中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030407

圖多變是美--給定範圍內之四邊形數量計算

學校名稱：臺南市立關廟國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳婉瑄 國二 吳季妍 國二 蔡芷瑀	李國賢 吳松陽

關鍵詞：等差級數、四邊形

摘要

在給定方格範圍內，尋找不同四邊形數量的一般式，研究包括：

1、給定範圍內之正方形數量：

$\frac{N(N+1)(N+1)(N+2)}{(1\times 2)(2\times 3)}$(範圍是邊長 N 的正方形時)、

$[\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}]\times[\frac{(N-M)+(N+1)}{2}]$ (範圍是邊長 M × N 的長方形時)

2、給定範圍內之長方形數量：

$\sum_1^M n\times\sum_1^N n$ (含正方形)、$\sum_{L=1}^{M}[(M+1-L)\times\sum_{n=1}^{N-L} n]$，$n\geq M$(不含正方形)

3、給定範圍內之菱形數量：

$\boxed{\text{廣義菱形個數一般式}}=\boxed{\text{狹義菱形個數一般式}}+\boxed{\text{正方形個數一般式}}$。

4、給定範圍內之平行四邊形數量：

上下二條直線(斜錯)平行四邊形數量 $=(N-1)(N)(N+1)$

左右二條直線(斜錯)平行四邊形數量 $=\sum_{n=1}^{M-1} n\times\sum_{n=1}^{N} n$

5、給定範圍為 2×N 長方形時之等腰梯形數量：

$4(N-1)+(1+2)\times\Delta T_{\text{奇或偶}}\times 2$(上下翻轉)

而各一般式彼此間可以組合成新的公式。

例如：平行四邊形一般式=長方形公式 + 斜錯平行四邊形公式。

壹、研究動機

暑假時原本想要搜尋皮克斯電影卻少打了一個字，結果跑出「皮克定理」，在好奇心驅使下大致瀏覽，感到能用短短的式子解答問題真是太厲害了，在與同學討論並請教老師後覺得可以往相關的方向去研究看看，決定以解決「計算給定範圍內的四邊形數量」作為研究的目標。

貳、研究目的

一、由正方形格子組成圖形為邊長 N 的正方形時，以格子點當頂點的正方形個數為何？

二、由正方形格子組成圖形為 M×N 長方形時，以格子點當頂點的正方形個數為何？

三、由正方形格子組成圖形為 M×N 長方形時，以格子點當頂點的長方形個數為何？

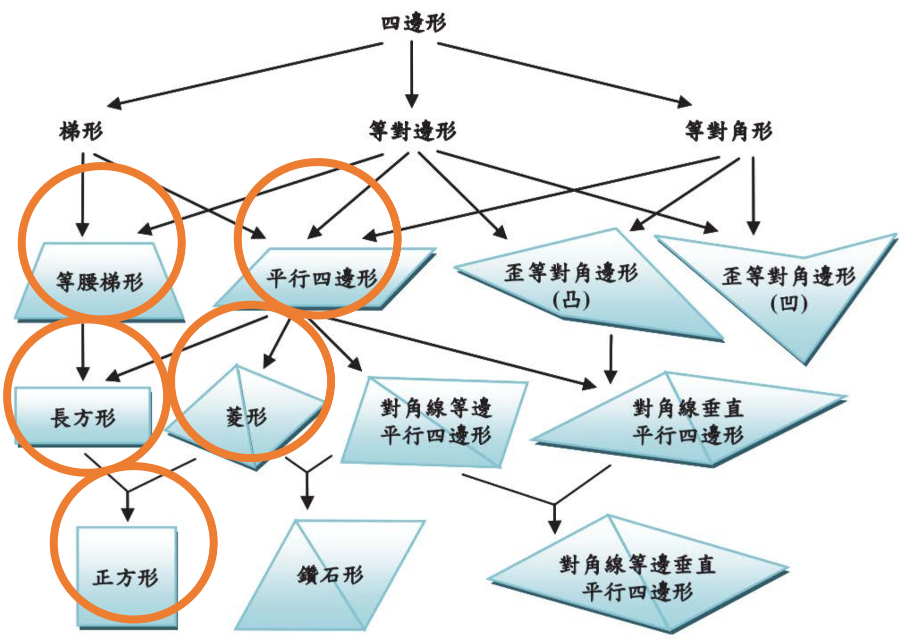
四、由正方形格子組成圖形為 M×N 長方形時，以格子點當頂點的菱形個數為何？

五、由正方形格子組成圖形為 M×N 長方形時，以格子點當頂點的平行四邊形數為何？

六、由正方形格子組成圖形為 M×N 長方形時，以格子點當頂點的等腰梯形個數為何？

參、研究過程

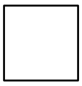
我們依據李碩彥在《平行四邊形的大家族》提出的四邊形分類，選出五種四邊形研究。



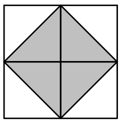
一、正方形

(一)、由正方形格子組成圖形為正方形時，以格子點當頂點的正方形個數的討論

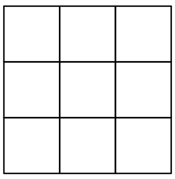
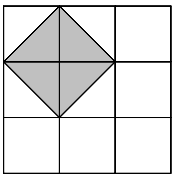
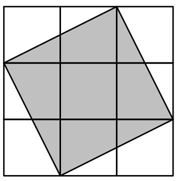
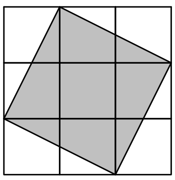
1、邊長是 1 單位時

圖示	邊長	個數	總和
 圖 1	1	1^2=1	總和=1^2=1

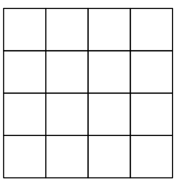
2. 邊長是 2 單位時

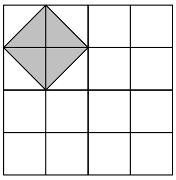
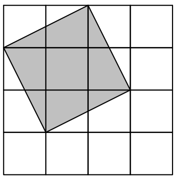
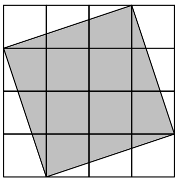
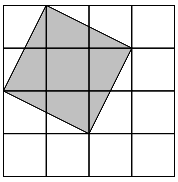
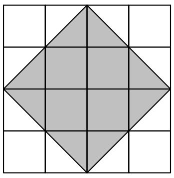
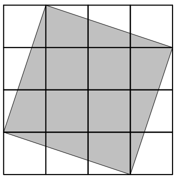
圖示	邊長	個數	總和
 圖 2	1	2^2=4	總和 $=1^2+(1^2+2^2)$ =6
	2	1^2=1	
	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	1^2=1	

3.邊長是 3 單位時

圖示	邊長	個數	總和
	1	3^2=9	$=(1^2)$ $+(1^2+2^2)$ $+(\ 1^2+2^2+3^2)$ =20
	2	2^2=4	
	3	1^2=1	
	$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$	2^2=4	
	$\sqrt{1^2+2^2}$=$\sqrt{5}$	1^2=1	
	$\sqrt{2^2+1^2}$=$\sqrt{5}$	1^2=1	

4.邊長是 4 單位時

圖示	邊長	個數	總和
	1	4^2=16	＝ (1^2) $+(1^2+2^2)$ $+(1^2+2^2+3^2)$
	2	3^2=9	
	3	2^2=4	
	4	1^2=1	

	$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$	3^2=9	$+(1^2+2^2+3^2+4^2)$ =50
	$\sqrt{1^2+2^2}$=$\sqrt{5}$	2^2=4	
	$\sqrt{1^2+3^2}$=$\sqrt{10}$	1^2=1	
	$\sqrt{2^2+1^2}$=$\sqrt{5}$	2^2=4	
	$\sqrt{2^2+2^2}$=$\sqrt{8}$	1^2=1	
	$\sqrt{3^2+1^2}$=$\sqrt{10}$	1^2=1	

5、預測結果

根據以上幾個實例，我們推測當正方形的邊長為 n 單位時，正方形個數公式如下：

$$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j}i^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}j^3+\frac{1}{2}j^2+\frac{1}{6}j\right)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}j^3+\frac{1}{2}\sum j^2+\frac{1}{6}\sum j$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{N(N+1)}{2}\right]^2+\frac{1}{2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}+\frac{1}{6}\frac{N(N+1)}{2}$$

$$=\frac{N^4+2N^3+N^2}{12}+\frac{2N^3+3N^2+N}{12}+\frac{N^2+N}{12}$$

$$=\frac{N^4+4N^3+5N^2+2N}{12}$$

$$=\frac{N(N+1)(N+1)(N+2)}{(1\times 2)(2\times 3)}$$

例：正方形的邊長為 4 單位時，正方形總數

$$\frac{4^4+4\times 4^3+5\times 4^2+2\times 4}{12}=\frac{256+256+80+8}{12}=\frac{600}{12}=50$$

符合由圖形計算的總數

<定理一-1>

當正方形的邊長為 N 單位時，以格子點當頂點的正方形個數公式如下：

$$\frac{N(N+1)(N+1)(N+2)}{(1\times 2)(2\times 3)}$$

利用數學歸納法證明

1.當 N=1 時

由圖形計算，正方形個數＝1，又

$$\frac{1^4+4\times 1^3+5\times 1^2+2\times 1}{12}=\frac{12}{12}=1$$

因此，N=1 時成立

2.設 N＝k 時成立，亦即正方形個數=

$$\frac{k^4+4k^3+5k^2+2k}{12}$$

當 N=k+1 時，增加的部份

(1)邊長為整數的部份：$1+3+5+\cdots\ldots+2k+1=\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1)$

(2)邊長為無理數：$1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots(1+3+5+\cdots+2k-1)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}(2i-1)$

因此總和

$$=\frac{k^4+4k^3+5k^2+2k}{12}+\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}(2i-1)$$

$$=\frac{k^4+4k^3+5k^2+2k}{12}+\frac{12k^2+24k+12}{12}+\frac{4k^3+6k^2+2k}{12}$$

$$=\frac{k^4+8k^3+23k^2+28k+12}{12}$$

$$=\frac{(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)+(4k^3+12k^2+12k+4)+(5k^2+10K+5)+(2K+2)}{12}$$

$$=\frac{(k+1)^4+4(k+1)^3+5(k+1)^2+2(k+1)}{12}$$

即 N=k+1 時公式成立

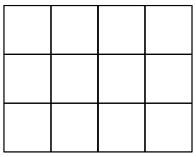
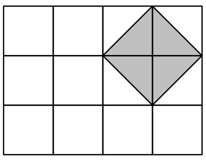
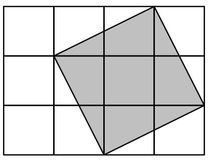
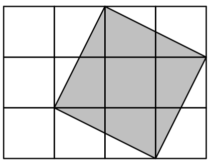
因此，由數學歸納可證得邊長為 N 時，以格子點當頂點的正方形個數公式為

$$\frac{N^4+4N^3+5N^2+2N}{12}=\frac{N(N+1)(N+1)(N+2)}{(1\times 2)(2\times 3)}$$

(二) 在 M×N 的長方形範圍內(N ≥M)，以格子點當頂點的正方形個數公式

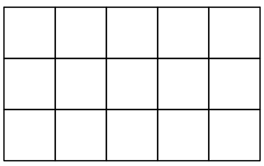
1.長方形邊長是 3× N時

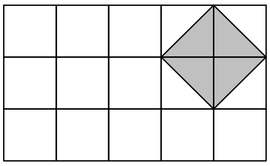
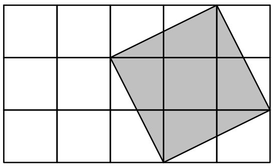
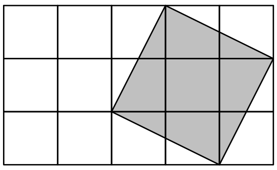
(1)長方形邊長為 3×4 時

圖示	邊長	比 3×3 多出來的數量
	1	3
	2	2
	3	1
	$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$	2
	$\sqrt{1^2+2^2}$=$\sqrt{5}$	1
	$\sqrt{2^2+1^2}$=$\sqrt{5}$	1

總和=(3×3 的正方形數量)+(比 3×3 多出來的數)= $20+(3+2+2+1)+(2+1)+1=$ 30

(2)長方形邊長為 3×5 時

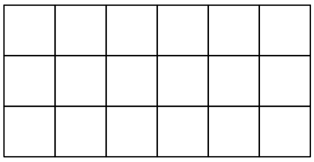
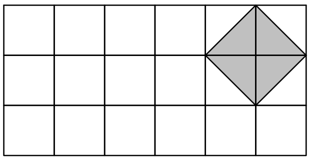
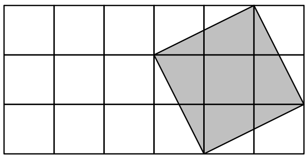
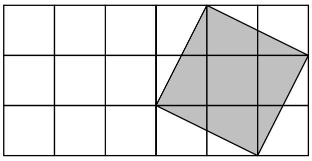
圖示	邊長	比 3×4 多出來的數量
	1	3
	2	2
	3	1

	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	2
	$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$	1
	$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	1

總和=(3× 4的正方形數量)+(比 3× 4多出來的數)

$= 30+(3+2+2+1)+(2+1)+1$=20+(3+2+1+2+1+1)× 2=40

(3)長方形邊長為 3×6 時

圖示	邊長	比 3×5 多出來的數量
	1	3
	2	2
	3	1
	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	2
	$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$	1
	$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	1

總和=(3× 5的正方形數量)+(比 3× 5多出來的數)

$= 40+(3+2+2+1)+(2+1)+1$=20+(3+2+1+2+1+1)× 3=50

根據以上的幾個實例，我們推測當 3×N 的長方形，正方形個數公式 $= 20+10\times(N-3)$

<預備定理一>

當長方形的兩個鄰邊邊長為 3 和 N 單位時，N≥ 3，正方形個數公式= 20+10(n-3)=10N-10

證明：利用數學歸納法

1. N=3 時，由<定理一-1>，知 3×3 的長方形有

$$\frac{3^4+4\times 3^3+5\times 3^2+2\times 3}{12}=20$$

又 10N−10=10×3−10=20，因此 N=3 時成立。

2. 設 N=k 時成立，即 3× k的長方形有 10k-10 個

當 N=k+1 時，3×(k+1)的長方形比 3×k 的長方形多 10 個正方形，所以有

10k−10+10 = 10k = $10(k+1)$ −10

因此由數學歸納法可得，在 3× N的長方形中有(10N−10)個正方形

類似的推法，我們得知

4×N 的長方形，正方形個數公式為$50+20\times(n-4)$

5×N 的長方形，正方形個數公式為$105+35\times(n-5)$

根據以上的幾個實例，我們推測當 M×N 的長方形(N ≥ M)，正方形個數公式如下：

$$\frac{M^4+4M^3+5M^2+2M}{12}+(\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{j}i)\times(N-M)$$

$$=\frac{M^4+4M^3+5M^2+2M}{12}+\frac{M^3+3M^2+2M}{6}\times(N-M)$$

$$=\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}\times\frac{2N-M+1}{2}$$

其中，

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{M}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M}j^2+\sum_{j=1}^{M}j\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}+\frac{M(M+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{2M^3+3M^2+M}{6}+\frac{M^2+M}{2}\right]=\frac{1}{2}\times\left[\frac{2M^3+3M^2+M+3M^2+M}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2M^3+6M^2+4M}{6}\right)=\frac{2M^3+6M^2+4M}{12}=\frac{M^3+3M^2+2M}{6}$$

例如：3×7 的長方形中，正方形數量=$\frac{3(3+1)(3+2)}{1\times2\times3}\times\frac{2\times7-3+1}{2}=60$，符合由圖形計算的總數。

定理一-2

當長方形的兩個鄰邊邊長為 M 和 N 單位時(N≥ M)，正方形個數公式如下：

$$[\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}]\times[\frac{(N-M)+(N+1)}{2}]$$

二、長方形

在 M× N的範圍內，以格子點當頂點的長方形個數，下面以 M=1~4、N=1~5 作歸納討論

M 值	M× 1	M × 2	M × 3	M ×4	M × 5	M × N
M=1	1× 1：5 個	1× 2：4 個	1× 3：3 個	1× 4：2 個	1×5：1 個	$\sum_{1}^{N} n$
M=2	1× 1：10 個 2 × 1：5 個	1× 2：8 個 2 × 2：4 個	1× 3：6 個 2 × 3：3 個	1× 4：4 個 2 × 4：2 個	1×5：2 個 2 × 5：1 個	(1+2) $\times\sum_{1}^{N} n$
M=3	1× 1：15 個 2× 1：10 個 3× 1：5 個	1× 2：12 個 2 × 2：8 個 3× 2：4 個	1× 3：9 個 2 × 3：6 個 3× 3：3 個	1× 4：6 個 2 × 4：4 個 3× 4：2 個	1×5：3 個 2 × 5：2 個 3× 5：1 個	(1+2+3) $\times\sum_{1}^{N} n$
M=4	1× 1：20 個 2× 1：15 個 3× 1：10 個 4 × 1：5 個	1× 2：16 個 2× 2：12 個 3× 2：8 個 4 × 2：4 個	1× 3：12 個 2 × 3：9 個 3× 3：6 個 4 × 3：3 個	1× 4：16 個 2× 4：12 個 3× 4：8 個 4 × 4：4 個	1×5：4 個 2 × 5：3 個 3× 5：2 個 4 × 5：1 個	(1+2+ 3+4) $\times\sum_{1}^{N} n$

預備定理二-1

給定範圍 M×N 內，長方形數量總計(包含正方形)：

$$\sum_{1}^{M} n \times \sum_{1}^{N} n = \frac{(1+M)M}{2} \times \frac{(1+N)N}{2} = \frac{(M^2+M)(N^2+N)}{4}$$

補充：我和夥伴將研究結果報告老師，老師指出這和用”排列組合計算方式”的結果一致。

排列組合方式是在 M+1 條線和 N+1 條線中，各取兩條的選法= $\binom{M+1}{2} \times \binom{N+1}{2}$ (結果一致)。

預備定理二-2

給定範圍 M×N 內，長方形數量(不含正方形)總計：

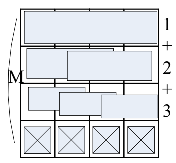
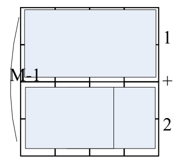
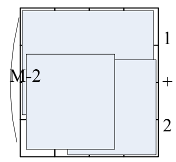
$$= \sum_{1}^{M} n \times \sum_{1}^{N} n - [\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}] \times [\frac{2N-M+1}{2}]$$

$$= \frac{M(M+1)}{12} \times [3N(N+1) - (M+2)(2N-M+1)]$$

$$= \frac{M(M+1)}{12} \times [3N(N-1) + M(M+1) - 2(MN+1)]$$

由於長方形數量(不含正方形)的一般式過於瑣碎，我們試著用另一種算法：在 M×N 範圍內分別計算由小到大的長方形數量，大小分為 1×n、2×n、3 ×n…M ×n，n≥ M，最後求算出總和。

M×N 範圍內的長方形數量(不含正方形)

長度大小 L×n	數量小計	圖示
1×n 數量	= (M-0)* [(1+2+3+…+ (N-1)]	
2×n 數量	= (M-1)* [(1+2+3+…+(N-2)]	
3×n 數量	= (M-2)* [(1+2+3+…+(N-3)]	
4 ×n 數量	= (M-3)* [(1+2+3+…+(N-4)]	…
…		
(M-1)×n 數量	= (2)* [(1+2+3+…+(N-(M-1))]	
M×n 數量	= (1)* [(1+2+3+…+(N-M)]	
長方形數量總和一般式 (不含正方形),n≥ M	$\sum_{L=1}^{M}\left[(M+1-L) \times \sum_{n=1}^{N-L} n\right]$	

預備定理二-3

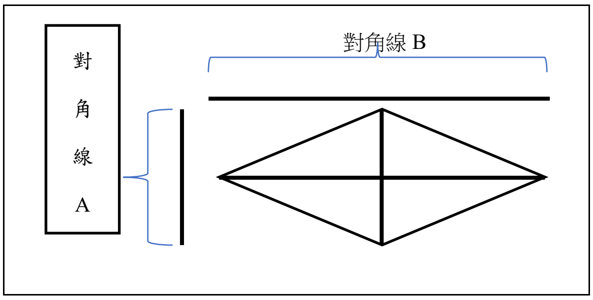
給定範圍 M×N 內，長方形數量(不含正方形)總計：

$$= \sum_{L=1}^{M}\left[(M+1-L)\times\sum_{n=1}^{N-L} n\right]，n \geq M$$

註記：因斜擺而產生的長方形數量，本模型暫時無法計算。

三、菱形 由邊長相等的性質來做對角線分類並計算

(一) 以廣義菱形計數 (若同時為正方形先不排除，計入菱形總數量內)。



1、我們先試著以範圍 3×N 來推算，以廣義菱形計數

[A|B]	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6	3x7	3x8	3x9	3x10	推測 3N 一般式
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	3N
$\sqrt{2}$ [2|2]		2	4	6	8	10	12	14	16	18	2*(N-1)
$\sqrt{4}$ 整數		2	4	6	8	10	12	14	16	18	2*(N-1)
$\sqrt{5}$ [2|4]			1*2+2*0	2*2+2*1	3*2+2*2	4*2+2*3	5*2+2*4	6*2+2*5	7*2+2*6	8*2+2*7	(N-2)*2+2*(N-3)
$\sqrt{8}$ [4|4]			x	x	x	x	x	x	X	X	*寬度不足
$\sqrt{9}$ 整數			1	2	3	4	5	6	7	8	(N-2)
$\sqrt{10}$[2|6]						2	4	6	8	10	2*(N-5)
$\sqrt{13}$[4|5]						x	x	X	X	X	*寬度不足
$\sqrt{16}$整數						x	x	X	X	X	*寬度不足
$\sqrt{17}$[2|8]								2	4	6	2*(N-5)

小結：(a).只適合討論 N > M 的情形。(b).寬度不足時，菱形種類受限。

(c).而隨著 M、N 增長，菱形種類新增不規律，菱形計數也顯得十分不規律。

2、故試著先推算菱形種類增加的規律，以下是

(1)、範圍 2×N 時，廣義菱形增加的種類表

[A|B]	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7	2×8	2×9	2x10	2x11	2x12	2x13	2x14	MN
1	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{2}$ [2|2]		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
2		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

$\sqrt{5}$ [2|4]			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{10}$[2|6]						■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{17}$[2|8]								■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{26}$[2|10]										■	■	■	■	■	■
$\sqrt{37}$[2|12]												■	■	■	■
$\sqrt{50}$[2|14] [10|10]														■	■

(2)、範圍3 ×N 時，廣義菱形增加的種類

範圍 2×N 和範圍 3×N，廣義菱形計算的種類幾乎相同，都是計算邊長為(整數)：1、2，(無理數 a: 1 型)：$\sqrt{2}(1:1)$、$\sqrt{5}(2:1)$、$\sqrt{10}$(3:1)、$\sqrt{17}(4:1)$、$\sqrt{26}(5:1)$、$\sqrt{37}(6:1)$、$\sqrt{50}$(7:1)、…，但範圍 3×N 會多計數一種類：<u>邊長為整數 3 的菱形</u>。

(3)、範圍4 ×N 時，廣義菱形增加的種類表

[A|B]	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4x9	4x10	4x11	4x12	4x13	4x14	Mxn
1	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{2}$ [2|2]		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
2		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{5}$ [2|4]			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{8}$ [4|4]				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
3			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{10}$[2|6]						■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
4						■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{17}$[2|8]								■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{20}$[4|8]								■	■	■	■	■	■	■	■
$\sqrt{26}$[2|10]										■	■	■	■	■	■
$\sqrt{29}$[4|10]										■	■	■	■	■	■
$\sqrt{37}$[2|12]												■	■	■	■
$\sqrt{40}$[4|12]												■	■	■	■
$\sqrt{50}$														■	■

說明：範圍 2 ×N 與3 ×N 中，菱形的種類幾乎相同，差別只在格子數 3 ×N 時會多一組邊長為 3 的菱形。而範圍 4×N 最大的不同，則是多了邊長無理數[4|n]型：$\sqrt{8}$[4|4]、$\sqrt{13}$[4|6]、$\sqrt{20}$[4|8]、$\sqrt{29}$[4|10]…，由此作以下小結論：

(a)、討論條件：N≥ M

(b)、當 M 增加，會新增邊長為整數 M 的菱形種類，例如 M=3，多一組邊長為 3 的菱形。

(c)、當範圍 M 增為<u>偶數</u>，會新增邊長為<u>無理數[M|B 型]</u>的菱形種類，其中 B≤ N。

例如：3N -> 4N，多 ($\frac{N-2}{2}$)組的菱形：邊長 [4|4]、[4|6]、[4|8]、….、$[4|N]$

3、接著我們以此新增菱形種類為基礎，做分類計算，得到以下過程：

(1)、範圍3 ×N 時，廣義菱形的計數

菱形邊長	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6	3x7	3x8	3x9	3xN
1	3	6	9	12	15	18	21	24		3× N
$\sqrt{2}$		2	4	6	8	10	12	14		2 × (N − 1),N>1
2		2	4	6	8	10	12	14		2 × (N − 1)
$\sqrt{5}$			(1) × 2 + 0	(2) × 2 + 2	(3) × 2 + 4	(4) × 2 + 6	(5) × 2 + 8	(6) × 2 + 10		2 × (N − 2), N > 2 +2 × (N − 3),N>3
$\sqrt{8}$	B> $\frac{M}{2}$ 法計數									理論上推測可能：2 × (N − 4),N>4
3			1	2	3	4	5	6		1×(N-2)
$\sqrt{10}$						2	4	6		2 × (N − 5),N>5
$\sqrt{13}$	B> $\frac{M}{2}$ 無法計數									理論上推測可能：2 × (N − 6), $N > 6$
4	整數邊長> M 無法計數									
$\sqrt{17}$								2	4	2 × (N − 7),N>7
總和	3	10	20	32	44	58	72	88		

(2)、範圍4 ×N 時，廣義菱形的計數

菱形邊長	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4x9	4N
1	4	8	12	16	20	24	28	32		4× N
$\sqrt{2}$		3	6	9	12	15	18	21		3 × (N − 1),N>1
2		3	6	9	12	15	18	21		3 × (N − 1)
$\sqrt{5}$		1	(2) × 2 + 2	(4) × 2 + 6	(6) × 2 + 10	(8) × 2 + 14	(10) × 2 + 18	(12) × 2 + 22		2 × (N − 2), N > 2 +2 × (N − 3),N>3
$\sqrt{8}$				1	2	3	4	5		
	B> $\frac{M}{2}$ 法計數									理論上推測可能：2 × (N − 4),N>4
3			2	4	6	8	10	12		1×(N-2)
$\sqrt{10}$				(1) × 2	(2) × 2	(3) × 2 + 3	(4) × 2 + 6	(5) × 2 + 9		2 × (N − 5),N>5
$\sqrt{13}$						1	2	3		理論上推測可能：2 × (N − 6), $N > 6$
4				1	2	3	4	5		
$\sqrt{17}$								3		2 × (N − 7),N>7
$\sqrt{20}$								1		
總和	4	15	32	56	80	108	136	168		

(3)、若範圍 5×N 時，廣義菱形的計數

菱形邊長	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6	5x7	5x8	5xN
1	5	10	15	20	25	30	35	40	**5** × N
$\sqrt{2}$		4	8	12	16	20	24	28	**2** × (**2N** − **2**)
2		4	8	12	16	20	24	28	**4**(**N** − **1**)
$\sqrt{5}$		2	(3)*2+4	(6)*2+10	(9)*2+16	(12)*2+22	(15)*2+28	(18)*2+34	2 × (3N − 6) +2 × (3N − 7)
$\sqrt{8}$			0	2	4	6	8	10	2(N−3),N>3
3			3	6	9	12	15	18	3(N−2)
$\sqrt{10}$				(2)*2	(4)*2	(6)*2+4	(8)*2+8	(10)*2+12	
$\sqrt{13}$				0	(1)*2	(2)*2+2	(3)*2+4	(4)*2+6	
4				2	4	6	8	10	2(N − 3)
$\sqrt{17}$					(1)*2	(2)*2	(3)*2	(4)*2+4	
$\sqrt{20}$					--	--	--	0+2	
5					1	2	3	4	1×(N−4)

我們可以從 5×N 範圍的廣義菱形計數，明顯看出有兩大類計數：一是邊長為整數的計數，有規律呈現為**5** × N、4× (N − 1) ...1×(N−4)；另一種是邊長為無理數的計數，幾乎每種邊長各有規律，一般式歸納不易，故換以總數字觀察。

(二) 、以廣義菱形計數，但直接以實際圖形個數計算，並以數字公差做推論

1、範圍 2×N 的廣義菱形個數

[A|B]	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7		2 × n
廣義菱形個數	2	6	$\boxed{10}$	15	20	26	32		
一階公差		+4	+4	+5	+5	+6	+6	+…	
二階公差		+0	+1	+0	+1	+0	+1	+…	

2 × n = (2+4)+4+5+5+6+…….+…

2、範圍 3×N 的廣義菱形個數

[A|B]	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	3×7	3×8	3 × n
廣義菱形個數	3	10	$\boxed{20}$	32	44	58	72	88	

一階公差		+7	+10	+12	+12	+14	+14	+16	
二階公差		+3	+2	+0	+2	+0	+2	+…	

$$\mathbf{3\ x\ n = 3+\underbrace{(7+10+12)}_{\text{3 個一階公差}} + \underline{12+14+14+16+\ldots\ldots.+\ldots}}$$

3、範圍 4×N 的廣義菱形個數

[A|B]	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4 x n
廣義菱形個數	4	15	32	$\boxed{56}$	80	108	136		
一階公差		+11	+17	+24	+24	+28	+28	+32	
二階公差		+6	+7	+0	+4	+0	+4	+…	

$$\mathbf{4\ x\ n = 4+\underbrace{(11+17+24+24)}_{\text{4 個一階公差}} + 28+28+28+32+32\ldots\ldots+\ldots}$$

4、範圍 5×N 的廣義菱形個數

[A|B]	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6	5x7	5x8	5 x n
廣義菱形個數	5	20	44	80	$\boxed{121}$	168	215	268	
一階公差		15	24	36	41	47	47	53	
二階公差		+9	+12	+5	+6	+0	+6	+…	

$$\mathbf{5\ x\ n = 5+\underbrace{(15+24+36+41+47)}_{\text{5 個一階公差}} + 47+53+53+59++\ldots\ldots+\ldots}$$

5、範圍 $M \times N$的廣義菱形個數 $(N \geq M)$

[A|B]	Mx 1	Mx2	Mx3	Mx4	Mx5	Mx6	Mx7	Mx8	M x N
廣義菱形個數	M								
一階公差		M 個一階公差							
二階公差				+0	+2(M-2)	+0	+2(M-2)	+…	

限制：需先算出 M 個一階公差，當$N > M$後，才能再以二階公差方式續推菱形個數。

預備定理四(廣義菱形個數)

> 長方形的兩個鄰邊邊長為 M 和 N 單位，當$N \geq M$ 時，菱形個數之間會成二階公差數列，
> 若 M 為偶數，二階公差由 2(M-2)開始為：2(M-2) , 0 , 2(M-2) , …
> 若 M 為奇數，二階公差由 0 開始為：0, 2(M-2) , 0 , 2(M-2) , …

(三) 、以狹義菱形記數 (正方形不計入菱形個數內)。

1、範圍2 ×N(狹義菱形個數)

菱形邊長 [A|B]	2x1	2x2	2x3	2x4	2x5	2x6	2x7	2x8	2 x N
$\sqrt{5}$[2|4]				1	2	3	4	5	N-3,N≥ B

$\sqrt{10}$[2|6]						1	2	3	N-3-2,N≥ B
$\sqrt{17}$[2|8]								1	N-3-2-2,N≥ B
小計				1	2	4	6	9	

(a)、範圍2 ×N，N 為偶數項時，狹義菱形個數=(N-3)+(N-3-2)+(N-3-2-2)+…+1，為等差級數

1 = (N-3)+(項數-1)(-2) →共$\frac{N-2}{2}$ 項，累加 $\frac{N-4}{2}$ 次公差

$$狹義菱形個數=\frac{\left[(N-3)+(N-3)+\left(\frac{N-4}{2}\right)(-2)\right]\times\left(\frac{N-2}{2}\right)}{2}=\frac{(N-2)(N-2)}{4}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$$

(b)、範圍2 ×N，N 為奇數項時，狹義菱形個數=(N-3)+(N-3-2)+(N-3-2-2)+…+0，為等差級數

0 = (N-3)+(項數-1)(-2) →共$\frac{N-1}{2}$ 項，累加 $\frac{N-3}{2}$ 次公差

$$狹義菱形個數=\frac{\left[(N-3)+(N-3)+\left(\frac{N-3}{2}\right)(-2)\right]\times\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2}=\frac{(N-1)(N-3)}{4}$$

2、範圍3 ×N(狹義菱形個數)

菱形邊長 [對角線 A|對角線 B]	3x1	3x2	3x3	3x4	3x5	3x6	3x7	3x8	3 x N
1	菱形邊長 1 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{2}$[2|2]	菱形由[2|2]組成時為正方形，不討論。								
2	菱形邊長 2 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{5}$[2|4]				2	4	6	8	10	2[n-3] ,N≥ B
$\sqrt{8}$[4|4]	菱形由[4|4]組成時為正方形，不討論。								
3	菱形邊長 3 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{10}$[2|6]						2	4	6	2[n-3-2] ,N≥ B
$\sqrt{13}$[4|6]	對角線 A=4 ＞ 範圍 M=3，菱形無法成形。								
4	菱形邊長 4 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{17}$[2|8]								2	2[n-3-2-2] ,N≥ B
[3|N]	對角線[3|N]時，無法構成菱形，不討論								
個數小計				2	4	8	12	18	

(a)、範圍3 ×N 的情況下，不論 N 為偶數或奇數項，狹義菱形個數均為範圍2 ×N 的兩倍。

$$N 為偶數項時，狹義菱形個數=\frac{2\left[(N-3)+(N-3)+\left(\frac{N-4}{2}\right)(-2)\right]\times\left(\frac{N-2}{2}\right)}{2}=\frac{(N-2)(N-2)}{2}=\frac{(N-2)^2}{2}$$

$$N 為奇數項時，狹義菱形個數=\frac{2\left[(N-3)+(N-3)+\left(\frac{N-3}{2}\right)(-2)\right]\times\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2}=\frac{(N-1)(N-3)}{2} 或 \frac{(N-2)^2-1}{2}$$

3、範圍4N(狹義菱形個數)

菱形邊長 [對角線 A|對角線 B]	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4 x N
1	菱形邊長 1 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{2}$[2|2]	菱形邊長由[2|2]組成時為正方形，不討論。								

2	菱形邊長 2 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{5}$[2|4](3N 時)				2	4	6	8	10	2[n-3] ,N≥ B
$\sqrt{5}$[2|4](4N 時)		1	2	6	10	14	18	22	2[N-3]+ 2[N-2] ,N≥ B
$\sqrt{8}$[4|4]	菱形邊長由[4|4]組成時為正方形，不討論。								
3	菱形邊長 3 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{10}$[2|6]						3	6	9	3[N-3-2] ,N≥ B
$\sqrt{13}$[4|6]						1	2	3	1[N-3-2] ,N≥ B
4	菱形邊長 4 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{17}$[2|8]								3	3[N-3-2-2] ,N≥ B
$\sqrt{20}$[4|8]								1	1[N-3-2-2] ,N≥ B
個數小計		1	2	6	10	18	26	38	

(a)、範圍 4×N，N 為偶數項時，狹義菱形個數=$[2(N-3)+2(N-2)]+\underbrace{4(N-3-2)+4(N-3-2-2)+\ldots+4}_{\text{共}\frac{N-4}{2}\text{ 項，累加 }\frac{N-6}{2}\text{ 次}}$

狹義菱形個數$= 2(N-3+N-2)+\frac{[4(N-3-2)+4]\times\left(\frac{N-4}{2}\right)}{2} = 2(2N-5)+(N-4)^2 = N^2-4N+6$

例如：(M=4 時)，N=6，菱形個數=$6^2-4\times 6+6$=18、N=8，菱形數=$8^2-4\times 8+6$=38。

(b)、範圍$4\times$N，N 為奇數項時，狹義菱形個數

$$=[2(N-3)+2(N-2)]+\underbrace{4(N-3-2)+4(N-3-2-2)+\cdots+8}_{\text{共}\frac{N-5}{2}\text{ 項，累加 }\frac{N-7}{2}\text{ 次}}$$

狹義菱形個數 $=2(N-3+N-2)+\frac{[4(N-3-2)+8]\times\left(\frac{N-5}{2}\right)}{2}$

$$=2(2N-5)+(N-3)(N-5)=N^2-4N+5$$

例如：(M=4 時)，N=5，菱形數=$5^2-4\times 5+5$=10、N=7，菱形個數=$7^2-4\times 7+5$=26。

4、範圍5N(狹義菱形個數)

菱形邊長 [對角線 A|對角線 B]	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6	5x7	5x8	5 x N
1	菱形邊長 1 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{2}$[2|2]	菱形邊長由[2|2]組成時為正方形，不討論。								
2	菱形邊長 2 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{5}$[2|4](3N 時)				2	4	6	8	10	2[n-3] ,N≥ B
$\sqrt{5}$[2|4](4N 時)		1	2	6	10	14	18	22	2[N-3]+ 2[N-2] ,N≥ B
$\sqrt{5}$[2|4](5N 時)		2	4	10	16	22	28	34	4[N-2]+ 2[N-3] ,N≥ B
$\sqrt{8}$[4|4]	菱形邊長由[4|4]組成時為正方形，不討論。								

3	菱形邊長 3 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{10}$[2|6]						4	8	12	4[N-3-2] ,N≥ B
$\sqrt{13}$[4|6]						2	4	6	2[N-3-2] ,N≥ B
4	菱形邊長 4 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{17}$[2|8]								4	4[N-3-2-2] ,N≥ B
$\sqrt{20}$[4|8]								2	2[N-3-2-2] ,N≥ B
個數小計		2	4	10	16	28	40	58	

(a)、範圍 5×N，N 為偶數項時，狹義菱形個數=$[4(N-2)+2(N-3)]+\underbrace{6(N-3-2)+6(N-3-2-2)+\ldots+6}_{共\frac{N-4}{2}項，累加\frac{N-6}{2}次}$

$$狹義菱形個數= 4(N-2)+2(N-3)+\frac{[6(N-3-2)+6]\times\left(\frac{N-4}{2}\right)}{2}$$

$$=(6N-14)+\frac{3(N-4)^2}{2}=\frac{3}{2}N^2-6N+10$$

例如：(M=5 時)，N=6，菱形個數=$\frac{3}{2}6^2-6\times6+10$ =28。

(b)、範圍5 ×N，N 為奇數項時，狹義菱形個數=$[4(N-2)+2(N-3)]+\underbrace{6(N-3-2)+6(N-3-2-2)+\ldots+12}_{共\frac{N-5}{2}項，累加\frac{N-7}{2}次}$

$$狹義菱形個數= 4(N-2)+2(N-3)+\frac{[6(N-3-2)+12]\times\left(\frac{N-5}{2}\right)}{2}=\frac{3}{2}N^2-6N+\frac{17}{2}$$

例如：(M=5 時)，N=7，菱形個數=$\frac{3}{2}7^2-6\times7+\frac{17}{2}=$ 40。

在範圍2 ×N 時，菱形個數=(N-3)+(N-3-2)+(N-3-2-2)+……+1 或+0，為等差級數；而在範圍 3 ×N 時，菱形個數恰為 2 ×N 的兩倍。故原本推測範圍 4 ×N 時亦會成等差級數，但因從範圍 4 ×N 開始會一直產生新的菱形種類-無理數(A|$\frac{M}{2}$型)，使得公式不停產生變動，所以不論是廣義或狹義，皆無法做出範圍 M×N 的菱形個數一般式，但可以推測：在範圍 M×N 格子數內，$\boxed{廣義菱形個數一般式}=\boxed{狹義菱形個數一般式}+\boxed{正方形個數一般式}$。

以下舉兩個例子：

(1)、在範圍3 ×N 而 N 為偶數項的情況下，

$$廣義菱形個數一般式應等於\boxed{\frac{(N-2)(N-2)}{2}}+\boxed{\left[\boxed{\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}}\times\boxed{\frac{2N-M+1}{2}}\right]}，M=3 代入$$

$$廣義菱形數一般式=\frac{(N-2)(N-2)}{2}+\left[\frac{3(3+1)(3+2)}{3!}\right]\times\left[\frac{2N-3+1}{2}\right]=\boxed{\frac{\mathbf{N^2+16N-16}}{\mathbf{2}}}$$

數字驗證：M=3、N=6 時，$\boxed{廣義菱形個數 58}=\boxed{狹義菱形數 8}+\boxed{正方形數 50}$，

恰好$=\frac{6^2+16*6-16}{2}=58$

(2)、在範圍$5\times$N 而 N 為奇數項的情況下，

廣義菱形個數一般式應等於$\boxed{\frac{3}{2}N^2-6N+\frac{17}{2}}+\boxed{\left[\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}\right]\times\left[\frac{2N-M+1}{2}\right]}$，

$M=5$ 代入，廣義菱形數一般式$=\frac{3}{2}N^2-6N+\frac{17}{2}+\left[\frac{5(5+1)(5+2)}{3!}\right]\times\left[\frac{2N-5+1}{2}\right]$

$$=\boxed{\frac{3N^2+58N-123}{2}}$$

數字驗證：M=5、N=5 時，$\boxed{\text{廣義菱形數}121}=\boxed{\text{狹義菱形數 }16}+\boxed{\text{正方形數 }105}$

$$=\frac{3\times5^2+58\times5-123}{2}=121$$

最後將一般式整理如下：

預備定理三-1(狹義菱形個數)

長方形的兩個鄰邊邊長為 M 和 N 單位，$N\geq M$ 時，菱形個數如下：

格子數範圍$2\times$N，當 N 為偶數項時，狹義菱形個數$=(\frac{N-2}{2})^2$

格子數範圍 $2\times$N，當 N 為奇數項時，狹義菱形個數$=\frac{(N-1)(N-3)}{4}$

格子數範圍$3\times$N，當 N 為偶數項時，狹義菱形個數$=\frac{(N-2)(N-2)}{2}$ 或 $\frac{(N-2)^2}{2}$

格子數範圍$3\times$N，當 N 為奇數項時，狹義菱形個數$=\frac{(N-1)(N-3)}{2}$ 或 $\frac{(N-2)^2-1}{2}$

格子數範圍$4\times$N，當 N 為偶數項時，狹義菱形個數$=N^2-4N+6$

格子數範圍$4\times$N，當 N 為奇數項時，狹義菱形個數$=N^2-4N+5$

格子數範圍$5\times$N，當 N 為偶數項時，狹義菱形個數$=\frac{3}{2}N^2-6N+10$

格子數範圍$5\times$N，當 N 為奇數項時，狹義菱形個數$=\frac{3}{2}N^2-6N+\frac{17}{2}$

預備定理三-2(廣義菱形個數)

長方形的兩個鄰邊邊長為 M 和 N 單位，$N\geq M$ 時，菱形個數如下：

格子數範圍$2\times$N，當 N 為偶數項時，廣義菱形個數$=\frac{N^2+12N-4}{4}$

格子數範圍 $2\times$N，當 N 為奇數項時，廣義菱形個數$=\frac{N^2+12N-5}{4}$

格子數範圍$3\times$N，當 N 為偶數項時，廣義菱形個數$=\frac{N^2+16N-16}{2}$

格子數範圍3 ×N，當 N 為奇數項時，廣義菱形個數= $\frac{N^2+16N-17}{2}$

格子數範圍4 ×N，當 N 為偶數項時，廣義菱形個數= $N^2-16N-24$

格子數範圍4 ×N，當 N 為奇數項時，廣義菱形個數= $N^2-16N-25$

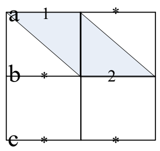
格子數範圍5 ×N，當 N 為偶數項時，廣義菱形個數= $\frac{3N^2+58N-120}{2}$

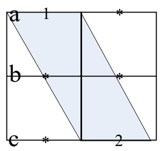
格子數範圍5 ×N，當 N 為奇數項時，廣義菱形個數= $\frac{3N^2+58N-123}{2}$

四、平行四邊形

(一)格狀與條狀≡ 長方形個數 $=\sum_1^M n \times \sum_1^N n$

(二)橫線斜錯型(以 N=2 為討論)

$\left[\begin{matrix} a| & 1 & * \\ b| & * & 2 \\ c| & * & 2 \end{matrix}\right]\Big\|$ 橫線 ≡ 

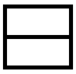
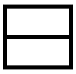
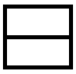
\+ 

，

圖形說明：上列矩陣代表 2×2 範圍內可以成立的圖形，數字或「*」符號皆代表一橫線，a、b、c 為起算列，數字表示第 n 欄位，由上底與下底的定位來討論平行四邊形個數的規律。

	2×2	2×3	2×4	2×5	2 × N
上下二條橫線(斜錯)	4 $\begin{bmatrix} 1 & * \\ * & 2 \\ * & 2 \end{bmatrix}$ 模組[1]a=4 (兩種形狀 × 正反面)	12 $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 2 & * \\ * & 2 & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} 1 & * & * \\ * & * & 2 \\ * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & 1 & * \\ * & * & 2 \\ * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]a 向右移動	24 $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 2 & * & * \\ * & 2 & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow\ \longrightarrow$ $\begin{matrix} 1 & * & * & * & 1 & * & * & * \\ * & * & 2 & * & * & * & * & 2 \\ * & * & 2 & * & * & * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow\ \longrightarrow$ $\begin{matrix} * & 1 & * & * & * & 1 & * & * \\ * & * & 2 & * & * & * & * & 2 \\ * & * & 2 & * & * & * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & 1 & * \\ * & * & * & 2 \\ * & * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]a	40 $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$=4(5-1) $\begin{matrix} 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & V & V & V \\ * & 2 & V & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-2) $\begin{matrix} * & 1 & * & * & * \\ * & * & 2 & V & V \\ * & * & 2 & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-3) $\begin{matrix} * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 2 & V \\ * & * & * & 2 & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-4) $\begin{matrix} * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & * & 2 \\ * & * & * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]a	$4\times\sum_1^{N-1} n$

上下二條橫線(斜錯)	2 $\begin{bmatrix} * & * \\ 1 & * \\ * & 2 \end{bmatrix}$ 模組[1]b=2	6 $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ * & 2 & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]b 向右移動	12 $\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ * & 2 & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ * & * & 2 & * \end{matrix}$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ * & * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & 2 & * \end{matrix}$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & * & * & 2 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]b	20 $\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$=2(5-1) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & V & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-2) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & 2 & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-3) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 2 & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-4) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & 1 & * \\ * & * & * & * & 2 \end{matrix}$ 模組[1]b	$2 \times \sum_{1}^{N-1} n$
上下二條橫線(斜錯)		4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & * \\ * & 2 & 3 \\ * & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 模組[2]a=4	12 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & * & * \\ * & 2 & 3 & * \\ * & 2 & 3 & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} 1 & 2 & * & * \\ * & * & 3 & 4 \\ * & * & 3 & 4 \end{matrix}$ $\begin{matrix} * & 2 & 3 & * \\ * & * & 3 & 4 \\ * & * & 3 & 4 \end{matrix}$ 模組[2]a	24 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & * & * & * \\ * & 2 & 3 & * & * \\ * & 2 & 3 & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$=4(5-2) $\begin{matrix} 1 & 2 & * & * & * \\ * & 2 & 3 & V & V \\ * & 2 & 3 & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-3) $\begin{matrix} * & 1 & 2 & * & * \\ * & * & 3 & 4 & V \\ * & * & 3 & 4 & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-4) $\begin{matrix} * & 1 & 2 & * & * \\ * & * & * & 4 & 5 \\ * & * & * & 4 & 5 \end{matrix}$ 模組[2]a	$4 \times \sum_{1}^{N-2} n$
上下二條橫線(斜錯)		2 $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & * \\ * & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 模組[2]b=2	6 $\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 1 & 2 & * & * \\ * & 2 & 3 & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ 1 & 2 & * & * \\ * & * & 3 & 4 \end{matrix}$ $\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & 2 & 3 & * \\ * & * & 3 & 4 \end{matrix}$ 模組[2]b	12 $\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & * & * & * \\ * & 2 & 3 & * & * \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$=2(5-2) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & * & * & * \\ * & 2 & 3 & V & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-3) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & 2 & 3 & * & * \\ * & * & 3 & 4 & V \end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-4) $\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 3 & 4 & * \\ * & * & * & 4 & 5 \end{matrix}$ 模組[2]b	$2 \times \sum_{1}^{N-2} n$
上下二條橫線(斜錯)			4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ * & 2 & 3 & 4 \\ * & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	12 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * & * \\ * & 2 & 3 & 4 & * \\ * & 2 & 3 & 4 & * \end{bmatrix}$	$4 \times \sum_{1}^{N-3} n$

			模組[3]a=4	$\longrightarrow$=4(5-3) $\begin{matrix}1&2&3&*&*\\ *&2&3&4&V\\ *&2&3&4&V\end{matrix}$ $\longrightarrow$=4(5-4) $\begin{matrix}*&2&3&4&*\\ *&*&3&4&5\\ *&*&3&4&5\end{matrix}$ 模組[3]a	
上下二條 橫線(斜錯) 			2 $\begin{bmatrix}*&*&*&*\\1&2&3&*\\ *&2&3&4\end{bmatrix}$ 模組[3]b=2	6 $\begin{bmatrix}*&*&*&*&*\\1&2&3&*&*\\ *&2&3&4&*\end{bmatrix}$ $\longrightarrow$=2(5-3) $\begin{matrix}*&*&*&*&*\\1&2&3&*&*\\ *&2&3&4&V\end{matrix}$ $\longrightarrow$=2(5-4) $\begin{matrix}*&*&*&*&*\\ *&2&3&4&*\\ *&*&3&4&5\end{matrix}$ 模組[3]b	$2\times\sum_{1}^{N-3} n$
上下二條 橫線(斜錯) 				4 $\begin{bmatrix}1&2&3&4&*\\ *&2&3&4&5\\ *&2&3&4&5\end{bmatrix}$ 模組[4]a	$4\times\sum_{1}^{N-4} n$
上下二條 橫線(斜錯) 				2 $\begin{bmatrix}*&*&*&*&*\\1&2&3&4&*\\ *&2&3&4&5\end{bmatrix}$ 模組[4]b	$2\times\sum_{1}^{N-4} n$
小計	6	24	60	120	$*(N-1)(N)(N+1)$ 見下說明
模組種類	[1]ab	[1]ab、[2]ab	[1]ab、[2]ab [3]ab	[1]ab、[2]ab [3]ab、[4]ab	N-1 種[c] M 類起算列

平行四邊形計數方法小結：

1. 模組=N-2 種，(因為上下兩邊要斜錯，所以扣掉 1 格邊長)，[c]=上下邊的長度。
2. 每一種[c]都會有 M 類的起算列，例：M=2，有 a、b 兩類的起算列；M=3 會有 a、b、c 三類的起算列。
3. 由 a 做起算列，則會有 2M 個平行四邊形，

   由 b 做起算列，則會有 2(M-1)個平行四邊形

   由 c 做起算列，則會有 2(M-2)個平行四邊形。

4. 上下二條橫線(斜錯)的平行四邊形個數

$= \underline{4\times\sum_1^{N-1}n+4\times\sum_1^{N-2}n+\cdots+4\times\sum_1^{1}n} + \underline{2\times\sum_1^{N-1}n+2\times\sum_1^{N-2}n+\cdots+2\times\sum_1^{1}n}$

$=6\ \times(\sum_1^{N-1}n+\sum_1^{N-2}n+\cdots+\sum_1^{1}n)\quad =6\times(\sum_{N=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}n)$

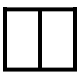
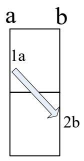
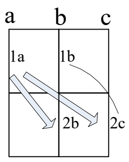
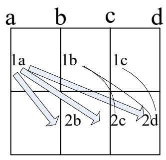
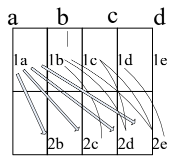
$=6\ \times\sum_{\mathrm{N}=1}^{\mathrm{N}-1}\frac{(1+\mathrm{N}-1)(\mathrm{N}-1)}{2}\quad =6\ \times\sum_{\mathrm{N}=1}^{\mathrm{N}-1}\frac{(N^2-N)}{2}\quad =\ 6\ \times\frac{1}{2}(\sum_{\mathrm{N}=1}^{\mathrm{N}-1}N^2-\sum_{\mathrm{N}=1}^{\mathrm{N}-1}N)$

$=6\ \times\frac{1}{2}(\frac{(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)}{6}-\frac{(\mathrm{N})(\mathrm{N}-1)}{2})=6\ \times\ \frac{(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)}{6}$

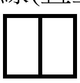
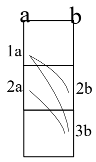
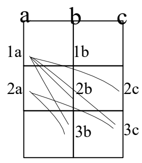
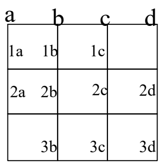
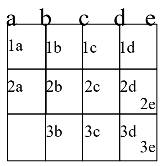
$=(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)$

(三)直線斜錯型(以 M=2~4、N=1~4 討論)

1、M=2

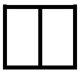
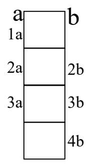
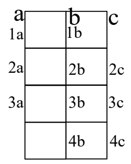
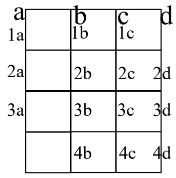
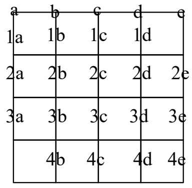
	2×1	2×2	2×3	2×4	2×N
左右二條 直線(直立) 	 1 a→2b 種類:1	 1a→2b、2c 1b→2c 種類:1+2	 1a→2b、2c、2d 1b→2c、2d 1c→2d 種類:1+2+3	 1a→2b.2c.2d.2e 1b→2c.2d.2e 1c→2d.2e 1d→2e 種類:1+2+3+4	$1\sum_{n=1}^{N}n$

2、M=3

	3×1	3×2	3×3	3×4	3×N
左右二條 直線(直立) 	 1 a→2b、3b 2a→3b 種類:1+2	 1a→2b.2c. 3b.3c 1b→2c.3c 2a→3b.3c 2b→3c 種類:2+4 +1+2	 1a→2b.2c.2d 3b.3c.3d 1b→2c.2d.3c.3d 1c→2d.3d 2a→3b.3c.3d 2b→3c.3d 2c→3d 種類:2+4+6 +1+2+3	 1a→2b.2c.2d.2e 3b.3c.3d.3e 1b→2c.2d.2e 3c.3d.3e 1c→2d.2e.3d.3e 1d→2e.3e 2a→3b.3c.3d.3e 2b→3c.3d.3e 2c→3d.3e 2d→3e	$3\sum_{n=1}^{N}n$

				種類:2+4+6+8 +1+2+3+4	

3、M=4

	3×1	3×2	3×3	3×4	3×N
左右二條 直線(直立) 	 1 a→2b.3b.4b 2a→3b.4b 3a→4b 種類: 3 +2 +1	 1 a→2b.2c 3b.3c 4b.4c 2a→3b.3c. 4b.4c 3a→4b.4c. 1b→2c.3c.4c 2b→3c.4c 3b→4c 種類:3+6 +2+4 +1+2	 1a→2b.3b.4b 2c.3c.4c 2d.3d.4d 1b→2c.3c.4c 2d.3d.4d 1c→2d.3d.4d 2a→3b.4b.3c. 4c.3d.4d 2b→3c.4c.3d.4d 2c→3d.4d 3a→4b.4c.4d 3b→4c.4d 3c→4d 種類: 3+6+9 +2+4+6 +1+2+3	 1a→2b.3b.4b 2c.3c.4c 2d.3d.4d 2e.3e.4e 1b→2c.3c.4c 2d.3d.4d 2e.3e.4e 1c→2d.3d.4d 2e.3e.4e 1d→2e.3e.4e 2a→3b.4b.3c.4c 3d.4d.3e.4e 2b→3c.4c.3d. 4d.3e.4e 2c→3d.4d.3e.4e 2d→3e.4e 3a→4b.4c.4d.4e 3b→4c.4d.4e. 3c→4d.4e 3d→4e 種類:3+6+9+12 +2+4+6+8 +1+2+3+4	$6\sum_{n=1}^{N} n$

推論：M=2，左右二條橫線(斜錯)的平行四邊形數量$= 1 \times \sum_{n=1}^{N} n$

M=3，左右二條橫線(斜錯)的平行四邊形數量$= (1+2) \times \sum_{n=1}^{N} n$

M=4，左右二條橫線(斜錯)的平行四邊形數量$= (1+2+3) \times \sum_{n=1}^{N} n$

故推測「左右二條橫線(斜錯)的平行四邊形數量」

$$= \sum_{n=1}^{M-1} n \times \sum_{n=1}^{N} n = \frac{(1+M-1)(M-1)}{2} \times \frac{(1+N)(N)}{2} = \frac{(M-1) \times M \times N \times (N+1)}{4}$$

又因為有正反面，再乘以 2 $=\frac{(M-1)\times M\times N\times(N+1)}{2}$。

則(1)、給定長方形範圍為 M 和 N 單位時，平行四邊形數量

$=$「上下二條直線(斜錯)平行四邊形數量」＋「左右二條橫線(斜錯)平行四邊形數量」

$$=(N-1)(N)(N+1)+\frac{(M-1)\times M\times N\times(N+1)}{2}$$

$$=\frac{[(M-1)M+2N-2]\times N\times(N+1)}{2}$$

(2)、若給定長方形範圍為 M 和 N 單位時，平行四邊形(廣義)包含正方形及長方形，

則總數量$=\sum_1^M n\times\sum_1^N n+\frac{[(M-1)M+N-1]\times N\times(N+1)}{2}$

$$=\frac{(1+M)M}{2}\times\frac{(1+N)N}{2}+\frac{[(M-1)M+N-1]\times N\times(N+1)}{2}$$

$$=\frac{(M^2+M)\times N\times(1+N)}{4}+\frac{2[M^2-M+N-1]\times N\times(N+1)}{4}$$

$$=\frac{[3M^2-M+2N-2]\times N\times(N+1)}{4}\text{ 或 }\frac{[M(3M-1)+2(N-1)]\times N\times(N+1)}{4}$$

預備定理四(平行四邊形數量)

上下二條直線(斜錯)平行四邊形數量 $=(N-1)(N)(N+1)$

左右二條直線(斜錯)平行四邊形數量 $=\sum_{n=1}^{M-1} n\times\sum_{n=1}^{N} n=\frac{(M-1)\times M\times N\times(N+1)}{2}$

格狀形的平行四邊形數量 $=\sum_1^M n\times\sum_1^N n$

(狹義) 若給定長方形的兩鄰邊長為 M 和 N 單位，則平行四邊形數量

$=$「上下左右二條直線(斜錯)平行四邊形數量」

$$=(N-1)(N)(N+1)+\frac{(M-1)\times M\times N\times(N+1)}{2}$$

$$=\frac{[(M-1)M+2N-2]\times N\times(N+1)}{2}$$

(廣義)若給定長方形的兩鄰邊長為 M 和 N 單位，則平行四邊形數量

$=$「格狀」+「上下左右二條直線(斜錯)平行四邊形數量」

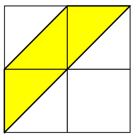
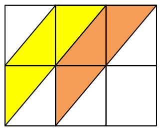
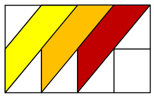
$$=\sum_1^M n\times\sum_1^N n+(N-1)(N)(N+1)+\frac{(M-1)\times M\times N\times(N+1)}{2}$$

$$=\frac{[3M^2-M+2N-2]\times N\times(N+1)}{4}$$

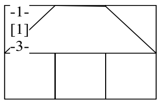
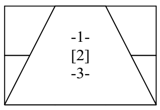
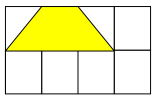
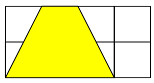
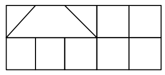
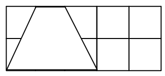
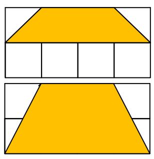
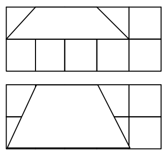
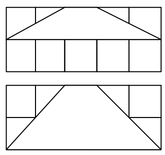
五、等腰梯形

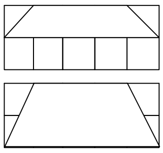
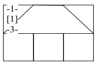
目前只先討論範圍 2×N 時的等腰梯形數量

1. 梯形斜放

方格範圍	2×2	2×3	2×4	2×5	2 × N
梯形數量	4 個方向 	4 個方向 重複兩次 	4 個方向 重複三次 	…	…
小計	斜：4	斜:8	斜:12	斜:16	斜：4(N-1)

2. 梯形正放

方格範圍	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2 × 7
梯形數量	無法成形	  (4 + 2)	  (8+4)	4 個方向 重複三次   (12+6)	4 個方向 重複四次 (16+8)	4 個方向 重複五次 (20+10)
梯形數量			新增 1 類  (4+2)	4 個方向 重複兩次  (8+4)	4 個方向 重複三次 (12+6)	4 個方向 重複四次 (16+8)
梯形數量				新增 2 類  (4+2)	4 個方向 重複兩次 (8+4) ＋ (8+4)	4 個方向 重複三次 (12+6) ＋ (12+6)

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
(4+2)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>梯形數量</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>新增 2 類
(4+2)× 2</td><td>重複兩次
(4+2)× 2 × 2</td></tr>
<tr><td>梯形數量</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>新增 3 類
(4+2)× 3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>正：6</td><td>正：18</td><td>正：42</td><td>正：78</td><td>正：132</td></tr>
<tr><td>新增等腰梯形種類</td><td>說明：

表示為
−1 −
[1]
−3 −</td><td>−1 −
[1] | × 4
−3 −

−1 −
[2] | × 2
−3 −</td><td>−2 −
| [1] | × 4
−4 −

−2 −
[2] | × 2
−4 −</td><td>−1 − −1 −
[1] || [2]
−5 − −5 −

−3 − −3 −
[1] || [2]
−5 − −5 −</td><td>−2 − −2 −
[1] || [2]
−6 − −6 −

−4 − −4 −
[1] || [2]
−6 − −6 −</td><td>−1 − −1 −
[1] || [2]
−7 − −7 −

−3 − −3 −
[1] || [2]
−7 − −7 −

−5 − −5 −
[1] || [2]
−7 − −7 −</td></tr>
</table>

等腰梯形新增種類數 ＝ $[\frac{N-1}{2}] \times$ M種，N 每增加 2，就會多 1 種等腰梯形。我們設定 $\begin{matrix}-1-\\ {[1]}\\ -3-\end{matrix}$ 、$\begin{matrix}-1-\\ {[2]}\\ -3-\end{matrix}$ 是等腰梯形的起始圖集 A，共(1+2)種圖形；再將所有等腰梯形分區段累計，如下表：

<table>
<tr><td>N 值</td><td>所分區段</td><td colspan="4">累計圖形種類</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N=3</td><td rowspan="2">1</td><td>(1+2)× 1</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">N=4</td><td rowspan="2">1</td><td>(1+2)×2</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(1+2)×1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N=5</td><td rowspan="2">2</td><td>(1+2)×3</td><td>(1+2)× 1
(1+2)× 1</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(1+2)× 2</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">N=6</td><td rowspan="2">2</td><td>(1+2)×4</td><td>(1+2)× 2
(1+2)× 2</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(1+2)× 3</td><td>(1+2)× 1
(1+2)× 1</td></tr>
<tr><td>N=7</td><td>3</td><td>(1+2)×5</td><td>(1+2)× 3
(1+2)× 3</td><td>(1+2)× 1
(1+2)× 1</td><td></td></tr>
</table>

				(1+2)× 1	
		(1+2)× 4	(1+2)× 2 (1+2)× 2		
N=8	3	(1+2)× 6	(1+2)× 4 (1+2)× 4	(1+2)× 2 (1+2)× 2 (1+2)× 2	
		(1+2)× 5	(1+2)× 3 (1+2)× 3	(1+2)× 1 (1+2)× 1 (1+2)× 1	
N=9	4	(1+2)×7	(1+2)× 5 (1+2)× 5	(1+2)× 3 (1+2)× 3 (1+2)× 3	(1+2)× 1 (1+2)× 1 (1+2)× 1 (1+2)× 1
		(1+2)× 6	(1+2)× 4 (1+2)× 4	(1+2)× 2 (1+2)× 2 (1+2)× 2	

1.若 N 為奇數項，等腰梯形總類的增加量$\Delta T_{奇}$

$$= 1\times(\frac{N-1}{2})+3\times(\frac{N-3}{2})+5\times(\frac{N-5}{2})+\ldots+(N-2)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$+2\times(\frac{N-3}{2})+4\times(\frac{N-5}{2})+6\times(\frac{N-7}{2})+\ldots+(N-3)\times[\frac{N-(N-2)}{2}]$$

$$=1\times(\frac{N-1}{2})+5\times(\frac{N-3}{2})+9\times(\frac{N-5}{2})+\ldots+(2N-5)\times 1。$$

$$等腰梯形總數 = 梯形斜放數 + 梯形正放數 = 4(N-1) + (1+2)\times\Delta T_{奇}\times 2(上下翻轉)$$

例：N=13，$\Delta T_{奇} =1\times(\frac{13-1}{2})+5\times(\frac{13-3}{2})+9\times(\frac{13-5}{2})+13\times\left(\frac{13-7}{2}\right)+17\times\left(\frac{13-9}{2}\right)+21\times(\frac{13-11}{2})$

$$=1\times 6+5\times 5+9\times 4+13\times 3+17\times 2+21\times 1=161$$

所以當 M=2、N=13，等腰梯形總數 $= 4(13-1)+(1+2)\times 161\times 2 = 1014$ 個。

2.若 N 為偶數項，等腰梯形總類的增加量$\Delta T_{偶}$

$$= 1\times(\frac{N-2}{2})+3\times(\frac{N-4}{2})+5\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(N-3)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$+2\times(\frac{N-2}{2})+4\times(\frac{N-4}{2})+6\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(N-2)\times[\frac{N-(N-2)}{2}]$$

$=3\times(\frac{N-2}{2})+7\times(\frac{N-4}{2})+11\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(2N-5)\times 1$。

等腰梯形總數 $= 4(\mathrm{N}-1)+(1+2)\times\Delta\mathrm{T}_{偶}\times 2$(上下翻轉)

肆、研究結論

一、大多四邊形均可由單一一般式表示。例如，在給定方格範圍 M×N 內：

1、正方形個數=$[\frac{M(\mathrm{M}+1)(M+2)}{3!}]\times[\frac{(N-M)+(\mathrm{N}+1)}{2}]$；若 M=N，則正方形個數=$\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+1)(N+2)}{(1\times2)(2\times3)}$

2、長方形數量(不含正方形)=$\sum_{\mathrm{L}=1}^{\mathrm{M}}[(\mathrm{M}+1-\mathrm{L})\times\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N}-\mathrm{L}}\mathrm{n}]$ ，$\mathrm{n}\geq\mathrm{M}$

3、平行四邊形數量(上下二條直線斜錯) =$(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)$

平行四邊形數量(左右二條直線斜錯) =$\sum_{n=1}^{M-1}n\times\sum_{n=1}^{N}n$

二、菱形意外地無法由單一一般式表示，隨 M、N 給定不同，就產生特定的一般式，變化繁瑣。

三、公式彼此間可以組合成的一般式。例如：平行四邊形一般式=長方形公式 + 斜錯平行四邊形公式。

四、後續研究延伸方向可計算「箏形」、「非等腰梯形」；或計算因斜擺而產生的四邊形數量；或研究三角形內之四邊形、三邊形個數，並可嘗試以排列組合方式解題計算。

伍、參考資料

李碩彥。平行四邊形的大家族。數學傳播 35 卷 3 期,pp.31-38。

【評語】030407

本作品所考慮的是一個淺顯易懂的問題：在給定的 m×n 的格點圖上，我們可以找出多少個正方形（正方形的邊不見得要與原本格點圖的邊平行）？問題明確不複雜且有趣。作者們針對原始的問題給出了完整的解答。對於一些延伸問題，如：格點圖中所含的長方形的個數、菱形的個數、梯形的個數等問題，也做了討論，內容很豐富，一些分類的手法也頗具巧思，值得嘉許。比較可惜的是，在計算某些特定形狀的四邊形的個數時所使用的方式似乎是藉由觀察規律來推論結果，沒有給出一個理論上的說明，這讓人覺得有些美中不足。另一方面，在使用符號時，應該盡可能將符號所代表的意義解釋清楚，如此，才能讓作品看起來更具可讀性。

作品簡報

圖多變是美~

給定範圍內之四邊形數量計算

組別：國中組
科別：數學組

研究動機

- 暑假時原本想要搜尋皮克斯電影卻少打了一個字，結果跑出「皮克定理」，在好奇心驅使下大致瀏覽，感到能用短短的式子解答問題真是太厲害了，在與同學討論並請教老師後覺得可以往相關的方向去研究看看，決定以解決「計算給定範圍內的四邊形數量」作為研究的目標。

研究目的

- 1.由正方形格子組成圖形為邊長N的正方形時的正方形個數
- 2.由正方形格子組成圖形為M×N長方形時的正方形個數
- 3.由正方形格子組成圖形為M×N長方形時的長方形個數
- 4.由正方形格子組成圖形為M×N長方形時的菱形個數
- 5.由正方形格子組成圖形為M×N長方形時的平行四邊形個數
- 6.由正方形格子組成圖形為M×N長方形時的等腰梯形個數

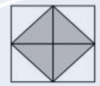
範圍
邊長N的正方形

計算
正方形個數

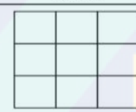
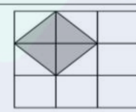
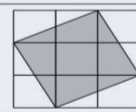
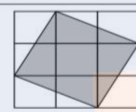
1、邊長是 1 單位時

	邊長	個數	總和$=1^2=1$
 圖 1	1	$1^2=1$	

2. 邊長是 2 單位時

 圖 2	邊長	個數	總和
	1	$2^2=4$	$=1^2+(1^2+2^2)$
	2	$1^2=1$	
	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	$1^2=1$	$=6$

3.邊長是 3 單位時

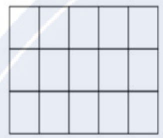
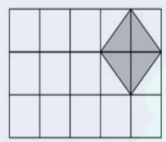
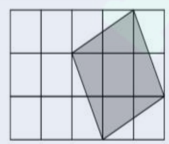
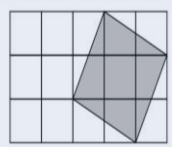
圖示	邊長	個數	總和
	1	$3^2=9$	$=(1^2)$
	2	$2^2=4$	$+(1^2+2^2)$
	3	$1^2=1$	$+(1^2+2^2+3^2)$
	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	$2^2=4$	$=20$
	$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$	$1^2=1$	
	$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	$1^2=1$	

- 推測當正方形的邊長為n單位時，正方形個數公式如下：
- $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots+$

範圍
邊長M×N的長方形

計算
正方形個數

(2)長方形邊長為 3 x 5 時

圖示	邊長	比 3 x 4 多出來的數量
	1	3
	2	2
	3	1
	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	2
	$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$	1
	$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	1

總和=(3 x 4的正方形數量)+(比 3 x 4多出來的數)

$=30+(3+2+2+1)+(2+1)+1=20+(3+2+1+2+1+1)\times 2=40$

推測當M×N的長方形(N ≥ M)，

正方形個數公式如下：

- $\dfrac{M^4+4M^3+5M^2+2M}{12}+\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{j} i\right)\times(N-M)$
- $=\dfrac{M^4+4M^3+5M^2+2M}{12}+\dfrac{M^3+3M^2+2M}{6}\times(N-M)$
- $=\dfrac{M(M+1)(M+2)}{3!}\times\dfrac{2N-M+1}{2}$...定理一-2
- 其中，$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{j} i=\sum_{j=1}^{M}\dfrac{j(j+1)}{2}$
- $=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M} j^2+\sum_{j=1}^{M} j\right)$
- $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{M(M+1)(2M+1)}{6}+\dfrac{M(M+1)}{2}\right]$
- $=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2M^3+6M^2+4M}{6}\right)=\dfrac{M^3+3M^2+2M}{6}$

範圍
邊長M×N的長方形

計算
長方形個數

預備定理二-1

給定範圍M×N內，
長方形數量總計(包含正方形)：

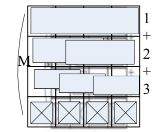
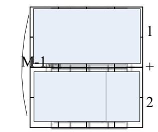
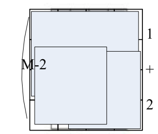
$$\sum_{1}^{M} n \times \sum_{1}^{N} n$$
$$= \frac{(1+M)M}{2} \times \frac{(1+N)N}{2}$$
$$= \frac{(M^2+M)(N^2+N)}{4}$$

預備定理二-2

給定範圍M×N內，

長方形數量(不含正方形)總計：

$$= \sum_{1}^{M} n \times \sum_{1}^{N} n - [\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}] \times [\frac{2N-M+1}{2}]$$
$$= \frac{M(M+1)}{12} \times [3N(N-1)+M(M+1)-2(MN+1)]$$

1×n 數量	=(M-0)* [(1+2+3+...+(N-1)]	
2×n 數量	=(M-1)* [(1+2+3+...+(N-2)]	
3×n 數量	=(M-2)* [(1+2+3+...+(N-3)]	
4×n 數量	=(M-3)* [(1+2+3+...+(N-4)]	...

...

(M-1)×n 數量	=(2)* [(1+2+3+...+(N-(M-1))]
M×n 數量	=(1)* [(1+2+3+...+(N-M)]
長方形數量總和一般式 (不含正方形),n≥M	$\sum_{L=1}^{M}\left[(M+1-L)\times\sum_{n=1}^{N-L} n\right]$

預備定理二-3

給定範圍M×N內，長方形數量(不含正方形)總計：

$$= \sum_{L=1}^{M}\left[(M+1-L)\times\sum_{n=1}^{N-L} n\right]，n \geq M$$

範圍
邊長M×N的長方形

計算
菱形個數

方法一

從方法一計算廣義菱形，明顯看出有兩大類計數：

一是邊長為整數的計數，有規律呈現為5 × N、4× (N − 1) ...1×(N−4)；

一種是邊長為無理數的計數，幾乎每種邊長各有規律，一般式歸納不易，故換以總數字觀察。

方法二（廣義菱形個數）

長方形的兩個鄰邊邊長為M和N單位，當$N \geq$ M時，菱形個數之間會成二階公差數列，

若M為偶數，二階公差由2(M-2)開始為：2(M-2) , 0 , 2(M-2) , …

若M為奇數，二階公差由0開始為：0, 2(M-2) , 0 , 2(M-2) , …

方法三（狹義菱形個數） 成發散結果，無法有效歸納出單一一般式。

方法一 圖形

菱形邊長	5x1	5x2	5x3	5x4	5x5	5x6	5x7	5x8	5xN
1	5	10	15	20	25	30	35	40	5 × N
$\sqrt{2}$		4	8	12	16	20	24	28	2 × (2N − 2)
2		4	8	12	16	20	24	28	4(N − 1)
$\sqrt{5}$		2	(3)*2+4	(6)*2+10	(9)*2+16	(12)*2+22	(15)*2+28	(18)*2+34	2 × (3N − 6) +2 × (3N − 7)
$\sqrt{8}$			0	2	4	6	8	10	2(N−3),N>3
3			3	6	9	12	15	18	3(N−2)
$\sqrt{10}$				(2)*2	(4)*2	(6)*2+4	(8)*2+8	(10)*2+12	
$\sqrt{13}$				0	(1)*2	(2)*2+2	(3)*2+4	(4)*2+6	
4				2	4	6	8	10	2(N − 3)
$\sqrt{17}$					(1)*2	(2)*2	(3)*2	(4)*2+4	
$\sqrt{20}$					--	--	--	0+2	
5					1	2	3	4	1×(N−4)

方法二 圖形

2、範圍 3 × N 的廣義菱形個數

[A|B]	3 × 1	3 × 2	3 × 3	3 × 4	3 × 5	3 × 6	3 × 7	3 × 8
廣義菱形個數	3	10	20	32	44	58	72	88
一階公差		+7	+10	+12	+12	+14	+14	+16
二階公差		+3	+2	+0	+2	+0	+2	+...

$$3 \text{ x } n = 3+\underbrace{(7+10+12)}_{3\text{ 個一階公差}} + \underline{12+14+14+16+\ldots\ldots+\ldots}$$

3、範圍 4 × N 的廣義菱形個數

[A|B]	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8
廣義菱形個數	4	15	32	56	80	108	136	
一階公差		+11	+17	+24	+24	+28	+28	+32
二階公差		+6	+7	+0	+4	+0	+4	+...

$$4 \text{ x } n = 4+\underbrace{(11+17+24+24)}_{4\text{ 個一階公差}} + 28+28+28+32+32\ldots\ldots+\ldots$$

範圍
邊長M×N的長方形

計算
菱形個數

範圍4N(狹義菱形個數)

菱形邊長 [對角線 A|對角線 B]	4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4 x N
1	菱形邊長 1 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{2}$[2|2]	菱形邊長由[2|2]組成時為正方形，不討論。								
2	菱形邊長 2 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{5}$[2|4](3N 時)				2	4	6	8	10	2[n-3] ,N≥ B
$\sqrt{5}$[2|4](4N 時)		1	2	6	10	14	18	22	2[N-3]+ 2[N-2] ,N≥ B
$\sqrt{8}$[4|4]	菱形邊長由[4|4]組成時為正方形，不討論。								
3	菱形邊長 3 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{10}$[2|6]						3	6	9	3[N-3-2] ,N≥ B
$\sqrt{13}$[4|6]						1	2	3	1[N-3-2] ,N≥ B
4	菱形邊長 4 時為正方形，不討論。								
$\sqrt{17}$[2|8]								3	3[N-3-2-2] ,N≥ B
$\sqrt{20}$[4|8]								1	1[N-3-2-2] ,N≥ B
個數小計		1	2	6	10	18	26	38	

(a)、範圍 4×N，N 為偶數項時，狹義菱形個數$=[2(N-3)+2(N-2)]+\underbrace{4(N-3-2)+4(N-3-2-2)+\ldots+4}_{共\frac{N-4}{2}項，累加\frac{N-6}{2}次}$

方法三 圖形

預備定理三-1(狹義菱形個數一般式)

長方形的兩個鄰邊邊長為M和N單位，$N \geq M$時，菱形個數如下：

格子數範圍2 ×N，當N為偶數項時，狹義菱形個數 $= \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$

格子數範圍2 × N，當N為奇數項時，狹義菱形個數 $= \frac{(N-1)(N-3)}{4}$

格子數範圍3 ×N，當N為偶數項時，狹義菱形個數$= \frac{(N-2)(N-2)}{2}$ 或 $\frac{(N-2)^2}{2}$

格子數範圍3 ×N，當N為奇數項時，狹義菱形個數$= \frac{(N-1)(N-3)}{2}$ 或 $\frac{(N-2)^2-1}{2}$

格子數範圍4 ×N，當N為偶數項時，狹義菱形個數$= N^2 - 4N + 6$

格子數範圍4 ×N，當N為奇數項時，狹義菱形個數$= N^2 - 4N + 5$

格子數範圍5 ×N，當N為偶數項時，狹義菱形個數$= \frac{3}{2}N^2 - 6N + 10$

格子數範圍5 ×N，當N為奇數項時，狹義菱形個數$= \frac{3}{2}N^2 - 6N + \frac{17}{2}$

預備定理三-2(廣義菱形個數一般式)

長方形的兩個鄰邊邊長為M和N單位，$N \geq M$時，菱形個數如下：

格子數範圍2 ×N，當N為偶數項時，廣義菱形個數 $= \frac{N^2+12N-4}{4}$

格子數範圍2 × N，當N為奇數項時，廣義菱形個數 $= \frac{N^2+12N-5}{4}$

格子數範圍3 ×N，當N為偶數項時，廣義菱形個數$= \frac{N^2+16N-16}{2}$

格子數範圍3 ×N，當N為奇數項時，廣義菱形個數$= \frac{N^2+16N-17}{2}$

格子數範圍4 ×N，當N為偶數項時，廣義菱形個數$= N^2 - 16N - 24$

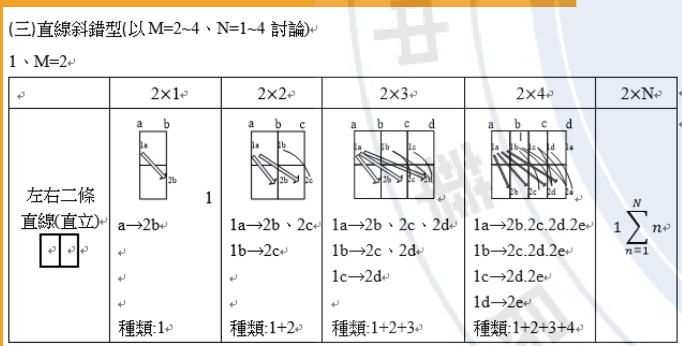
格子數範圍4 ×N，當N為奇數項時，廣義菱形個數$= N^2 - 16N - 25$

格子數範圍5 ×N，當N為偶數項時，廣義菱形個數$= \frac{3N^2+58N-120}{2}$

格子數範圍5 ×N，當N為奇數項時，廣義菱形個數$= \frac{3N^2+58N-123}{2}$

範圍
邊長M×N的長方形

計算
平形四邊形個數



(三)直線斜錯型(以 M=2~4、N=1~4 討論)

1、M=2

	2×1	2×2	2×3	2×4	2×N
左右二條直線(直立)	a→2b 1 種類:1	1a→2b、2c 1b→2c 種類:1+2	1a→2b、2c、2d 1b→2c、2d 1c→2d 種類:1+2+3	1a→2b.2c.2d.2e 1b→2c.2d.2e 1c→2d.2e 1d→2e 種類:1+2+3+4	$1\sum_{n=1}^{N} n$

- (一)格狀與條狀≡ 長方形個數 $=\sum_1^M n \times \sum_1^N n$

- (二)橫線斜錯型

上下二條橫線(斜錯)的平行四邊形個數

$$=\underline{4\times\sum_1^{N-1} n+4\times\sum_1^{N-2} n+\cdots+4\times\sum_1^{1} n}+\underline{2\times\sum_1^{N-1} n+2\times\sum_1^{N-2} n+\cdots+2\times}$$

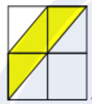
範圍

邊長M×N的長方形

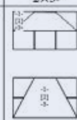
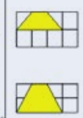
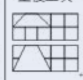
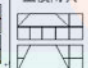
計算

等腰梯形個數

1. 梯形斜放＝4(N-1)

2×2	2×3	2×4	2×5	2 × N
4 個方向 	4 個方向 重複兩次 	4 個方向 重複三次 	…	…
斜：4	斜:8	斜:12	斜:16	斜：4(N-1)

梯形正放圖形

方格範圍	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2 × 7
梯形數量	無法成形	 (4 + 2)	 (8+4)	4 個方向 重複三次  (12+6)	4 個方向 重複四次 (16+8)	4 個方向 重複五次 (20+10)
梯形數量			新增 1 類  (4+2)	4 個方向 重複兩次  (8+4)	4 個方向 重複三次 (12+6)	4 個方向 重複四次 (16+8)
梯形數量				新增 2 類  (4+2)  (4+2)	4 個方向 重複兩次 (8+4) + (8+4)	4 個方向 重複三次 (12+6) + (12+6)

2. 梯形正放

若N為奇數項，等腰梯形總類的增加量$\Delta T_{奇}$

$$= 1\times(\frac{N-1}{2})+3\times(\frac{N-3}{2})+5\times(\frac{N-5}{2})+\ldots+(N-2)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$+2\times(\frac{N-3}{2})+4\times(\frac{N-5}{2})+6\times(\frac{N-7}{2})+\ldots+(N-3)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$=1\times(\frac{N-1}{2})+5\times(\frac{N-3}{2})+9\times(\frac{N-5}{2})+\ldots+(2N-5)\times 1。$$

等腰梯形總數 ＝ 梯形斜放數 ＋ 梯形正放數

$$= 4(N-1)+(1+2)\times\Delta T_{奇}\times 2(\text{上下翻轉})$$

若N為偶數項，等腰梯形總類的增加量$\Delta T_{偶}$

$$= 1\times(\frac{N-2}{2})+3\times(\frac{N-4}{2})+5\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(N-3)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$+2\times(\frac{N-2}{2})+4\times(\frac{N-4}{2})+6\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(N-2)\times\left[\frac{N-(N-2)}{2}\right]$$

$$=3\times(\frac{N-2}{2})+7\times(\frac{N-4}{2})+11\times(\frac{N-6}{2})+\ldots+(2N-5)\times 1。$$

等腰梯形總數 ＝

$$4(N-1)+(1+2)\times\Delta T_{偶}\times 2(\text{上下翻轉})$$

研究結論

- 一、大多四邊形均可由單一一般式表示。

  1、正方形若M=N，則正方形個數= $\frac{N(N+1)(N+1)(N+2)}{(1\times2)(2\times3)}$

  2、長方形數量(不含正方形)= $\sum_{L=1}^{M}\left[(M+1-L)\times\sum_{n=1}^{N-L}n\right]$，$n \geq M$

  3、平行四邊形數量(上下二條直線斜錯) = $(N-1)(N)(N+1)$

  平行四邊形數量(左右二條直線斜錯) = $\sum_{n=1}^{M-1}n\times\sum_{n=1}^{N}n$ 個數

  $=[\frac{M(M+1)(M+2)}{3!}]\times[\frac{(N-M)+(N+1)}{2}]$

- 二、菱形無法由單一一般式表示，隨M、N給定不同就有不同的一般式，變化繁瑣。

- 三、公式彼此間可以組合成的一般式。

  例：平行四邊形一般式 = 長方形公式 + 斜錯平行四邊形公式。

未來展望

後續研究延伸

- 1.可往「箏形數量」、「非等腰梯形數量」探討
- 2.計算因斜擺而產生的四邊形數量
- 3.研究三角形內之四邊形、三邊形個數
- 4.也許可嘗試以排列組合方式解題計算。

參考資料

- 李碩彥。平行四邊形的大家族。數學傳播35卷3期, pp. 31-38。

報告完畢

謝謝評審老師、教授　恭請指導