中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030408

棋逢對手 2.0

學校名稱：桃園市立龜山國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳佳紋	李家任
國二 賴泓昇	王者強
國二 王正杰	

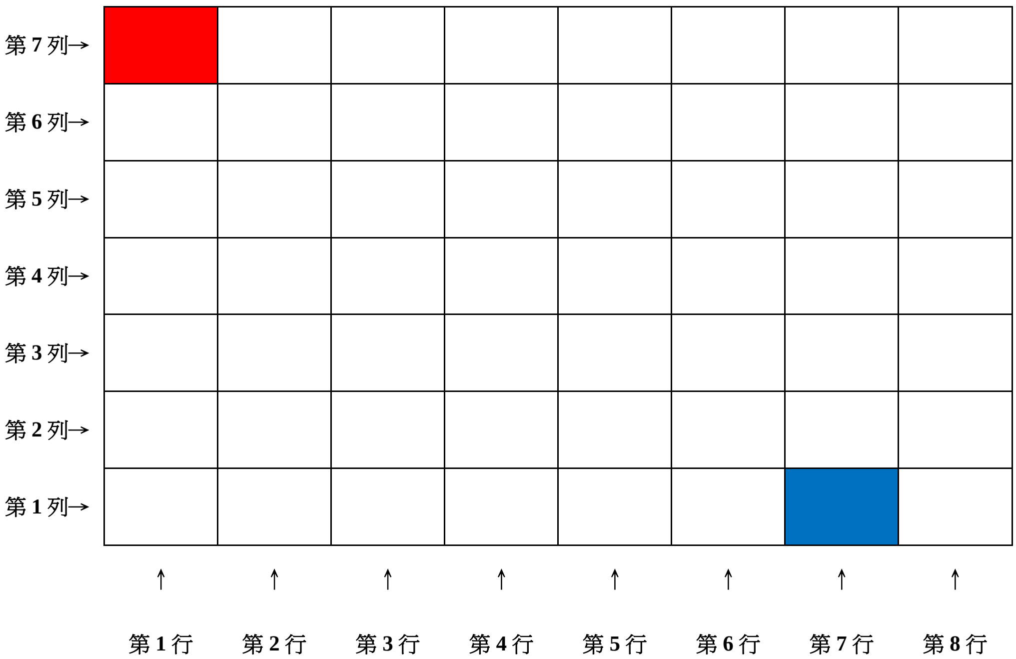
關鍵詞：最短步數及路徑數、分出勝負時的個數及位置、R 語言

摘要

本研究是由一個棋盤遊戲推廣延伸而來的，研究內容為紅棋先走或後走，若紅棋壓在藍棋上面，則紅棋獲勝；若藍棋壓在紅棋上面，則藍棋獲勝。**(也就是說紅、藍棋在同一方格時，遊戲就分出勝負了。)**而本研究分成兩種遊戲：**遊戲 1：紅、藍棋只能上下左右移動**、**遊戲 2：紅、藍棋除了可上下左右移動外，增加可向斜的移動方式**；若紅棋每一次走 r 步、藍棋每一次走 s 步，且雙方的起點分別在任意位置的方格中，分別去推導雙方剛好走完或**少走 k 步**就分出勝負的最短步數、最短路徑數、雙方分出勝負時的所有位置個數、所有位置(坐標)以及分出勝負的判斷準則，最後由上述**遊戲 1 及遊戲 2** 推導出來的公式，透過**演算法**並利用**程式軟體-R 語言寫成程式碼**作驗證。

壹、 研究動機與文獻探討

一、在我們七年級升八年級的暑假時，老師給我們看了一件桃園市第 60 屆中小學科學展覽國中組數學科的作品，這件作品是在探討一個棋盤遊戲，而遊戲的出處為于雷(2013 年)–邏輯思維訓練 500 題(白金版)中的第 57 題-「捉迷藏」，此遊戲規則為紅、藍棋的起點分別在任意的方格中(如下圖)，且紅、藍棋只能依序各走 1 步(只能上下左右走，不能斜著走)，在紅棋先走的情形下，若紅棋壓在藍棋上面，則紅棋獲勝；若藍棋壓在紅棋上面，則藍棋獲勝。**(也就是說紅、藍棋在同一方格時，遊戲就分出勝負了。)**



二、本研究分成兩種遊戲，其中**遊戲 1：紅、藍棋只能上下左右移動**(與桃園市第 60 屆科展作品的紅、藍棋移動規則相同)；另外，我們也在思考若增加紅、藍棋可向斜的移動方式時，是否會影響最短步數及路徑數呢？因此本研究新增了**遊戲 2：紅、藍棋除了可上下左右移動外，增加可向斜的移動方式**。

三、相關的歷屆科展作品資料如下：

屆數	組別	作品名稱	研究摘要
第 60 屆	國中組	棋逢對手	1.紅、藍棋每次只能依序各走 1 步。 2.紅、藍棋的移動方式只能上下左右。 3.只有討論紅棋先走的情形。 4.只有推導出紅棋獲勝或敗北的最短步數及最短路徑數。

四、針對上述的研究作品，我們發現到還有許多的問題可以討論：

屆數	組別	作品名稱	延伸思考的問題
第 62 屆	**國中組**	**棋逢對手 2.0 (我們的作品)**	1.紅、藍棋每次可否不只走 1 步呢？ 2.可否增加討論紅棋後走的情形呢？ 3.可否增加推導出藍棋獲勝或敗北的最短步數及最短路徑數呢？ 4.當紅、藍棋每次走的步數大於或等於 1 步時，紅棋或藍棋最後一次走也許**剛好走完**或**沒有走完**就分出勝負了，則是否可以分別求出紅、藍棋的最短步數及最短路徑數呢？ 5.可否推導出紅、藍棋分出勝負的判斷準則呢？ 6.可否推導出紅、藍棋分出勝負的所有位置個數呢？ 7.可否推導出紅、藍棋分出勝負的所有位置(坐標)呢？ 8.若**增加紅、藍棋可向斜的移動方式**，可否推導出上述的所有公式呢？ 9.可否利用**電腦程式軟體寫出程式碼**作實驗呢？

貳、　研究目的

本研究分成兩種遊戲：

遊戲 1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

遊戲 2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

根據遊戲 1 及遊戲 2 的規則，當紅、藍棋的起點分別在任意位置的方格中，且紅棋先走或後走，我們嘗試研究相關的內容如下：

一、若紅、藍棋每一次依序各走 1 步，推導出紅棋(藍棋)獲勝或敗北的最短步數、最短路徑數、分出勝負時的所有位置個數、所有位置(坐標)及分出勝負的判斷準則。

二、若紅、藍棋每一次依序各走 r 步及 s 步，其中 r 、 s 為正整數，推導出紅棋(藍棋)剛好走完或少走 k 步就獲勝或敗北的最短步數、最短路徑數、分出勝負時的所有位置個數、所有位置(坐標)及分出勝負的判斷準則。

三、透過演算法及利用程式軟體 **R** 語言，將上述兩種遊戲寫成程式碼作實驗及驗證。

參、　研究設備及器材

一、筆記本、文具、電腦、Microsoft Word 2010、Mathtype、**R語言(程式軟體)**

肆、　定義名詞與符號

一、名詞與符號解釋：

(一)名詞解釋：

1. 紅、藍棋分出勝負時的最短步數：在紅、藍棋步數總和為最小的情形下，雙方可分出勝負。
2. 紅、藍棋分出勝負時的最短路徑數：在分出勝負時的最短步數情形下，雙方共有幾種走法。
3. 紅、藍棋分出勝負時的所有位置：分出勝負時的所有可能坐標，本文的坐標用(,)表示。
4. 紅、藍棋分出勝負時的所有位置個數：分出勝負時的所有可能位置數量總和。

(二)符號解釋：

1. a_{ij} ：紅棋的起點位置在第 i 行第 j 列，其中 i、j 均為正整數。
2. b_{pq} ：藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，其中 p、q 均為正整數。
3. r ：紅棋每一次走的步數，其中 r 為正整數。

4. s：藍棋每一次走的步數，其中 s 為正整數。

5. A：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，雙方步數總和除以 $(r+s)$ 的商數。

6. R：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，雙方步數總和除以 $(r+s)$ 的餘數。

7. k：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，贏家最後一次走少走的步數，其中 k 為正整數。

8. T_r：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，紅棋走的總步數。

9. T_s：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，藍棋走的總步數。

10. $B=\max(T_r,T_s)$：取紅棋走的總步數及藍棋走的總步數的最大值。

11. $b=\min(T_r,T_s)$：取紅棋走的總步數及藍棋走的總步數的最小值。

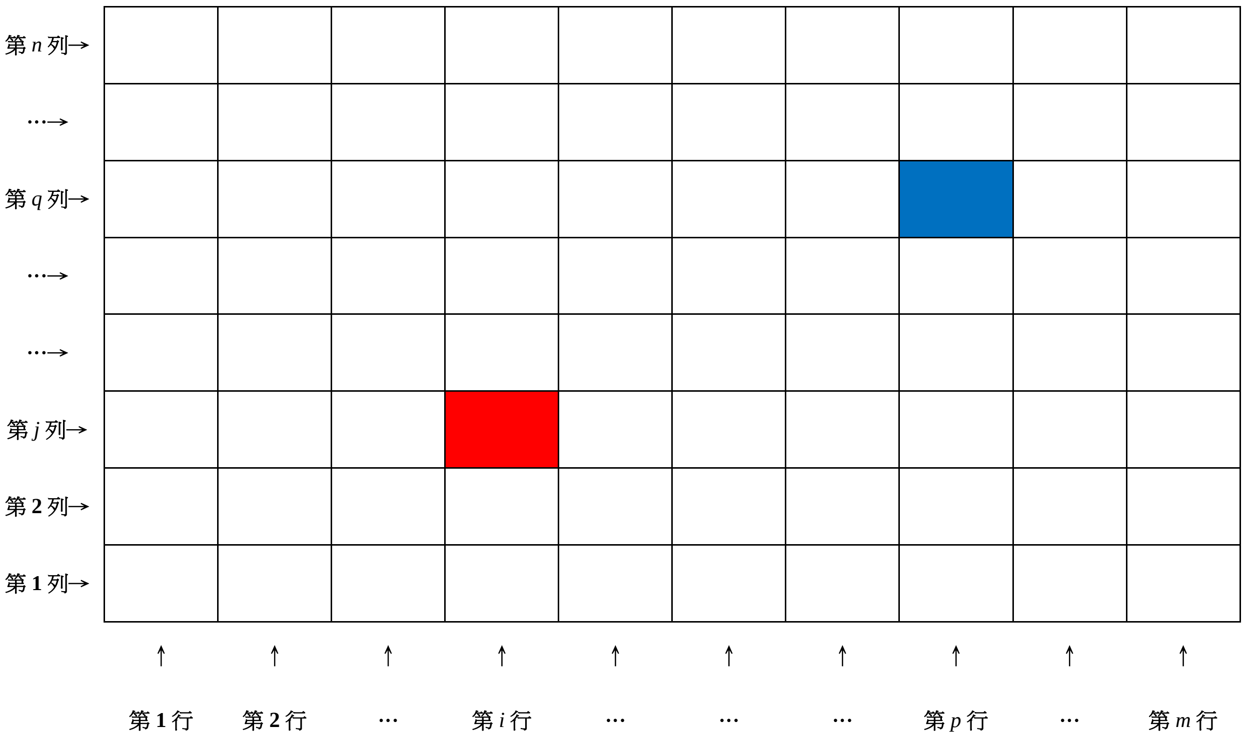
12. $D=\max(|i-p|,|j-q|)$：取紅、藍棋的起點位置的行差及列差的最大值。

13. $d=\min(|i-p|,|j-q|)$：取紅、藍棋的起點位置的行差及列差的最小值。

14. $M=|i-p|+|j-q|$：為紅、藍棋的起點位置行差及列差的總和。

15. C_g^f：排列組合中的組合符號，本文用來計算最短路徑數。

二、初始條件：在 $m\times n$ 的方格中，當紅棋的起點位置在第 i 行第 j 列、藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列(紅棋與藍棋的起點在不同位置)，如下圖所示，其中 $1\le i,p\le m$，$1\le j,q\le n$，且 i、j、p、q、m、n 均為正整數。



伍、　研究過程與方法

一、遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右：

【研究1】推導出當紅、藍棋每一次依序各走1步的最短步數及分出勝負的判斷準則

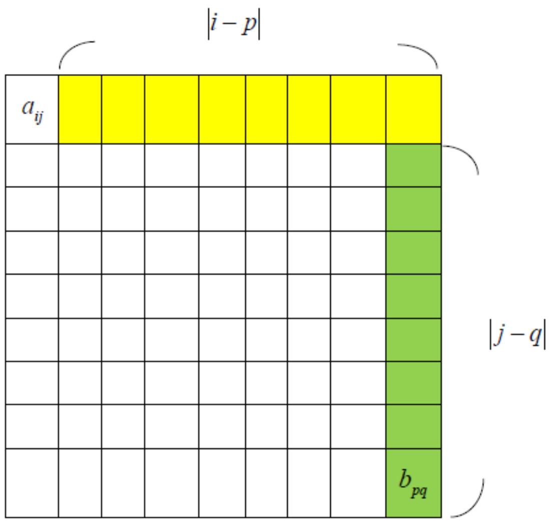
瀏覽了歷屆科展作品，當紅、藍棋每次只能各走1步時，發現其推導出來的最短步數公式較為複雜，因此我們換了另外一種思考方式，並增加討論紅棋後走的情形，也增加推導出藍棋獲勝或敗北時的最短步數，並提供紅、藍棋分出勝負的判斷準則。

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走1步、藍棋每一次走1步，且 $\frac{M}{2}$ 的商數為 A、餘數為 R，其中 $M=\|i-p\|+\|j-q\|$。

【研究 1.1】

若 $\frac{M}{2}$ 的商數為 A，則 A 所代表的意思為紅、藍棋在分出勝負時，紅、藍棋分別完整走完 A 次，其中 $M=|i-p|+|j-q|$。

【證明】



上圖中的黃色格子數+綠色格子數

=紅、藍棋在分出勝負時共走的總步數

$=2A+R$。

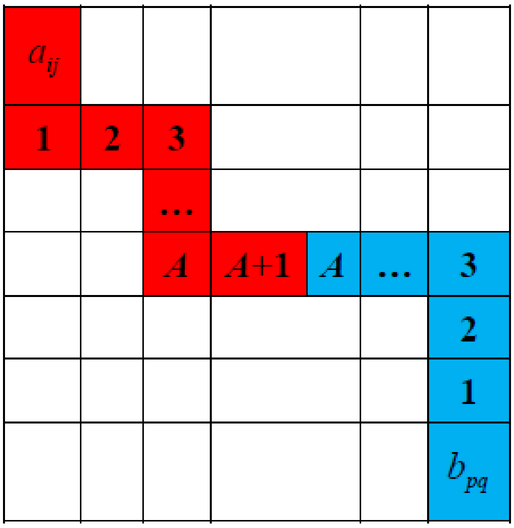
設紅棋的起點位置在 a_{ij}，藍棋的起點位置在 b_{pq}，且紅棋每一次走 1 步、藍棋每一次走 1 步，可知紅、藍棋起點位置的行差為 $|i-p|$、列差為 $|j-q|$，表示紅、藍棋起點位置的格數差為 $(|i-p|+|j-q|)$，又紅、藍棋每一次共走的總步數為 2 步，因此 $(|i-p|+|j-q|)\div 2$ 的商數 A，即可表示紅、藍棋在分出勝負時，紅、藍棋分別完整走完 A 次。

■

【研究 1.2】

若紅棋先走，則紅棋獲勝的最短步數$T_r=(A+1)$步，此時藍棋敗北的最短步數$T_s=A$步，其分出勝負的判斷準則為 $R=1$ 。

【證明】



(方格內的數字表示紅、藍棋各走的次數)

根據【研究 1.1】，因為紅棋先走，且紅棋獲勝，表示紅棋比藍棋多走了 1 次，可知紅棋共走了$(A+1)$次，所以紅棋獲勝的最短步數$T_r=(A+1)\times 1=(A+1)$步；藍棋只走了A次，所以藍棋敗北的最短步數$T_s=A\times 1=A$步，又因為紅棋比藍棋多走 1 步，所以$\frac{M}{2}$的餘數為$R=1$ 。

■

【研究1.3】

若紅棋先走，則紅棋敗北的最短步數$T_r=A$步，此時藍棋獲勝的最短步數$T_s=A$步，其分出勝負的判斷準則為 $R=0$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究 1.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 1.4】

若紅棋後走，則紅棋獲勝的最短步數$T_r=A$步，此時藍棋敗北的最短步數$T_s=A$步，其分出勝負的判斷準則為 $R=0$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究 1.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究1.5】

若紅棋後走，則紅棋敗北的最短步數$T_r=A$步，此時藍棋獲勝的最短步數$T_s=(A+1)$步，其分出勝負的判斷準則為 $R=1$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究 1.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 2】推導出紅、藍棋每一次依序各走 r 步及 s 步的最短步數及分出勝負的判斷準則

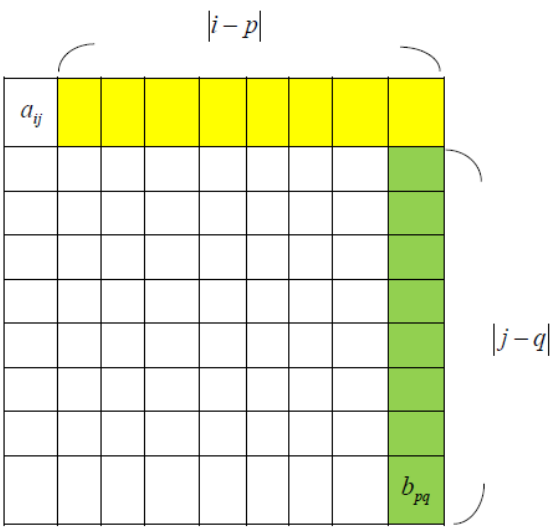
當紅、藍棋每次各走的步數不只1步時，我們發現到紅棋(藍棋)在最後一次走可能**剛好走完**或**少走 k 步**就分出勝負，因此在【研究2.2】~【研究2.5】是討論紅棋(藍棋)最後一次走**剛好走完**就分出勝負的情形，而【研究2.6】~【研究2.9】是討論紅棋(藍棋)最後一次走**少走 k 步**就分出勝負的情形，另外在【研究2.2】~【研究2.9】都有討論紅棋先走或後走的情形，進而分別推導出紅棋(藍棋)獲勝或敗北的最短步數，並提供紅、藍棋分出勝負的判斷準則。

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走 r 步、藍棋每一次走 s 步，其中 r 、 s 為正整數，且 $\dfrac{M}{r+s}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

【研究 2.1】

若 $\dfrac{M}{r+s}$ 的商數為 A ，則 A 所代表的意思為紅、藍棋在分出勝負時，紅、藍棋分別完整走完 A 次，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

【證明】



上圖中的黃色格子數＋綠色格子數

=紅、藍棋在分出勝負時共走的總步數

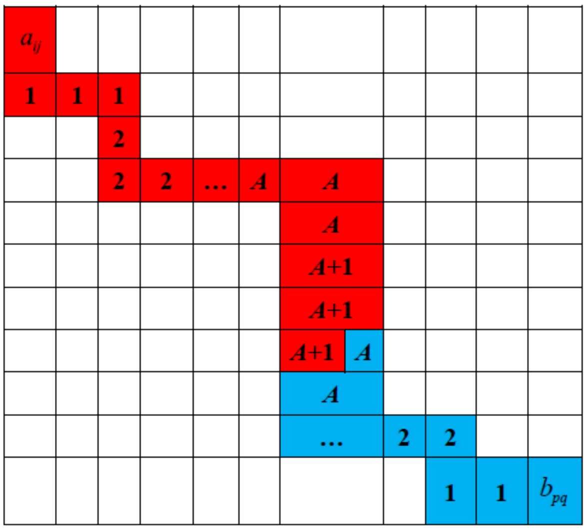
$=(r+s)A+R$ 。

設紅棋的起點位置在 a_{ij} ，藍棋的起點位置在 b_{pq} ，且紅棋每一次走 r 步、藍棋每一次走 s 步，其中 r 、 s 為正整數，紅、藍棋起點位置的行差為 $|i-p|$ 、列差為 $|j-q|$ ，表示紅、藍棋起點位置的格數差為 $|i-p|+|j-q|$ ，又紅、藍棋每一次共走的總步數為 $(r+s)$ 步， $\dfrac{M}{r+s}$ 的商數 A ，即可表示紅、藍棋在分出勝負時，紅、藍棋分別<u>完整走完</u> A 次。 ■

【研究 2.2】

若紅棋先走，則紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數$T_r = r(A+1)$，此時藍棋敗北的最短步數$T_s = sA$，其分出勝負的判斷準則為$R = r$。

【證明】



(方格內的數字表示紅、藍棋各走的次數)

根據【研究 2.1】，因為紅棋先走，且紅棋獲勝，表示紅棋比藍棋多走了 1 次，紅棋共走了$(A+1)$次，而紅棋每一次走r步，所以紅棋獲勝的最短步數$T_r = r(A+1)$；同理，藍棋只走了A次，而藍棋每一次走s步，因此藍棋敗北的最短步數$T_s = sA$。

又因為紅棋最後一次走了r步，所以$\frac{M}{r+s}$的餘數為$R = r$。

■

【研究2.3】

若紅棋先走，則紅棋敗北的最短步數$T_r = rA$，此時藍棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數$T_s = sA$，其分出勝負的判斷準則為$R = 0$。

【證明】略(證明方式如同【研究 2.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 2.4】

若紅棋後走，則紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數$T_r = rA$，此時藍棋敗北的最短步數$T_s = sA$，其分出勝負的判斷準則為$R = 0$。

【證明】略(證明方式如同【研究 2.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 2.5】

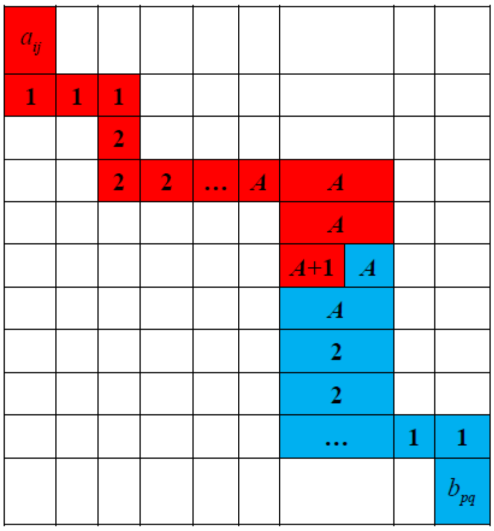
若紅棋後走，則紅棋敗北的最短步數$T_r = rA$，此時藍棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數$T_s = s(A+1)$，其分出勝負的判斷準則為$R = s$。

【證明】略(證明方式如同【研究 2.2】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究2.6】

若紅棋先走，則紅棋獲勝(最後一次走**少走 k 步**)的最短步數 $T_r = rA + R$ ，此時藍棋敗北的最短步數 $T_s = sA$ ，其分出勝負的判斷準則為 $0 < R < r$ ， $R = r - k$ 。

【證明】



(方格內的數字表示紅、藍棋各走的次數)

根據【研究 2.1】，因為紅棋先走，且紅棋獲勝，表示紅棋比藍棋多走了 1 次，紅棋共走了 $(A+1)$ 次，其中紅棋完整走了 A 次，最後一次走**少走 k 步**，而紅棋每一次走 r 步，所以紅棋獲勝的最短步數 $T_r = rA + r - k = rA + R$ ；同理，藍棋只走了 A 次，而藍棋每一次走 s 步，因此藍棋敗北的最短步數 $T_s = sA$ 。

又因為紅棋最後一次走了 $(r-k)$ 步，所以 $\dfrac{M}{r+s}$ 的餘數為 $R = r - k$，其中 R 的範圍為 $0 < R < r$ 。 ■

【研究 2.7】

若紅棋先走，則紅棋敗北的最短步數 $T_r = r(A+1)$ ，此時藍棋獲勝(最後一次走**少走 k 步**)的最短步數 $T_s = sA + (R - r)$ ，其分出勝負的判斷準則為 $r < R < r + s$ ， $R = r + s - k$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究 2.6】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 2.8】

若紅棋後走，則紅棋獲勝(最後一次走**少走 k 步**)的最短步數 $T_r = rA + (R - s)$ ，此時藍棋敗北的最短步數 $T_s = s(A+1)$ ，其分出勝負的判斷準則為 $s < R < r + s$ ， $R = r + s - k$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究2.6】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 2.9】

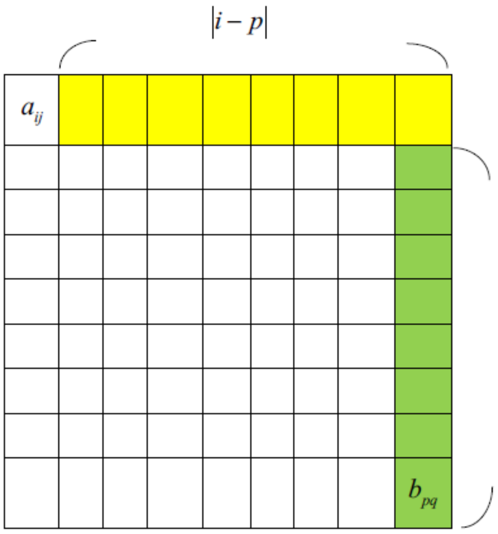
若紅棋後走，則紅棋敗北的最短步數 $T_r = rA$ ，此時藍棋獲勝(最後一次走**少走 k 步**)的最短步數 $T_s = sA + R$ ，其分出勝負的判斷準則為 $0 < R < s$ ， $R = s - k$ 。

【證明】略(證明方式如同【研究 2.6】，詳細證明過程記載於研究日誌。)

【研究 3】

無論紅棋先走或後走，紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 ***k*** 步)的最短路徑數為 $C_{|i-p|}^{M}$ ，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

【證明】



最短路徑數為黃色格子數＋綠色格子數中，任選黃色格子數或綠色格子數出來組合。

設紅棋的起點位置在 a_{ij} ，藍棋的起點位置在 b_{pq}，可知紅、藍棋起點位置的行差為 $|i-p|$、列差為 $|j-q|$，而無論紅、藍棋每一次各走的步數為何及無論紅棋先走或後走，其最短路徑數是根據高中的排列組合：行差加列差 **(紅、藍棋分出勝負時，紅、藍棋共走的總步數)**，任選行差或列差出來組合，因此紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 ***k*** 步)的最短路徑數為 $C_{|i-p|}^{M}$ 。 ■

【研究 4】

紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 ***k*** 步)的所有位置個數如下所示：

若 $B \le M$ ，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數=($\min(b,d)+1$)個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$ 、 $M=|i-p|+|j-q|$ 、 $b=\min(T_r,T_s)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

【證明】

設紅棋的起點位置在 a_{ij} ，藍棋的起點位置在 b_{pq}，若 $B \le M$ ，等價於 $b \ge 0$，又因為 $\min(T_r,T_s)$、$\min(|i-p|,|j-q|)$ 將會影響紅、藍棋分出勝負時的位置個數，以下將分成 2 種情形作討論：

情形1. 由 $\min(T_r,T_s)$ 作討論：

(1)當 $\min(T_r,T_s)=0$ 時，等價於 $B=M=|i-p|+|j-q|$，代表紅、藍棋有一方的總步數為0步，也就是說贏家必為先走，且贏家只走了一次，此次的總步數即為雙方共走的總步數，而輸家還沒走就敗北了，所以紅、藍棋分出勝負時的所有位置個數=1個，其分出勝負的位置即為輸家的起點位置。

(2)當 $\min(T_r,T_s)=1$時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列，共有2個位置，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=2個。

(3)當 $\min(T_r,T_s)=2$時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列，共有3個位置，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=3個。

(4)當 $\min(T_r,T_s)=b$時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列、…、第 $(j+b)$ 列，共有$(b+1)$個位置，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=$(b+1)$個。

情形2. 由 $\min(|i-p|,|j-q|)$ 作討論：

(1)當 $\min(|i-p|,|j-q|)=0$ 時，表示紅、藍棋的起點位置必為同行或同列，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=1個。

(2)當 $\min(|i-p|,|j-q|)=1$時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列，共有2個位置，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=2個。

(3)當 $\min(|i-p|,|j-q|)=2$ 時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列，共有3個位置，因此分出勝負時的位置個數=3個。

(4)當 $\min(|i-p|,|j-q|)=d$ 時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)的起點位置為例，代表紅棋最後可能走到第 j 列、第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列、…、第 $(j+d)$ 列，共有$(d+1)$個位置，因此紅、藍棋分出勝負時的位置個數=$(d+1)$個。

綜合上述兩種情形的討論，可知若 $B\le M$，其分出勝負時的位置個數=($\min(b,d)+1$)個。 ■

【研究5】推導出紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置(坐標)

在完成推導紅、藍棋分出勝負時的所有位置個數後，我們對於紅、藍棋在分出勝負時的所有位置(坐標)感興趣，因此接下來我們要討論紅、藍棋分出勝負時的所有可能位置(坐標)。

【研究5.1】紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完)的所有位置(坐標)如下表所示：

先後走 / 起點位置	甲 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走剛好走完	乙 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走剛好走完	丙 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走剛好走完	丁 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走剛好走完
紅(左上) 藍(右下)	$(p-sA+t,q+t)$			$(i+rA-t,j-t)$

坐標範圍	$i \le p - sA + t \le p$ $q \le q + t \le j$ $0 \le t \le sA$	$i \le i + rA - t \le p$ $q \le j - t \le j$ $0 \le t \le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p - sA + t, q - t)$	$(i + rA - t, j + t)$
坐標範圍	$i \le p - sA + t \le p$ $j \le q - t \le q$ $0 \le t \le sA$	$i \le i + rA - t \le p$ $j \le j + t \le q$ $0 \le t \le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p + sA - t, q + t)$	$(i - rA + t, j - t)$
坐標範圍	$p \le p + sA - t \le i$ $q \le q + t \le j$ $0 \le t \le sA$	$p \le i - rA + t \le i$ $q \le j - t \le j$ $0 \le t \le rA$
紅(右下) 藍(左上)	$(p + sA - t, q - t)$	$(i - rA + t, j + t)$
坐標範圍	$p \le p + sA - t \le i$ $j \le q - t \le q$ $0 \le t \le sA$	$p \le i - rA + t \le i$ $j \le j + t \le q$ $0 \le t \le rA$
紅藍同列 紅在右方	$(p + sA, q)$	$(i - rA, j)$
坐標範圍	$p \le p + sA \le i$ $j = q$	$p \le i - rA \le i$ $j = q$
紅藍同列 紅在左方	$(p - sA, q)$	$(i + rA, j)$
坐標範圍	$i \le p - sA \le p$ $j = q$	$i \le i + rA \le p$ $j = q$
紅藍同行 紅在下方	$(p, q - sA)$	$(i, j + rA)$
坐標範圍	$i = p$ $j \le q - sA \le q$	$i = p$ $j \le j + rA \le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p, q + sA)$	$(i, j - rA)$

坐標範圍	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le j-rA\le j$

【證明】

甲：當紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)

起點相對位置：紅棋(左上)、藍棋(右下)，若由藍棋的起點位置出發，藍棋敗北的位置必須往左或上的方向走 sA 步，**其分出勝負時的位置所形成的圖形為<u>45°的斜直線型</u>**，因此紅棋獲勝的位置=藍棋敗北的位置=$(p-sA+t,q+t)$，

而紅、藍棋分出勝負時的行坐標要介於紅、藍棋起點位置的行坐標之間、分出勝負時的列坐標要介於紅、藍棋起點位置的列坐標之間，因此其坐標範圍為

$i\le p-sA+t\le p, q\le q+t\le j, 0\le t\le sA$ 。

根據上述證明方式，其餘紅棋(藍棋)的7種起點相對位置及乙、丙、丁三種情況同理可證。■

【研究 5.2】紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走少走 ***k*** 步)的所有位置(坐標)如下表所示：

起點位置 \ 先後走	戊 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	己 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	庚 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	辛 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步
紅(左上) 藍(右下)	$(p-sA+t,q+t)$	$(i+r(A+1)-t,j-t)$	$(p-s(A+1)+t,q+t)$	$(i+rA-t,j-t)$
坐標範圍	$i\le p-sA+t\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$	$i\le i+r(A+1)-t\le p$ $q\le j-t\le j$ $0\le t\le r(A+1)$	$i\le p-s(A+1)+t\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$	$i\le i+rA-t\le p$ $q\le j-t\le j$ $0\le t\le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p-sA+t,q-t)$	$(i+r(A+1)-t,j+t)$	$(p-s(A+1)+t,q-t)$	$(i+rA-t,j+t)$
坐標範圍	$i\le p-sA+t\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$	$i\le i+r(A+1)-t\le p$ $j\le j+t\le q$ $0\le t\le r(A+1)$	$i\le p-s(A+1)+t\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le s(A+1)$	$i\le i+rA-t\le p$ $j\le j+t\le q$ $0\le t\le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p+sA-t,q+t)$	$(i-r(A+1)+t,j-t)$	$(p+s(A+1)-t,q+t)$	$(i-rA+t,j-t)$
坐標範圍	$p\le p+sA-t\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$	$p\le i-r(A+1)+t\le i$ $q\le j-t\le j$ $0\le t\le r(A+1)$	$p\le p+s(A+1)-t\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$	$p\le i-rA+t\le i$ $q\le j-t\le j$ $0\le t\le rA$

紅(右下) 藍(左上)	$(p+sA-t,q-t)$	$(i-r(A+1)+t,j+t)$	$(p+s(A+1)-t,q-t)$	$(i-rA+t,j+t)$
坐標範圍	$p\le p+sA-t\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$	$p\le i-r(A+1)+t\le i$ $j\le j+t\le q$ $0\le t\le r(A+1)$	$p\le p+s(A+1)-t\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le s(A+1)$	$p\le i-rA+t\le i$ $j\le j+t\le q$ $0\le t\le rA$
紅藍同列 紅在右方	$(p+sA,q)$	$(i-r(A+1),j)$	$(p+s(A+1),q)$	$(i-rA,j)$
坐標範圍	$p\le p+sA\le i$ $j=q$	$p\le i-r(A+1)\le i$ $j=q$	$p\le p+s(A+1)\le i$ $j=q$	$p\le i-rA\le i$ $j=q$
紅藍同列 紅在左方	$(p-sA,q)$	$(i+r(A+1),j)$	$(p-s(A+1),q)$	$(i+rA,j)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $j=q$	$i\le i+r(A+1)\le p$ $j=q$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $j=q$	$i\le i+rA\le p$ $j=q$
紅藍同行 紅在下方	$(p,q-sA)$	$(i,j+r(A+1))$	$(p,q-s(A+1))$	$(i,j+rA)$
坐標範圍	$i=p$ $j\le q-sA\le q$	$i=p$ $j\le j+r(A+1)\le q$	$i=p$ $j\le q-s(A+1)\le q$	$i=p$ $j\le j+rA\le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p,q+sA)$	$(i,j-r(A+1))$	$(p,q+s(A+1))$	$(i,j-rA)$
坐標範圍	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le j-r(A+1)\le j$	$i=p$ $q\le q+s(A+1)\le j$	$i=p$ $q\le j-rA\le j$

【證明】

己：當紅棋先走，藍棋獲勝(最後一次走**少走 k 步**)

起點相對位置：紅棋(左上)、藍棋(右下)，若由紅棋的起點位置出發，且紅棋共走了$(A+1)$次，紅棋敗北的位置必須往右或下的方向走$r(A+1)$步，**其分出勝負時的位置所形成的圖形為 45°的斜直線型**，因此藍棋獲勝的位置=紅棋敗北的位置=$(i+r(A+1)-t,j-t)$。

而紅、藍棋分出勝負時的行坐標要介於紅、藍棋起點位置的行坐標之間、分出勝負時的列坐標要介於紅、藍棋起點位置的列坐標之間，其坐標範圍為

$i\le i+r(A+1)-t\le p, q\le j-t\le j, 0\le t\le r(A+1)$ 。

根據上述證明方式，其餘紅棋(藍棋)的7種起點相對位置及戊、庚、辛三種情況同理可證。■

二、遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜：

【研究6】推導出當紅、藍棋每一次依序各走1步的最短步數及分出勝負的判斷準則

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走1步、藍棋每一次走1步，且 $\dfrac{D}{2}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 。

【證明】

因為 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$=紅、藍棋分出勝負時共走的總步數，因此只要修正 A 為 $\dfrac{D}{2}$ 的商數，而 R 為 $\dfrac{D}{2}$ 的餘數，其紅、藍棋的最短步數及分出勝負的判斷準則與**【研究1.2】~【研究1.5】**的結論相同。 ■

【研究7】推導出紅、藍棋每一次依序各走r步及s步的最短步數及分出勝負的判斷準則

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走 r 步、藍棋每一次走 s 步，其中 r 、 s 為正整數，且 $\dfrac{D}{(r+s)}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 。

【證明】

因為 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$=紅、藍棋分出勝負時共走的總步數，因此只要修正 A 為 $\dfrac{D}{(r+s)}$ 的商數，而 R 為 $\dfrac{D}{(r+s)}$ 的餘數，其紅、藍棋的最短步數及分出勝負的判斷準則與**【研究2.2】~【研究2.9】**的結論相同。 ■

【研究 8】

無論紅棋先走或後走，紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的最短路徑數為 C_d^D ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

【證明】

因為 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$=紅、藍棋分出勝負時共走的總步數=紅、藍棋分出勝負時向斜的總

步數+紅、藍棋分出勝負時向上、下、左、右的總步數，而無論紅、藍棋每一次各走的步數為何及無論紅棋先走或後走，其最短路徑數是根據高中的排列組合：紅、藍棋分出勝負時共走的總步數，任選向斜的總步數或向上、下、左、右的總步數出來組合，因此紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 **k** 步)的最短路徑數為 C_d^D 。 ■

【研究 9】

紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 **k** 步)的所有位置個數如下所示：

若 $B \le D$ ，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數=($\min(b,d,D-d)+1$)個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$ 、 $b=\min(T_r,T_s)$ 、 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

【證明】

設紅棋的起點位置在 a_{ij} ，藍棋的起點位置在 b_{pq} ，若 $B \le D$，等價於 $b \ge 0$ ，又因為 $\min(T_r,T_s)$ 、 $\min(|i-p|,|j-q|)$ 、 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)$ 將會影響紅、藍棋分出勝負時的個數，以下將分成 3 種情形作討論：

情形1. 由 $\min(T_r,T_s)$ 作討論：

略(證明方式如同【研究4】-情形1，詳細證明過程記載於研究日誌。)

情形2. 由 $\min(|i-p|,|j-q|)$ 作討論：

略(證明方式如同【研究4】-情形2，詳細證明過程記載於研究日誌。)

情形3. 由 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)$ 作討論：

(1)當 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)=0$ 時，等價於 $|i-p|=|j-q|$ ，表示紅、藍棋雙方只能向斜的方向相向而行，因此分出勝負時的位置個數=1個。

(2)當 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)=1$ 時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)為例，代表紅棋最後可能走到第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列，共有2個位置，因此分出勝負時的位置個數=2個。

(3)當 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)=2$ 時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)為例，代表紅棋最後可能走到第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列、第 $(j+3)$ 列，共有3個位置，因此分出勝負時的位置個數=3個。

(4)當 $\max(|i-p|,|j-q|)-\min(|i-p|,|j-q|)=D-d$ 時，以紅棋(左下)、藍棋(右上)為例，代表紅棋最後可能走到第 $(j+1)$ 列、第 $(j+2)$ 列、第 $(j+3)$ 列、…、第 $(j+D-d+1)$ 列，共有 $(D-d+1)$ 個位置，因此分出勝負時的位置個數=($D-d+1$)個。

由上述3種情形的討論，可知若 $B \le D$，其分出勝負時的位置個數=($\min(b,d,D-d)+1$)個。 ■

【研究10】推導出紅、藍棋分出勝負(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置(坐標)

因為紅、藍棋的移動方式增加了向斜的方向，所以必須考慮 $|i-p|$ 、 $|j-q|$ 之間的大小關係。

【研究10.1】紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完)的所有位置(坐標)如下表所示：

情形1.當 $|i-p| \le |j-q|$ 時：

先後走 / 起點位置	甲 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走 剛好走完	乙 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走 剛好走完	丙 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走 剛好走完	丁 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走 剛好走完
紅(左上) 藍(右下)	$(p-t,q+sA)$	$(p-t,q+sA)$	$(p-t,q+sA)$	$(p-t,q+s(A+1))$
坐標範圍	$i \le p-t \le p$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le r(A+1)$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+s(A+1) \le j$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p-t,q-sA)$	$(p-t,q-sA)$	$(p-t,q-sA)$	$(p-t,q-s(A+1))$
坐標範圍	$i \le p-t \le p$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le r(A+1)$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-s(A+1) \le q$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p-t-i\rvert \le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p+t,q+sA)$	$(p+t,q+sA)$	$(p+t,q+sA)$	$(p+t,q+s(A+1))$
坐標範圍	$p \le p+t \le i$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le r(A+1)$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+s(A+1) \le j$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$
紅(右下) 藍(左上)	$(p+t,q-sA)$	$(p+t,q-sA)$	$(p+t,q-sA)$	$(p+t,q-s(A+1))$
坐標範圍	$p \le p+t \le i$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le r(A+1)$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-s(A+1) \le q$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p+t-i\rvert \le rA$

紅藍同列 紅在右方	$(p+sA,q)$	$(p+sA,q)$	$(p+sA,q)$	$(p+s(A+1),q)$
坐標範圍	$p\le p+sA\le i$ $j=q$	$p\le p+sA\le i$ $j=q$	$p\le p+sA\le i$ $j=q$	$p\le p+s(A+1)\le i$ $j=q$
紅藍同列 紅在左方	$(p-sA,q)$	$(p-sA,q)$	$(p-sA,q)$	$(p-s(A+1),q)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $j=q$	$i\le p-sA\le p$ $j=q$	$i\le p-sA\le p$ $j=q$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $j=q$
紅藍同行 紅在下方	$(p,q-sA)$	$(p,q-sA)$	$(p,q-sA)$	$(p,q-s(A+1))$
坐標範圍	$i=p$ $j\le q-sA\le q$	$i=p$ $j\le q-sA\le q$	$i=p$ $j\le q-sA\le q$	$i=p$ $j\le q-s(A+1)\le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p,q+sA)$	$(p,q+sA)$	$(p,q+sA)$	$(p,q+s(A+1))$
坐標範圍	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le q+s(A+1)\le j$

【證明】

甲：當紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)

起點相對位置：紅棋(左上)、藍棋(右下)，若由藍棋的起點位置出發，當$|i-p|<|j-q|$時，藍棋敗北的位置必須往左或上或左上(向斜)的方向走sA步，**其分出勝負時的位置所形成的圖形為<u>水平型</u>**；當$|i-p|=|j-q|$時，藍棋敗北的位置必須左上(向斜)的方向走sA步，**其分出勝負時的位置所形成的圖形為<u>一個點</u>**，因此紅棋獲勝的位置=藍棋敗北的位置=$(p-t,q+sA)$，而紅、藍棋分出勝負時的行坐標要介於紅、藍棋起點位置的行坐標之間、分出勝負時的列坐標要介於紅、藍棋起點位置的列坐標之間、且分出勝負時的位置與紅棋起點位置的行差≤紅棋走的總步數**(因為要確保紅棋可以走到此坐標，若沒加上此條件，其坐標非最短步數下的獲勝位置)**，因此其坐標範圍：$i\le p-t\le p, q\le q+sA\le j, 0\le t\le sA, |p-t-i|\le r(A+1)$。

根據上述證明方式，其餘紅棋(藍棋)的7種起點相對位置及乙、丙、丁三種情況同理可證。■

情形2.當$|i-p|>|j-q|$時：

先後走 起點位置	甲 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走 剛好走完	乙 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走 剛好走完	丙 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走 剛好走完	丁 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走 剛好走完
紅(左上) 藍(右下)	$(p-sA,q+t)$	$(p-sA,q+t)$	$(p-sA,q+t)$	$(p-s(A+1),q+t)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le r(A+1)$	$i\le p-sA\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$	$i\le p-sA\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p-sA,q-t)$	$(p-sA,q-t)$	$(p-sA,q-t)$	$(p-s(A+1),q-t)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le r(A+1)$	$i\le p-sA\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$	$i\le p-sA\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le s(A+1)$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p+sA,q+t)$	$(p+sA,q+t)$	$(p+sA,q+t)$	$(p+s(A+1),q+t)$
坐標範圍	$p\le p+sA\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le r(A+1)$	$p\le p+sA\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$	$p\le p+sA\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$	$p\le p+s(A+1)\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$ $\lvert q+t-j\rvert\le rA$
紅(右下) 藍(左上)	$(p+sA,q-t)$	$(p+sA,q-t)$	$(p+sA,q-t)$	$(p+s(A+1),q-t)$
坐標範圍	$p\le p+sA\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le r(A+1)$	$p\le p+sA\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$	$p\le p+sA\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$	$p\le p+s(A+1)\le i$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le s(A+1)$ $\lvert q-t-j\rvert\le rA$
紅藍同列 紅在右方	$(p+sA,q)$	$(p+sA,q)$	$(p+sA,q)$	$(p+s(A+1),q)$

坐標範圍	$p \le p+sA \le i$ $j=q$	$p \le p+sA \le i$ $j=q$	$p \le p+sA \le i$ $j=q$	$p \le p+s(A+1) \le i$ $j=q$
紅藍同列 紅在左方	$(p-sA,q)$	$(p-sA,q)$	$(p-sA,q)$	$(p-s(A+1),q)$
坐標範圍	$i \le p-sA \le p$ $j=q$	$i \le p-sA \le p$ $j=q$	$i \le p-sA \le p$ $j=q$	$i \le p-s(A+1) \le p$ $j=q$
紅藍同行 紅在下方	$(p,q-sA)$	$(p,q-sA)$	$(p,q-sA)$	$(p,q-s(A+1))$
坐標範圍	$i=p$ $j \le q-sA \le q$	$i=p$ $j \le q-sA \le q$	$i=p$ $j \le q-sA \le q$	$i=p$ $j \le q-s(A+1) \le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p,q+sA)$	$(p,q+sA)$	$(p,q+sA)$	$(p,q+s(A+1))$
坐標範圍	$i=p$ $q \le q+sA \le j$	$i=p$ $q \le q+sA \le j$	$i=p$ $q \le q+sA \le j$	$i=p$ $q \le q+s(A+1) \le j$

【證明】

因紅、藍棋起點位置的行差＞列差，**其分出勝負時的位置所形成的圖形為鉛直型**，我們可以根據**【研究 10.1】-情形 1** 的證明方式，同理可證。 ■

【研究 10.2】紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走**少走 k 步**)的所有位置(坐標)如下表所示：

情形1.當 $|i-p| \le |j-q|$ 時：

先後 走 起點 位置	戊 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走少走 k 步	己 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走少走 k 步	庚 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走少走 k 步	辛 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走少走 k 步
紅(左上) 藍(右下)	$(p-t,q+sA)$	$(p-t,q+(sA+R-r))$	$(p-t,q+s(A+1))$	$(p-t,q+(sA+R))$

坐標範圍	$i \le p-t \le p$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA+R$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+(sA+R-r) \le j$ $0 \le t \le sA+R-r$ $\lvert p-t-i \rvert \le r(A+1)$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+s(A+1) \le j$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA+R-s$	$i \le p-t \le p$ $q \le q+(sA+R) \le j$ $0 \le t \le sA+R$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p-t, q-sA)$	$(p-t, q-(sA+R-r))$	$(p-t, q-s(A+1))$	$(p-t, q-(sA+R))$
坐標範圍	$i \le p-t \le p$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA+R$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-(sA+R-r) \le q$ $0 \le t \le sA+R-r$ $\lvert p-t-i \rvert \le r(A+1)$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-s(A+1) \le q$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA+R-s$	$i \le p-t \le p$ $j \le q-(sA+R) \le q$ $0 \le t \le sA+R$ $\lvert p-t-i \rvert \le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p+t, q+sA)$	$(p+t, q+(sA+R-r))$	$(p+t, q+s(A+1))$	$(p+t, q+(sA+R))$
坐標範圍	$p \le p+t \le i$ $q \le q+sA \le j$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA+R$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+(sA+R-r) \le j$ $0 \le t \le sA+R-r$ $\lvert p+t-i \rvert \le r(A+1)$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+s(A+1) \le j$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA+R-s$	$p \le p+t \le i$ $q \le q+(sA+R) \le j$ $0 \le t \le sA+R$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA$
紅(右下) 藍(左上)	$(p+t, q-sA)$	$(p+t, q-(sA+R-r))$	$(p+t, q-s(A+1))$	$(p+t, q-(sA+R))$
坐標範圍	$p \le p+t \le i$ $j \le q-sA \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA+R$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-(sA+R-r) \le q$ $0 \le t \le sA+R-r$ $\lvert p+t-i \rvert \le r(A+1)$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-s(A+1) \le q$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA+R-s$	$p \le p+t \le i$ $j \le q-(sA+R) \le q$ $0 \le t \le sA+R$ $\lvert p+t-i \rvert \le rA$
紅藍同列 紅在右方	$(p+sA, q)$	$(p+(sA+R-r), q)$	$(p+s(A+1), q)$	$(p+(sA+R), q)$
坐標範圍	$p \le p+sA \le i$ $j = q$	$p \le p+(sA+R-r) \le i$ $j = q$	$p \le p+s(A+1) \le i$ $j = q$	$p \le p+(sA+R) \le i$ $j = q$
紅藍同列 紅在左方	$(p-sA, q)$	$(p-(sA+R-r), q)$	$(p-s(A+1), q)$	$(p-(sA+R), q)$
坐標範圍	$i \le p-sA \le p$ $j = q$	$i \le p-(sA+R-r) \le p$ $j = q$	$i \le p-s(A+1) \le p$ $j = q$	$i \le p-(sA+R) \le p$ $j = q$
紅藍同行 紅在下方	$(p, q-sA)$	$(p, q-(sA+R-r))$	$(p, q-s(A+1))$	$(p, q-(sA+R))$

坐標範圍	$i=p$ $j\le q-sA\le q$	$i=p$ $j\le q-(sA+R-r)\le q$	$i=p$ $j\le q-s(A+1)\le q$	$i=p$ $j\le q-(sA+R)\le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p,q+sA)$	$(p,q+(sA+R-r))$	$(p,q+s(A+1))$	$(p,q+(sA+R))$
坐標範圍	$i=p$ $q\le q+sA\le j$	$i=p$ $q\le q+(sA+R-r)\le j$	$i=p$ $q\le q+s(A+1)\le j$	$i=p$ $q\le q+(sA+R)\le j$

【證明】略(證明方式如同【研究 10.1】-情形 1，詳細證明過程記載於研究日誌。)

情形 2.當$|i-p|>|j-q|$時：

先後 走 起點 位置	戊 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	己 紅棋先走 藍棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	庚 紅棋後走 紅棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步	辛 紅棋後走 藍棋獲勝 最後一次走少走 ***k*** 步
紅(左上) 藍(右下)	$(p-sA,q+t)$	$(p-(sA+R-r),q+t)$	$(p-s(A+1),q+t)$	$(p-(sA+R),q+t)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\|q+t-j\|\le rA+R$	$i\le p-(sA+R-r)\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA+R-r$ $\|q+t-j\|\le r(A+1)$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$ $\|q+t-j\|\le rA+R-s$	$i\le p-(sA+R)\le p$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA+R$ $\|q+t-j\|\le rA$
紅(左下) 藍(右上)	$(p-sA,q-t)$	$(p-(sA+R-r),q-t)$	$(p-s(A+1),q-t)$	$(p-(sA+R),q-t)$
坐標範圍	$i\le p-sA\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA$ $\|q-t-j\|\le rA+R$	$i\le p-(sA+R-r)\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA+R-r$ $\|q-t-j\|\le r(A+1)$	$i\le p-s(A+1)\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le s(A+1)$ $\|q-t-j\|\le rA+R-s$	$i\le p-(sA+R)\le p$ $j\le q-t\le q$ $0\le t\le sA+R$ $\|q-t-j\|\le rA$
紅(右上) 藍(左下)	$(p+sA,q+t)$	$(p+(sA+R-r),q+t)$	$(p+s(A+1),q+t)$	$(p+(sA+R),q+t)$
坐標範圍	$p\le p+sA\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA$ $\|q+t-j\|\le rA+R$	$p\le p+(sA+R-r)\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA+R-r$ $\|q+t-j\|\le r(A+1)$	$p\le p+s(A+1)\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le s(A+1)$ $\|q+t-j\|\le rA+R-s$	$p\le p+(sA+R)\le i$ $q\le q+t\le j$ $0\le t\le sA+R$ $\|q+t-j\|\le rA$

紅(右下) 藍(左上)	$(p+sA, q-t)$	$(p+(sA+R-r), q-t)$	$(p+s(A+1), q-t)$	$(p+(sA+R), q-t)$
坐標範圍	$p \le p+sA \le i$ $j \le q-t \le q$ $0 \le t \le sA$ $\lvert q-t-j \rvert \le rA+R$	$p \le p+(sA+R-r) \le i$ $j \le q-t \le q$ $0 \le t \le sA+R-r$ $\lvert q-t-j \rvert \le r(A+1)$	$p \le p+s(A+1) \le i$ $j \le q-t \le q$ $0 \le t \le s(A+1)$ $\lvert q-t-j \rvert \le rA+R-s$	$p \le p+(sA+R) \le i$ $j \le q-t \le q$ $0 \le t \le sA+R$ $\lvert q-t-j \rvert \le rA$
紅藍同列 紅在右方	$(p+sA, q)$	$(p+(sA+R-r), q)$	$(p+s(A+1), q)$	$(p+(sA+R), q)$
坐標範圍	$p \le p+sA \le i$ $j=q$	$p \le p+(sA+R-r) \le i$ $j=q$	$p \le p+s(A+1) \le i$ $j=q$	$p \le p+(sA+R) \le i$ $j=q$
紅藍同列 紅在左方	$(p-sA, q)$	$(p-(sA+R-r), q)$	$(p-s(A+1), q)$	$(p-(sA+R), q)$
坐標範圍	$i \le p-sA \le p$ $j=q$	$i \le p-(sA+R-r) \le p$ $j=q$	$i \le p-s(A+1) \le p$ $j=q$	$i \le p-(sA+R) \le p$ $j=q$
紅藍同行 紅在下方	$(p, q-sA)$	$(p, q-(sA+R-r))$	$(p, q-s(A+1))$	$(p, q-(sA+R))$
坐標範圍	$i=p$ $j \le q-sA \le q$	$i=p$ $j \le q-(sA+R-r) \le q$	$i=p$ $j \le q-s(A+1) \le q$	$i=p$ $j \le q-(sA+R) \le q$
紅藍同行 紅在上方	$(p, q+sA)$	$(p, q+(sA+R-r))$	$(p, q+s(A+1))$	$(p, q+(sA+R))$
坐標範圍	$i=p$ $q \le q+sA \le j$	$i=p$ $q \le q+(sA+R-r) \le j$	$i=p$ $q \le q+s(A+1) \le j$	$i=p$ $q \le q+(sA+R) \le j$

【證明】略(證明方式如同【研究10.1】-情形2，詳細證明過程記載於研究日誌。)

三、用程式軟體實驗及驗證遊戲1及遊戲2：

【研究11】透過演算法並利用程式軟體R語言寫出程式碼作實驗及驗證

由【研究1】~【研究10】推導出紅棋(藍棋)的最短步數、最短路徑數、分出勝負時的所有位置個數、所有位置(坐標)及分出勝負的判斷準則後，我們是透過**演算法**並利用**程式軟體-R語言寫出程式碼**作實驗及驗證，然而R語言是我們從未接觸過的程式語言，但在老師跟我們介紹R語言的介面操作及基本語法後，我們就根據推導出來的公式，利用了**兩個學期的社團課**(數學科展研究社)，逐步完成**遊戲1及遊戲2**每一條公式的程式碼，也就是說只要輸入紅、藍棋的

起點位置、紅棋先走或後走及紅、藍棋每一次走的步數(可使用sample語法讓各參數隨機產生)，再利用大量的if else指令，即可輸出【研究1】~【研究10】的結果出來，且遊戲1及遊戲2的原始程式碼已完整記載於研究日誌中，然而程式碼是透過以下的演算法編寫而成的，因篇幅有限，以下只列出**遊戲1**的部份演算法：**(而部份的原始程式碼放在附錄)**

【演算法步驟說明】

步驟 1：隨機給定各參數i, j, p, q, r, s, y的初始值，其中 $y=1$為紅棋先走、 $y=2$ 為紅棋後走。

步驟 2：根據步驟 1 的初始值，定義並計算$M=|i-p|+|j-q|$、A為$\dfrac{M}{r+s}$的商數、R為$\dfrac{M}{r+s}$的餘數、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

步驟 3：如果 $y=1$且$R=r$且$b=\min(r(A+1),sA)$ ，則計算$T_r=r(A+1)$ 、$T_s=sA$，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 4。

步驟 4：如果 $y=1$且$R=0$且$b=\min(rA,sA)$ ，則計算$T_r=rA$ 、$T_s=sA$，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 5。

步驟 5：如果 $y=2$且$R=0$且$b=\min(rA,sA)$ ，則計算$T_r=rA$ 、$T_s=sA$，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 6。

步驟 6：如果 $y=2$且$R=s$且$b=\min(rA,s(A+1))$ ，則計算$T_r=rA$ 、$T_s=s(A+1)$ ，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 7。

步驟 7：如果 $y=1$且$0<R<r$且$b=\min(rA+R,sA)$，則計算$T_r=rA+R$ 、$T_s=sA$，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 8。

步驟 8：如果 $y=1$且$r<R<r+s$且$b=\min(r(A+1),sA+R-r)$ ，則計算$T_r=r(A+1)$ 、$T_s=sA+(R-r)$，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 9。

步驟 9：如果 $y=2$且$s<R<r+s$且$b=\min(rA+R-s,s(A+1))$ ，則計算$T_r=rA+(R-s)$ 、$T_s=s(A+1)$ ，並跳至步驟 11；否則跳至步驟 10。

步驟 10：如果 $y=2$且$0<R<s$且$b=\min(rA,sA+R)$ ，則計算$T_r=rA$ 、$T_s=sA+R$ ，並跳至步驟 11。

步驟 11：計算紅、藍棋分出勝負時的最短路徑數=$C^{M}_{|i-p|}$ ，並跳至步驟 12。

步驟 12：計算紅、藍棋分出勝負時的位置個數=$\min(b,d)+1$ 。

(我們也利用了 for 迴圈語法，一次進行多回合的紅、藍棋遊戲，並輸出所有的結果。)

【R 語言-最短步數、最短路徑數、分出勝負時的位置個數及所有位置(坐標)的輸出結果 1】

遊戲 1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

(下圖為 R 語言介面，其中各參數 *i*, *j*, *p*, *q*, *r*, *s*, *y* 的初始值可指定或隨機)

```
遊戲1：紅藍棋的移動方式只能向上、下、左、右的回合數： 92
i= 39 ,j= 44 ,p= 91 ,q= 33 ,r= 10 ,s= 24 ,A= 1 ,R= 29 ,y= 2
1.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的最短步數= 15
2.紅棋後走，藍棋敗北的最短步數= 48
k= 5
3.所對應的最短路徑數= 615790256823

4.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)位置個數= 12
5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 43 33
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 0

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 44 34
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 1

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 45 35
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 2

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 46 36
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 3

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 47 37
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 4

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 48 38
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 5

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 49 39
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 6

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 50 40
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 7

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 51 41
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 8

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 52 42
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 9

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 53 43
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 10

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 54 44
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 11
```

【R 語言-最短步數、最短路徑數、分出勝負時的位置個數及所有位置(坐標)的輸出結果 2】

遊戲 2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

(下圖為 R 語言介面，其中各參數 *i*, *j*, *p*, *q*, *r*, *s*, *y* 的初始值可指定或隨機)

```
遊戲2：紅藍棋的移動方式可向斜的回合數： 88
i= 40 ,j= 22 ,p= 56 ,q= 67 ,r= 6 ,s= 16 ,D= 45 ,d= 16 ,A= 2 ,R= 1 ,y= 1
1.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的最短步數= 13
2.紅棋先走，藍棋敗北的最短步數= 32
k= 5
3.所對應的最短路徑數= 646626422970

4.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)位置個數= 14
5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 53 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 3

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 52 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 4

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 51 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 5

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 50 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 6

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 49 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 7

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 48 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 8

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 47 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 9

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 46 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 10

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 45 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 11

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 44 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 12

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 43 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 13

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 42 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 14

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 41 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 15

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 40 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 16
```

陸、 研究成果與未來展望

一、研究成果：

(一) 遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

1.當紅、藍棋每一次依序各走1步的最短步數及紅、藍棋分出勝負的判斷準則：

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走1步、藍棋每一次走1步。

定義：$\frac{M}{2}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

最短步數	紅棋先走(紅贏)	紅棋先走(藍贏)	紅棋後走(紅贏)	紅棋後走(藍贏)
紅棋	$T_r = A+1$	$T_r = A$	$T_r = A$	$T_r = A$
藍棋	$T_s = A$	$T_s = A$	$T_s = A$	$T_s = A+1$
判斷準則	$R=1$	$R=0$	$R=0$	$R=1$

2. 當紅、藍棋每一次依序各走 r 步及 s 步的最短步數及紅、藍棋分出勝負的判斷準則：

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走r步、藍棋每一次走s步，其中r 、 s 為正整數。

定義：$\frac{M}{r+s}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

最短步數	紅棋先走(紅贏)	紅棋先走(藍贏)	紅棋後走(紅贏)	紅棋後走(藍贏)
紅棋(藍棋) 剛好走完	$T_r = r(A+1)$ $T_s = sA$	$T_r = rA$ $T_s = sA$	$T_r = rA$ $T_s = sA$	$T_r = rA$ $T_s = s(A+1)$
判斷準則	$R=r$	$R=0$	$R=0$	$R=s$
最短步數	紅棋先走(紅贏)	紅棋先走(藍贏)	紅棋後走(紅贏)	紅棋後走(藍贏)
紅棋(藍棋) 少走 **k** 步	$T_r = rA+R$ $T_s = sA$	$T_r = r(A+1)$ $T_s = sA+(R-r)$	$T_r = rA+(R-s)$ $T_s = s(A+1)$	$T_r = rA$ $T_s = sA+R$
判斷準則	$0<R<r$ $R=r-k$	$r<R<r+s$ $R=r+s-k$	$s<R<r+s$ $R=r+s-k$	$0<R<s$ $R=s-k$

3.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的最短路徑數： $C^{M}_{|i-p|}$ ，其中 $M=|i-p|+|j-q|$ 。

4.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置個數：

若 $B \le M$ ，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數=($\min(b,d)+1$)個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$ 、 $M=|i-p|+|j-q|$ 、 $b=\min(T_r,T_s)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

5.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置：參閱**【研究 5】**。

6.透過演算法並利用R語言寫成程式碼作驗證：參閱**【研究11】**。

(二) 遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

1.當紅、藍棋每一次依序各走1步的最短步數及紅、藍棋分出勝負的判斷準則：

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走1步、藍棋每一次走1步。

定義：$\dfrac{D}{2}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 。

其紅、藍棋的最短步數及分出勝負的判斷準則與**【研究1.2】~【研究1.5】**的結論相同。

2. 當紅、藍棋每一次依序各走r步及s步的最短步數及紅、藍棋分出勝負的判斷準則：

初始條件：當紅棋的起點位置在第i行第j列，藍棋的起點位置在第 p 行第 q 列，若紅棋每一次走 r 步、藍棋每一次走 s 步，其中 r 、 s 為正整數。

定義：$\dfrac{D}{r+s}$ 的商數為 A 、餘數為 R ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 。

其紅、藍棋的最短步數及分出勝負的判斷準則與**【研究2.2】~【研究2.9】**的結論相同。

3.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的最短路徑數： C_d^D ，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

4.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置個數：

若 $B \le D$ ，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數=($\min(b,d,D-d)+1$)個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$ 、 $b=\min(T_r,T_s)$ 、 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$ 、 $d=\min(|i-p|,|j-q|)$ 。

5.紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置：參閱**【研究 10】**。

6.透過演算法並利用R語言寫成程式碼作驗證：參閱**【研究11】**。

二、討論與未來展望：

1.利用下表來比較本研究作品與桃園市第60屆科展作品的差異：

項目	本研究作品的貢獻	桃園市第60屆科展作品
紅棋先走、後走情形	**紅棋先走、後走情形均有討論**	只有討論紅棋先走的情形
紅、藍棋每一次走的步數	**紅棋每一次可走 r 步、藍棋每一次可走 s 步，其中 r 、 s 為正整數**	紅、藍棋每一次只能各走1步
最短步數公式	**1.公式較簡化。** **2.均有討論紅棋先走或後走的情形、並推導雙方的最短步數公式。** **3.紅棋每一次可走 r 步、藍棋每一次可走 s 步，其中 r 、 s 為正整數** **4.推導出紅(藍)棋最後一次走剛好走完或少走 k 步獲勝的公式。**	1.公式較複雜、較冗長，計算較困難。 2.只有討論紅棋先走的情形，且只有討論紅棋獲勝或敗北的最短步數，並沒有討論藍棋獲勝或敗北的最短步數。。 3.紅、藍棋每一次只能各走1步。
勝負的判斷準則	**只要知道紅棋、藍棋的起點位置，紅棋為先走或後走，紅棋、藍棋每次各走幾步，即可在不操作棋子的情形下，事先預判勝負。**	無
最短路徑數公式	**1.公式較簡化。** **2.均有討論紅棋先走或後走的情形。** **3.紅棋每一次可走 r 步、藍棋每一次可走 s 步，其中 r 、 s 為正整數。**	1.公式較複雜、較冗長，計算較困難。 2.只有討論紅棋先走的情形。 3.紅、藍棋每一次只能各走1步。
所有位置個數公式	**推導出紅棋(藍棋)分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置個數公式。**	無
所有位置(坐標)公式	**推導出紅棋(藍棋)分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走 k 步)的所有位置(坐標)公式。**	無

項目	本研究作品的貢獻	桃園市第60屆科展作品
增加紅藍棋移動方式	紅、藍棋的移動方式除了原本的向上、向下、向左、向右外，增加了向斜的移動方式，並推導出所有公式出來。	紅、藍棋的移動方式只能上下左右。
程式軟體	透過演算法並利用R語言寫出程式碼作實驗及驗證(遊戲1及遊戲2均有寫出程式碼)，並利用for迴圈語法，可一次進行多回合的紅、藍棋遊戲，並輸出所有結果。	無

2.本研究除了學到如何推導數學公式與證明外，我們也利用資訊科技中的程式軟體輔助本作品的每條公式，而透過寫演算法及程式碼的過程中，除了可以訓練我們的邏輯思考外，也可以透過程式軟體快速計算一些紅、藍棋起點位置差距很大的例子，並從中節省了不少時間。

3.然而未來可再研究當紅棋 a_{ij} 與藍棋 b_{pq} 的起點分別在任意位置時，紅棋可先走或後走，且紅、藍棋每一次**最多**可以走 x 步時(x 為正整數)，並嘗試推導本研究作品的所有公式。

4.未來若能結合更多的資訊科技，可將本研究作品寫成一個遊戲軟體。

柒、 參考資料及文獻

1. 薛毅、陳立萍(2006年)-統計建模與R軟件。中國：清華大學出版社。
2. 于雷(2013 年)–邏輯思維訓練 500 題 (白金版)。中國：清華大學出版社。
3. 劉貞吟(2020年)-棋逢對手。桃園市第60屆中小學科學展覽國中組數學科。

附錄

(因篇幅有限，以下只列出遊戲1的部份原始程式碼)

```
rm(list=ls(all=TRUE))
for(g in 1:100){
i=sample(1:100,1);j=sample(1:100,1);p=sample(1:100,1);q=sample(1:100,1);r=sample(1:30,1);s=sample(1:30,1)
M=abs(i-p)+abs(j-q);A= M %/%(r+s); R=M%%(r+s);y=sample(1:2,1);d=min(abs(i-p),abs(j-q))
cat("遊戲1：紅藍棋的移動方式只能向上、下、左、右的回合數：",g)
cat("\n")
cat("i=",i,",j=",j,",p=",p,",q=",q,",r=",r,",s=",s,",A=",A,",R=",R,",y=",y)
cat("\n")
 if(y==1&R==r){
 cat("1.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數=",r*(A+1))
 cat("\n")
 cat("2.紅棋先走，藍棋敗北的最短步數=",s*A)
 cat("\n")
}else if(y==1&R==0){
 cat("1.紅棋先走，紅棋敗北的最短步數=",r*A)
 cat("\n")
 cat("2.紅棋先走，藍棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數=",s*A)
 cat("\n")
}else if(y==2&R==0){
 cat("1.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數=",r*A)
 cat("\n")
 cat("2.紅棋後走，藍棋敗北的最短步數=",s*A)
 cat("\n")
}else if(y==2&R==s){
 cat("1.紅棋後走，紅棋敗北的最短步數=",r*A)
 cat("\n")
 cat("2.紅棋後走，藍棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數=",s*(A+1))
 cat("\n")
}else if(y==1&0<R&R<r){
 cat("1.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的最短步數=",r*A+R)
 cat("\n")
 cat("2.紅棋先走，藍棋敗北的最短步數=",s*A)
 cat("\n")
 cat("k=",r-R)
 cat("\n")
```

【評語】030408

本作品討論的是一個棋盤上的雙人對戰遊戲的勝負問題。遊戲雙方在棋盤上各有一枚棋子。兩人輪流依特定的規則移動，先將自己的棋子移到對手所在的位置的一方就算獲勝。作者針對先後手誰勝誰負，給出了判斷的準則。作品說明書中不只討論了最原始的遊戲，還考慮了雙方每次可以移動不止一步、或是可以向斜方向移動這些新遊戲的先後手勝負的判斷準則。討論的面向非常的廣，可以看出花費了許多的心思，值得鼓勵。此外，此類的題材也屬於很熱門的研究問題，有關棋盤遊戲的探討‧這類問題有不少文獻可以參考‧一些想法思路應當也可以參閱之前的作品‧本作品設計規則後，藉由初步的窮舉法分類遊戲進展‧每一類別再各自繼續找出所有可能性‧在電腦程式的幫忙之下，本作品可以得到許多完整的結果‧最後一些建議，作品說明書中有一部分的說明有些凌亂，感覺上只是在介紹遊戲規則和所使用的符號，而不像是在給出結論。敘述的方式如果能稍做修正會更好。在考慮這樣的對戰遊戲時，我們最想知道的除了誰勝誰負，還有致勝的策略。作者們提到了判斷勝負的準則，但卻沒有給出先手或後手致勝的策略。如何保證優勢的一方最後一定可以取勝？棋子移動的策略是什麼？如果可以把這一部份進一步說明清楚，作品會更完整也更好。

作品簡報

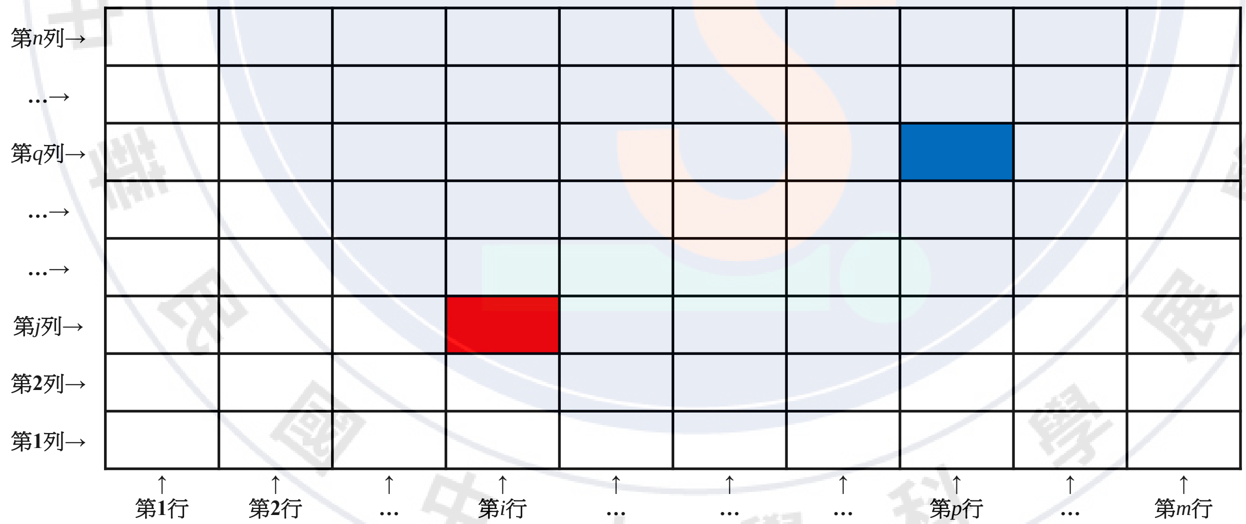
棋逢對手2.0

科　　別：數學科

組　　別：國中組

關鍵詞：

最短步數及路徑數、分出勝負時的個數及位置、R語言



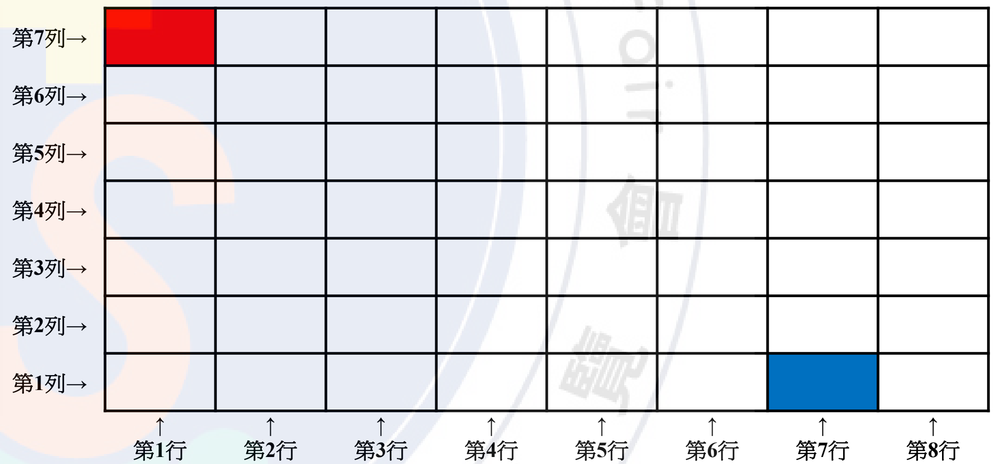
研究動機、文獻探討：

紅、藍棋棋盤遊戲 → 歷屆作品(遊戲1)

1. 紅、藍棋每次只能輪流各走1步。
2. 紅、藍棋的移動方式只能上下左右。
3. 只有討論紅棋先走的情形。
4. 只有推導出紅棋獲勝或敗北的最短步數及最短路徑數。

遊戲說明：(歷屆作品-遊戲1)

紅、藍棋的起點分別在任意的方格中(如右圖)，且紅、藍棋每次只能輪流(上下左右)各走1步，在紅棋先走的情形下，若紅棋壓在藍棋上面，則紅棋獲勝；若藍棋壓在紅棋上面，則藍棋獲勝。**(也就是說紅、藍棋在同一方格時，遊戲就分出勝負了。)**



研究主題：

本作品除了更深入的研究歷屆作品外(遊戲1)，我們也探討了移動方式更複雜的遊戲2。

研究目的

本研究分成兩種遊戲

遊戲1：紅、藍棋只能上下左右移動

遊戲2：紅、藍棋除了可上下左右移動外，增加可向斜的移動方式

紅、藍棋的起點分別在任意位置的方格中，且紅棋可先走或後走

紅、藍棋輪流各走*r*步及*s*步

1.分出勝負的最短步數

2.分出勝負的最短路徑數

3.分出勝負的所有位置個數

4.分出勝負的所有位置(坐標)

5.分出勝負的判斷準則

程式語言

透過演算法及利用程式軟體R語言，將遊戲1遊戲2寫成程式碼作實驗及驗證

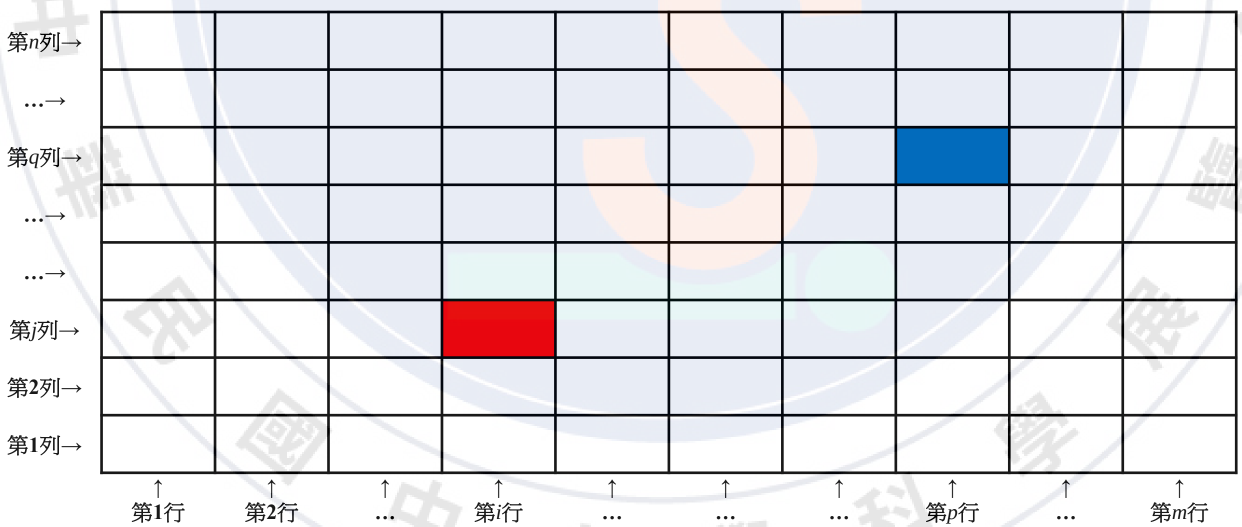
定義名詞與符號

(一)名詞解釋：

1. 紅、藍棋分出勝負時的**最短步數**：在紅、藍棋步數總和為最小的情形下，雙方可分出勝負。
2. 紅、藍棋分出勝負時的**最短路徑數**：在分出勝負時的最短步數情形下，雙方共有幾種走法。
3. 紅、藍棋分出勝負時的**所有位置**：分出勝負時的所有可能坐標，本文的坐標用(，)表示。
4. 紅、藍棋分出勝負時的**所有位置個數**：分出勝負時的所有可能位置數量總和。

(二)符號解釋：

1. a_{ij}：紅棋的起點位置在第i行第j列，其中i、j均為正整數。
2. b_{pq}：藍棋的起點位置在第p行第q列，其中p、q均為正整數。
3. r、s：紅、藍棋每一次各走的步數，其中r、s為正整數。
4. A、R：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，雙方步數總和除以$(r+s)$的商數及餘數。
5. k：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，贏家最後一次走少走的步數，其中k為正整數。
6. T_r、T_s：紅、藍棋分出勝負時(最短步數情形下)，紅、藍棋分別走的總步數。



研究成果-最短步數(紅藍棋每一次輪流各走r、s步)

當紅、藍棋每一次輪流各走r步及s步的最短步數及紅、藍棋分出勝負的判斷準則：

(一) 遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

定義：$\dfrac{M}{r+s}$ 的商數為A、餘數為R，其中$M=|i-p|+|j-q|$。

(二) 遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

定義：$\dfrac{D}{r+s}$ 的商數為A 、餘數為R，其中 $D=\max(|i-p|,|j-q|)$。

遊戲1及遊戲2-紅、藍棋的最短步數及分出勝負的判斷準則如下表(遊戲1及遊戲2的商數A、餘數R的定義不同)

最短步數	紅棋先走(紅贏)	紅棋先走(藍贏)	紅棋後走(紅贏)	紅棋後走(藍贏)
紅棋(藍棋) 剛好走完	$T_r=r(A+1)$ $T_s=sA$	$T_r=rA$ $T_s=sA$	$T_r=rA$ $T_s=sA$	$T_r=rA$ $T_s=s(A+1)$
判斷準則	$R=r$	$R=0$	$R=0$	$R=s$

最短步數	紅棋先走(紅贏)	紅棋先走(藍贏)	紅棋後走(紅贏)	紅棋後走(藍贏)
紅棋(藍棋) 少走k步	$T_r=rA+R$ $T_s=sA$	$T_r=r(A+1)$ $T_s=sA+(R-r)$	$T_r=rA+(R-s)$ $T_s=s(A+1)$	$T_r=rA$ $T_s=sA+R$
判斷準則	$0<R<r$ $R=r-k$	$r<R<r+s$ $R=r+s-k$	$s<R<r+s$ $R=r+s-k$	$0<R<s$ $R=s-k$

研究成果-紅、藍棋分出勝負時的最短路徑數

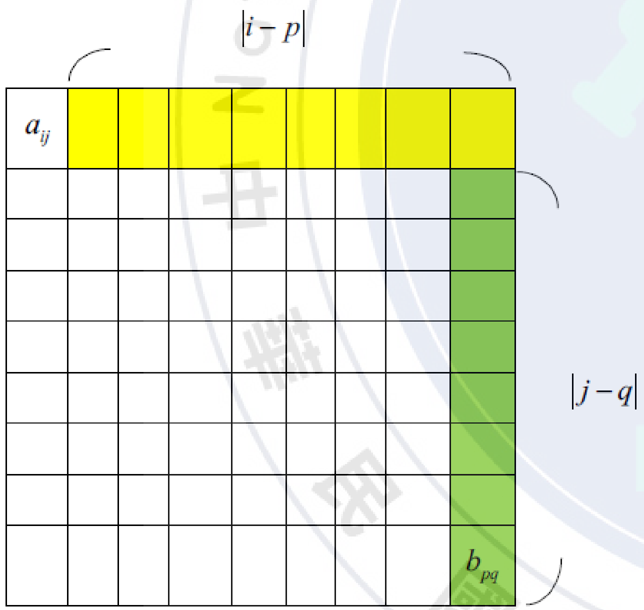
紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走k步)的最短路徑數：

(一) 遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

最短路徑數：$C^{M}_{|i-p|}$，其中$M=|i-p|+|j-q|$。

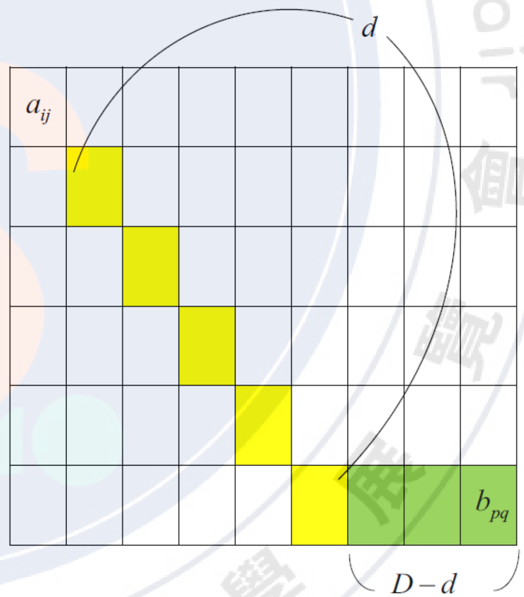
(二) 遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

最短路徑數：C^{D}_{d}，其中$D=\max(|i-p|,|j-q|)$、$d=\min(|i-p|,|j-q|)$。



遊戲1的最短路徑數說明

紅、藍棋走的總步數=向左右+向上下



遊戲2的最短路徑數說明

紅、藍棋走的總步數=向斜+向左右

研究成果-紅、藍棋分出勝負時的所有位置個數

紅、藍棋分出勝負時(贏家最後一次走剛好走完或少走k步)的所有位置個數：

(一) 遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

若 $B \le M$，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數$=(\min(b,d)+1)$個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$、$M=|i-p|+|j-q|$、$b=\min(T_r,T_s)$、$d=\min(|i-p|,|j-q|)$。

(二) 遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

若 $B \le D$，則紅、藍棋分出勝負時的位置個數$=(\min(b,d,D-d)+1)$個。

其中 $B=\max(T_r,T_s)$、$D=\max(|i-p|,|j-q|)$、$b=\min(T_r,T_s)$、$d=\min(|i-p|,|j-q|)$。

舉例說明：解釋$(D-d)$會影響分出勝負的個數

				b_{54}
		勝負		
		勝負		
a_{11}				

說明：紅棋起點在第1行第1列、藍棋起點在第5行第4列

當 $|i-p|>|j-q|$、$B=b=2$、$D=4$、$d=3$、$D-d=1$，

以紅棋的觀點來看，紅棋可向右的方向走1步或0步：

(1)紅棋可向右及向斜的方向各走1步。

(2)紅棋可向斜的方向走2步。

因此分出勝負的位置有 $D-d+1=1+1=2$ 個。

研究成果-紅、藍棋分出勝負時的所有位置(坐標)

(一) 遊戲1：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右。

分出勝負時的所有位置(坐標)共有64種情形。

(二) 遊戲2：紅、藍棋的移動方式可為向上或向下或向左或向右或向斜。

分出勝負時的所有位置(坐標)共有128種情形。(考慮$|i-p|$、$|j-q|$之間的大小關係)

舉例說明：

以遊戲2中的$|i-p|\le|j-q|$情形為例作說明，

(右表為遊戲2分出勝負時的128種坐標的其中一種)

(1)當$|i-p|<|j-q|$時，其分出勝負時的所有位置所形成的圖形為**水平型**。

(2)當$|i-p|=|j-q|$時，其分出勝負時的所有位置所形成的圖形為**一個點**。

先後走 起點位置	甲 紅棋先走 紅棋獲勝 最後一次走 剛好走完
紅(左上) 藍(右下)	$(p-t,q+sA)$
坐標範圍	$i\le p-t\le p$ $q\le q+sA\le j$ $0\le t\le sA$ $\lvert p-t-i\rvert\le r(A+1)$

研究成果-透過演算法並利用R語言寫出程式碼

演算法的部份步驟說明：

步驟**1**：隨機給定各參數 *i,j,p,q,r,s,y*的初始值，其中 *y*=1為紅棋先走、 *y*=2為紅棋後走。

步驟**2**：根據步驟1的初始值，定義並計算 $M=|i-p|+|j-q|$、A為 $\frac{M}{r+s}$ 的商數、R 為 $\frac{M}{r+s}$ 的餘數、$d=\min(|i-p|,|j-q|)$。

步驟**3**：如果 *y*=1且 $R=r$ 且$b=\min(r(A+1),sA)$，則計算$T_r=r(A+1)$、$T_s=sA$，並跳至步驟11；否則跳至步驟4。**...(其餘演算法步驟省略)**

R語言指令說明：

我們使用了**sample**語法讓各參數隨機產生，再利用大量的**if else**指令，以及利用**for迴圈**語法，一次進行多回合的紅、藍棋遊戲，並輸出所有的結果。

部份原始程式碼如下：

```
rm(list=ls(all=TRUE))
for(g in 1:100){
i=sample(1:100,1);j=sample(1:100,1);p=sample(1:100,1);q=sample(1:100,1);r=sample(1:30,1);s=sample(1:30,1);M=abs(i-p)+abs(j-q);A= M %/%(r+s); R=M%%(r+s);y=sample(1:2,1);d=min(abs(i-p),abs(j-q))
cat("遊戲1：紅藍棋的移動方式只能向上、下、左、右的回合數：",g)
cat("i=",i,",j=",j,",p=",p,",q=",q,",r=",r,",s=",s,",A=",A,",R=",R,",y=",y)
if(y==1&R==r){
cat("1.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走剛好走完)的最短步數=",r*(A+1)) ...(其餘程式碼省略)
```

研究成果-R語言執行介面

【遊戲1的R語言執行介面】

RGui (64-bit) - [R Console]

```
遊戲1：紅藍棋的移動方式只能向上、下、左、右的回合數： 92
i= 39 ,j= 44 ,p= 91 ,q= 33 ,r= 10 ,s= 24 ,A= 1 ,R= 29 ,y= 2
1.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的最短步數= 15
2.紅棋後走，藍棋敗北的最短步數= 48
k= 5
3.所對應的最短路徑數= 615790256823

4.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)位置個數= 12
5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 43 33
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 0

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 44 34
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 1

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 45 35
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 2

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 46 36
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 3

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 47 37
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 4

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 48 38
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 5

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 49 39
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 6

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 50 40
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 7

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 51 41
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 8

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 52 42
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 9

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 53 43
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 10

5.紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 54 44
紅棋後走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 11
```

【遊戲2的R語言執行介面】

RGui (64-bit) - [R Console]

```
遊戲2：紅藍棋的移動方式可向斜的回合數： 88
i= 40 ,j= 22 ,p= 56 ,q= 67 ,r= 6 ,s= 16 ,D= 45 ,d= 16 ,A= 2 ,R= 1 ,y= 1
1.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的最短步數= 13
2.紅棋先走，藍棋敗北的最短步數= 32
k= 5
3.所對應的最短路徑數= 646626422970

4.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)位置個數= 14
5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 53 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 3

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 52 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 4

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 51 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 5

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 50 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 6

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 49 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 7

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 48 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 8

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 47 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 9

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 46 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 10

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 45 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 11

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 44 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 12

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 43 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 13

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 42 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 14

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 41 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 15

5.紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的位置= 40 35
紅棋先走，紅棋獲勝(最後一次走少走k步)的t= 16
```

本研究作品的貢獻

歷屆作品 → 貢獻

1. 紅、藍棋每次只能輪流各走1步。
2. 紅、藍棋的移動方式只能上下左右。
3. 只有討論紅棋先走的情形。
4. 只有推導出紅棋獲勝或敗北的最短步數及最短路徑數。

本研究作品 → 貢獻

1. **簡化**歷屆作品的所有公式。
2. 紅、藍棋每一次輪流各走***r*步**及***s*步**
3. 紅、藍棋的移動方式分為**遊戲1(向上下左右)**及**遊戲2(向上下左右斜)**。
4. 紅棋**先走或後走**的情形均有討論。
5. 推導出紅、藍棋獲勝或敗北的**最短步數**及**最短路徑數**。
6. 推導出紅、藍棋分出勝負時的**位置個數**。
7. 推導出紅、藍棋分出勝負時的**位置(坐標)**。
8. 推導出紅、藍棋分出勝負時的**判斷準則**。
9. 推導出贏家最後一次走**少走*k*步**的所有公式。
10. 將遊戲1及遊戲2透過演算法並利用**R語言**寫出程式碼。

未來展望

1.本研究除了學到如何推導數學公式與證明外，我們也利用資訊科技中的程式軟體輔助本作品的每條公式，而透過寫**演算法**及**程式碼**的過程中，除了可以訓練我們的邏輯思考外，也可以透過程式軟體快速計算一些紅、藍棋起點位置差距很大的例子，並從中節省了不少時間。

2.然而未來可再研究當紅棋與藍棋的起點分別在任意位置時，紅棋可先走或後走，且**紅、藍棋每一次最多可以各走 x 步時**(x 為正整數)，並嘗試推導本研究作品的所有公式。

3.未來若能結合更多的資訊科技，可將本研究作品**寫成一個遊戲軟體**。

參考資料及文獻

1. 薛毅、陳立萍(2006年)-統計建模與R軟件。中國：清華大學出版社。

2. 于雷(2013年)-邏輯思維訓練500題(白金版)。中國：清華大學出版社。

3. 劉貞吟(2020年)-棋逢對手。桃園市第60屆中小學科學展覽國中組數學科。