中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030409

井字遊戲-次元突破

學校名稱：雲林縣立斗六國民中學

作者：	指導老師：
國二 謝天晴 國二 朱俊豪 國二 張世宏	楊浩宇

關鍵詞：井字遊戲、OX 遊戲、維度

摘要

本次研究的目的，是將傳統的井字遊戲做延伸，將之轉成立體空間的 OX 遊戲，討論 3x3x3 井字遊戲的先手必勝方式；之後將立體井字遊戲再延伸，把維度提高至 4 以上，給定維度在 4 以上的遊戲規則，同時找出在維度 n、長度 3 的情況下，先手必勝的方式；再來計算出在維度 n、長度 k 的情況下，可連線之方式有$\sum_{i=1}^{n} C_i^n \times 2^{i-1} \times k^{n-i}$種，也給出在維度 n、長度 k 的條件下，任意給出一點，此點可連線出去的條件與算法，最後得到結論，點越置中越好。

壹、研究動機

井字遊戲，這是個雖然簡單卻有許多變化的遊戲，於是我們決定加以研究，突破我們對常見的平面與立體井字遊戲的認知，也就是平面笛卡兒坐標系與三維笛卡兒坐標系對井字遊戲的侷限，討論在更高維度中，井字遊戲的勝利棋盤與其和數學連結，並採取部分高中數學之內容用以推論及探索。

貳、研究目的

一、了解 3x3 井字遊戲的棋譜與勝敗和局之間的關係。

二、研究 3x3x3 立體井字遊戲，並推論其的遊戲邏輯。

三、將井字遊戲研究推論至高維度。

參、研究器材

一、3x3 平面井字遊戲、3x3x3 立體井字遊戲等適用之棋盤。（以探討其研究主旨）。

二、大量白紙、筆（利於筆記）。

三、平板、電繪筆、電腦（利於資料彙整）。

肆、研究過程或方法

本節主要分為兩個部分，第一部分為井字遊戲名詞解釋及定義，第二部分為井字遊戲的分析及研究：一、3x3x3 立體井字遊戲，並推論其的遊戲邏輯，二、用座標系推論更高維度的座標表示法 。

一、名詞解釋及定義

（一）井字遊戲：

1. 遊戲來源：又稱為井字棋、圈圈叉叉、打井遊戲、OX 棋的稱呼。
2. 規則 ：先手畫 O，後手畫 X 。先將 3 個相同符號連成一條線的人就是贏家。

（二）翻轉棋盤：使用右轉 90 度、右轉 180 度的方式旋轉棋盤，由於棋盤是對稱的，因此另外可分垂直反轉與水平翻轉，而此實驗因延伸到四維空間，則也包含多維翻轉。

（三）維度：一般認為 0 維即點、1 維作線、2 維作面形成面積，而三維則是 3 維是 2 維加上高度形成「體積面」。

（四）空間維：指我們周圍的空間所有的三個維（上下、前後、左右），而所有座標皆能以其 3 個三維座標軸來表示。

（五）坐標系：數學或物理學用語。指對於一個 n 維系統，能夠使每一個點和一組 n 個純量構成一一對應的系統，例如（3,1,2,5,3）為一個五維度的座標。

（六）T：指玩家收集的點裡，所有點的某一維度之數字皆相同。

（七）S：指玩家收集的點裡，所有點的某一維度之數字可依正向或反向順序排出。

（八）邊長：為單一軸座標可表示之最高數字，同單一軸可下之棋子數。

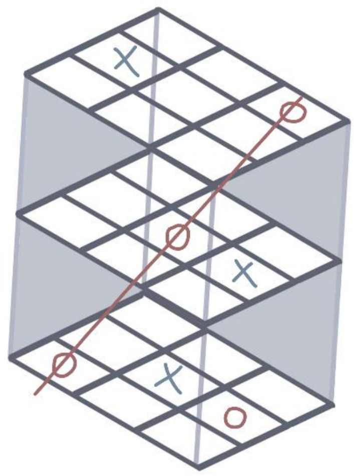
（九）k：如同「井字邊長」之定義，為單一軸座標可表示之最高數字，同單一軸可下之棋子數。用於在座標系表示法，作為單一座標項之可選擇的最大數字。

（十）n：如同「維度」之定義，用於表示對局中的維度。

二、井字遊戲的延伸分析及研究

首先我們先將傳統井字遊戲延伸至立體的井字遊戲，即是在一個 3×3×3 立方體中的 27 個方格內下棋，獲勝條件與傳統井字遊戲相同，只要集滿三點連成一線就能獲勝。

如以下戰局呈現，圈為獲勝者。

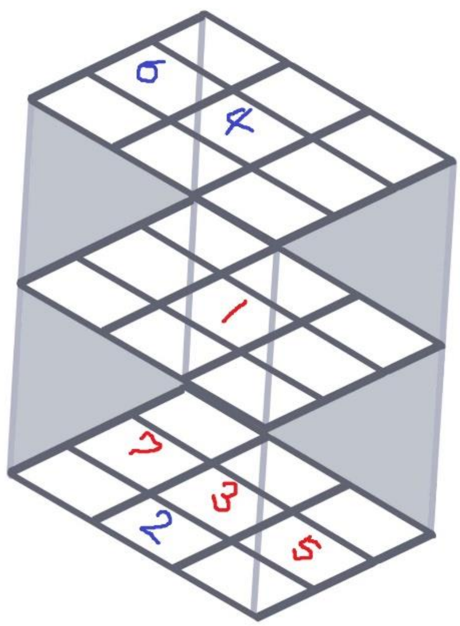


（一）、維度 3、長度 3 先手必勝（3×3×3）

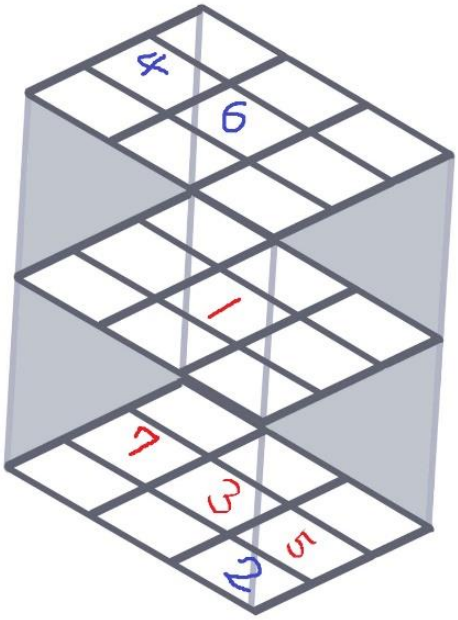
本次研究的起頭，我們將推導出當先手下在正中間，先手必勝。

如下圖：

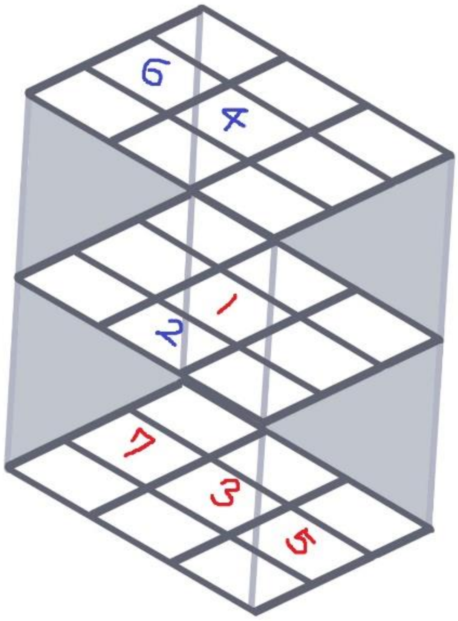
情況 1，後手下在每個最外邊的正中間，不失一般性假設後手下在底層邊緣：



情況 2，後手下在每個角落，不失一般性假設後手下在底層角落：



情況 3，後手下在每個面正中間，不失一般性假設後手下在中層側邊的中間：



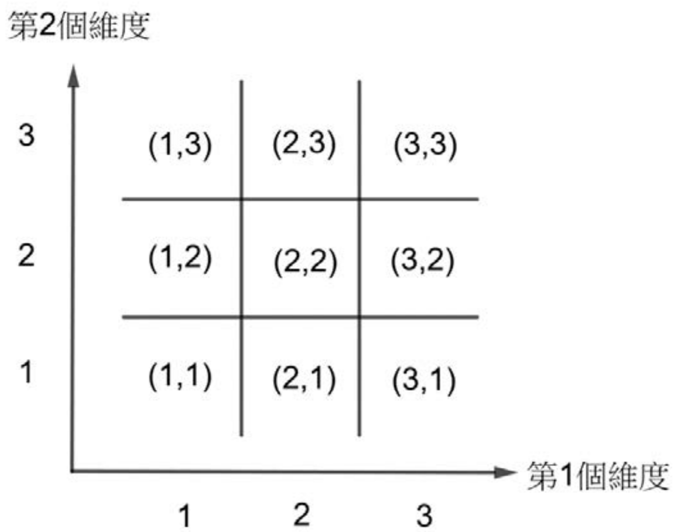
依上面三種情況討論，又因立體空間水平的旋轉以垂直翻轉，我們推論出在 3x3x3 的情況下，先手必勝。

接著，我們將討論推展至更高維度（大於 3 維）。

（二）、延伸至更高維度的表達方式

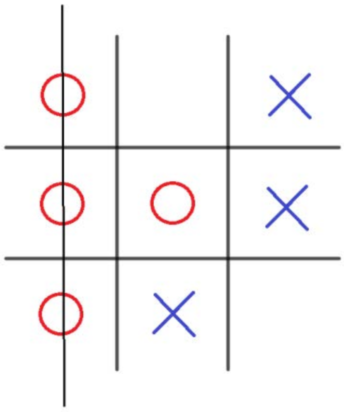
在經過一番審思之下，我們決定使用數學課教的座標，來表示更高維度。

首先我們先將傳統井字遊戲以座標化呈現：



如上圖所示，若棋步下在井字的左下角，我們遊戲改以收集座標點（1,1）呈現；若棋步下在井字的正中間，我們遊戲則改以收集座標點（2,2）呈現。

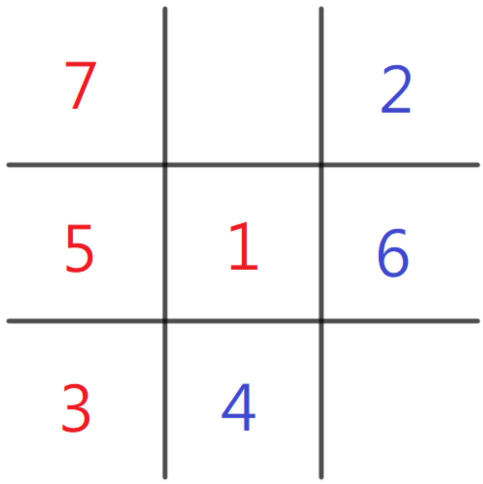
我們再以實際戰局來表示座標化的樣態：



此戰局中紅色圓圈連線的三個座標為（1,1）、（1,2）、（1,3）。

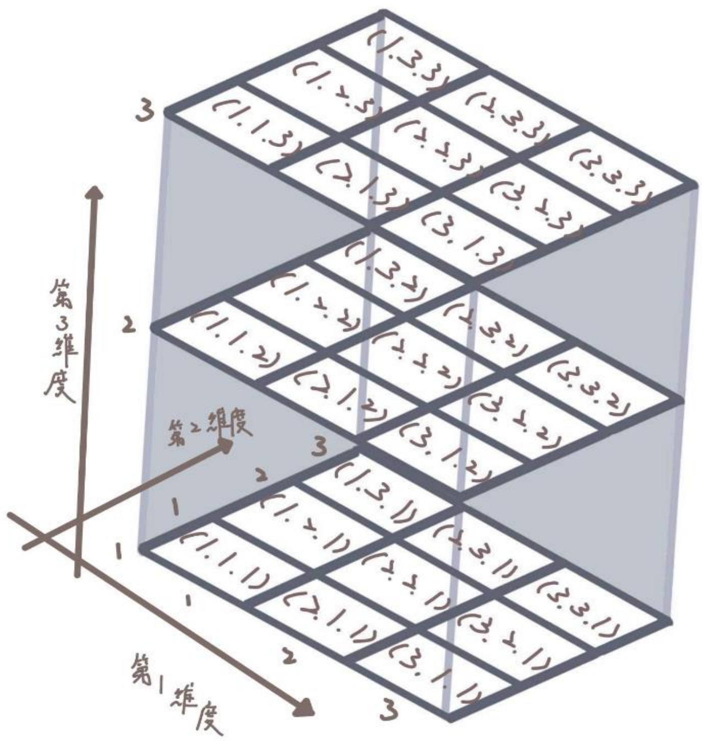
接著我們做個比較：

先手下棋順序：	後手下棋順序：
（2,2）位置 1	（3,3）位置 2
（1,1）位置 3	（2,1）位置 4
（1,2）位置 5	（3,2）位置 6
（1,3）位置 7	
先手獲勝	



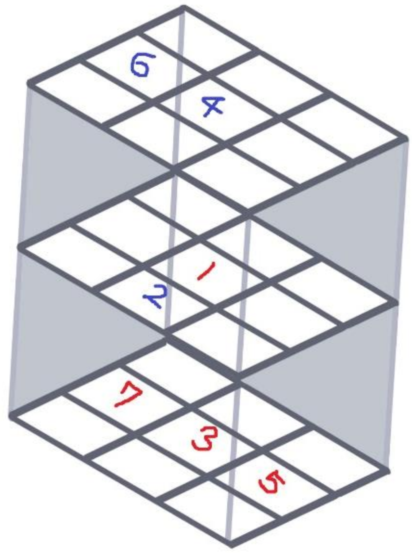
傳統井字遊戲的座標化，我們可以發現，井字遊戲變為維度 2、長度 3 的樣態。把所有可下 O、X 的地方變成座標，並將所有座標視為可收集的棋，井字中有 3×3=9 個棋，原本的圈叉遊戲，改變為收集座標的遊戲。

接著我們將 3×3×3 的圈叉遊戲以座標化呈現，將 3×3×3 的 27 個方格標上座標，如下圖呈現。



然後再以先前討論中 3×3×3 的對局下法步驟表格化：

先手下棋順序：	後手下棋順序：
（2,2,2）位置 1	（2,1,2）位置 2
（2,2,1）位置 3	（2,2,3）位置 4
（3,2,1）位置 5	（1,2,3）位置 6
（1,2,1）位置 7	
先手獲勝	

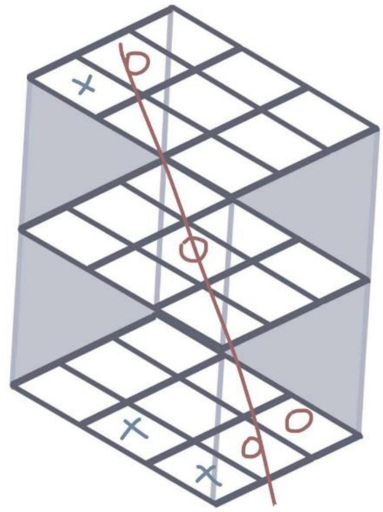


我們觀察維度 2 以及維度 3 的井字遊戲後，發現連線的座標都符合一些規律，如下面表格顯示：

維度 2、長度 3	維度 3、長度 3
（1,1）	（1,2,1）
（1,2）	（2,2,1）
（1,3）	（3,2,1）
第 2 個維度可依序排出 1 至 3	第 1 個維度可依序排出 1 至 3

我們再來看看下圖的連線。

先手所連線的位置：
（1,2,3）
（2,2,2）
（3,2,1）
第 1 維度依序排出 1 至 3 第 2 維度全部數字一樣 第 3 維度依序排出 3 至 1



最後我們延伸這樣的想法，把一般的 OX 棋遊戲延伸至更高維度與長度時，我們把所有的點座標當作可收集的點，因此高維度與長度的 OX 遊戲，就轉換成了收集座標點的遊戲。依照傳統井字遊戲規則的延伸，在高維度與長度的 OX 遊戲中，每個點不可被重複收集。

並且我們給出，在維度 n、長度 k 的對局遊戲中，遊戲結束的條件。

1. **先手、後手其中一人先將點收集超過 k 個點；在各自收集的點中，可挑出 k 個點，符合以下條件者獲勝：**
   (1) 此 k 個點至少可以將其中一個維度的編號依序排列出 1 至 k（之後稱為正 S）。
   (2) 此 k 個點其中一個維度排列出 1 至 k 的順序後，剩餘的維度必須成 1 至 k 的順序（之後稱為正 S）、k 至 1（之後稱為反 S）的順序或所有點的號碼一樣（之後稱為 T）。
2. **若先手、後手將所有k^n個點全部收集完皆無法獲勝，則判定為平局，遊戲結束。**

以維度 5、長度 7 來說，收集滿（7,1,1,1,1）（6,1,2,1,1）（5,1,3,1,1）（4,1,4,1,1）（3,1,5,1,1）（2,1,6,1,1）（1,1,7,1,1）此 7 個點就可以達成連線獲勝。這 7 個點中，第 1 座標成反 S，第 3 座標成正 S，第 2、4、5 座標成 T。

接著我們以實際戰局當作例子呈現：

對局 1，維度 3、長度 4：

	先手：	後手：
第 1 收集點	（2,2,2,2）★	（2,1,1,1）
第 2 收集點	（2,1,2,1）	（2,3,2,3）
第 3 收集點	（2,2,3,2）★	（2,3,1,3）
第 4 收集點	（2,3,3,3）	（2,1,3,1）
第 5 收集點	（2,2,1,2）★	X
先手優先收集滿 3 點（2,2,1,2）（2,2,2,2）（2,2,3,2），先手獲勝。		

對局 2，維度 5、長度 4：

	先手：	後手：
第 1 收集點	（2,2,2,2,2）	（3,3,3,3,3）
第 2 收集點	（2,1,2,2,3）	（2,3,2,3,3）★
第 3 收集點	（2,3,2,2,1）	（2,4,2,2,4）
第 4 收集點	（2,4,2,3,3）	（4,3,2,1,3）★
第 5 收集點	（1,3,4,3,3）	（1,3,2,4,3）★
第 6 收集點	（1,2,2,2,2）	（3,3,2,2,3）★
後手優先收集滿 4 點（1,3,2,4,3）（2,3,2,3,3）（3,3,2,2,3）（4,3,2,1,3），後手獲勝。		

對局 3，維度 5、長度 5：

	先手：	後手：
第 1 收集點	（3,3,3,3,3）	（2,3,2,3,2）
第 2 收集點	（3,2,3,2,3）★	（3,4,3,4,3）

第 3 收集點	（4,2,4,2,4）	（2,2,5,2,2）
第 4 收集點	（3,2,2,2,2）	（3,2,1,2,2）
第 5 收集點	（2,2,4,2,2）★	（1,2,1,5,1）
第 6 收集點	（1,2,5,2,1）★	（4,2,3,2,5）
第 7 收集點	（4,2,1,2,1）	（5,2,4,2,4）
第 8 收集點	（4,2,2,2,4）★	（3,2,5,2,1）
第 9 收集點	（2,2,3,2,3）	（1,2,5,2,2）
第 10 收集點	（5,2,1,2,5）★	X
先手優先收集滿 3 點（1,2,5,2,1）（2,2,4,2,2）（3,2,3,2,3）（4,2,2,2,4）（5,2,1,2,5），先手獲勝。		

（三）、討論在 n 維、長度 3 的情況下，同為先手必勝

藉由（二）中的規則討論，我們不難發現，在 n 維、長度 3 的情況下，我們必須先收集點達到長度 3 的連線方可獲勝，而先手只要任意挑出 n 維之中的其中 3 個維度，依照（一）中的下法，先手必勝。

我們以實際對局來呈現：

對局 1，維度 5、長度 3

先手	後手
（2,2,2,X,X）	（2,1,1,X,X）
（2,2,1,X,X）	（2,2,3,X,X）
（3,2,1,X,X）	（1,2,3,X,X）
（1,2,1,X,X）	X

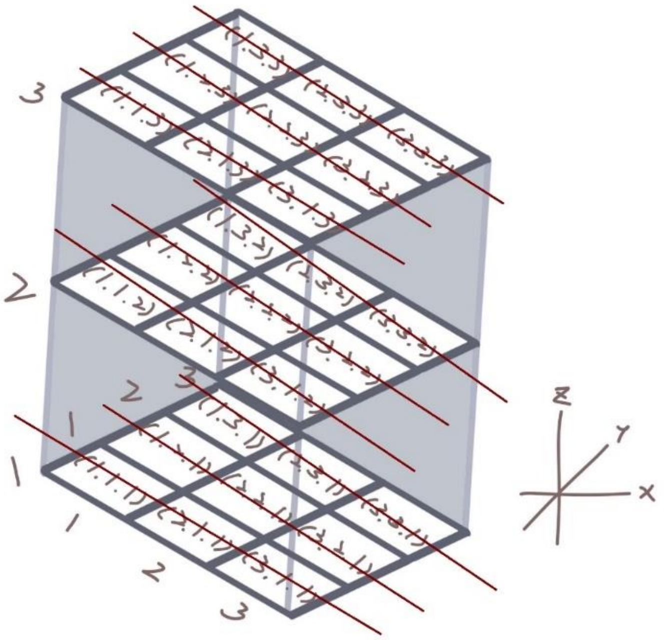
對局 2，維度 6、長度 3

先手	後手
（X,2,2,X,2,X,）	（X,2,1,X,2,X,）
（X,2,2,X,1,X,）	（X,2,2,X,3,X,）
（X,3,2,X,1,X,）	（X,1,2,X,3,X,）
（X,1,2,X,1,X,）	X

同時容易發現，若後手沒有依照（一）中的下法去和先手對抗，先手可以更快的獲勝。

（四)、推論 3×3×3 正方體之線段數量

類 1、STT（x 差 1、y 相同、z 相同）



所含線條如圖表所示，統計共 9 條，有：

1 號線通過點（1,1,1）(2,1,1）(3,1,1）

2 號線通過點（1,2,1）(2,2,1）(3,2,1）

3 號線通過點（1,3,1）(2,3,1）(3,3,1）

4 號線通過點（1,1,2）(2,1,2）(3,1,2）

5 號線通過點（1,2,2）(2,2,2）(3,2,2）

6 號線通過點（1,3,2）(2,3,2）(3,3,2）

7 號線通過點（1,1,3）(2,1,3）(3,1,3）

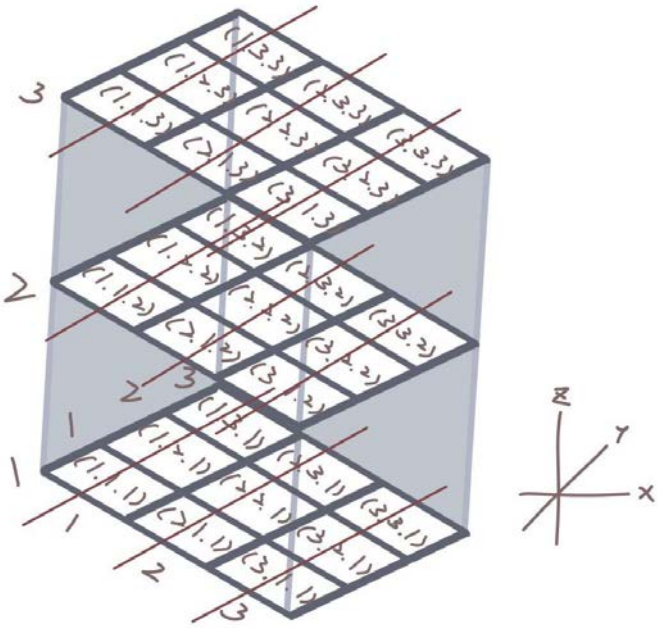
8 號線通過點（1,2,3）(2,2,3）(3,2,3）

9 號線通過點（1,3,3）(2,3,3）(3,3,3）

但其實這樣的表達方式並不完整，嚴格說有 18 種配對方法，但因「翻轉棋盤」的原理，和（1,1,1）(2,1,1）(3,1,1）重複的（3,1,1）(2,1,1）(1,1,1）會被扣掉，因此和上述 9 種線重疊的另外 9 種配對方法會被扣除，因此得「18/2」條分類為 STT 的直線。

我們數學算式推算及統整，相異三點的 x 項的座標可連結線段為（1,y,z）（2,y,z）（3,y,z）及（3,y,z）（2,y,z）（1,y,z），而因上述「棋盤翻轉」原理，我們可以視（3,y,z）（2,y,z）（1,y,z）不算，將後續的算式除以 2 避免重複計算；相異三點的 y 項的座標可選擇方式為（x,1,z）（x+1,1,z）（x+2,1,z）、（x,2,z）（x+1,2,z）（x+2,2,z）、（x,3,z）（x+1,3,z）（x+2,3,z）；相異三點的 z 項的座標可選擇方式為（x,y,1）（x+1,y,1）（x+2,y,1）、（x,y,2）（x+1,y,2）（x+2,y,2）、（x,y,3）（x+1,y,3）（x+2,y,3），計：「$\frac{2\times3\times3}{2}$」

類 2、TST（x 相同、y 差 1、z 相同）



所含線條如圖表所示，統計共 9 條，有：

10 號線通過點（1,1,1）（1,2,1）（1,3,1）

11 號線通過點（2,1,1）（2,2,1）（2,3,1）

12 號線通過點（3,1,1）（3,2,1）（3,3,1）

13 號線通過點（1,1,2）（1,2,2）（1,3,2）

14 號線通過點（2,1,2）（2,2,2）（2,3,2）

15 號線通過點（3,1,2）（3,2,2）（3,3,2）

16 號線通過點（1,1,3）（1,2,3）（1,3,3）

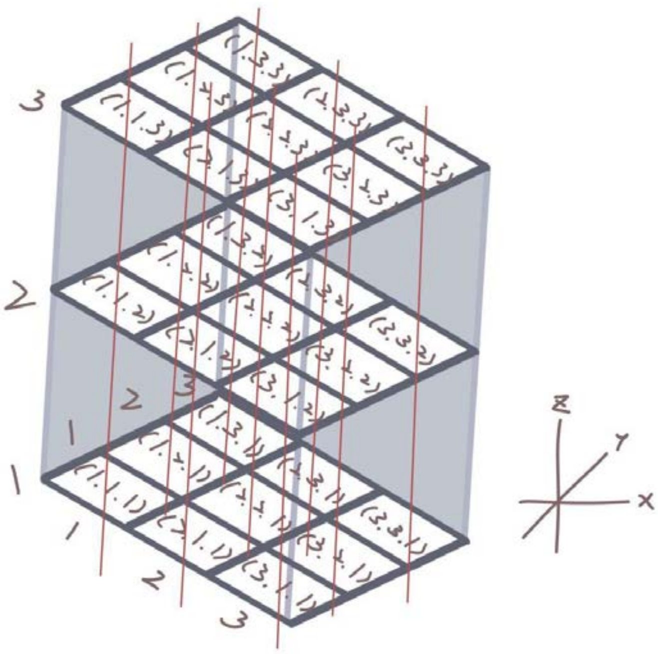
17 號線通過點（2,1,3）（2,2,3）（2,3,3）

18 號線通過點（3,1,3）（3,2,3）（3,3,3）

而與剛才的推算相同，也計為「18/2」條分類為 TST 的直線。

我們再次以數學算式推算及統整：相異三點的 x 項的座標可選擇方式為（1,y,z）（1,y+1,z）（1,y+2,z）、（2,y,z）（1,y+1,z）（2,y+2,z）、（3,y,z）（3,y+1,z）（3,y+2,z）；相異三點的 y 項的座標可連結線段為（x,1,z）（x,2,z）（x,3,z）及（x,3,z）（x,2,z）（x,1,z），而因上述「棋盤翻轉」原理，我們可以視（x,3,z）（x,2,z）（x,1,z）不算，將後續的算式除以二以避免重複計算；相異三點的 z 項的座標可選擇方式為（x,y,1）（x,y+1,1）（x,y+2,1）、（x,y,2）（x,y+1,2）（x,y+2,2）、（x,y,3）（x,y+1,3）（x,y+2,3），計作：「$\frac{3\times2\times3}{2}$」

類 3、TTS（x 相同、y 相同、z 差 1）



所含線條如圖表所示，統計共 9 條，有：

19 號線通過點（1,1,1）（1,1,2）（1,1,3）

20 號線通過點（2,1,1）（2,1,2）（2,1,3）

21 號線通過點（3,1,1）（3,1,2）（3,1,3）

22 號線通過點（1,2,1）（1,2,2）（1,2,3）

23 號線通過點（2,2,1）（2,2,2）（2,2,3）

24 號線通過點（2,3,1）（2,3,2）（2,3,3）

25 號線通過點（1,3,1）（1,3,2）（1,3,3）

26 號線通過點（2,3,1）（2,3,2）（2,3,3）

27 號線通過點（3,3,1）（3,3,2）（3,3,3）

與前假設不失一般性，同計為「18/2」條分類為 TTS 的直線。

我們再次以數學算式推算及統整：相異三點的 x 項的座標可選擇方式為（1,y,z）（1,y,z+1）（1,y,z+2）、（2,y,z）（2,y,z+1）（2,y,z+2）、（3,y,z）（3,y,z+1）（3,y,z+2）；相異三點的 y 項的座標可選擇方式為（x,1,z）（x,1,z+1）（x,1,z+2）、（x,2,z）（x,2,z+1）（x,2,z+2）、（x,3,z）（x,3,z+1）（x,3,z+2）；相異三點的 z 項的座標可連結線段為（x,y,1）（x,y,2）（x,y,3）及（x,y,3）（x,y,2）（x,y,1），而因上述「棋盤翻轉」，我們可以視（x,y,3）（x,y,2）（x,y,1）不算，將後續的算式除以二以避免重複計算，計作：「$\frac{3\times3\times2}{2}$」

小結

由上述實驗可以發現（類 1）（類 2）（類 3）的算式計法皆為「$\frac{2\times3\times3}{2}$」，而其相異點僅因項數條件為「S」的位置不同，分別在 x 項、y 項及 z 項之差。

於是我們發現：

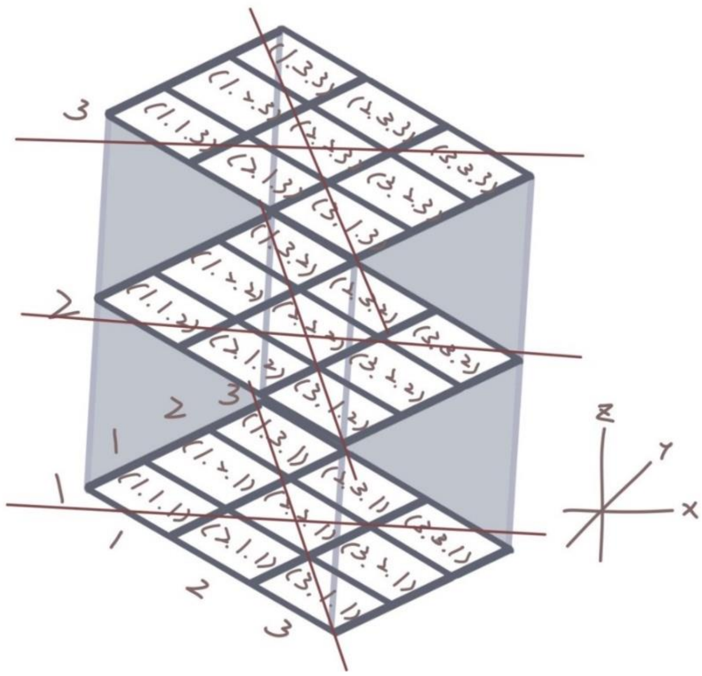
1. 在 3 維、邊長 3 的立體中，連線條件為 1 個 S 其餘 T 的直線計算方法為：2×3×3/2，化簡和整理後為：「1×3^2」。

2. 在 3 維、邊長 3 的立體中，計算連線條件為 1 個 S 其餘 T 的直線有幾種表示法，可以「C_1^3」（C 三取一）表示，代表在三個可紀錄位置裡選擇一位為 S。

3. 在 3 維、邊長 3 的立體中當線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法。

統整以上三點，我們可將（類 1）（類 2）（類 3）歸為同一大類，暫名為「大類 A」，紀錄大類 A 的線條時，沿用以上三個公式，我們找到了「大類 A 公式」:「$C_1^3 \times 1 \times 3^2$」

類 4、SST（x 不同、y 不同、z 相同）



所含線條如圖表所示，統計共 6 條，有：

28 號線通過點（1,1,1）（2,2,1）（3,3,1）

29 號線通過點（1,3,1）（2,2,1）（3,1,1）

30 號線通過點（1,1,2）（2,2,2）（3,3,2）

31 號線通過點（1,3,2）（2,2,2）（3,1,2）

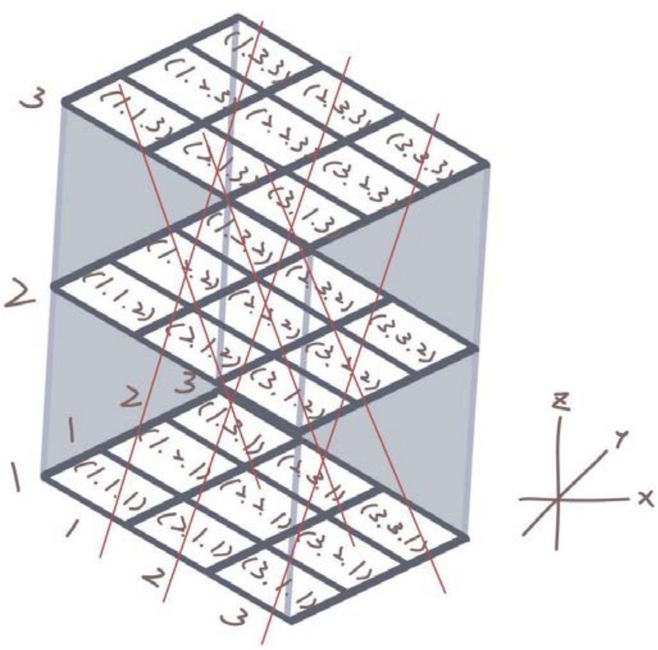
32 號線通過點（1,1,3）（2,2,3）（3,3,3）

33 號線通過點（1,3,3）（2,2,3）（3,2,3）

原本應為 12 種的直線因「翻轉棋盤」的原理，和（1,1,1）（2,2,1）（3,3,1）重複的（3,3,1）（2,2,1）（1,1,1）會被扣掉，因此和上述 6 種線重疊的另外 6 種配對方法會被扣除，因此得「12/2」條分類為 SST 的直線。

因與上三個研究雷同，因此直接做統整：由上述座標來看，x 項可選擇數字為 1 或 3；y 項可選擇數字也為 1 或 3；但 z 項可選擇 1、2 或 3。(也就是指前研究：在三維邊長三的立體中當線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法。)，我們可以計作：「$\frac{2\times2\times3}{2}$」

類 5、TSS（x 相同、y 不同、z 不同）



所含線條如圖表所示，統計共 6 條，有：

34 號線通過點（1,1,1）(1,2,2）(1,3,3）

35 號線通過點（1,3,1）(1,2,2）(1,1,3）

36 號線通過點（2,1,1）(2,2,2）(2,3,3）

37 號線通過點（2,3,1）(2,2,2）(2,1,3）

38 號線通過點（3,1,1）(3,2,2）(3,3,3）

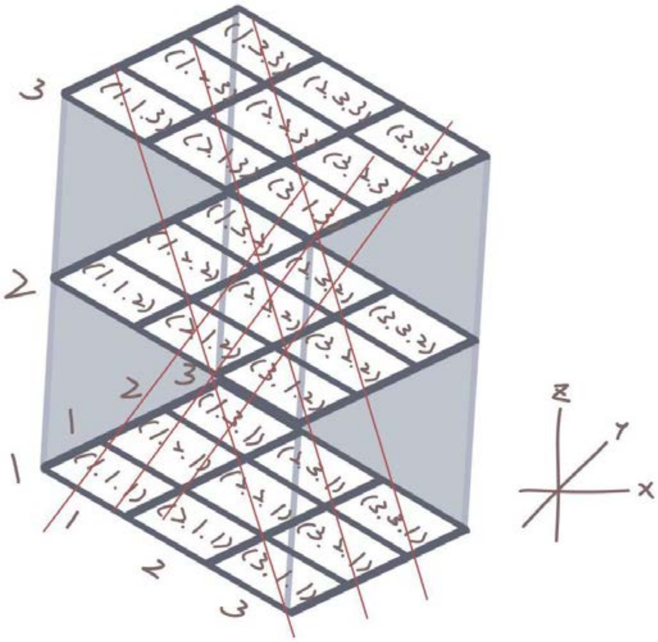
39 號線通過點（3,3,1）(3,2,2）(3,1,3）

而與剛才的計算相同，也計為「12/2」條分類為 SST 的直線。

與前研究相似：x 項可選擇數字為 1、2 或 3；y 項可選擇數字也為 1 或 3；但 z 項可選擇 1 或 3。

我們可以計作：「$\frac{3\times2\times2}{2}$」

類 6、STS（x 不同、y 相同、z 不同）



所含線條如圖表所示，統計共 6 條，有：

40 號線通過點（1,1,1）（2,1,2）（3,1,3）

41 號線通過點（3,1,1）（2,1,2）（1,1,3）

42 號線通過點（1,2,1）（2,2,2）（3,2,3）

43 號線通過點（3,2,1）（2,2,2）（1,2,3）

44 號線通過點（1,3,1）（2,3,2）（3,3,3）

45 號線通過點（3,3,1）（2,3,2）（1,3,3）

而與剛才的計算相同，也計為「12/2」條分類為 STS 的直線。

與前研究相似：x 項可選擇數字為 1 或 3；y 項可選擇數字也為 1、2 或 3；但 z 項可選擇 1 或 3。我們可以計作：「$\frac{2\times3\times2}{2}$」

小結

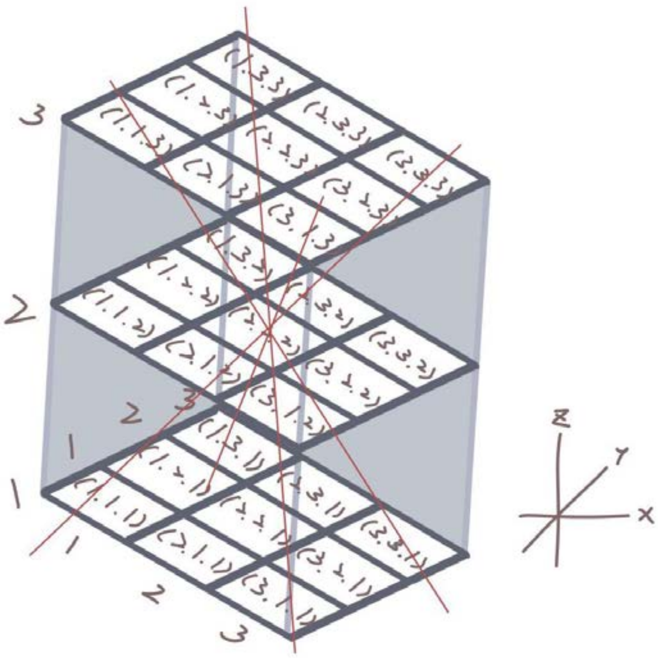
由上述實驗可以發現（類 4）（類 5）（類 6）的算式計法皆為「$\frac{2\times2\times3}{2}$」，而其相異點僅因項數條件為「S」的位置不同，分別在 x 項、y 項及 z 項之差。

於是我們發現：

1. 在 3 維、邊長 3 的立體中，連線條件為兩個 S 其餘 T 的直線計算方法為：2×2×3/2，化簡和整理後為：「2×3」。
2. 在 3 維、邊長 3 的立體中，計算連線條件為兩個 S 其餘 T 的直線有幾種表示法，可以「C_2^3」（C 三取二）表示，代表在三個可紀錄位置裡選擇兩位為 S。
3. 在 3 維、邊長 3 的立體中當線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法。

統整以上三點，我們可將（類 4）（類 5）（類 6）歸為同一大類，暫名為「大類 B」，紀錄大類 B 的線條時，沿用以上三個公式，我們找到了「大類 B 公式」：「$C_2^3 \times 2 \times 3$」。

類 7、SSS（x 不同、y 不同、z 不同）



所含線條如圖表所示，統計共 4 條，有：

46 號線通過點（1,1,3）（2,2,2）（3,3,1）

47 號線通過點（1,3,3）（2,2,2）（3,1,1）

48 號線通過點（3,3,3）（2,2,2）（1,1,1）

49 號線通過點（3,1,3）（2,2,2）（1,3,1）

而與剛才的計算相同，也計為「8/2」條分類為 SSS 的直線。

與前研究相似：x 項可選擇數字為 1 或 3；y 項可選擇數字也為 1 或 3；但 z 項可選擇 1 或 3。

我們可以計作：「$\frac{2\times2\times2}{2}$」。

小結

由上述實驗可以發現（類 7）的算式計法皆為「$\frac{2\times2\times2}{2}$」，而其相異點僅因項數條件為「S」的位置不同，分別在 x 項、y 項及 z 項之差。

於是我們發現：

1. 在 3 維、邊長 3 的立體中，連線條件為三個 S 沒有 T 的直線計算方法為：2×2×2/2，化簡和整理後為：「$2^2\times1$」。
2. 在 3 維、邊長 3 的立體中，計算連線條件為三個 S 沒有 T 的直線有幾種表示法，可以「C_3^3」（C 三取三）表示，代表在三個可紀錄位置裡選擇三位為 S。
3. 在 3 維、邊長 3 的立體中當線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法。

統整以上三點，我們可將（類 7）歸為同一大類，暫名為「大類 C」，紀錄大類 C 的線條時，沿用以上三個公式，我們找到了「大類 C 公式」：「$C_3^3\times2^2\times1$」。

統合以上研究，我們可以發現：

1. 我們將直線排列方法分為三種（大類 A、大類 B、大類 C），可以藉此察覺我們分類的標準是由該直線分類中「S」數量來作為分類標準。
2. 某大類的線段計算方法為：算式計法皆為「$\frac{2^{S\text{數量}}\times3^{T\text{數量}}}{2}$」。

3. 在 3 維、邊長 3 的立體中當線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式（正順與反順）；某項為「T」則該項有 3 種配對方法（可選 1、2 或 3）；扣除重複計算的線段後，總線段共有 49 條。

（五）、推論 n 維、長度 k 的對局中，可連之線段總數量

我們將以上結果套入未知數 n 及 k，討論 n 維、長度 k 的情形。n 維指的是座標數量有 n 個，亦即是有 n 個空格，如下：

$$(\langle 1\sim k\rangle, \langle 1\sim k\rangle, \cdots, \langle 1\sim k\rangle)$$

[共 有 n 個 位 置]

而線段計算方法為$\frac{2^{S\text{ 數量}} \times k^{T\text{ 數量}}}{2}$。

線段歸類時，某項為「S」則該項有 n-1 種配對方式（第一個 S 以正順定下順序，剩餘的 S 可以正向或反向）、某項為「T」則該項有 k 種選擇方法（每個 T 皆可以選擇 1 至 k 的任一個數字）。

於是由上述兩點，從（1 個 S 配 n-1 個 T）至（n 個 S 配 0 個 T），我們可以統整出算式：

$$C_1^n \times 2^0 \times k^{n-1} + C_2^n \times 2^1 \times k^{n-2} + C_3^n \times 2^2 \times k^{n-3} \ldots\ldots + C_n^n \times 2^{n-1} \times k^{n-n}$$

也就是

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^n \times 2^{i-1} \times k^{n-i}$$

（六）、討論 n 維、長度 k 的對局中，任意選定一點，此點可連出去的線段總量

n 維、長度 k 的情況下，給定任意一點，我們討論這個點可連線出去的方式及條件，現在我們以 5 維、長度 7 的對局來呈現。

依照之前討論的規則，若要達成連線，收集的 7 個點，每個維度須成 S 或 T。

例如選定一點（3,1,6,4,2），若要以此點來收集 1S 配 4T，我們發現，任何座標都沒有條件，每個位置皆可當成 S 的位置，例如將第三座標的 6 當成 S，則要收集剩下的（3,1,1,4,2）（3,1,2,4,2）（3,1,3,4,2）（3,1,4,4,2）（3,1,5,4,2）（3,1,7,4,2）。

而又例如選定一點（3,5,7,2,2），若要以此點來收集 2S 配 3T，兩個 S 必須皆呈順序，且只能正順或反順。因此兩個 S 可以選定第一座標的 3 與第二座標的 5（若 3 的位置為正順，則 5 的位置成反順），要收集剩下的（1,7,7,2,2）（2,6,7,2,2）（3,5,7,2,2）（4,4,7,2,2）（5,3,7,2,2）（6,2,7,2,2）（7,1,7,2,2）；兩個 S 也可以選定第四座標的 2 與第五座標的 2（兩個 2 的位置都成正順或都成反順），要收集剩下的（3,5,7,1,1）（3,5,7,2,2）（3,5,7,3,3）（3,5,7,4,4）（3,5,7,5,5）（3,5,7,6,6）（3,5,7,7,7）。

由上述所示，我們推斷出選擇兩個 S 以上的條件，只要座標選擇為 S，任意兩個想要湊成 S 的位置，其中任意兩個數字相加必須為 k+1 ，或是選定的 S 位置數字相同。也就是說，像（3,5,7,2,2）這樣的點，無法以 3S 配 2T 來達成連線。但像是點（3,5,6,2,2）就可以 3S 配 2T 達成連線，只要收集（3,5,7,1,1）（3,5,6,2,2）（3,5,5,3,3）（3,5,4,4,4）（3,5,3,5,5）（3,5,2,6,6）（3,5,1,7,7）就可以完成，同時點（3,5,6,2,2）無法以 4S 上的搭配來完成連線的收集。

藉由剛剛的討論，我們不難發現，對局中應該選擇將每個座標收集越置中的數字越好，可連出去的線才會更多條。我們用下列表格呈現例子：

維度 5、長度 7	1S 配 4T	2S 配 3T	3S 配 2T	4S 配 1T	5S
（3,1,7,4,2）	可	可	不可	不可	不可
（3,5,6,2,2）	可	可	可	不可	不可
（4,4,4,4,4）	可	可	可	可	可
維度 5、長度 4	1S 配 4T	2S 配 3T	3S 配 2T	4S 配 1T	5S
（3,1,2,4,2）	可	可	可	不可	不可
（3,2,2,3,4）	可	可	可	可	不可
（2,2,3,3,3）	可	可	可	可	可

我們也可以依照這樣的思考原則，在選定一點後，計算出此點可連出去的數量，以下我們依然以表格呈現：

維度 5、長度 4，點（3,1,2,4,2）

1S 配 4T	任意取一個座標為 S，得線段數為 5
2S 配 3T	依序取 1,4 為 2S，得線段數為 1 依序取 2,2 為 2S，得線段數為 1
3S 配 2T	依序取 3,2,2 為 3S，得線段數為 1
總數	以上累加得 8，可連出去 8 條

維度 5、長度 7，點（4,4,4,4,4）

1S 配 4T	任意取一個座標為 S，得線段數為C_1^5=5
2S 配 3T	任意取二個座標為 S，得線段數為$C_2^5 \times 2^1$=20
3S 配 2T	任意取三個座標為 S，得線段數為$C_3^5 \times 2^2$=40
4S 配 1T	任意取四個座標為 S，得線段數為$C_4^5 \times 2^3$=40
5S	任意取五個座標為 S，得線段數為$C_5^5 \times 2^4$=16
總數	以上累加得 121，可連出去 121 條

伍、問題與討論

此次研究變數較少且規則完整，較無探討中的紕漏，經過研究可套入各項邊長與維度，不會有出現異常的情形，因此藉由此公式我們可以算出：

- 二維邊長三的圖形有 8 條連線。
- 二維邊長二的圖形有 6 條連線。
- 三維邊長三的圖形有 49 條連線。
- 四維邊長三的圖形有 272 條連線。

陸、結論暨未來展望

一、結論：

（一）我們將直線排列方法分為三種（大類 A、大類 B、大類 C）可以藉此察覺我們分類的標準是由該直線分類中「S」數量來作為分類標準。

（二）某大類的線段計算方法為：算式計法皆為$\frac{2^{S\text{數量}}\times 3^{T\text{數量}}}{2}$。

（三）在維度 3、長度 3 的立體中線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法，扣除重複計算之線段後，總線段有 49 條。

（四）在維度 3、長度 3 的立體中線段歸類時，某項為「S」則該項有 2 種配對方式、某項為「T」則該項有 3 種配對方法。以我們統整出的紀錄為：「$C_1^3\times 2^0\times 3^2+C_2^3\times 2^1\times 3^1+C_3^3\times 2^2\times 3^0=49$（條）」

（五）在維度 n、長度 k 的前提下，統整出算式：

「$C_1^n\times 2^0\times k^{n-1}+C_2^n\times 2^1\times k^{n-2}+C_3^n\times 2^2\times k^{n-3}\dots\dots+C_n^n\times 2^{n-1}\times k^{n-n}$」

再將此算式列為公式：

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^n\times 2^{i-1}\times k^{n-i}$$

（六）由 3x3x3 先手必勝推展， n 維長度 3 的對局時，先手依然必勝。

（七）任何維度或長度改變的井字遊戲都要挑正中間，連出去的線最多。

二、未來展望：

（一）延伸研究 n 維（n ≥ 3）長度 4，是否有先手必勝。

（二）延伸研究 k 維長度 k，是否有先手必勝。

（三）嘗試朝步驟最少者為獲勝進行研究。

柒、參考文獻資料

[1] 朱峻賢、馬榮喜、陳世易、莊豐兆、顏德琮，國民中學數學課本第二冊。

[2] 笛卡兒座標系：將思考推往高維度的世界—《用數學的語言看世界》。取自

https://pansci.asia/archives/128792

[3] 維基百科（2022 年 6 月 4 日）。座標系。取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9D%90%E6%A8%99%E7%B3%BB

[4] 黃子嘉（2019）。**線性代數及其應用**。大碩教育出版社。

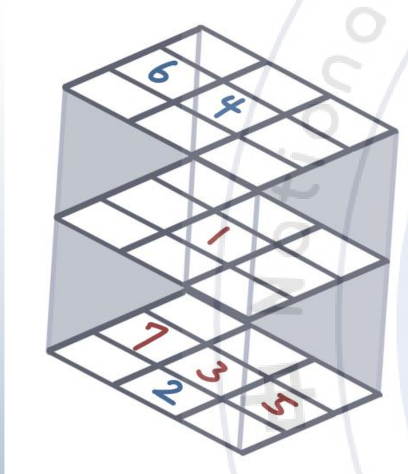
【評語】030409

將井字遊戲的二維空間推展至可以在 n 維立方體上玩，為一有趣的數學遊戲。當維度增加時，可能的連線數也相對增加，有沒有可能藉由調整獲勝所需的連線數（例如，成功完成 2 條、3 條…連線才算獲勝），讓先後手獲勝的機會仍然維持相等？最少的條數與維度的關係是什麼？如果可以在這一部份多所著墨，作品應該會更精彩。另一方面，內容上可再強化及更清楚的論述必勝策略。

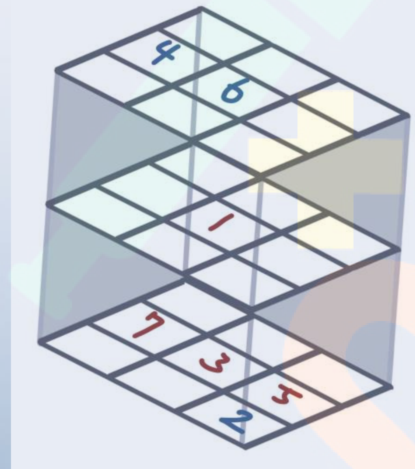
作品簡報

井字遊戲-次元突破

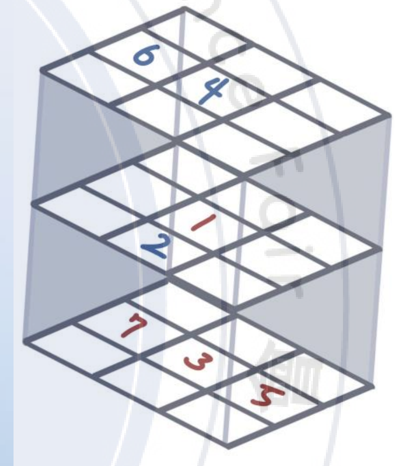
先手必勝



(2，1，1)



(3，1，1)



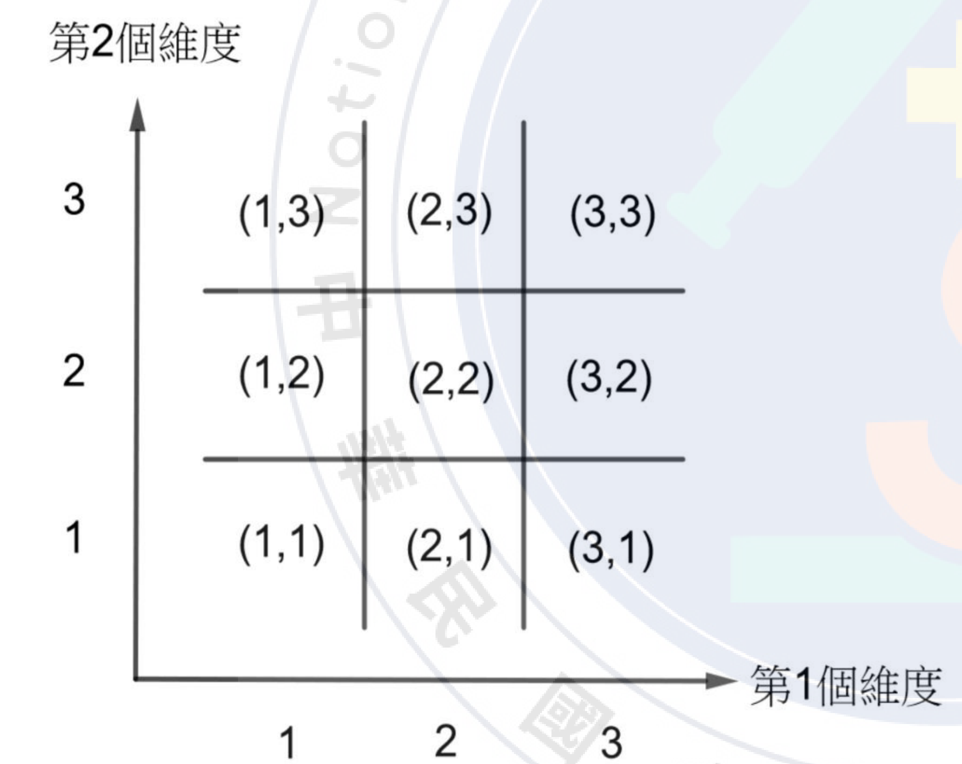
(2，1，2)

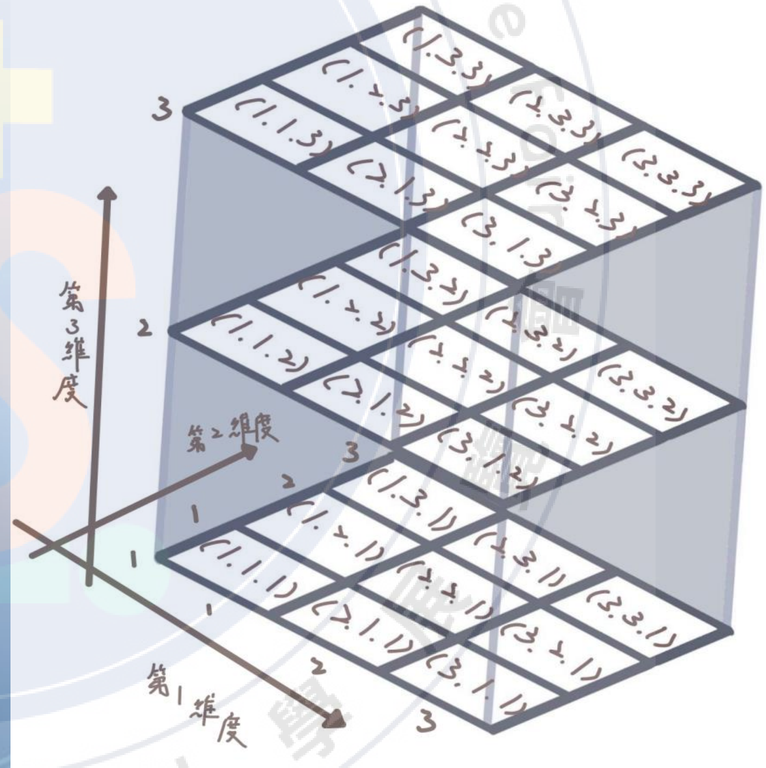
在3x3x3的情況下，先手必勝

定義

- T:指玩家蒐集的點裡，點的某一維度數字皆相同
- S:指玩家蒐集的點裡，點的某一維度數字可依1~k或k~1排出

維度表示





規則轉換

我們將OX遊戲延伸後，規則轉換成收集座標點的遊戲

勝利條件:

收集的點內其中k個點符合以下條件即達成連線:

1.k個點的座標為T

2.k個點的座標為S(1~k或k~1)

3.可全部都是S,不可全部為T

舉例:維度5、長度5

收集滿這五個點:

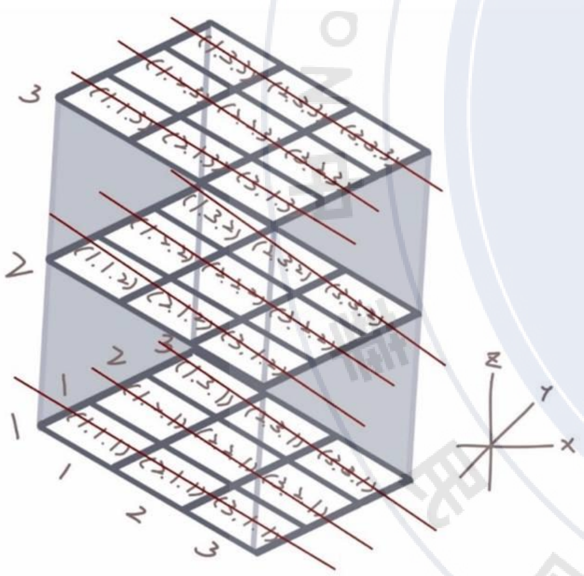
（1,1,1,1,1）（1,1,2,1,1）（1,1,3,1,1）（1,1,4,1,1）（1,1,5,1,1）

可以達成其中一條連線

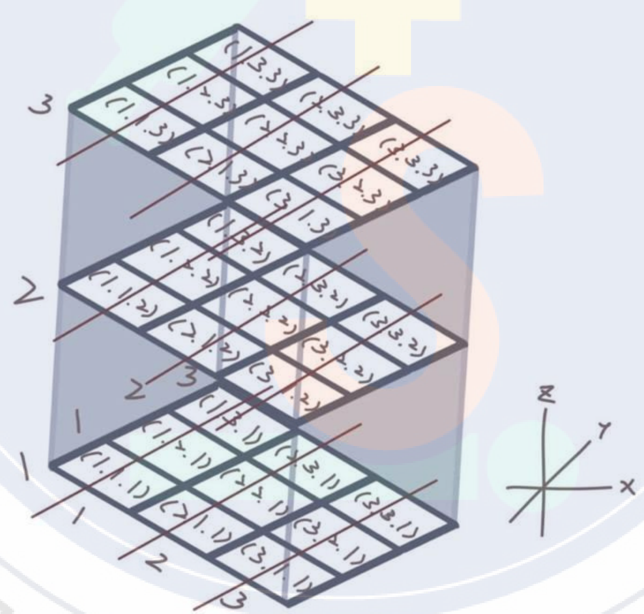
3x3x3總線段數(1)

連線數量？(1)

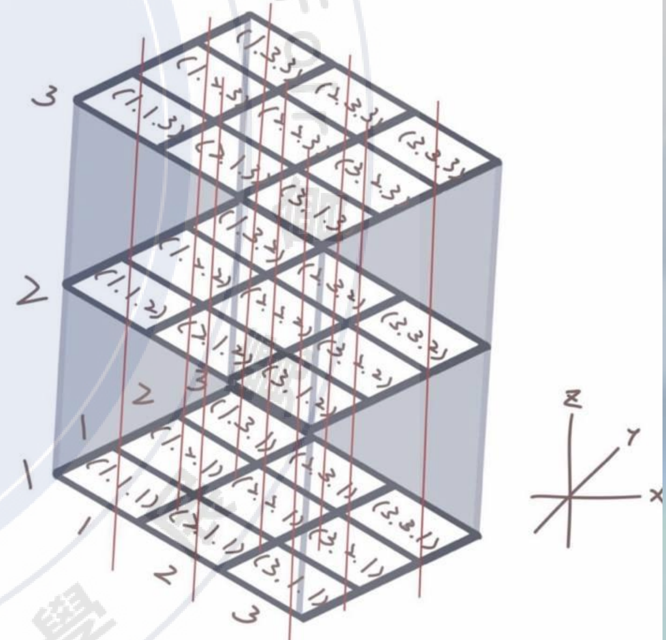
$2T+1S$



⇨ 9條



⇨ 9條

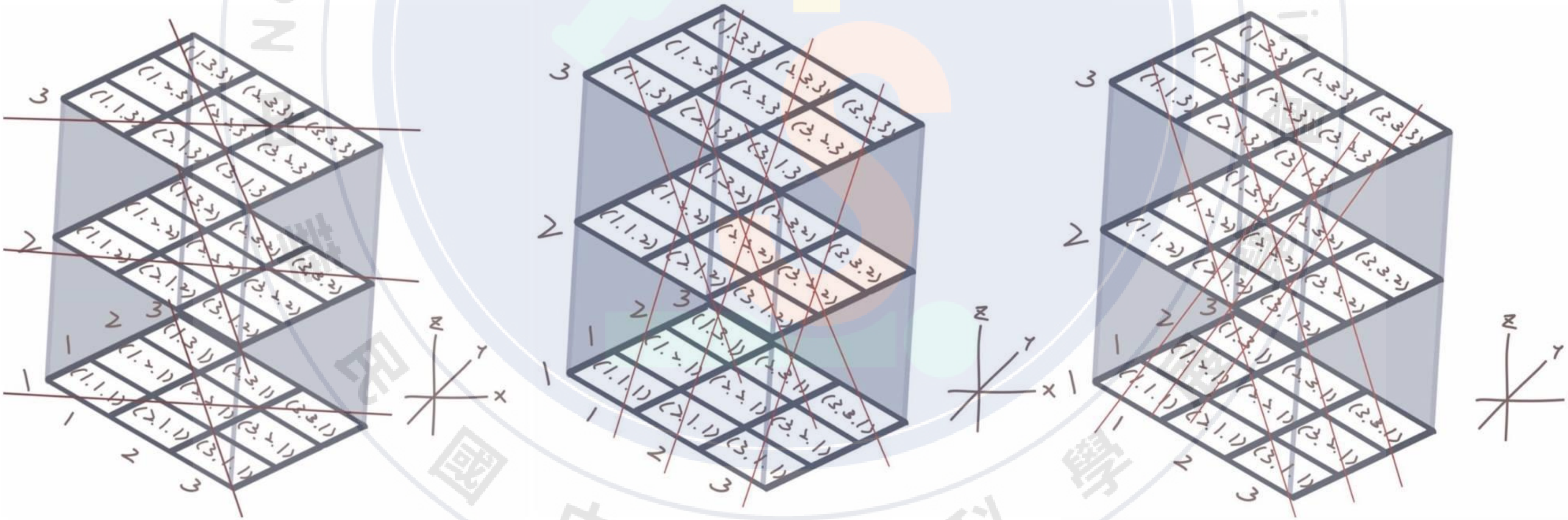


⇨ 9條

3x3x3總線段數(2)

連線數量？(2)

$1T+2S$

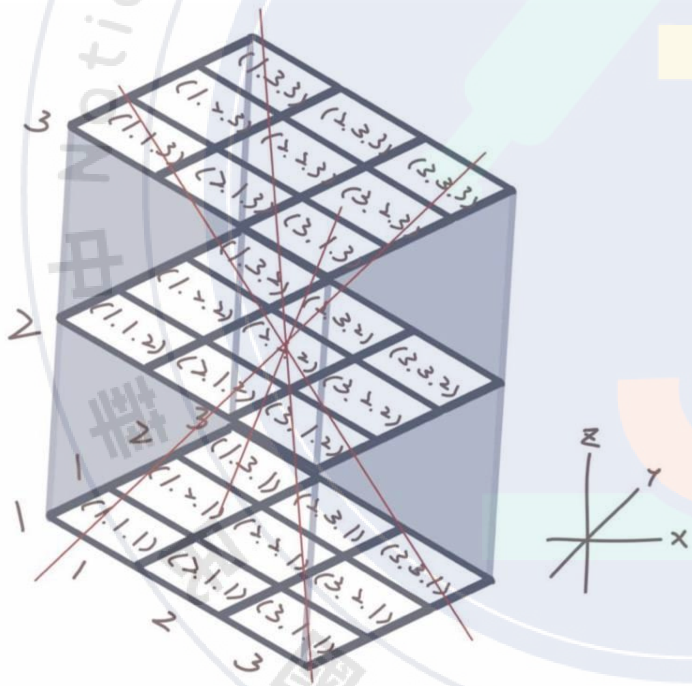


⇨ 6條　⇨ 6條　⇨ 6條

3x3x3總線段數(3)

連線數量？(3)

$0T+3S$



類5、SSS（x不同、y不同、z不同） ⇨ 4條

配對方法

維度三 長度三配對方式：

(1, 1, 1)

(2, 1, 2)

(3, 1, 3)

S——2種

Ex X軸為S

三個點可選擇：1、2、3或3、2、1

T——3種

Ex Y軸為T

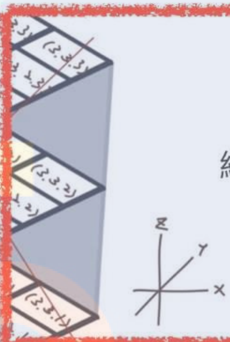
三個點可選擇：1、1、1 或 2、2、2 或 3、3、3

每組線段連線公式

$2T+1S$	$C_3^1 \times \dfrac{3\times 3\times 2}{2}$
$1T+2S$	$C_3^2 \times \dfrac{3\times 2\times 2}{2}$
$0T+3S$	$C_3^3 \times \dfrac{2\times 2\times 2}{2}$

本區結論

小結



結論：長度3維度3的連線數量一共
9+9+9+6+6+6+4=49（條）

集合算式：

$$C_3^1 \times \frac{2\times3\times3}{2} + C_3^2 \times \frac{2\times2\times3}{2} + C_3^3 \times \frac{2\times2\times2}{2}$$

驗證算式：

$$3\times3\times3 + 2\times3\times3 + 2\times2 = 27 + 18 + 4 = 49$$

公式導出

統整公式

- 由上述歸類推斷，從（1個S配n-1個T）至（n個S配0個T），並帶入n及k我們可以統整出算式:

$$C_1^n \times 2^0 \times k^{n-1} + C_2^n \times 2^1 \times k^{n-2} + C_3^n \times 2^2 \times k^{n-3} \ldots\ldots + C_n^n \times 2^{n-1} \times k^{n-n}$$

- 最終公式:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^n \times 2^{i-1} \times k^{n-i}$$