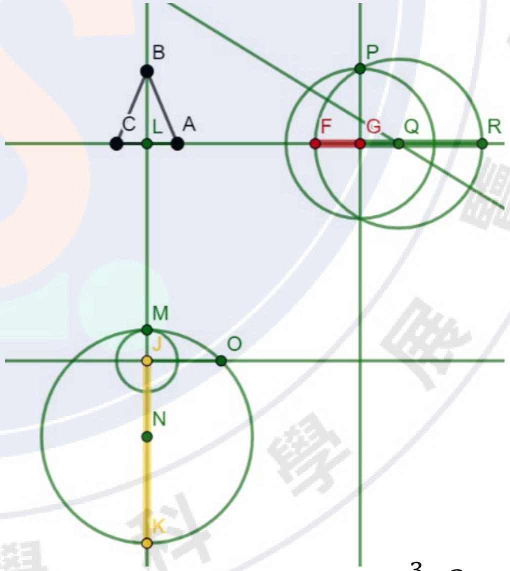


圖7-4 X_{A1}、X_{A2}中點$\frac{a^3-3a}{a^2-7}$

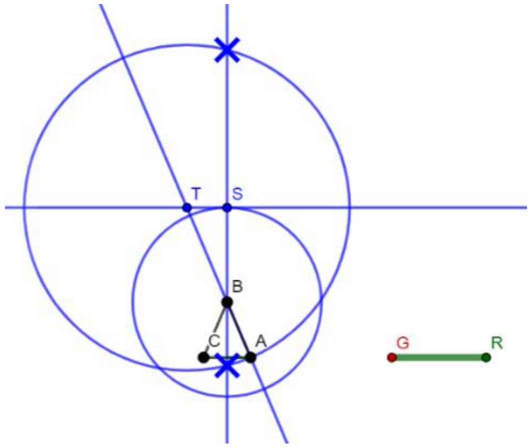


圖7-5 求出全等點座標

肆、結論

一、等腰三角形全等點

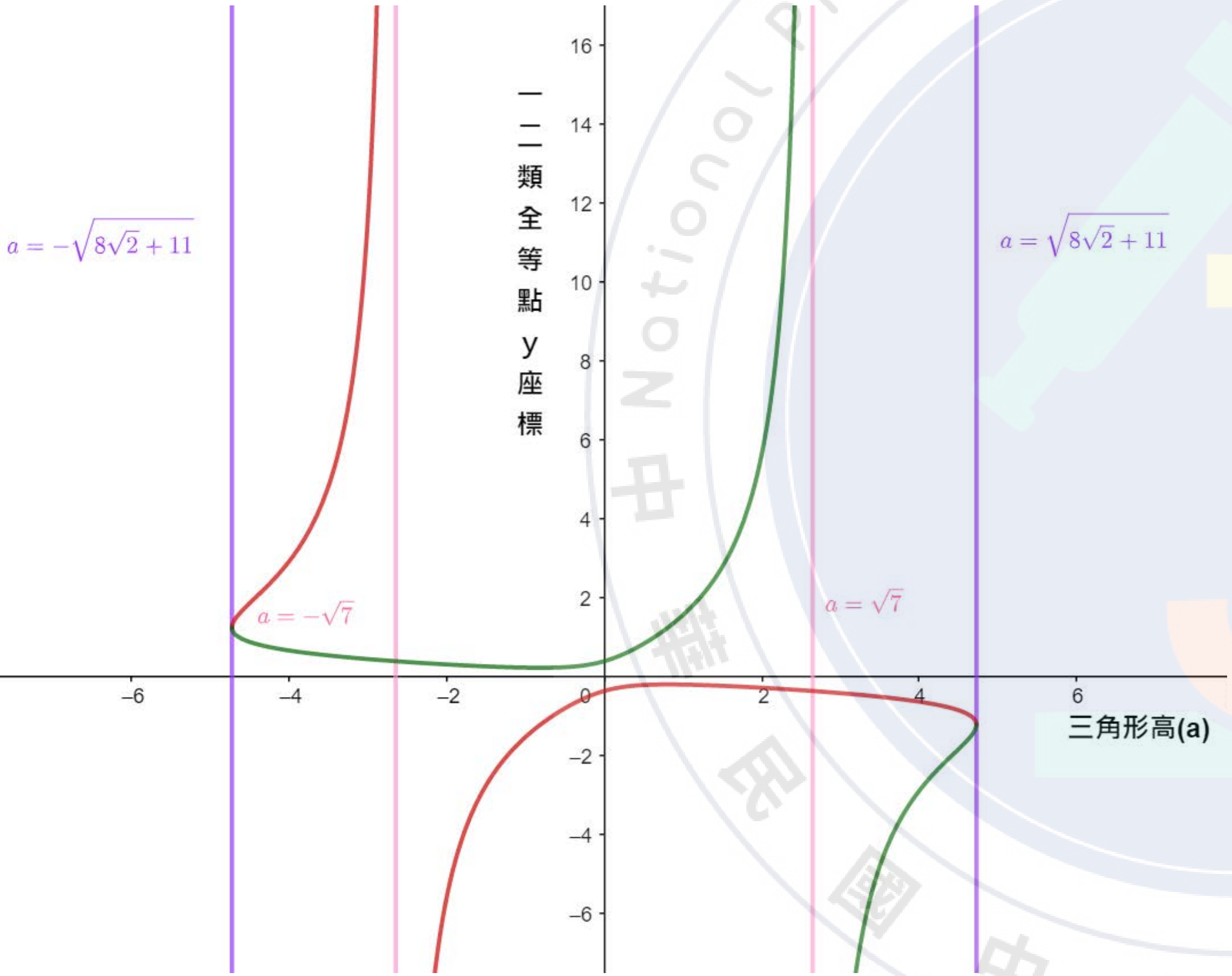


圖8-1 等腰三角形一二類函數圖形

表5-1 全等點座標

全等點	全等點座標
X_{A1}	$\left(0,\dfrac{a^3-3a-\sqrt{a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$
X_{A2}	$\left(0,\dfrac{a^3-3a-\sqrt{a^4+22a^2+7}}{a^2-7}\right)$
X_{B1}	$\left(\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{B2}	$\left(-\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a+\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C1}	$\left(-\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}-\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a-\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$
X_{C2}	$\left(\dfrac{a\sqrt{(a^2+5)(3a^2-1)}+\sqrt{(a^2+5)(a^4-a^2+2)}}{4a^2-4},\dfrac{3a^3-a+s\sqrt{(a^4-a^2+2)(3a^2-1)}}{4a^2-4}\right)$

表5-2 等腰三角形一、二類全等點高對應之變化

<table>
<tr><td>高</td><td><$\sqrt{7}$</td><td>$\sqrt{7}$</td><td>$\sqrt{7}$~$\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td><td>$\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td><td>>$\sqrt{8\sqrt{2}+11}$</td></tr>
<tr><td>X_{A1}</td><td>異側</td><td>翻轉</td><td>同側</td><td rowspan="2">重合</td><td rowspan="2">消失</td></tr>
<tr><td>X_{A2}</td><td colspan="3">同側</td></tr>
</table>

表5-3 等腰三角形三到六類全等點高對應之變化

<table>
<tr><td>高</td><td><$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$~1</td><td>1</td><td>>1</td></tr>
<tr><td>X_{B1}、C1</td><td rowspan="2">不存在</td><td rowspan="2">重合</td><td rowspan="2">同側</td><td>翻轉</td><td>異側</td></tr>
<tr><td>X_{B2}、C2</td><td colspan="2">同側</td></tr>
</table>

肆、結論

二、正三角形共有六個全等點，其中三個為頂對全等點，三個為邊對全等點。

三、找出了20個共圓，共5類

四、可以利用尺規作圖找出等腰三角形一二類全等點位置

五、偏移三角形全等點軌跡觀察(如圖)

六、正多邊形全等點數量觀察

- 1. 奇數邊形全等點個數為[n(n-1)]個($n\neq5$)
- 2. 偶數邊形全等點個數為[n(n-2)]個($n>4$)

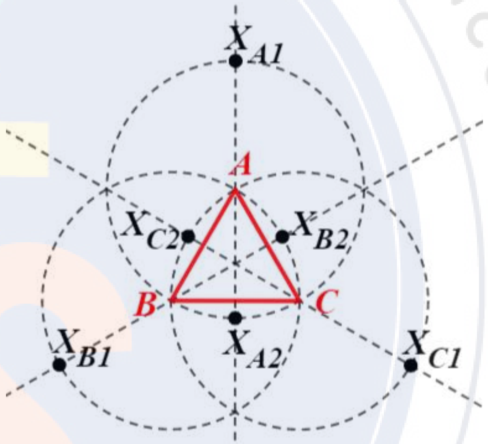


圖8-2 正三角形全等點

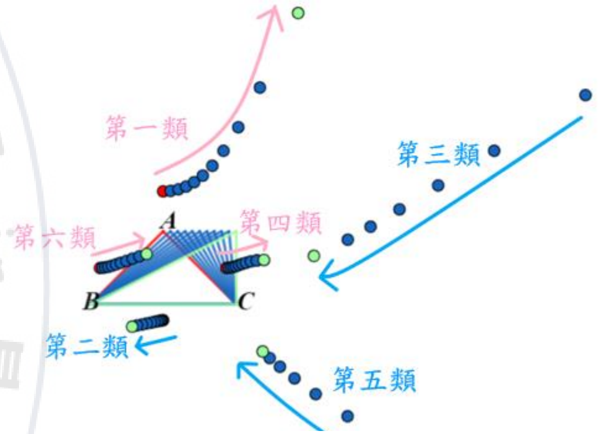


圖8-3 偏移三角形全等點軌跡

五、未來展望

一、將全等點延伸到任意三角形、多邊形
二、希望能利用代數解證明等腰三角形迴轉的現象和確切位置
三、希望共圓部分能加入三六類的全等點討論，並沿用至多邊形