

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

團隊合作獎

030406

星狀網路點擴展運算漢米爾頓容錯性質研究

學校名稱：花蓮縣立國風國民中學

作者： 國二 張登富 國一 蔡茗寓	指導老師： 張烜瀚 潘恩勤
-------------------------	---------------------

關鍵詞：連結網路(Interconnection network)、圖形
理論(Graph theory)、漢米爾頓圖
(Hamiltonian graph)

摘要

本作品研究星狀網路和完全網路，兩種不同結構的連結網路，使用點擴展運算結合成一個網路結構，並且在一定的容錯範圍內，保證存在漢米爾頓迴圈性質。漢米爾頓迴圈在連結網路的研究中相當重要，若存在此性質，則可以保證發送訊號時，能將訊號發送給連結網路上的每一個元件並接收，且不會重覆接收到訊號。我們使用圖形理論的方式，將星狀網路和完全網路，這兩種連結網路結構，分別抽象化成星狀圖和完全圖，網路中的元件抽象化為點，元件之間的連線，抽象化成邊。如果元件之間的連線故障，無法使用，則稱為壞邊。我們證明 $n + 1$ 維度星狀圖和 n 維度完全圖使用點擴展運算後，壞邊數量最多是 $n - 4$ 時，保證存在漢米爾頓迴圈。

壹、前言

首先說明本作品的研究動機，接下來說明研究目的，以及相關的預備知識，最後文獻回顧，說明需要引用到其他論文中的相關引理和定理。

一、研究動機：

國小時有接觸過**一筆畫問題**，當時只是覺得很有趣，為什麼有些圖形，如果限制每一條邊只能經過一次，我們從一個起點出發，竟然會有些點沒有辦法經過。當時畫了好幾次，總覺得這應該存在某種規律。後來上網查詢，才知道這種問題是有名的七橋問題，屬於數學中圖形理論的問題。而上資訊課時，老師提到了類似的觀念，於是有了這次的研究。

跟老師討論的過程中，老師帶我們看徐力行老師所出版的作品（徐力行 2003，2011），知道了連結網路的主要研究是網路中，元件和元件之間的連線方式，以及研究是否存在解決網路所遇到問題的方法。也知道了許多不同連線方式的連結網路架構。而在做連結網路研究時，通常會將這些不同的連結網路結構抽象化為各種不同的圖（graph）來表示，而連結網路中的元件，轉換成圖後就成了點，元件之間的連線，轉換成圖後就成了邊。接著再使用圖形理論中數學證明的方法，找出能解決問題的數學性質。著名的七橋問題就是將現實中所遇的問題，抽象化成圖形，進而用數學證明的方式證明出並不存在解決問題的方法。從討論中，也知道了另一個圖論著名的問題，則是**漢米爾頓迴圈性質**的問題，將七橋問題中限制每一條邊只經過一次的條件，改成每一個點只經過一次。於是問題變成了，「**在一個圖中，從一個起點出發，經過每個點一次後，是否能回到起點**」。

在連結網路傳送訊號時，是否保證一定能發送訊號給網路上每一個元件接收，而且能夠不重複接收訊號。這個問題就可以抽象化成漢米爾頓迴圈性質來解決。此外，我們也好奇如果兩種結構的連結網路需要合併成一個網路使用時，我們應該怎麼合併，以及合併後如果元

件之間的連線損壞，損壞的數量範圍是多少，還能保證存在漢米爾頓迴圈性質。

二、研究目的：

如何將現實中所遇到的問題抽象成數學的形式，使用數學證明的方式來解決，是非常重要的。本作品研究星狀網路和完全網路，兩種結構的連結網路，使用點擴展運算後，結合成一個連結網路，並且保證在一定的容錯範圍內，存在漢米爾頓迴圈性質。漢米爾頓迴圈性質在連結網路研究中是非常重要的，如果一個連結網路存在漢米爾頓迴圈性質，則可以保證發送訊號時，能將訊號發送給連結網路上的每一個元件接收，且不會重覆接收到訊號。

我們使用圖形理論的方式，將星狀網路和完全網路，這兩種連結網路結構，分別抽象化成星狀圖和完全圖，網路中的元件抽象化為點，元件之間的連線，抽象化成邊。如果元件之間的連線故障，無法使用，則稱為壞邊。我們證明 $n + 1$ 維度星狀圖和 n 維度完全圖使用點擴展運算後，最多壞 $n - 4$ 條邊，保證存在漢米爾頓迴圈。

三、預備知識：

(一) 連結網路 (Interconnection network)：

連結網路的研究主要應用在多處理器結構，以及網路元件之間的連接方式。在連結網路的研究中，會將所遇到的問題抽象成圖形理論的觀念來描述，並證明解決方法是否正確。在本作品中，描述連結網路時，會轉換成圖形來表示。一般而言，使用 $G = (V, E)$ 表示一個圖形， V 表示點集合，其中的每一個點，可以代表連結網路上的元件，而 E 表示邊集合，其中的每一條邊代表元件與元件之間的連線。星狀網路使用星狀圖表示，完全網路使用完全圖表示。

(二) 圖形理論 (Graph theory)：

圖形理論 (Graph theory)，簡稱圖論，是一門探討物件之間如何關連的學問。在圖論當中沒有複雜的幾何結構，只有點和邊兩種最單純的元素。圖論的起源，現在公認是 Euler 在 1736 年解決柯尼斯堡七橋問題的文章。柯尼斯堡七橋問題如下：現在俄羅斯的 Kaliningrad 市有一條現在命名為 Pregolya 河流經過，河的中心有兩個小島，小島和河的兩岸有七座橋相連接，當地流傳著一則謎題：從某一塊土地開始走，要如何走才能恰好經過每座橋一次。

Euler 將問題抽象化成圖，每座島抽象化成圖中的點，每座橋抽象化成圖中的邊，原本的七橋問題就成為「圖中是否存在一種走法，能夠經過所有點，且所經過的每條邊不重複」，邊的一筆畫遊歷問題，圖 1 表示抽象化的過程。在 Euler 的證明中，並不存在這樣的走法，解決了這道謎題。



圖 1：七橋問題抽象化過程。(取自 wiki)

從上述中，我們可以了解，圖 (Graph) 是一個點 (vertex) 和邊 (edge) 的集合。在本作品中，我們使用 $G = (V, E)$ 表示一個圖的集合，其中 V 代表點集合， E 代表邊集合，有時也會使用 $V(G)$ 表示圖 G 的點集合， $E(G)$ 表示圖 G 的邊集合。本作品參考張鎮華與蔡牧村 (2020)，演算法觀點的圖論，書中所使用的定義。接下來，我們條列說明在本作品中會使用到的一些圖論基本定義。

1. **相鄰 (adjacent)**：在無向圖中，若有一條邊連接兩點，則稱這兩點相鄰。如果點 u 和點 v 相鄰，若要表示存在一條邊，記作 (u, v) 。
2. **分支度 (degree)**：點的分支度，是連接這個點的邊數。
3. **道路 (walk)**：道路將所經過的邊和點記錄下來，其中邊和點可重複。
4. **路徑 (path)**：路徑是一條點不重複的道路。圖 2 (A) 紅色線段表示圖中的一條 v_0 到 v_4 路徑。
5. **迴圈 (cycle)**：迴圈是一條起點與終點相同，且經過的邊數大於等於 3，點不可重複的道路。圖 2 (B) 紅色線段表示圖中的一個迴圈。

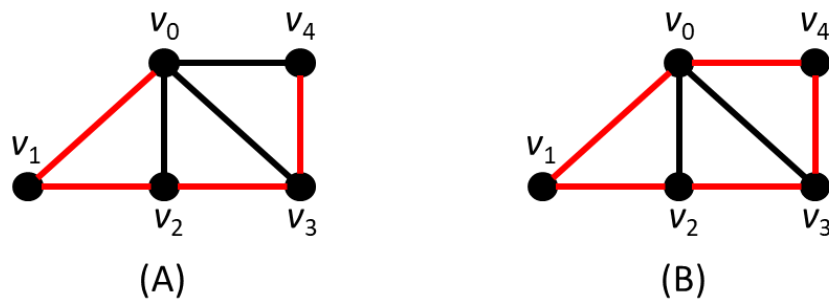


圖 2：(A) 表示一條路徑。(B) 表示一個迴圈。

6. **子圖 (subgraph)**：如果有兩個圖 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$ ，滿足 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$ ，則稱 G' 是 G 的子圖，如圖 3 所示。

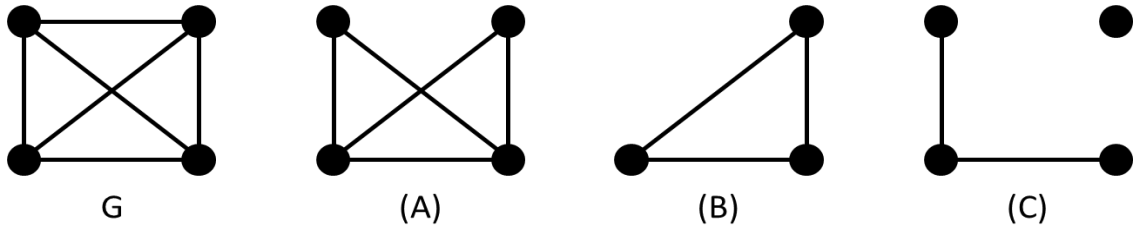


圖 3：(A)、(B)、(C)，都是圖 G 的子圖。

7. **同構 (isomorphism)**：假設圖 G 和圖 H 的點數相同，並且圖 G 中的各點和圖 H 中的各點，存在某種對應關係，使得圖 G 中的兩個點有邊相連，對應到圖 H 的兩個點也有邊相連，稱為同構。圖 4 中，圖 G 和圖 H 同構。

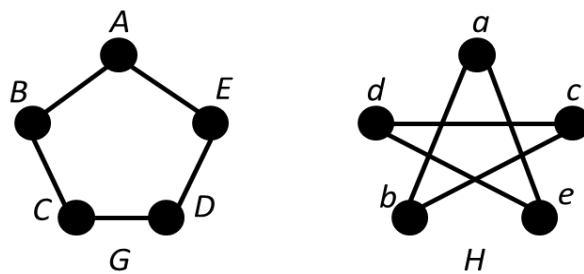


圖 4：圖 G 和圖 H 同構。

(三) **完全圖 (Complete graph)**：

是指具有 n 個點，而且任意兩點之間都有邊相連的圖，通常用 K_n 表示 n 維度的完全圖，如圖 5 所示。 K_n 的點集合可以表示成 $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ，邊集合可以表示成 $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \text{ 且 } i \neq j\}$ 。 K_n 總共有 n 個點，總邊數有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條。表 1 可以看出維度增加時，點數和邊數的變化。在完全圖中，因為每一點都與其他各點皆有邊相連，所以各點的分支度是 $(v) = n - 1$ 。也因為完全圖中的每個點皆和其他各點相鄰，所以完全圖在結構上存在許多良好的性質。此外，所有的圖都是完全圖的子圖。

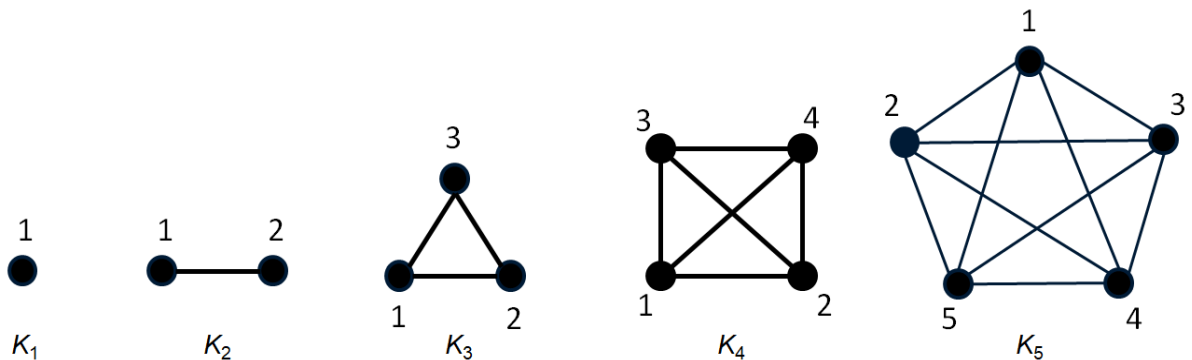


圖 5：1 維度完全圖 K_1 至 5 維度完全圖 K_5

表 1：維度增加時，完全圖總點數和總邊數。

維度	6	7	8	9	10	11	12	n
總點數	6	7	8	9	10	11	12	n
總邊數	15	21	28	36	45	55	66	$\frac{n(n-1)}{2}$

在本作品所要證明的主要結果裡，需要先證明完全圖 K_n 的一些性質。證明完全圖 K_n 相關性質的過程中，因為 n 維度的完全圖無法繪製，我們使用示意圖輔助說明證明過程。 n 維度的完全圖 K_n 被分成兩個部分，分別是點 u 和 K_{n-1} ， K_n 的點集合表示為 $V(K_n) = V(K_{n-1}) \cup \{u\}$ 。圖 6 舉例 5 維度完全圖 K_5 ，從實例圖抽象轉換成示意圖的過程。圖 7 表示推廣到 n 維度的 K_n 示意圖。示意圖的表示方式符合完全圖的遞迴性質，在證明過程中，示意圖裡只標示出需要的點和邊，方便清楚表示證明過程。

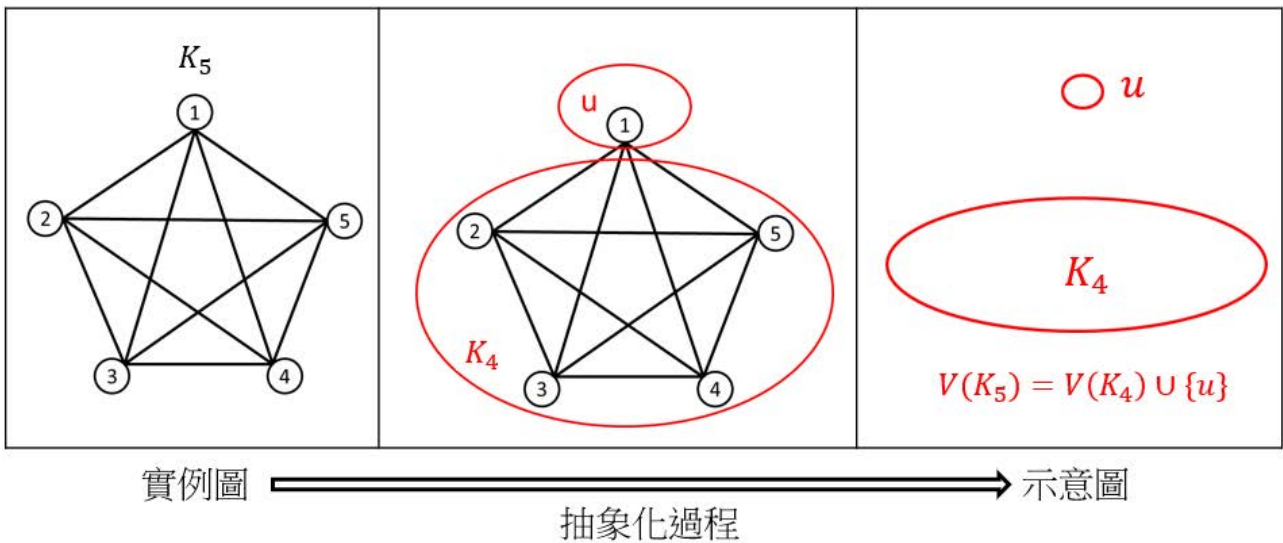


圖 6：以 K_5 為例，實例圖抽象轉換成示意圖過程。

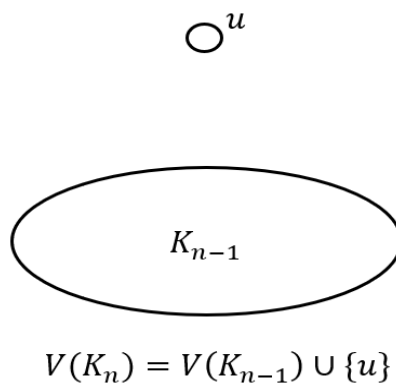


圖 7：推廣到 K_n 時的示意圖。

(四) 二分圖(bipartite graph)：

我們令 $G = (V_b \cup V_w, E)$ ，表示一個二分圖。點集合 V_b 和 V_w 是兩個沒有交集的集合，一般為了方便說明，這兩個集合分別使用黑色和白色來表示。本作品中，點集合 V_b 稱為黑點的集合， V_w 稱為白點的集合。二分圖中，每一條邊的兩個端點，都必需屬於不同的集合。也就是說，一條邊的兩個端點，一個是黑點，另一個是白點。接下來要介紹的星狀圖就是一種二分圖。

(五) 星狀圖(Star graph)：

Aker、Harel、Krishnamurthy (1987) 定義了星狀圖。星狀圖是一種二分圖， n 維的星狀圖以 S_n 表示。星狀圖有 $n!$ 個節點，每個節點的分支度為 $n - 1$ ，邊數總共有 $\frac{n! \times (n-1)}{2}$ 條。以 4 維度星狀圖為例，總共有 24 個點，36 條邊。下圖 8 表示 2 維度星狀圖到 4 維度星狀圖的結構。表 2 說明維度增加時，點數和邊數的變化。

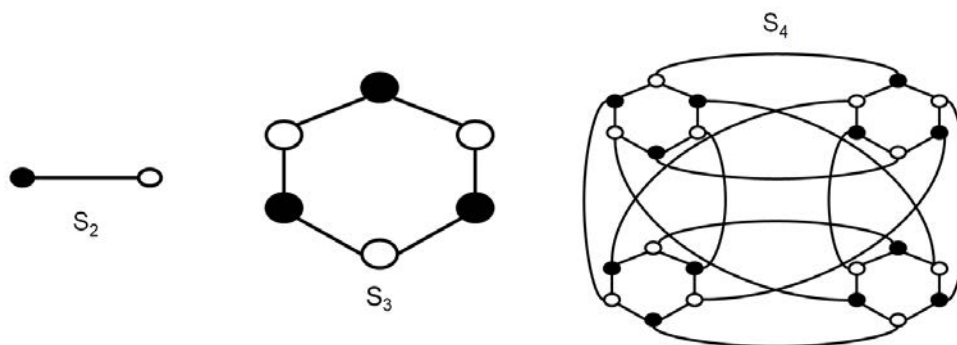


圖 8： S_2 、 S_3 、 S_4 星狀圖。

表 2：維度增加時，星狀圖總點數和總邊數。

維度	5	6	7	8	9	10	n
總點數	120	720	5040	40320	362880	3628800	$n!$
總邊數	240	1800	15120	141120	1451520	16329600	$\frac{n! \times (n - 1)}{2}$

在星狀圖中，節點的編號方式為 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 的排列，假設 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ 為某一個點的編號，定義函數 P_i 為點的連線規則：

$$P_i(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = (b_i, b_2, b_3, \dots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \dots, b_n), 2 \leq i \leq n$$

舉例來說，假設在一個 n 維度的星狀圖中，若有兩個點，點 A 和點 B 相鄰，則 $P_i(A) =$

B , $P_i(B) = A$ 。以 4 維度星狀圖來說明連線規則，假設點 A 的編號是 1234，點 B 的編號是 2134。當點 A 中的 b_1 和 b_2 交換時， $P_2(1234) = 2134$ ，可以得到點 B 的編號。同理，點 B 中的 b_1 和 b_2 交換時， $P_2(2134) = 1234$ ，也可以得到點 A 的編號，表示點 A 和點 B 相鄰。當點 A 的編號是 4321，點 B 的編號是 2341， b_1 和 b_3 交換時， $P_3(4321) = 2341$ ， $P_3(2341) = 4321$ 。圖 9 是各點加上編號的 4 維度星狀圖。

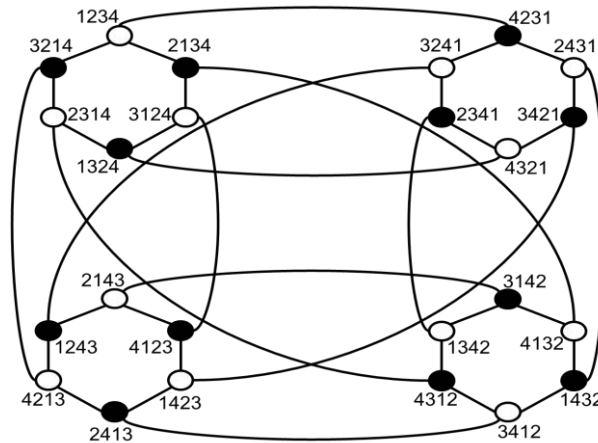


圖 9：各點加上編號的 4 維度星狀圖 S_4

在本作品說明星狀圖 S_n 相關性質的過程裡，因為 n 維度的星狀圖無法繪製。從表 2 中，可以知道 n 維度的星狀圖無法繪製，我們使用示意圖輔助說明證明過程。 n 維度的星狀圖 S_n 會被分成 n 個 $n - 1$ 維度的星狀圖。圖 10 說明 4 維度的星狀圖 S_4 從實例圖抽象化成示意圖的過程，一個 4 維度的 S_4 由四個 S_3 的子圖構成。因為星狀圖的子圖數量較多，和完全圖的示意圖不同處在於，在證明過程中，除了只會標示出證明中所需要的點和邊之外，也只標示出證明時比較關鍵的子圖來表示。示意圖的表示方式也符合星狀圖遞迴的性質。

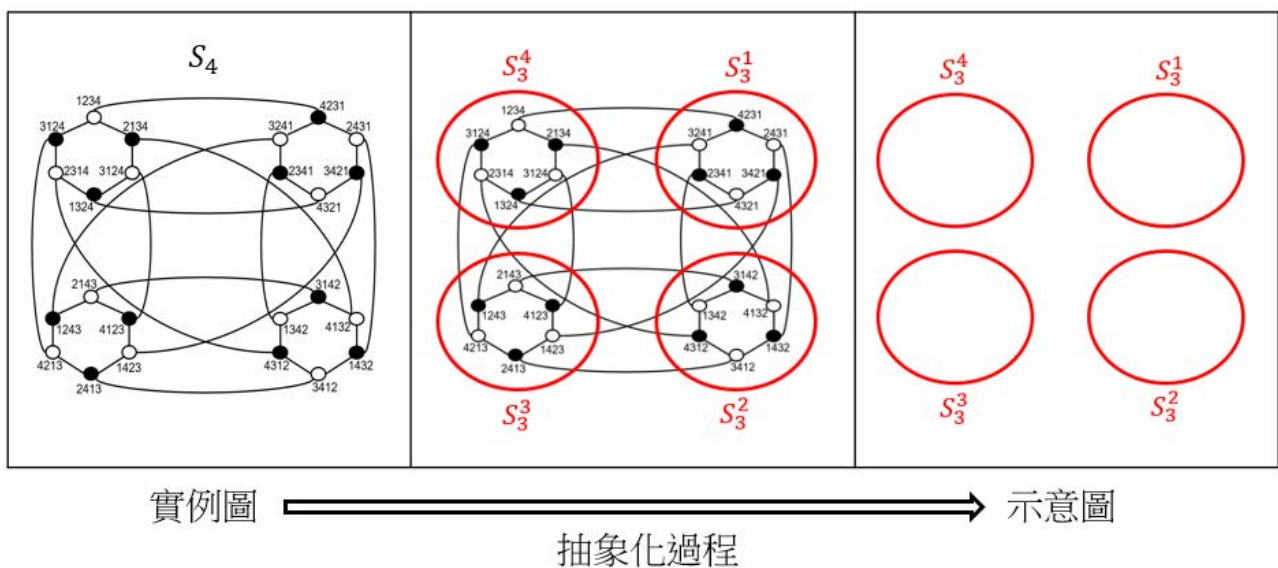


圖 10：以 S_4 為例，實例圖轉換抽象圖過程。

(六)點擴展運算 (node expansion operation) :

Hung、Hsu 與 Sung (2001) 定義了 t -點擴展 (t -node expansion) 運算。令 x 是圖 $G = (V, E)$ 上的一點， V 表示圖 G 的點集合， E 表示圖 G 的邊集合，分支度 $deg_G(x) = t$ 。我們使用 $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ 表示和 x 點相鄰的點集合。

對圖 G 做 t -點擴展運算，是指將圖中的一個點 x 替換成一個 t 維度完全圖， K_t 。圖 G 經過 t -點擴展運算後的圖，使用 $GX(G, K_t, x)$ 表示。令 K_t 的點集合 $V(K_t) = \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$ ，則 $GX(G, K_t, x)$ 的點集合表示如下：

$$V(GX(G, K_t, x)) = V(G) - \{x\} \cup \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$$

邊集合表示如下：

$$E(GX(G, K_t, x)) = E(G) \cup E(K_t) \cup \{(x_i, k_i) \mid 1 \leq i \leq t\} - \{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq t\}$$

圖 11 說明圖 G 做點擴展運算成 $GX(G, K_t, x)$ 。在圖 G 中，將分支度是 3 的點 x 替換成一個 3 維度完全圖 K_3 。 $GX(G, K_3, x)$ 的點集合和邊集合運算方式如下：

$$V(GX(G, K_3, x)) = V(G) - \{x\} \cup \{k_1, k_2, k_3\}$$

$$E(GX(G, K_3, x)) = E(G) \cup E(K_3) \cup \{(x_i, k_i) \mid 1 \leq i \leq 3\} - \{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq 3\}$$

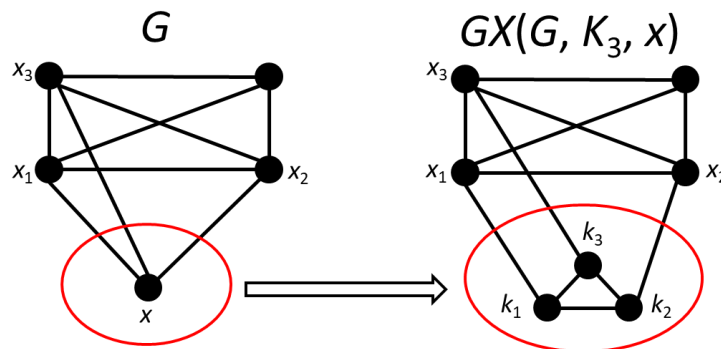


圖 11 : 對圖 G 做點擴展運算，將分支度是 3 的點 x 替換成 K_3

(五)容錯性質 (fault tolerance) :

當連結網路上的元件變多，連結網路結構逐漸變的複雜，元件或是元件之間的連線，出現故障的機會也會增加，如何保證在一定的故障數量範圍內，還能確保連結網路能正常使用，是容錯性質要討論的問題。

將連結網路抽象化成圖後，如果元件故障無法使用，在圖形中表示成壞點。元件之間的連線故障，在圖形中表示成壞邊。容錯性質通常討論三個情況，點容錯，邊容錯，以及點和邊混合容錯的情況。在本作品中，討論邊容錯，當壞邊的數量在容許的範圍內，還存在漢米爾頓迴圈性質。

(七)漢米爾頓相關性質：

1. 漢米爾頓路徑 (Hamiltonian path)：

圖中存在一個起點和一個終點，從起點出發，在經過圖中所有點一次後，到達終點，圖 12 表示從起點 s 和終點 t 之間的漢米爾頓路徑。

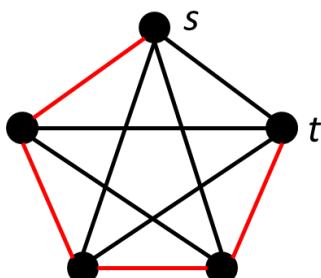


圖 12：點 s 和點 t 之間的漢米爾頓路徑。

2. 漢米爾頓迴圈 (Hamiltonian cycle)：

從圖中任一點出發，經過圖中所有的點，且所經過的點都不重覆。若圖中存在漢米爾頓迴圈，稱此圖是漢米爾頓圖，如圖 13 所示。若圖中存在漢米爾頓迴圈，則必定存在漢米爾頓路徑，而存在漢米爾頓路徑，則未必存在漢米爾頓迴圈。

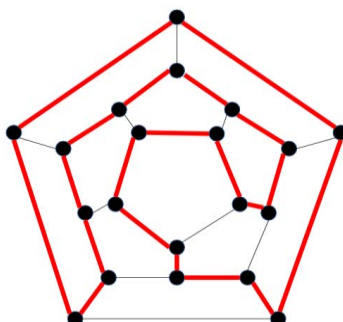


圖 13：圖中存在漢米爾頓迴圈，此圖為漢米爾頓圖。

3. 漢米爾頓連通 (Hamiltonian connected)：

在圖中給定任意二點，分別為起點和終點，皆可從起點和終點之間找到一條漢米爾頓路徑。圖 14 是使用 graphs 程式驗證在 K_5 中，給予任意起點和終點都可以找到的十條漢米爾頓路徑，說明在 K_5 中，具有漢米爾頓連通性質。

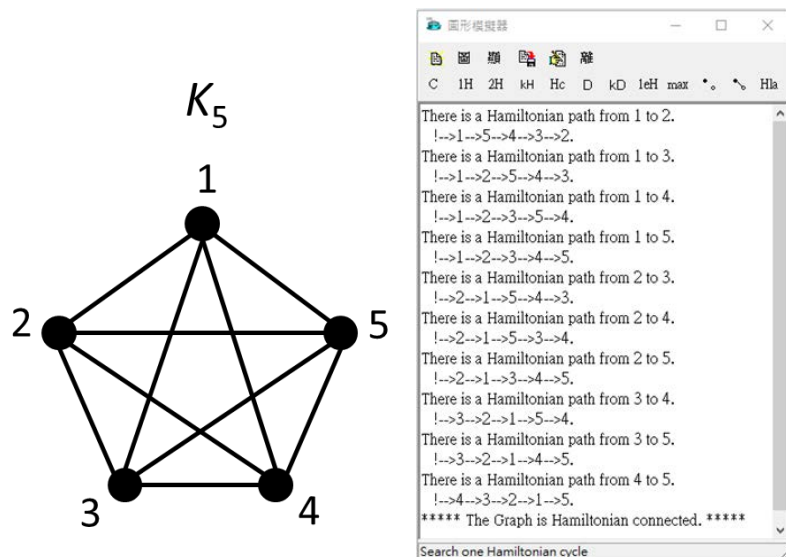


圖 14：使用 graphs 程式驗證 K_5 有漢米爾頓連通性質。

4. 漢米爾頓可蓄絲 (Hamiltonian Laceable)：

令 $G = (V_b \cup V_w, E)$ ，表示一個二分圖， V_b 與 V_w 分別是兩個不同的點集合。給予任意的起點 u ，且 $u \in V_b$ 。任意的終點 v ，且 $v \in V_w$ 。若點 u 到點 v 之間存在漢米爾頓路徑，表示此圖具有漢米爾頓可蓄絲性質，稱此圖是漢米爾頓可蓄絲圖。圖 15 是使用 graphs 程式驗證漢米爾頓可蓄絲性質。

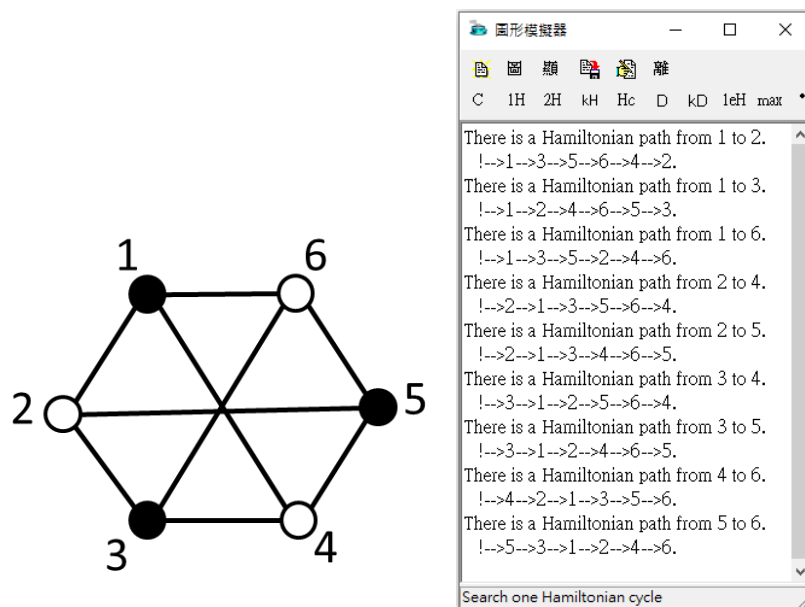


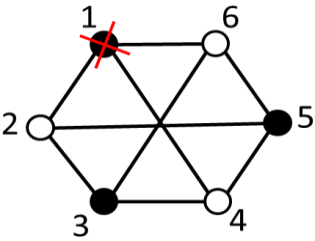
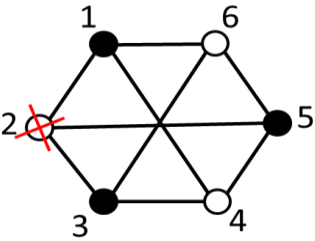
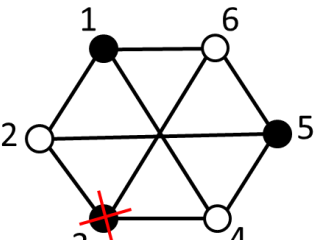
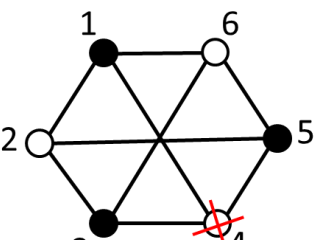
圖 15：使用 graphs 驗證漢米爾頓可蓄絲性質。

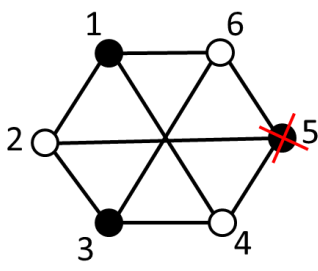
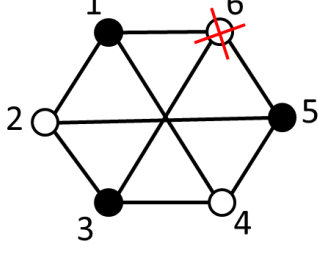
5. 超漢米爾頓可蓄絲 (Hyper Hamiltonian Laceable)：

Li、Tan 與 Hsu (2004)，定義了超漢米爾頓可蓄絲性質。在二分圖中，若壞掉一個點 $G - v (v \in V_i)$ 後，若在 $V_j (i \neq j \in \{b, w\})$ 中的任意兩點之間可以找到一條漢米爾頓

路徑，則表示此圖形具有超漢米爾頓可蓄絲性質，稱此圖是超漢米爾頓可蓄絲圖。表 3 是使用 graphs 程式驗證，在範例圖中，壞掉任意一個點後，在另一個沒有壞點的點集合裡，給予任意的一個起點和一個終點，都存在漢米爾頓路徑，說明此範例圖具有超漢米爾頓可蓄絲性質。

表 3：使用 graphs 程式驗證範例圖具有超漢米爾頓可蓄絲性質。

壞點位置	漢米爾頓路徑
 <p>點 1 是壞點(黑點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 2 to 6. !->2->3->4->5->6.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 2 to 4. !->2->3->6->5->4.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 4 to 6. !->4->3->2->5->6.</p> <p>起點和終點都是白點</p>
 <p>點 2 是壞點(白點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 1 to 3. !->1->6->5->4->3.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 1 to 5. !->1->4->3->6->5.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 3 to 5. !->3->4->1->6->5.</p> <p>起點和終點都是黑點</p>
 <p>點 3 是壞點(黑點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 2 to 4. !->2->1->6->5->4.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 2 to 6. !->2->1->4->5->6.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 4 to 6. !->4->1->2->5->6.</p> <p>起點和終點都是白點</p>
 <p>點 4 是壞點(白點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 1 to 3. !->1->2->5->6->3.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 1 to 5. !->1->2->3->6->5.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 3 to 5. !->3->2->1->6->5.</p> <p>起點和終點都是黑點</p>

 <p>點 5 是壞點(黑點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 2 to 6. !->2->3->4->1->6.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 2 to 4. !->2->3->6->1->4.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 4 to 6. !->4->3->2->1->6.</p> <p>起點和終點都是白點</p>
 <p>點 6 是壞點(白點)</p>	<p>There is a Hamiltonian path from 1 to 3. !->1->2->5->4->3.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 1 to 5. !->1->2->3->4->5.</p> <p>There is a Hamiltonian path from 3 to 5. !->3->4->1->2->5.</p> <p>起點和終點都是黑點</p>

四、文獻回顧：

Hung 等人 (2001)，定義了點擴展運算。Hung、Chang 與 Shi (2007) 研究使用點擴展運算後的圖形，容錯數量上的問題。本作品則是應用點擴展運算的定義，將星狀圖和完全圖做結合。Hung 等人也證明了維度 n 的完全圖，當 $n \geq 2$ ，且壞點和壞邊的數量加起來，不超過 $n - 2$ 時，有漢米爾頓路徑。本作品引用這個證明，幫助證明本作品所提出的相關引理。

Aker 等人 (1987)，定義了星狀圖結構。Hsieh、Chen 與 Ho (2000)，提出了星狀圖漢米爾頓可蓄絲性質。星狀圖中，不同點集合的任意兩點之間，存在漢米爾頓路徑。Li、Tan 與 Hsu (2004) 提出了星狀圖超漢米爾頓可蓄絲性質，在一個星狀圖中，壞掉一個點後，不同點集合的任意兩點之間，存在漢米爾頓路徑。Li 等人也證明了， n 維度的星狀圖，當 $n \geq 4$ 時，是 $(n - 4)$ -邊容錯超漢米爾頓可蓄絲圖。也就是說，當壞邊數量不超過 $n - 4$ 時，存在超漢米爾頓可蓄絲性質。

貳、研究設備及器材

本作品所需要使用的的研究設備及器材，有下列幾項：

- 1、電腦：整理相關資料文獻，撰寫作品內容，繪製本作品中的範例圖和示意圖。
- 2、graphs 程式：使用 graphs 程式幫助驗證，範例圖是否具有我們需要的性質，以及驗證證明所需要的條件是否正確。圖 16 和圖 17，說明 graphs 程式。

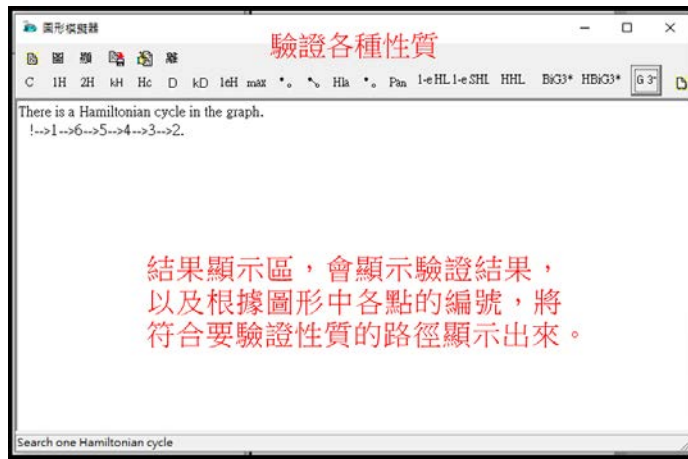


圖 16：graphs 程式畫面

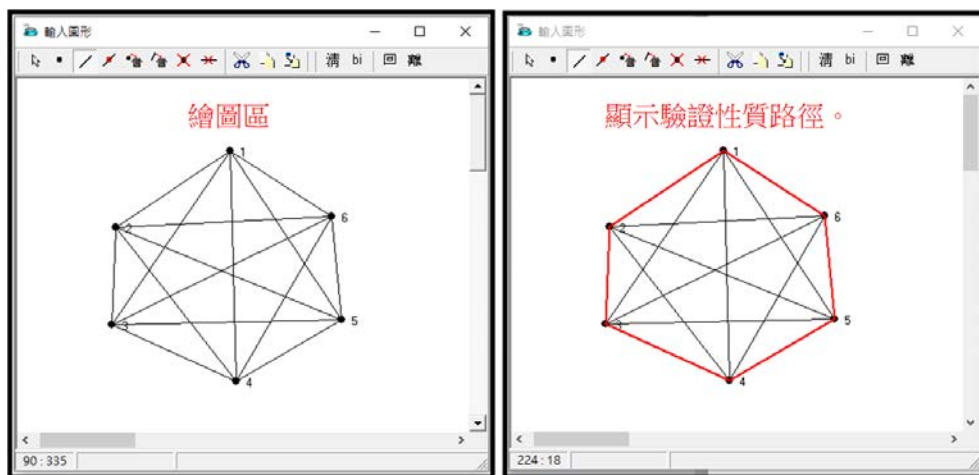


圖 17：graphs 程式繪圖區(左)。驗證性質後，會在繪圖區顯示路徑(右)

參、研究過程或方法

在這一章中，首先會說明本作品的研究方法，接下來說明研究架構，再來說明需要證明的引理和定理。最後，在研究過程中，說明證明引理和定理的證明過程。

一、研究方法：

本作品主要是研究星狀網路使用點擴展運算結合異質網路後，具有漢米爾頓容錯性質，容錯性質是討論壞邊個數，異質網路使用完全網路。我們使用圖論的方式，將星狀網路抽象化成星狀圖，完全網路抽象化成完全圖。將網路中的元件抽象化為圖中的點，元件之間的連線抽象化為圖中的邊。

在圖形維度較小時，結構並不複雜，所以我們可以直接使用手繪或是程式驗證的方式找出是否存在所需要的性質。而當圖形維度逐漸增大時，點和邊的個數也逐漸增加，點與點之

間的連線也逐漸複雜。以星狀圖為例，8 維度的星狀圖 S_8 ，點數有 40320 個點，邊數有 141120 條邊，使用手繪或是程式驗證的方法較為困難。

我們所使用的方法是直接證法和數學歸納法，因為星狀圖和完全圖都是具有遞迴性質的結構，而具有遞迴性質結構的圖，很適合使用數學歸納法來證明。使用數學歸納法時，先猜測某個性質是對的，然後再開始驗證。要將數學歸納法使用的有效果，必須先找到適當的證明條件，也就是要先將需要證明的內容定義清楚。

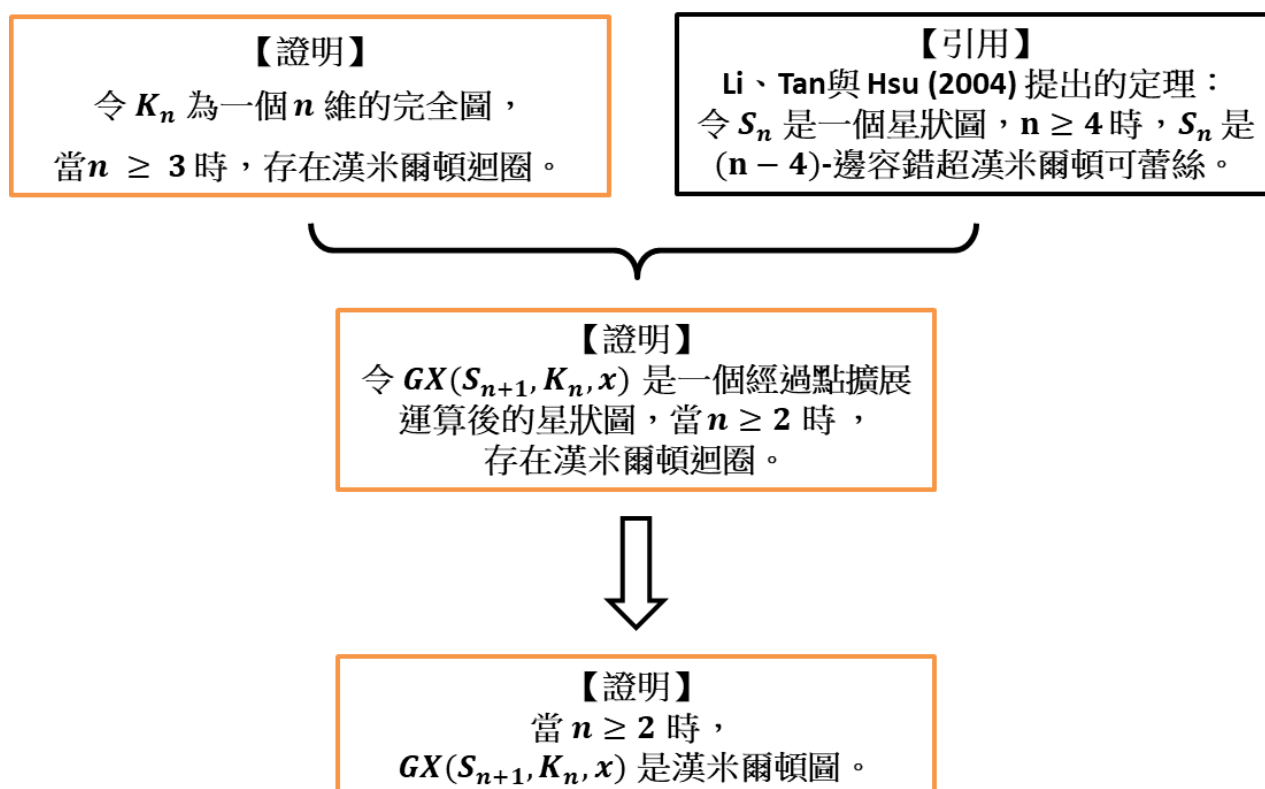
數學歸納法需要包含三個步驟，第一個步驟是歸納基底，接下來是歸納假設，最後是歸納步驟。使用數學歸納法的第一步必須要證明歸納基底是否正確。歸納基底通常都是維度比較小的圖，結構並不複雜，我們可以直接使用手繪的方式知道歸納基底是否正確。舉例來說，我們證明的引理三，歸納基底是一個 5 維度的完全圖，總共只有 5 個點和 10 條邊，且壞邊數量為 1，可以直接使用手繪的方式來證明性質存在。另外，我們也使用 graphs 程式，幫助我們驗證歸納基底的正確性。

在數學歸納法最後一步，歸納步驟，我們將對 n 維度進行歸納證明。我們使用圖形的定義，以及相關定理，幫助我們證明所需要的性質。

二、研究架構：

本作品中的主要證明架構如下：

(一) 星狀圖使用點擴展運算後，漢米爾頓性質：

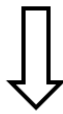


(二) 星狀圖使用點擴展運算後，漢米爾頓容錯性質：

【引用】
 Hung、Hsu 與 Sung，(2001) 提出的引理：
 若 $F \subset E(K_n)$ 且 $|F| \leq n - 2$ ，
 則 $K_n - F$ 有一條漢米爾頓路徑。

【證明】
 令 K_n 是一個 n 維度的完全圖，
 F_e 表示壞邊集合。
 當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，
 $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

【證明】
 令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖，
 F_e 表示壞邊的集合。當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，
 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。



【證明】
 當 $n \geq 5$ ，且 $|F_e| \leq n - 4$ 時，
 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。

三、研究過程：

在研究過程中，會使用示意圖輔助說明，相關引理和定理的證明過程。本作品在示意圖中，使用實線表示邊，虛線表示兩點之間的路徑。另外，因為證明過程中所需要使用到的符號較多，所以先說明會使用到的符號定義。下列表 4 是我們對符號定義的說明：

表 4：證明過程中所使用的符號定義。

符號	定義
$G = (V, E)$	表示一個圖 G ， V 表示圖 G 的點集合， E 表示圖 G 的邊集合。
$E(G)$	圖 G 的邊集合
$V(G)$	圖 G 的點集合
$\deg(v)$	圖 G 中，點 v 的分支度(degree)。
K_n	n 維度的完全圖(complete graph)
S_n	n 維度的星狀圖(star graph)
$GX(S_{n+1}, K_n, x)$	星狀圖 S_{n+1} 使用完全圖 K_n 對點 x 做點擴展後的圖。
F_e	壞邊的集合。
$ F_e $	壞邊的個數。
(u, v)	表示一條邊，點 u 和點 v 相鄰。
$Path(u, v)$	表示點 u 和點 v 之間有一條路徑。

(一) 星狀圖使用點擴展運算後，漢米爾頓性質：

1. 引理一：令 K_n 為一個 n 維的完全圖，當 $n \geq 3$ 時，存在漢米爾頓迴圈。

證明：

我們使用數學歸納法對維度 n 進行歸納證明。當 $n = 3$ 時，從 K_3 的圖形結構中，我們很容易可以看出來 K_3 具有漢米爾頓迴圈性質。如圖 18 所示。

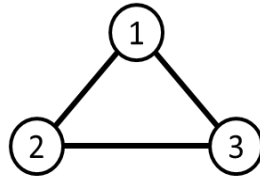


圖 18： K_3 具有漢米爾頓迴圈

假設維度 $n-1$ 時成立，證明維度為 n 時成立。令點 u 為新增加的點，根據完全圖的定義， $K_{n-1} \cup \{u\}$ 同構 K_n ，點 u 和 K_{n-1} 中的其他各點相鄰。根據歸納假設，在 K_{n-1} 中存在一條漢米爾頓迴圈，在此迴圈中找出相鄰的兩點，點 x 和點 y ，邊為 (x, y) 。點 u 分別跟點 x 點和點 y 相鄰，分別是邊 (u, x) 和邊 (u, y) 。使用邊 (u, x) 和邊 (u, y) 替換邊 (x, y) 。

因此，在 K_n 中存在一條漢米爾頓迴圈 $\langle u \rightarrow (u, x) \rightarrow Path(x, y) \rightarrow (y, u) \rightarrow u \rangle$ 。

圖 19 說明此種情況。 ■

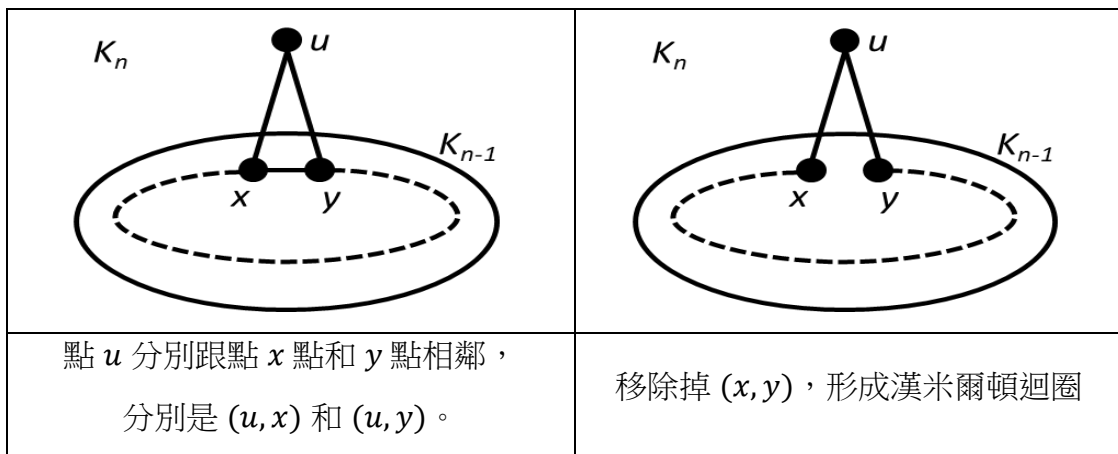


圖 19：完全圖無壞邊時具有漢米爾頓迴圈示意圖。(實線表示邊，虛線表示路徑)

2. (Li、Tan 與 Hsu，2004) 定理一：令 S_n 是一個星狀圖， $n \geq 4$ 時， S_n 是 $(n-4)$ -邊容錯超漢米爾頓可蕾絲。

說明：

S_n 是一個二分圖，分成黑點集合和白點集合。 F_e 表示壞邊集合。假設 S_n 黑點集合中的一個點壞掉，當 $n \geq 4$ 且 $|F_e| \leq n-4$ 時，在白點集合中任意取兩個白點，這兩個白點之間存在漢米爾頓路徑。

3. 引理二：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖，當 $n \geq 2$ 時，存在漢米爾頓迴圈。

證明：

使用數學歸納法對維度 n 進行歸納證明。當 $n = 1$ 時， S_2 是一條邊與兩個點的集合， K_1 是一個點， $GX(S_2, K_1, x)$ 不存在漢米爾頓迴圈。當 $n = 2$ 時，在 S_3 的圖形結構中，任意一個點 x ，被點擴展替換成 K_2 後， $GX(S_3, K_2, x)$ 具有漢米爾頓迴圈性質，如圖 20 所示。討論當 $n \geq 3$ 時的情況。

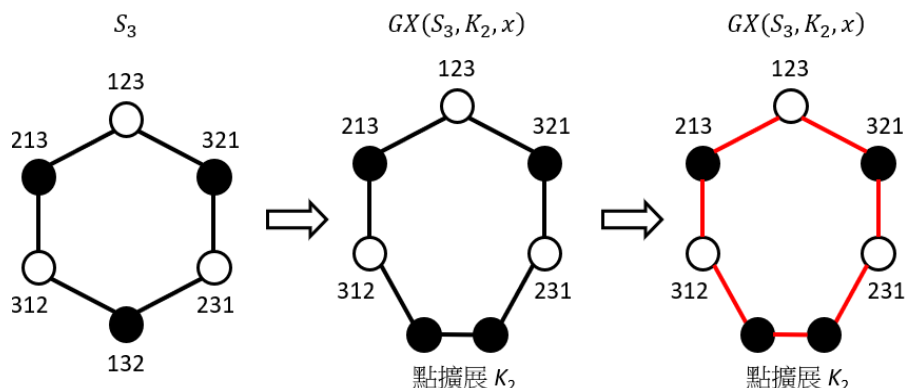


圖 20：紅色表示 $GX(S_3, K_2, x)$ 有漢米爾頓迴圈。

令 K_n^x 是使用點擴展運算後，取代點 x 的完全圖。根據引理一， n 維度的完全圖，當 $n \geq 3$ 時，存在漢米爾頓迴圈。因此， K_n^x 存在一條漢米爾頓迴圈。接著，在漢米爾頓迴圈中取相鄰兩點，分別是點 s 和點 t 。根據點擴展定義，點 s 和點 t 分別會有相鄰點在 $V(GX(S_{n+1}, K_n, x)) - V(K_n^x)$ 中，假設點 u 和點 s 相鄰，點 v 和點 t 相鄰。根據定理一，星狀圖具有超漢米爾頓可蓄絲性質，當有一個壞點時，可以從另一個沒有壞點的點集中，任取兩點，皆存在漢米爾頓路徑。所以，先假設 K_n^x 是壞點，點 u 和點 v 之間存在漢米爾頓路徑。(如圖 21 所示)

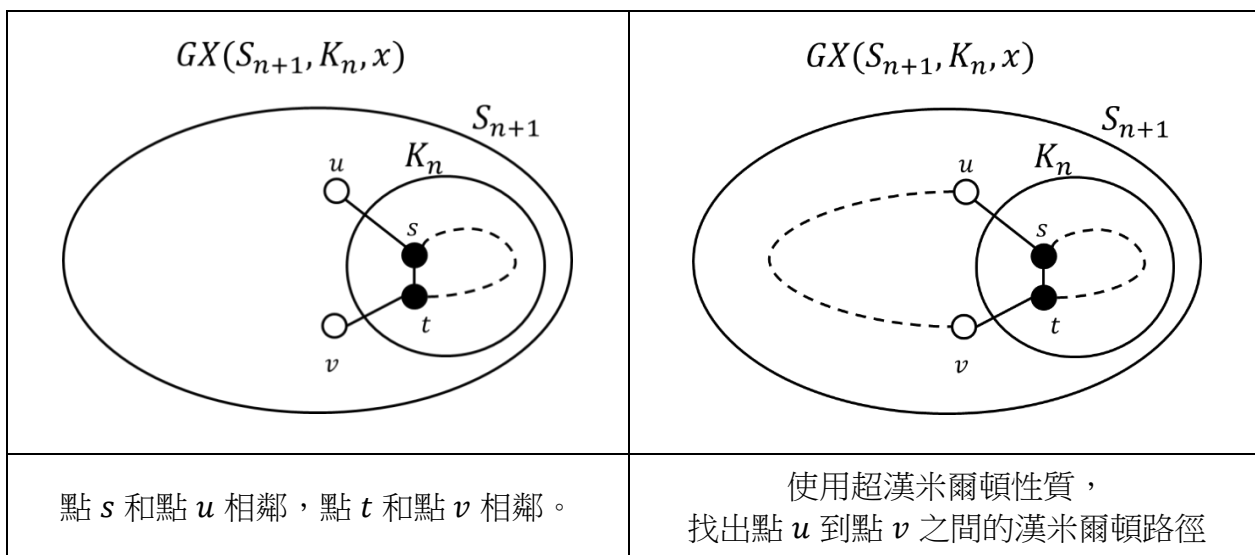


圖 21：證明 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 漢米爾頓迴圈過程。(實線表示邊，虛線表示路徑)

最後將 $(s, u), (t, v)$ 替換 (s, t) ，得到 $\langle s \rightarrow Path(s, t) \rightarrow t \rightarrow (t, v) \rightarrow v \rightarrow Path(v, u) \rightarrow u \rightarrow (u, s) \rightarrow s \rangle$ 漢米爾頓迴圈。(如圖 22 所示) ■

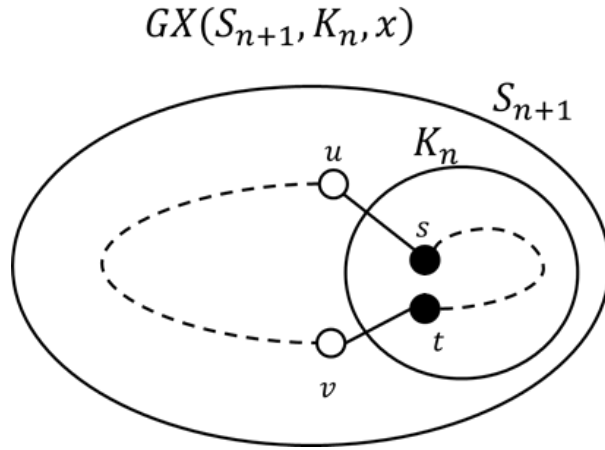


圖 22： $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 存在漢米爾頓迴圈。(實線表示邊，虛線表示路徑)

4. 定理二：當 $n \geq 3$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是漢米爾頓圖。

證明：

由引理二的證明結果可以知道，當 $n \geq 3$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 存在漢米爾頓迴圈。

當圖中存在漢米爾頓迴圈性質時，是一個漢米爾頓圖。因此， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個漢米爾頓圖。 ■

(二) 星狀圖使用點擴展運算後，漢米爾頓容錯性質：

接著證明星狀圖經過點擴展運算後，壞邊數量在容許範圍內，存在漢米爾頓迴圈性質。為了後續證明需要，我們引用了以下引理。

1. (Hung、Hsu 與 Sung, 2001) 引理三：若 $F \subset E(K_n)$ 且 $|F| \leq 2$ ，則 $K_n - F$ 有一條漢米爾頓路徑。

接下來，同樣為了後續證明所需，我們需要先證明完全圖 K_n 具有 k -邊容錯漢米爾頓連通性質。證明過程中，我們發現當 $n \geq 3$ 且 $|F_e| = n - 3$ 時， K_n 不存在漢米爾頓連通。以下使用 K_6 壞三條邊時，當反例說明：

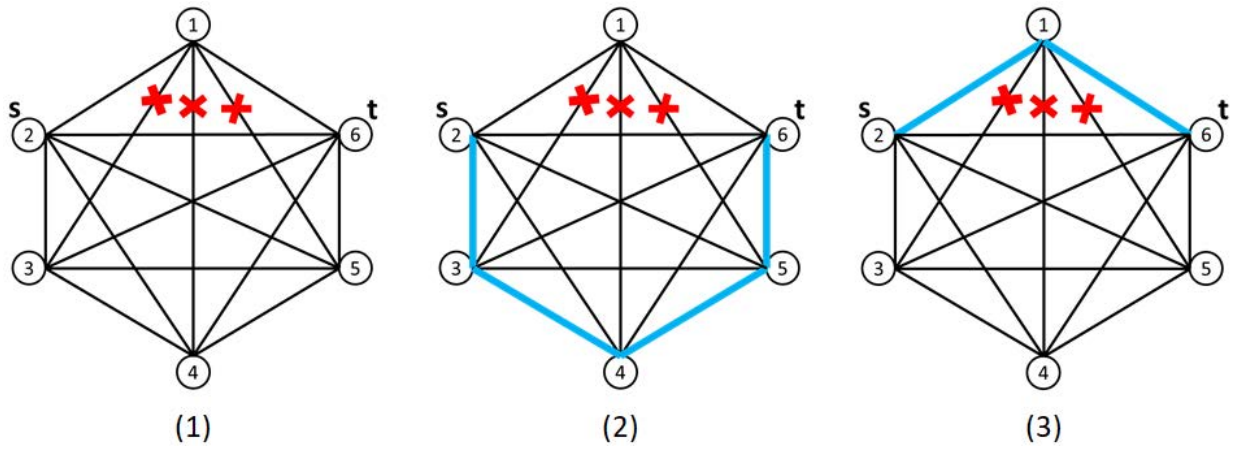


圖 23：(1) 為 K_6 壞 3 條邊的情況，(2) 和 (3) 表示無法找到漢米爾頓連通的原因。

圖 23 中，令點 2 為起點 s ，點 6 為終點 t ， $(1, 3), (1, 4), (1, 5)$ 為壞邊，當壞邊全部都集中在點 1 時，點 2 和點 6 之間是無法存在漢米爾頓路徑。從上述的例子發現，因為完全圖中的每個點都相鄰，在 $|F_e| \leq n - 3$ ，且 $n \geq 3$ 時，可以先從中挑出一個點 u 。當壞邊全部都集中在點 u 時，扣除掉壞邊後，與點 u 連接的邊有 $n - 1 - (n - 3) = 2$ ，表示點 u 只保有兩條好邊，而其他的三條邊都是壞邊。此時，如果起點 s 和終點 t 分別和點 u 的相鄰，且兩條邊都是好邊，則無法連出漢米爾頓路徑。因此我們證明當 $n \geq 4$ 且 $|F_e| = n - 4$ 時的情況。

2. 引理四：令 K_n 是一個 n 維度的完全圖， F_e 表示壞邊集合。當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

證明：

使用數學歸納法對維度 n 進行歸納證明。當 $n = 4$ 時， $|F_e| = 0$ ，引理四成立，存在漢米爾頓連通。因此我們證明，當 $|F_e| \geq 1$ 時， $n \geq |F_e| + 4$ ， $n \geq 5$ 的情況。

假設點 s 和點 t 是在 K_n 上的任意兩個點。令 H 表示 K_n 的子圖，子圖 H 的點是 K_n 中的所有點，邊是由所有 F_e 構成，子圖 H 中 $V(H) \subset V(K_n)$ ， $E(H) \subset F_e$ ，表示成 $H = (V, F_e)$ 。假設一個點集合 U ，使得 $U = \{u | u \in V \text{ 且 } (u) \geq 1\}$ 。從點集合 U 中，選出一個分支度最小的點，設為點 u 。圖 24 以 K_5 舉例說明子圖 H 。

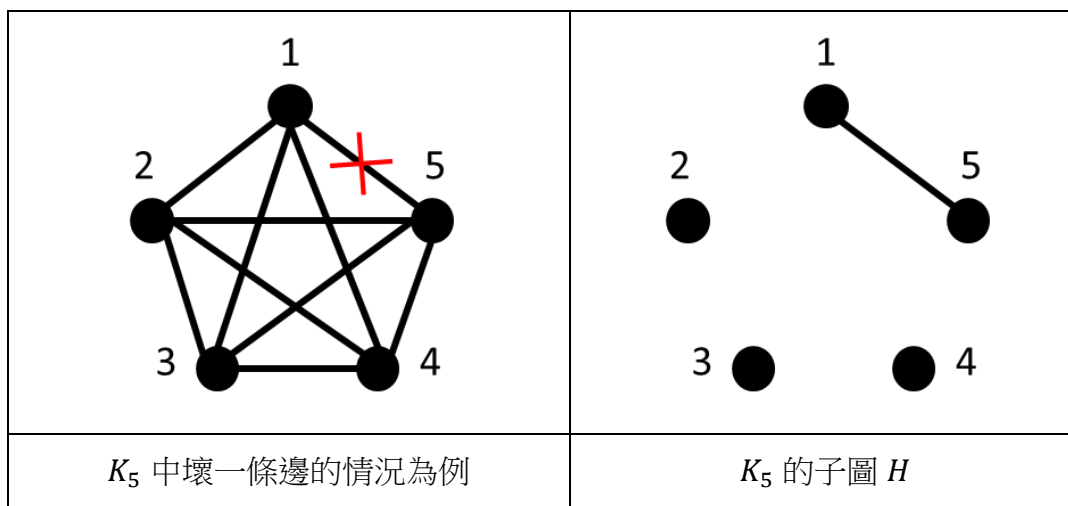


圖 24：以 K_5 舉例說明子圖 H 。

接下來考慮以下兩種情況，證明任意兩個點，點 s 和點 t 之間存在漢米爾頓路徑：

情況 1： $u \notin \{s, t\}$

換句話說，點 v 不是點 s ，也不是點 t 。考慮下列兩個子情況，證明情況 1。

情況 1.1： $deg_H(u) = 1$

表示只有一條壞邊連接到點 u 。令 F^* 是移除掉連接點 u 壞邊的壞邊集合。因此 $K_n - \{u\} - F^*$ 同構 $K_{n-1} - F^*$ ， $|F^*| = |F_e| - 1$ 。根據歸納假設，在 $K_n - \{u\} - F^*$ 中，根據引理三，可以連接成一條漢米爾頓路徑。當 $n \geq 5$ 時，在這條路徑上存在一條邊 (x, y) ，使得 (u, x) 和 (u, y) 不屬於壞邊 F_e 。接著，將 (x, u) 和 (u, y) 加入到路徑中，替換 (x, y) 。獲得 $\langle s \rightarrow Path(s, x) \rightarrow x \rightarrow (x, u) \rightarrow u \rightarrow (u, y) \rightarrow y \rightarrow Path(y, t) \rightarrow t \rangle$ 漢米爾頓路徑。因此， $K_n - F_e$ 是漢米爾頓連通，如圖 25 所示。 ■

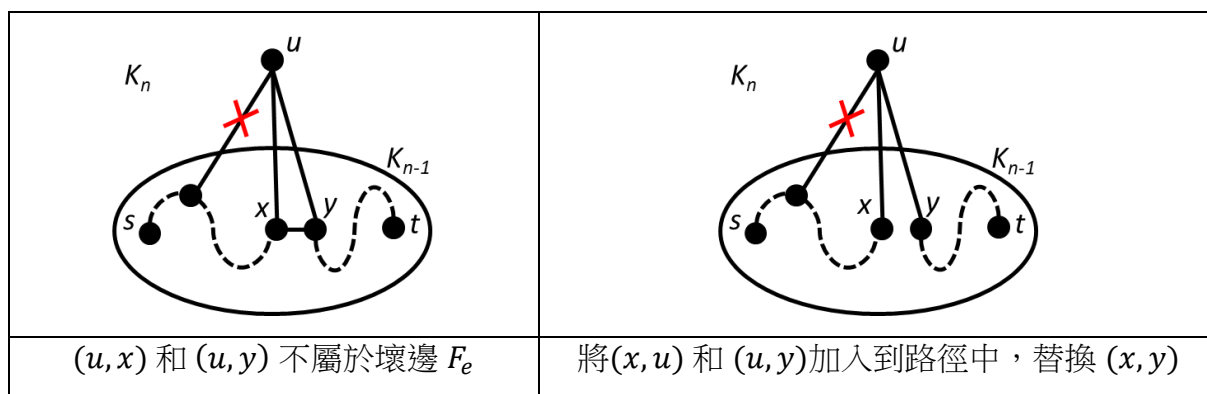


圖 25：情況 1.1 證明過程。(實線表示邊，虛線表示路徑)

情況 1.2： $deg_H(u) \geq 2$

換句話說，當 $deg_H(u) \geq 2$ 時，子圖 H 為一個完全圖，子圖 H 的邊是由 K_n 中的壞邊構成，圖 26 舉例說明此種情況。

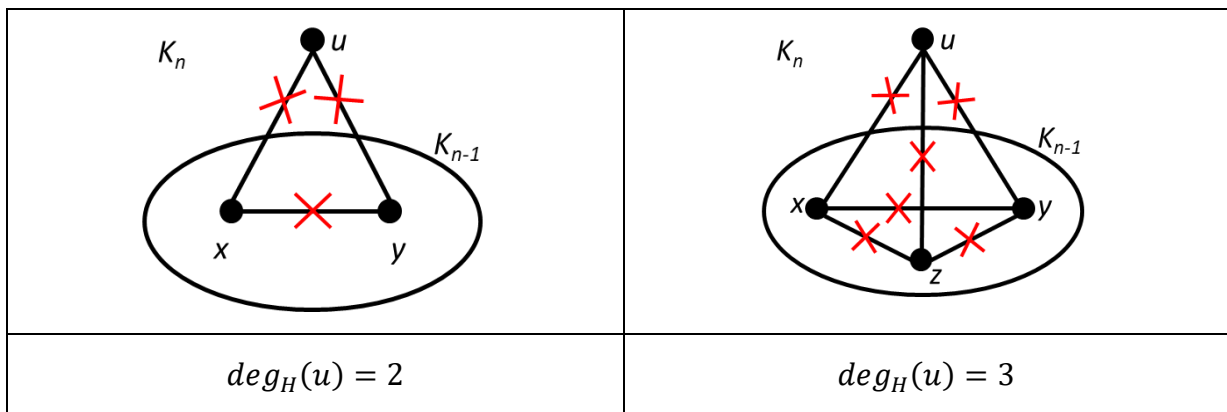


圖 26： $deg_H(u) = 2$ 和 $deg_H(u) = 3$ 的示意圖。

因為所挑選的點 u 是在點集合 U 中，最小分支度的點，且 $deg_H(v) \geq 2$ ， $|F_e| \leq n - 4$ 。因此 $|F_e| \geq 3$ ， $n \geq |F_e| + 4 \geq 7$ ，當完全圖的維度 $n \geq 7$ 時開始會有此種情況需要考慮。令 F^* 是不包含點 u 壞邊的壞邊集合，完全圖 $K_n - \{u\} - F^*$ 同構 $K_{n-1} - F^*$ 。 $deg_H(u) \geq 2$ ， $|F_e^*| \geq |F_e| - 2$ 。根據歸納假設，在 $K_n - \{u\} - F^*$ 中，根據引理三，點 s 和點 t 之間存在一條漢米爾頓路徑，且路徑中的邊數是 $n - 2$ 。舉例來說，當維度 $n = 7$ 時，路徑上的邊數是 5。

因為點 u 是集合 U 中，最小分支度的點， $|F_e| \geq \frac{(deg_H(v) \times (deg_H(v) + 1))}{2}$ 。因此， $n - 2 \geq |F_e| + 4 - 2 \geq |F_e| + 2 \geq \frac{(deg_H(v) \times (deg_H(v) + 1))}{2} + 2 > 2deg_H(v)$ 。表示在 $K_n - \{u\} - F^*$ 的漢米爾頓路徑中，存在一條邊 (x, y) ，使得 (u, x) 和 (u, y) 可以替換邊 (x, y) ，將 (u, x) 和 (u, y) 加入到 $K_n - \{u\} - F^*$ 的漢米爾頓路徑中。得到 $\langle s \rightarrow Path(s, x) \rightarrow x \rightarrow (x, u) \rightarrow u \rightarrow (u, y) \rightarrow y \rightarrow Path(y, t) \rightarrow t \rangle$ 漢米爾頓路徑。因此， $K_n - F_e$ 是漢米爾頓連通，如圖 27 所示。

■

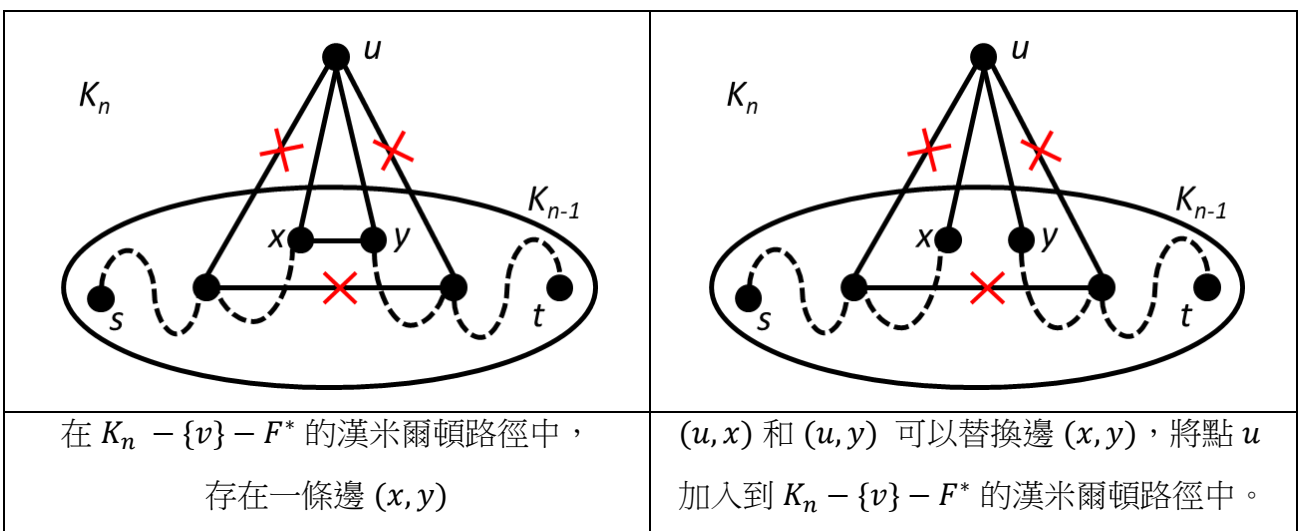


圖 27：情況 1.2 時，漢米爾頓連通示意圖。(實線表示邊，虛線表示路徑)

情況 2 : $u \in \{s, t\}$ 且 $deg_H(u) \geq 1$

令點 s 和點 t 表示在 K_n 中的任意兩個點。不失一般性，可以假設 $u = s$ 。令 F^* 是不包含點 v 壞邊的壞邊集合， $F^* \subset F_e$ ，完全圖 $K_n - \{u\} - F^*$ 同構 $K_{n-1} - F^*$ 。 $deg_H(u) \geq 1$ ， $|F_e^*| \geq |F_e| - 1$ 。根據歸納假設，在 $K_n - \{v\} - F^*$ 中存在一條漢米爾頓路徑。因為點 u 是集合 U 中，最小分支度的點，所以 $|F_e| > (u)$ 。因為 $|F_e| \leq n - 4$ ，所以 $(n - 1) - |F_e| \geq (n - 1) - (n - 4) \geq 3$ 。根據前述的條件 $|F_e| > (u)$ ，可以知道 $(n - 1) - |F_e| < (n - 1) - (u)$ ，使得 $(n - 1) - (u) > 3$ ，表示至少存在一個點 x ，使得 $x \neq u$ 且 $(u, x) \notin F_e$ 。在 $K_n - \{u\} - F$ 中，可以找出點 x 到點 t 之間的漢米爾頓路徑。將 (s, x) 加入漢米爾頓路徑中，得到 $\langle s \rightarrow (s, x) \rightarrow x \rightarrow Path(x, t) \rightarrow t \rangle$ 漢米爾頓路徑(如圖 28 所示)。因此， $K_n - F_e$ 是漢米爾頓連通。 ■

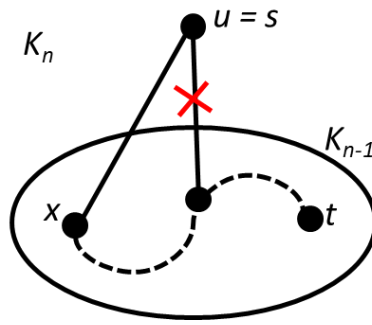


圖 28 : $(u, x) \notin F_e$ ，連接成 $\langle s \rightarrow (s, x) \rightarrow x \rightarrow Path(x, t) \rightarrow t \rangle$ 的漢米爾頓路徑。

(實線表示邊，虛線表示路徑)

2. 引理五：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖， F_e 表示壞邊的集合。當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。

證明：

S_n 是一個二分圖，為了方便說明，使用黑色和白色表示兩個不同的點集合，分別為黑點集合和白點集合。不失一般性，對 S_{n+1} 黑點集合內的任意一個點 x 做點擴展運算，令 K_n^x 是一個取代點 x 的 n 維度完全圖，經過點擴展後的 S_{n+1} 使用 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 表示。

根據點擴展運算的定義， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 的邊集合為

$$E(GX(S_{n+1}, K_n, x)) = E(S_{n+1}) \cup E(K_n^x) \cup \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\} - \{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

說明如下：

- (1). $E(S_{n+1})$: S_{n+1} 的邊集合。
- (2). $E(K_n^x)$: 經過點擴展運算 K_n^x 取代點 x 後， K_n^x 的邊集合。

(3). k_i^x : K_n^x 裡的點， $1 \leq i \leq n$ 。

(4). $\{(x_i, k_i^x \mid 1 \leq i \leq n)\}$: K_n^x 裡的每個點，連接到原本點 x 所對應到的點，所形成的邊，如圖 29 所示。

(5). $\{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$: 與點 x 相鄰的點，如圖 30 所示。

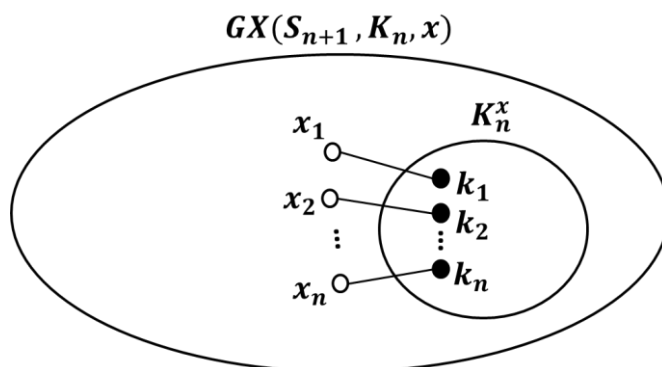


圖 29: 邊集合 $\{(x_i, k_i^x \mid 1 \leq i \leq n)\}$ 示意圖。

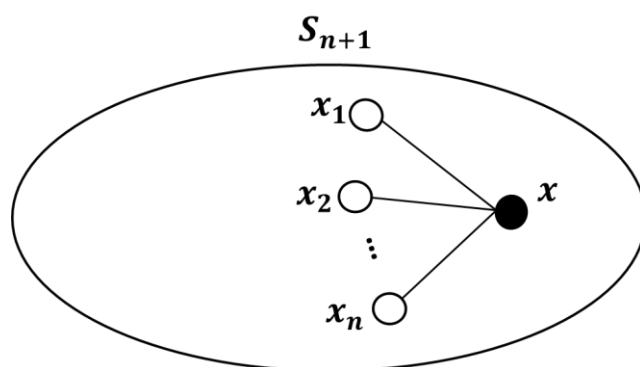


圖 30: 邊集合 $\{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ 示意圖。

根據壞邊分佈的情形，分別考慮以下四種情況，證明當壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，

$GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈：

情況 1 : $|F_e \cap E(K_n^x)| = n - 4$

換句話說，壞邊全部集中在 K_n^x 中，如圖 31 所示。根據引理四，完全圖邊容錯漢米爾頓連通性質，任意兩個點 $s, t \in V(K_n^x)$ 之間，存在一條漢米爾頓連通。點擴展運算後，在 K_n^x 中的 n 個點，會有 n 條對應的邊連到 S_{n+1} 中對應的點。

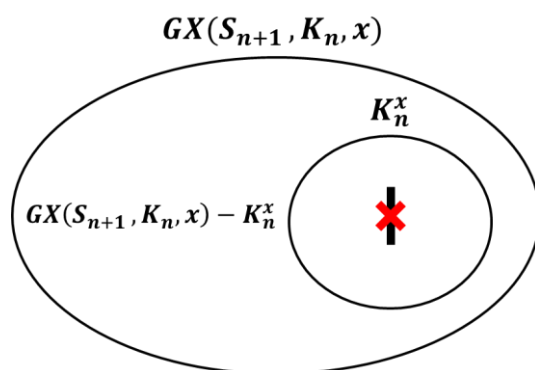


圖 31：情況 1 壞邊分佈情況。

因為所有的壞邊都集中在 K_n^x 中，因此這 n 條邊都不屬於壞邊，所以可以分別找到和點 s 相鄰的點 y ，以及和點 t 相鄰的點 z ，使得 $(s, z), (t, y) \notin F_e$ 。接著據定理一，星狀圖超漢米爾頓可蓄絲性質，假設 K_n^x 為壞點，使得點 y 和點 z 之間存在一條漢米爾頓路徑。因此， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條 $\langle s \rightarrow Path(s, t) \rightarrow t \rightarrow (t, z) \rightarrow z \rightarrow Path(z, y) \rightarrow y \rightarrow (y, s) \rightarrow s \rangle$ 漢米爾頓迴圈，如圖 32 所示。 ■

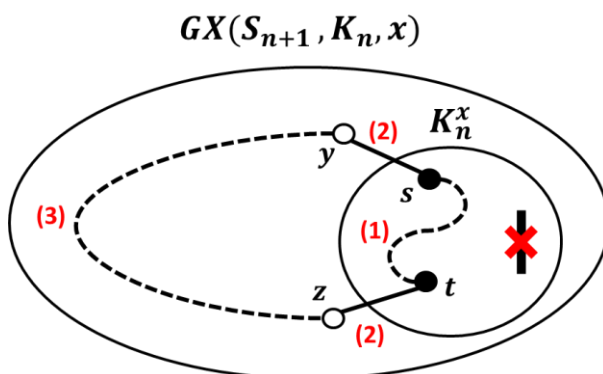


圖 32：情況 1， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條漢米爾頓迴圈。

(實線表示邊，虛線表示路徑)

情況 2： $|F_e \cap \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n - 4$

換句話說，壞邊全部集中在 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - K_n$ 和 K_n^x 之間，如圖 33 所示。因為點擴展運算後，在 K_n^x 中的 n 個點，有 n 條邊連到 S_{n+1} 中對應的點，且 $|F_e| \leq n - 4$ ，所以可以推導出 $n - (n - 4) = 4$ ，表示至少有三條邊不屬於 F_e 。因此，可以從 K_n^x 中，找到兩個點 $s, t \in V(K_n^x)$ 。在 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - K_n$ 中，找到分別對應的相鄰點，點 y 和點 z ，使得 $(s, y), (t, z) \notin F_e$ 。根據引理四，完全圖邊容錯漢米爾頓連通性質，任意兩個點 $s, t \in V(K_n^x)$ 之間，存在一條漢米爾頓路徑。

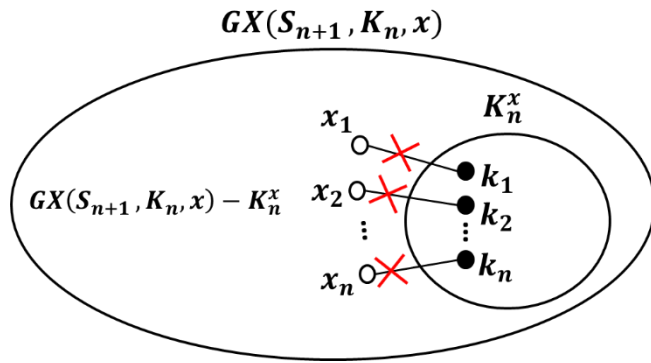


圖 33：情況 2 壞邊分佈情況。

接著根據定理一，星狀圖超漢米爾頓可蓄絲性質，假設 K_n^x 為壞點，使得點 z 和點 y 之間存在一條漢米爾頓路徑。因此， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條 $\langle s \rightarrow Path(s, t) \rightarrow t \rightarrow (t, z) \rightarrow z \rightarrow Path(z, y) \rightarrow y \rightarrow (y, s) \rightarrow s \rangle$ 的漢米爾頓迴圈。(如圖 34 所示) ■

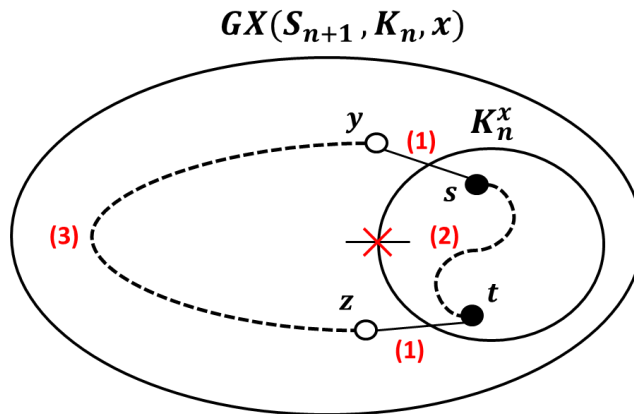


圖 34：情況 2， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條漢米爾頓迴圈。

(實線表示邊，虛線表示路徑)

情況 3： $|F_e \cap (E(GX(S_{n+1}, K_n, x)) - E(K_n^x) - \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\})| = n - 4$

換句話說，壞邊全部集中在 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - K_n^x$ ，並且在 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - K_n^x$ 中，與 $V(K_n^x)$ 相鄰的點總共有 n 個點，且這 n 條邊都不是壞邊，如圖 35 所示。

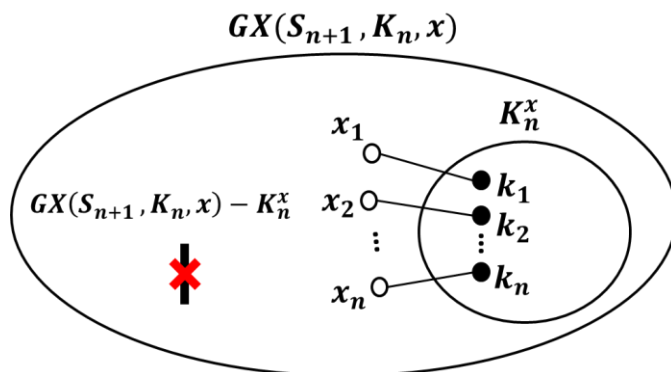


圖 35：情況 3 壞邊分佈情況。

我們從這 n 個點中任取兩點，分別設為點 y 和點 z 。接著，假設 K_n^x 是一個壞點，根據定理一，星狀圖超漢米爾頓可蓄絲性質，壞一個點後，和壞點不同點集中的任意兩點間，存在漢米爾頓路徑。因此，點 y 和點 z 之間存在一條漢米爾頓路徑。點 y 和點 s 相鄰，點 $s \in V(K_n^x)$ 。點 z 和點 t 相鄰，點 $t \in V(K_n^x)$ 。根據引理四，完全圖邊容錯漢米爾頓連通性質，點 s 和點 t 之間存在一條漢米爾頓路徑。因此， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條 $\langle s \rightarrow Path(s, t) \rightarrow t \rightarrow (t, z) \rightarrow z \rightarrow Path(z, y) \rightarrow y \rightarrow (y, s) \rightarrow s \rangle$ 的漢米爾頓迴圈，如圖 36 所示。

■

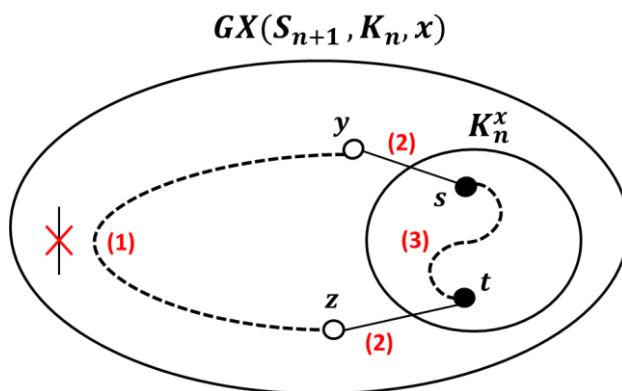


圖 36：情況 3， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條漢米爾頓迴圈。
(實線表示邊，虛線表示路徑)

情況 4：壞邊分散

壞邊分佈的情況並不集中，和前述三種情況不同，如圖 37 所示。

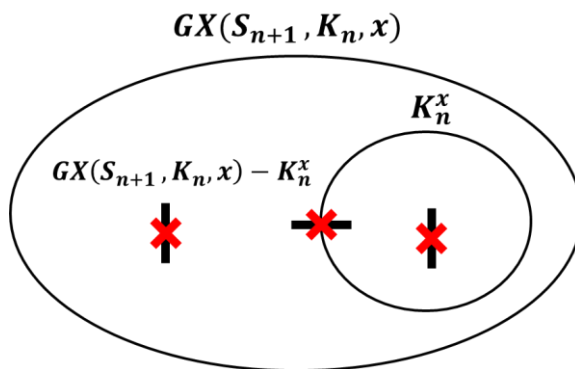


圖 37：情況 4，壞邊 F_e 分佈的情況。

因為 $|F_e \cap E(K_n^x)| < n - 4$ ，根據引理四，完全圖邊容錯漢米爾頓連通性質，在任意兩個點 $s, t \in V(K_n^x)$ 之間，存在一條漢米爾頓路徑。

接下來，因為 $|F_e \cap \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\}| < n - 4$ ，可以得到 $n - (n - 4) = 4$ ，表示至少有 4 條邊不屬於 F_e 。因此，可以找到與點 s 以及點 t 相鄰的兩點，分別是點 y 和點 z ，使得 $(s, y), (t, z) \notin F_e$ 。

接著，因為 $|F_e \cap (E(GX(S_{n+1}, K_n, x)) - E(K_n^x) - \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\})| < n - 4$ ，根據定理一，點 y 和點 z 之間存在一條漢米爾頓路徑。

因此 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條 $(s \rightarrow Path(s, t) \rightarrow t \rightarrow (t, z) \rightarrow z \rightarrow Path(z, y) \rightarrow y \rightarrow (y, s) \rightarrow s)$ 的漢米爾頓迴圈，如圖 38 所示。 ■

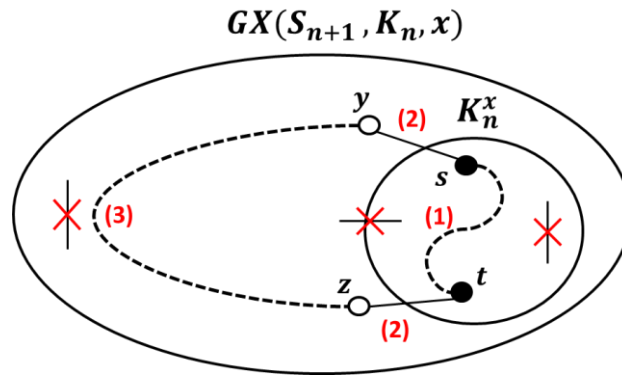


圖 38：情況 4， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在一條漢米爾頓迴圈。
(實線表示邊，虛線表示路徑)

3. 定理三：當 $n \geq 5$ ，且 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。

證明：

根據引理五的結果，當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。當圖中存在漢米爾頓迴圈質時，是一個漢米爾頓圖。因此， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。 ■

肆、研究結果

本作品將星狀網路和完全網路，抽象化成星狀圖和完全圖，並研究星狀圖使用點擴展運算結合完全圖後，在容許的壞邊數量內，保證存在漢米爾頓迴圈性質。研究過程中，也證明了一些對最後結果有幫助的相關引理和定理。我們將研究過程中所得到的結果，分成兩個部份說明：

一、星狀圖使用點擴展運算後的漢米爾頓迴圈性質：

首先，研究在沒有任何壞邊的情況下，星狀圖使用點擴展運算結合完全圖後，是否具有漢米爾頓迴圈。我們獲得了以下三項結果：

(一) 引理一：令 K_n 為一個 n 維度的完全圖，當 $n \geq 3$ 時，存在漢米爾頓迴圈。

接下來證明引理二時，會需要使用到引理一幫助我們證明。

(二) 引理二：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖，當 $n \geq 2$ 時，存在漢米爾頓迴圈。

從引理二中，可以推導出定理二。當星狀圖維度 $n \geq 2$ 時，使用點擴展運算結合完全圖後，是漢米爾頓圖。

(三) 定理二：當 $n \geq 2$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是漢米爾頓圖。

二、星狀圖使用點擴展運算後的漢米爾頓容錯性質：

研究星狀圖使用點擴展運算結合完全圖後，在容許的壞邊範圍內，保證存在漢米爾頓迴圈性質。我們得到以下三項結果：

(一) 引理四：令 K_n 是一個 n 維度的完全圖， F_e 表示壞邊集合。當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

接下來證明引理五時，會需要使用到引理四來幫助我們證明。

(二) 引理五：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖， F_e 表示壞邊集合。當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。

從引理五中，可以推導出定理三，當星狀圖維度 $n \geq 5$ ，且壞邊數量最多是 $n - 4$ 時，星狀圖使用點擴展運算結合完全圖後的圖形是漢米爾頓圖。

(三) 定理三：當 $n \geq 5$ ，且 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。

伍、討論

我們從研究過程，以及研究結果中，做出以下討論：

討論一、 $n + 1$ 維度星狀圖使用 n 維度完全圖，做點擴展運算。

根據點擴展運算的定義，因為圖 G 中的點 x 分支度是 3，所以使用 k_3 替換點 x 。圖 G 中的三條邊 $(x, x_1), (x, x_2), (x, x_3)$ ，在 $GX(G, K_3, x)$ 中分別是 $(k_1, x_1), (k_2, x_2), (k_3, x_3)$ 三條邊，在圖 39 使用紅色邊表示對應關係。在 $n + 1$ 維度星狀圖中，每個點的分支度都是 n ，因此， $n + 1$ 維度星狀圖使用 n 維度完全圖，做點擴展運算。

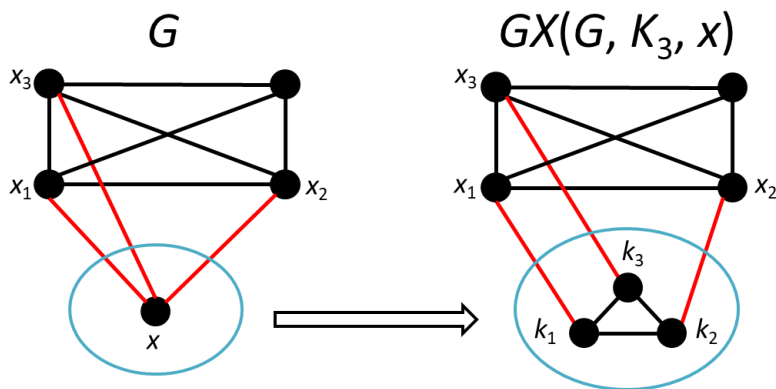


圖 39： (x, x_1) 對應 (k_1, x_1) 、 (x, x_2) 對應 (k_2, x_2) 、 (x, x_3) 對應 (k_3, x_3) 。

討論二、星狀圖點擴展運算後的圖形， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ ，存在漢米爾頓迴圈，是一個漢米爾頓圖。

從討論一中可以知道， $n + 1$ 維度星狀圖，必需在 $n \geq 2$ 時，使用 n 維度完全圖，做點擴展運算，才能保證 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 存在漢米爾頓迴圈性質。當 $n = 1$ 時， S_2 是一條邊與兩個點的集合， K_1 是一個點， $GX(S_2, K_1, x)$ 不存在漢米爾頓迴圈。

討論三、星狀圖點擴展運算後的圖形， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ ，在容許的壞邊數量下，存在漢米爾頓迴圈，是一個漢米爾頓圖。

從引理五以及定理三可以知道，星狀圖點擴展運算後的圖形 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ ，當 $n \geq 5$ ，且壞邊數量最多 $n - 4$ 時，存在漢米爾頓迴圈，是一個漢米爾頓圖。

討論四、使用點擴展運算的優點：

- (一) 使用點擴展運算後，還能保證存在漢米爾頓性質，並且壞邊數量是可以估計的。
- (二) 可以應用在網路環境需要局部擴展的情況下。

討論五、後續相關問題探討：

- (一) 在完全圖中，同時存在壞點和壞邊的漢米爾頓連通性質。

引理四只討論了存在壞邊時，完全圖存在漢米爾頓連通性質。接著，我們想了解如果在完全圖中，同時存在壞點和壞邊，是否還有同樣的結果。因此，修改引理四，並提出下列推論：

推論：令 K_n 是 n 維度完全圖， F_v 是壞點集合， F_e 是壞邊集合， $F = F_v \cup F_e$ 且 $|F| = |F_v| + |F_e|$ 。當 $n \geq 4$ ，且 $|F| \leq n - 4$ 時， $K_n - F$ 存在漢米爾頓連通性質。

- (二) 星狀圖點擴展運算後的圖形 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ ，是否存在漢米爾頓連通性質。

漢米爾頓連通性質是，圖中的任意兩點都存在漢米爾頓路徑。我們發現，在 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 中，當起點和終點皆為白點時，會有一個黑點無法被路徑經過。於是我們猜想，如果同時將 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 中的一個黑點和一個白點做點擴展運算，是否能讓黑點與白點的數量平衡，進而解決問題。

陸、結論

本作品研究星狀網路和完全網路，兩種不同性質的網路，使用點擴展的運算方式，結合成一個網路，並且討論結合後的網路，如果元件之間的連線損壞無法使用時，在容許的損壞數量範圍內，是否還存在漢米爾頓迴圈性質。漢米爾頓迴圈在連結網路研究中相當重要，此性質可以保證連結網路發送訊號時，將訊號發送給連結網路中的每一個元件接收，並且不會重覆接收到訊號。

我們首先將星狀網路和完全網路這兩種不同結構的網路，分別抽象化成星狀圖和完全圖。網路中的元件，抽象化為點。元件之間的連線，抽象化為邊。如果元件之間的連線故障，完全無法使用，則稱為壞邊。接著，使用圖形理論的數學證明得到結果。

本作品主要的證明結果是，令 S_{n+1} 表示 $n+1$ 維度星狀圖， K_n 表示 n 維度完全圖， $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是 $n+1$ 維度星狀圖和 n 維度完全圖，做點擴展運算後的圖形， F_e 表示壞邊集合。當 $n \geq 4$ ，且 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 中的壞邊數量 $|F_e| \leq n-4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈性質，並且是一個漢米爾頓圖。

未來有幾個研究方向。首先，點擴展運算後的圖 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ ，當壞點和壞邊同時存在時，在容許的容錯範圍內，是否還具有漢米爾頓相關性質，像是漢米爾頓迴圈，漢米爾頓連通。接下來，還可以更進一步研究壞點和壞邊同時存在時，容錯數量範圍最佳化的問題。

柒、參考文獻資料

徐力行 (2003) · *沒有數字的數學* · 台北市：天下文化。

徐力行 (2011) · *動物園裡的數學：網路時代一定要懂的圖形理論* · 台北市：天下文化。

張鎮華、蔡牧村 (2020) · *演算法觀點的圖論* · 台北市：國立臺灣大學出版中心。

S.B. Akers, D. Harel, B. Krishnamurthy. (1987). *The star graph: An attractive alternative to then-cube. in: Proc. International Conference on Parallel Processing, Illinois*, 393-400.

Chun-Nan Hung, Hsuan-Han Chang, and Guan-Yi Shi. (2007). *Fault tolerance for Hamiltonian cycle of node expansion on Hypercube, National Computer Symposium*, 621-626.

Chun-Nan Hung, Lih-Hsing Hsu, and Ting-Yi Sung. (2001). *On the Construction of Combined k-Fault-Tolerant Hamiltonian Graphs. NETWORKS*, 165-170.

Sun-Yuan Hsieh, G. H. Chen, and C. W. Ho. (2000). *Hamiltonian-laceability of star graphs. Networks, vol. 36*, 225-232.

Tseng-Kuei Li, Jimmy J.M. Tan, and Lih-Hsing Hsu. (2004). *Hyper hamiltonian laceability on edge fault star graph. Information Sciences, vol.165*, 59-71.

【評語】 030406

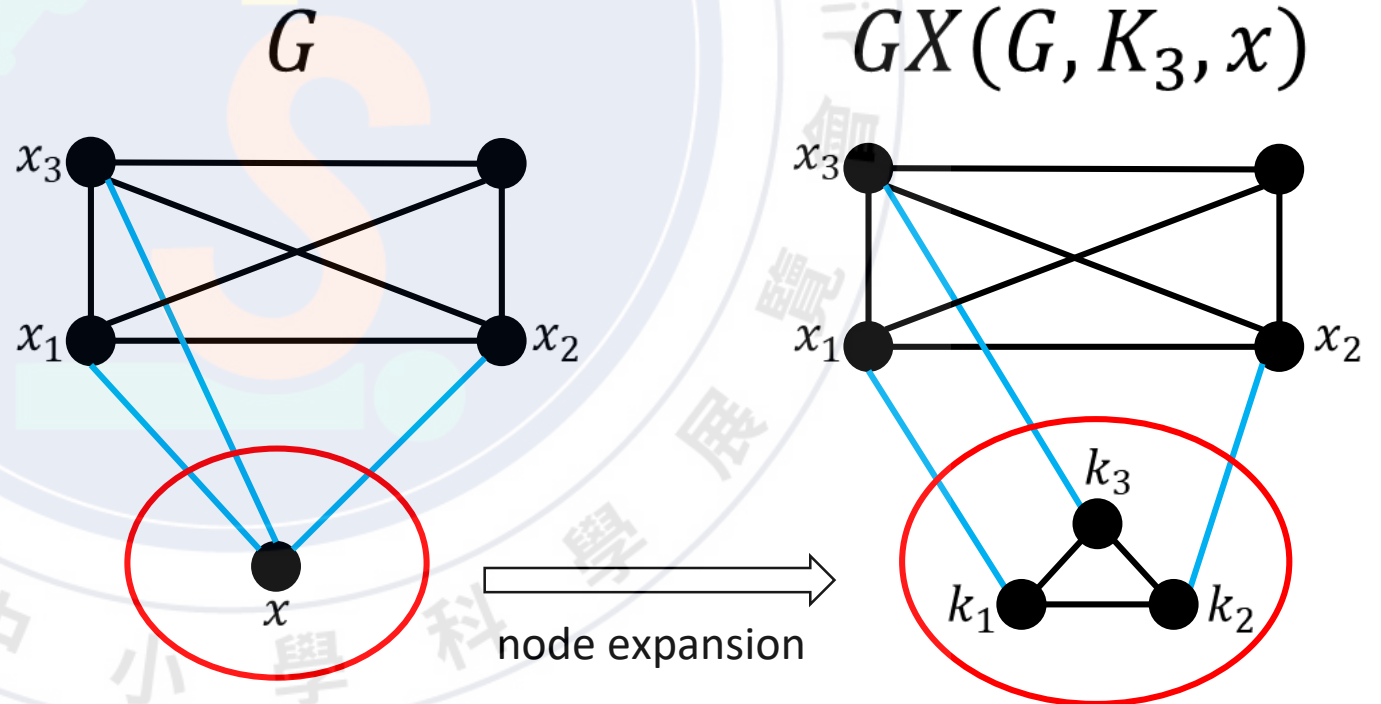
本作品考慮的是星狀圖經由單點擴張後，是否為 $n-4$ 邊容錯漢米爾頓圖的問題。圖形是否為漢米爾頓圖、漢米爾頓連通圖、或是具有容錯性的漢米爾圖這些問題是在討論網路架構時常會被提及的問題，是一個具有理論上的價值，也有著實際應用性的一個重要問題，長久以來，一直都備受大家的關注。作者們藉助前人給出的相關結果，證明了經由單點擴張所得出的星狀圖確實是 $n-4$ 邊容錯的漢米爾頓圖。主定理的說明清楚而且精簡，想法也十分的巧妙，值得嘉許。在作品說明書中有一部分的結果其實是可以由主要定理推得的，重複給出說明其實沒有必要，把它們當成是主要定理的推論可能更為恰當。另外，在介紹問題的部分稍嫌冗長了些，有一些基本性質的說明也稍嫌複雜了點。如果可以針對這些部分做適當的改寫，作品看起來會更簡潔也更好。

作品簡報

作品名稱： 星狀網路點擴展運算 漢米爾頓容錯性質研究

科別：數學科

組別：國中組



研究動機

起源：對一筆畫問題的好奇，邊的一筆畫問題，七橋問題，Euler 迴圈。

什麼是點的一筆畫問題？
漢米爾頓性質，
漢米爾頓迴圈。

連結網路如何抽象化成
數學中的圖形理論解決問題？

完全網路 ↔ 完全圖
星狀網路 ↔ 星狀圖

什麼是容錯性質？
如果連結網路上有元件故障，
整個網路是否還能正常運作？
如何用圖論的方法表示並解決？

研究目的

證明 $n + 1$ 維度星狀圖使用 n 維度完全圖，做點擴展運算後，漢米爾頓迴圈性質。

證明 $n + 1$ 維度星狀圖使用 n 維度完全圖，做點擴展運算後，漢米爾頓容錯性質，討論存在壞邊的情況。

文獻探討：相關研究論文

星狀圖(Star graph)：
Aker 等人 (1987)，定義了星狀圖結構。

點擴展(Node expansion)：
1. Hung 等人 (2001)，定義了點擴展運算。
2. Hung、Chang 與 Shi (2007) 研究使用點擴展運算後的圖形，容錯數量上的問題。

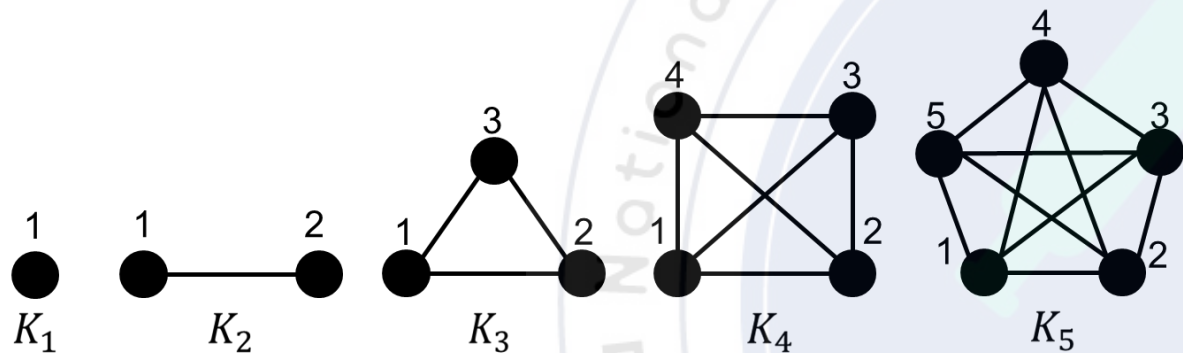
漢米爾頓可蕾絲性質
(Hamiltonian Laceable)：
1. Hsieh、Chen 與 Ho (2000)，定義了星狀圖漢米爾頓可蕾絲性質。
2. Li、Tan 與 Hsu (2004) 定義了星狀圖超漢米爾頓可蕾絲性質。
3. Li 等人也證明了， n 維度的星狀圖，當 $n \geq 4$ 時，是 $(n - 4)$ -邊容錯超漢米爾頓可蕾絲圖。

文獻探討：圖形

完全圖  星狀圖 

令 K_n 表示 n 維的完全圖(分支度： $n - 1$)

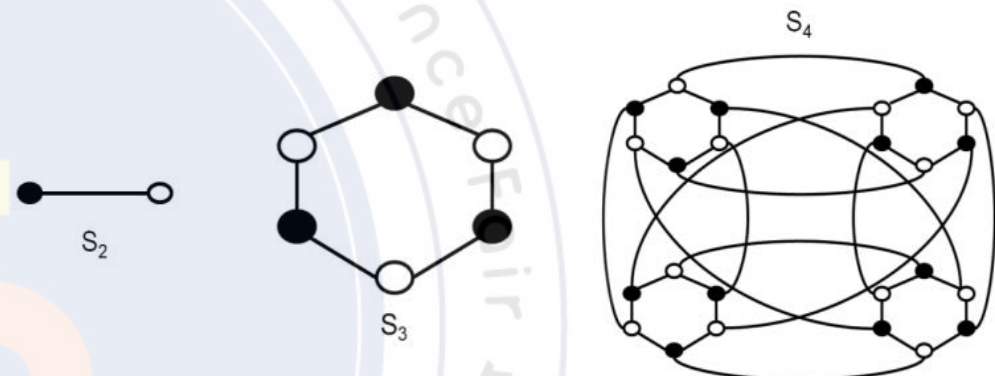
總點數： n | 總邊數： $\frac{n \times (n - 1)}{2}$



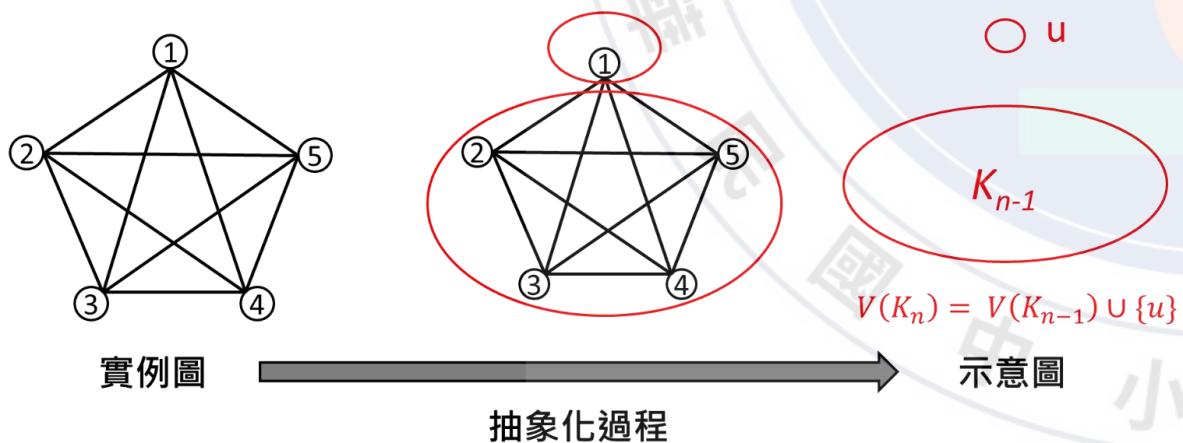
1 維度完全圖 K_1 至 5 維度完全圖 K_5

令 S_n 表示 n 維的星狀圖(分支度： $n - 1$)

總點數： $n!$ | 總邊數： $\frac{n! \times (n - 1)}{2}$



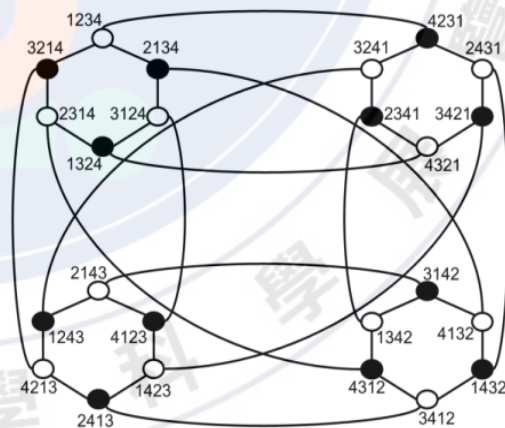
2 維度星狀圖 S_2 至 4 維度星狀圖 S_4



實例圖

抽象化過程

示意圖



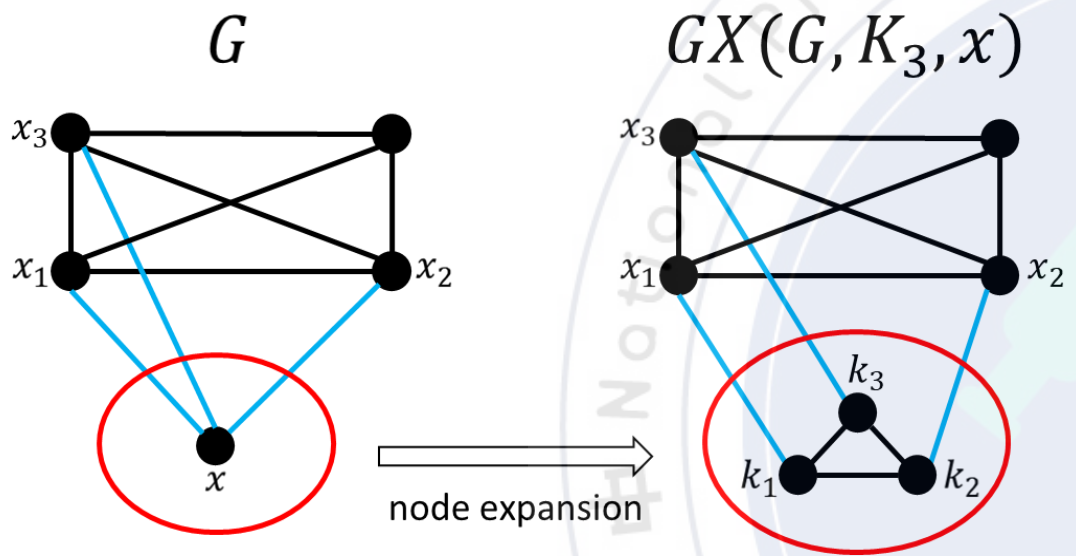
$$P_2(1234) = 2134$$

$$P_2(2134) = 1234$$

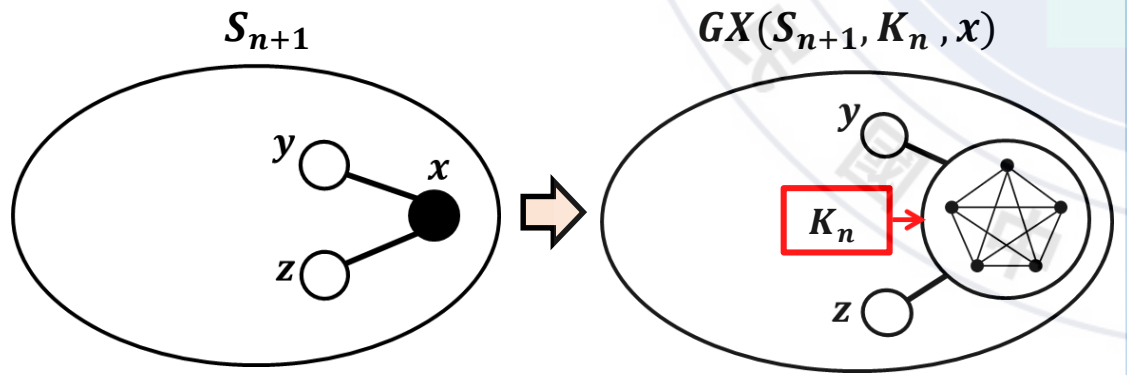
(詳細連線規則在作品說明書第 7 頁)

文獻探討：點擴展運算(node expansion) 相關性質

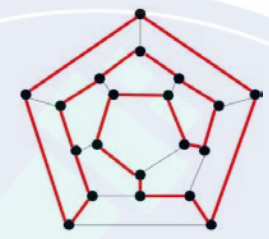
(詳細定義說明在作品說明書第 8 頁)



本作品在證明相關引理和定理時，不失一般性，使用星狀圖中，任意一個黑點做點擴展運算。

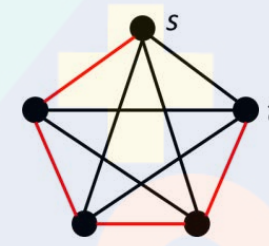


文獻探討：漢米爾頓性質(Hamiltonian properties) 相關性質



漢米爾頓迴圈 (Hamiltonian cycle)

圖中任一點出發，經過所有的點，且所經過的點都不重覆。



漢米爾頓路徑 (Hamiltonian path)

圖中存在一個起點和一個終點，從起點出發，在經過圖中所有點一次後，到達終點。

漢米爾頓連通 (Hamiltonian connected) : (性質說明詳見作品第10頁。)

圖中任意二點之間皆可找到一條漢米爾頓路徑。

漢米爾頓可蓄絲 (Hamiltonian Laceable) : (性質說明詳見作品第10頁。)

在二分圖中，任意不同點集合中的兩點之間存在一條漢米爾頓路徑。

超漢米爾頓可蓄絲 (Hyper Hamiltonian Laceable) : (性質說明詳見作品第11頁)

壞掉一個點的二分圖，在另一個沒有壞點的點集合中，任意兩點之間皆可找到一條漢米爾頓路徑。

抽象化

七橋問題抽象化過程 (取自 wiki)



數學歸納法

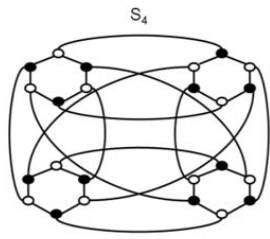
星狀網路

實體

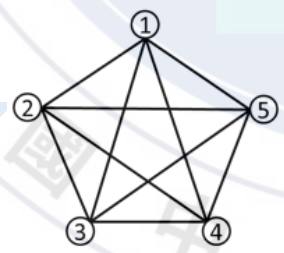
完全網路

圖形理論

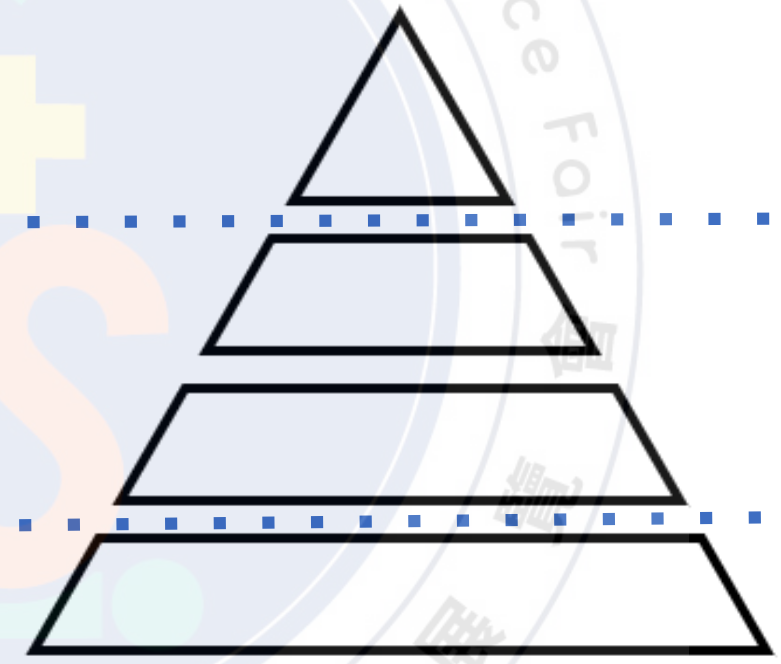
抽象



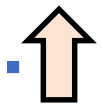
星狀圖



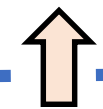
完全圖




歸納證明



歸納假設



歸納基底

 星狀圖使用點擴展運算後，漢米爾頓容錯性質

(詳細研究架構在作品說明書第 15 頁)

【證明】

令 K_n 是一個 n 維度的完全圖，
 F_e 表示壞邊集合。
當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，
 $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

【引用】

Hung、Hsu 與 Sung，(2001) 提出的引理：
若 $F \subset E(K_n)$ 且 $|F| \leq n - 2$ ，
則 $K_n - F$ 有一條漢米爾頓路徑。


【證明】

令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖，
 F_e 表示壞邊的集合。當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，
 $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。


【證明】

當 $n \geq 5$ ，且 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。

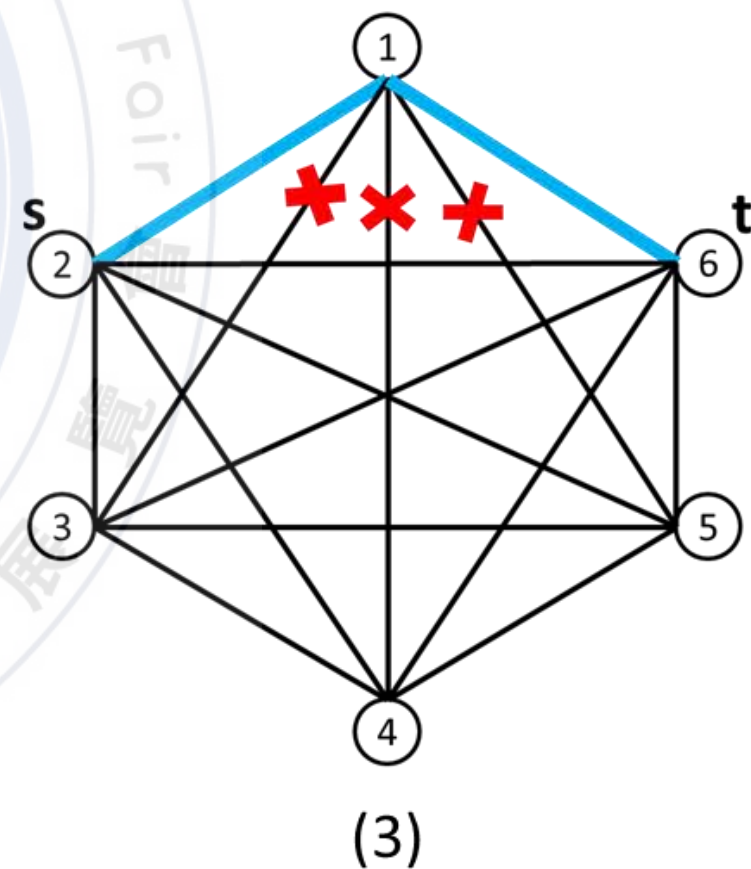
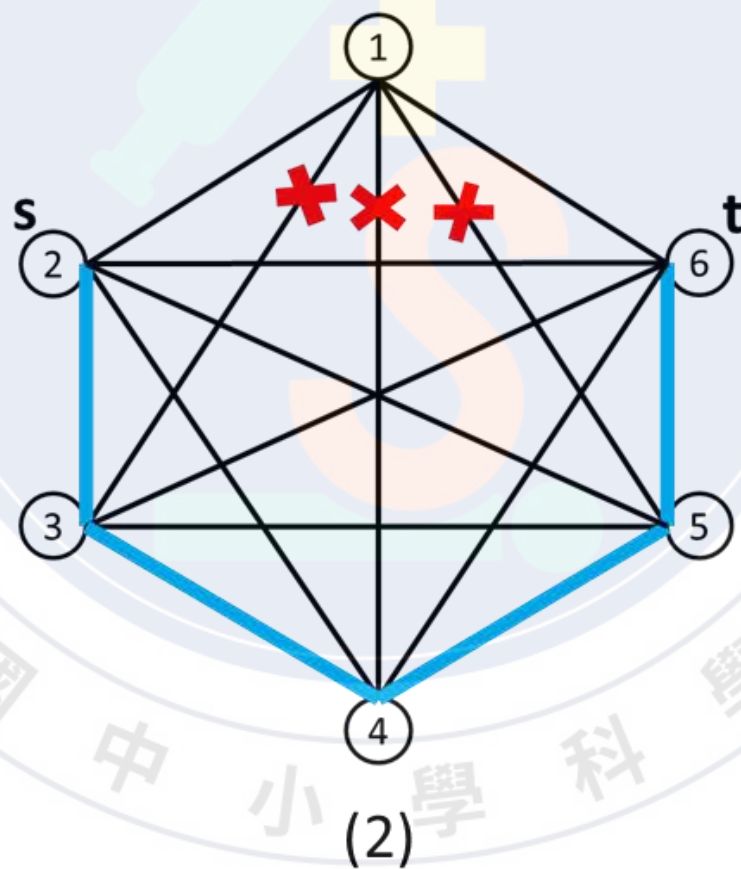
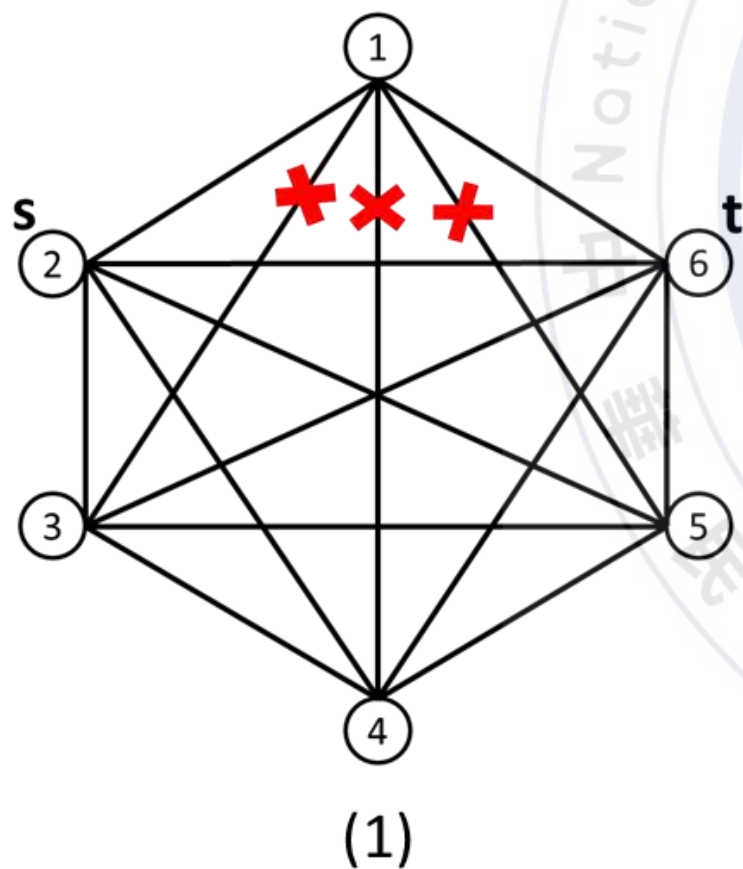
引理四：令 K_n 是一個 n 維度的完全圖， F_e 表示壞邊集合。

星狀圖使用點擴展運算後
漢米爾頓容錯性質 

當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

 證明 (反例詳細說明在作品說明書第 19 頁)

原本想證明壞邊數 $|F_e| \leq n - 3$ 的情況，結果發現反例。



引理四：令 K_n 是一個 n 維度的完全圖， F_e 表示壞邊集合。

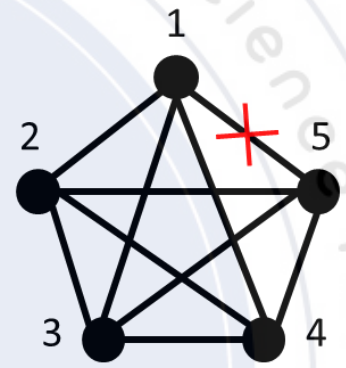
當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。(詳細證明在作品說明書第 20 頁)

星狀圖使用點擴展運算後漢米爾頓容錯性質

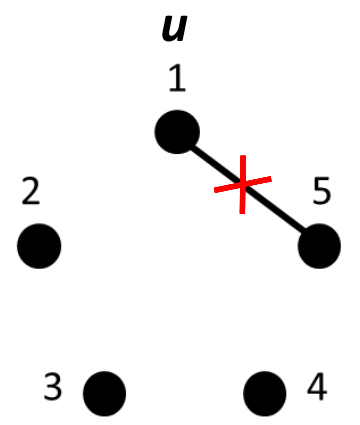
證明 壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時，有以下情況：

- 情況 1 : $u \notin \{s, t\}$
 - 情況 1-1 : $deg_H(u) = 1$
 - 情況 1-2 : $deg_H(u) \geq 2$
- 情況 2 : $u \in \{s, t\}$ 且 $deg_H(u) \geq 1$

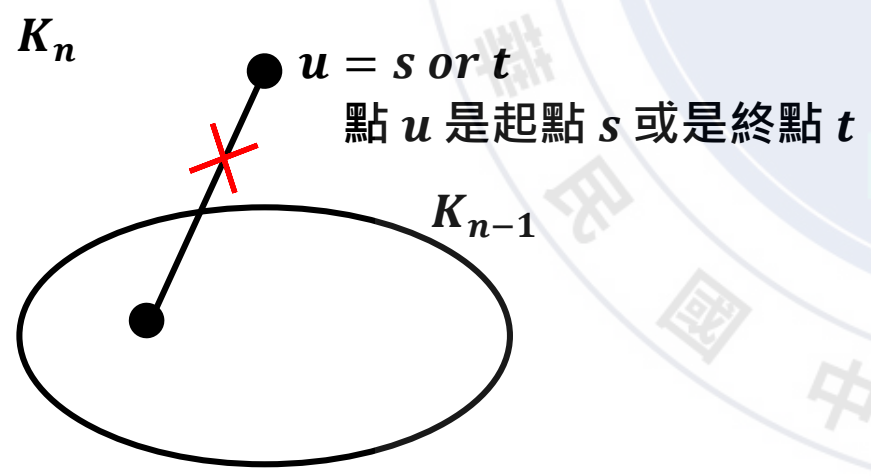
情況 1-1 : $deg_H(u) = 1$



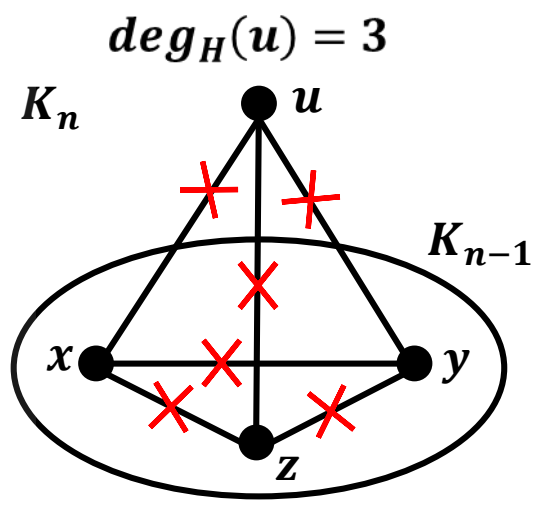
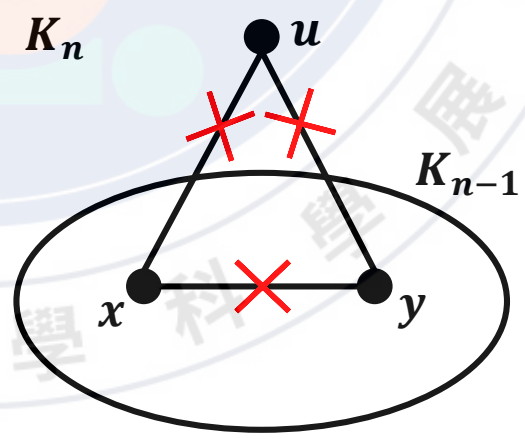
K_5 壞一條邊的情況



K_5 中的子圖 H



情況 1-2 : $deg_H(u) \geq 2$
 $deg_H(u) = 2$



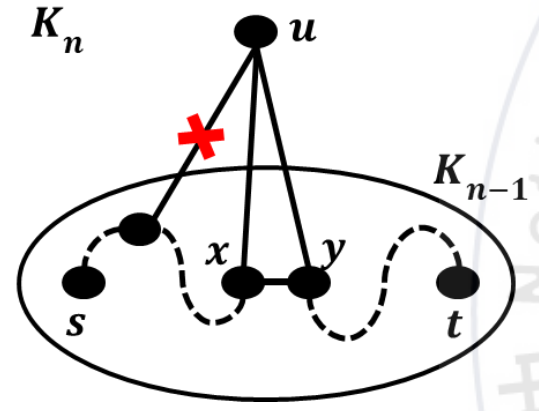
引理四：令 K_n 是一個 n 維度的完全圖， F_e 表示壞邊集合。
 當 $n \geq 4$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $K_n - F_e$ 存在漢米爾頓連通。

星狀圖使用點擴展運算後漢米爾頓容錯性質

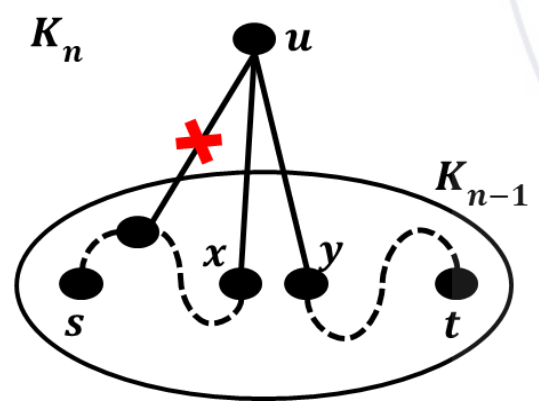
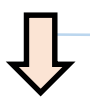
證明

情況 1 : $u \notin \{s, t\}$

情況 1-1 : $deg_H(u) = 1$

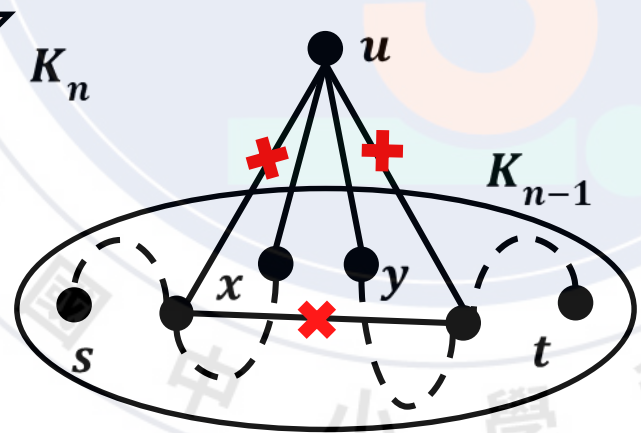
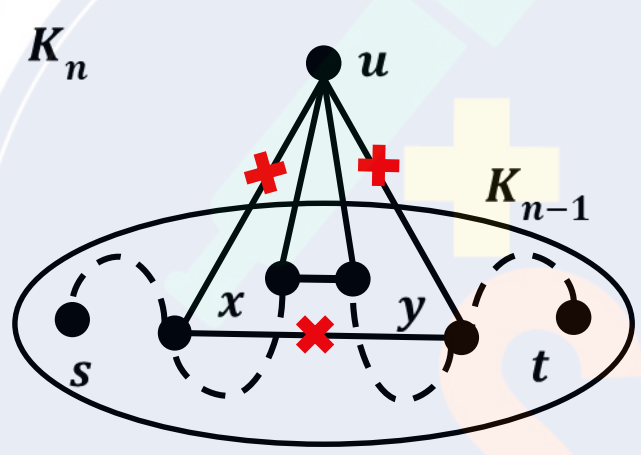


$(u, x), (u, y) \notin F_e$



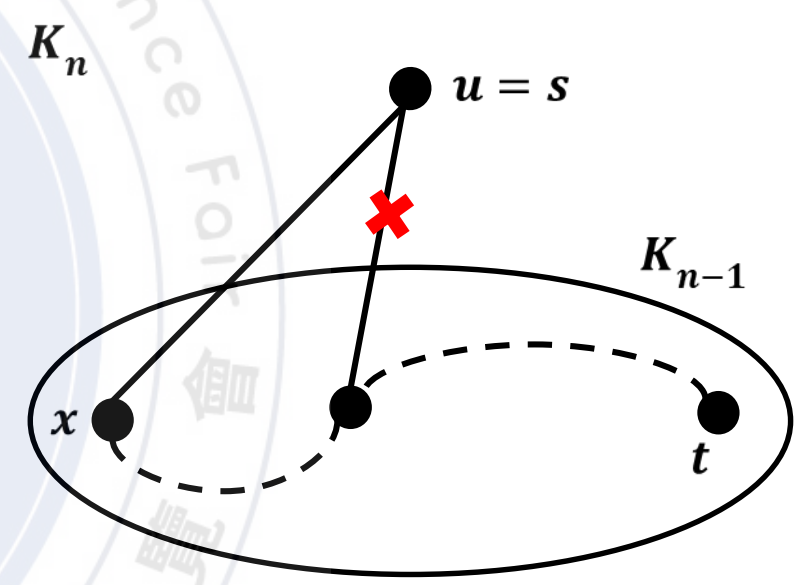
(x, u) 和 (u, y) 加入到路徑中，
 替換 (x, y)

情況 1-2 : $deg_H(u) \geq 2$



$(x, u), (u, y)$ 替換 (x, y)

情況 2 : $u \in \{s, t\}$ 且 $deg_H(u) \geq 1$





$(s, x) \notin F_e$ · 連接成

$\langle s \rightarrow (s, x) \rightarrow x \rightarrow path(x, t) \rightarrow t \rangle$

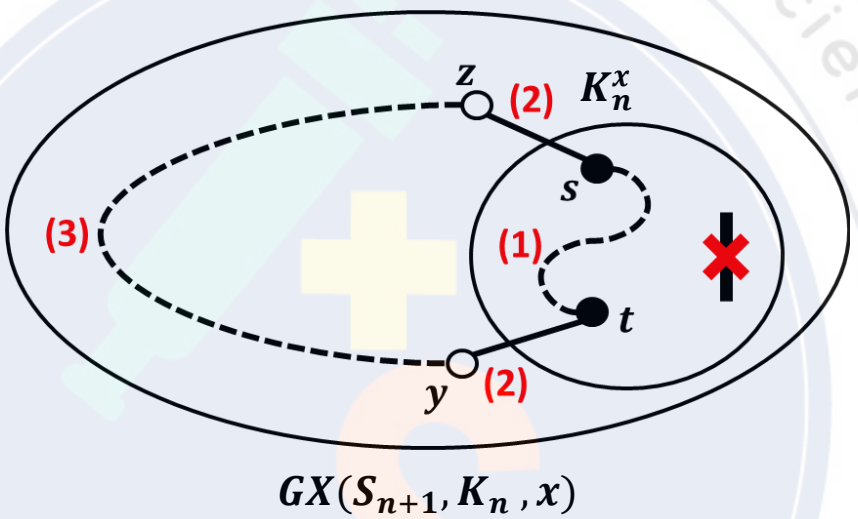
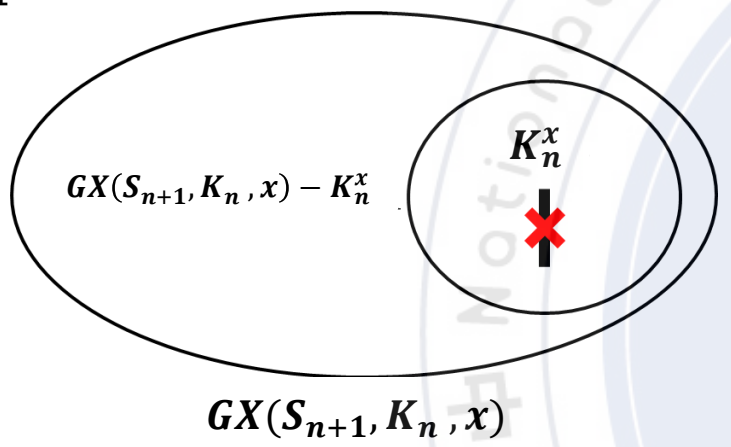
的漢米爾頓路徑。

引理五：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖， F_e 表示壞邊的集合。
 當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。

星狀圖使用點擴展運算後漢米爾頓容錯性質 
 (詳細證明在作品說明書第 23 頁)

 證明 情況1： $|F_e \cap E(K_n^x)| = n - 4$

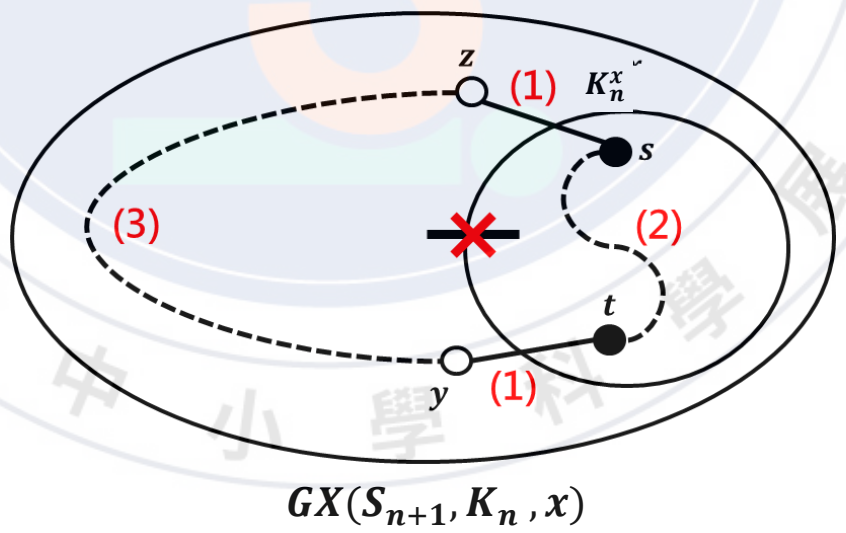
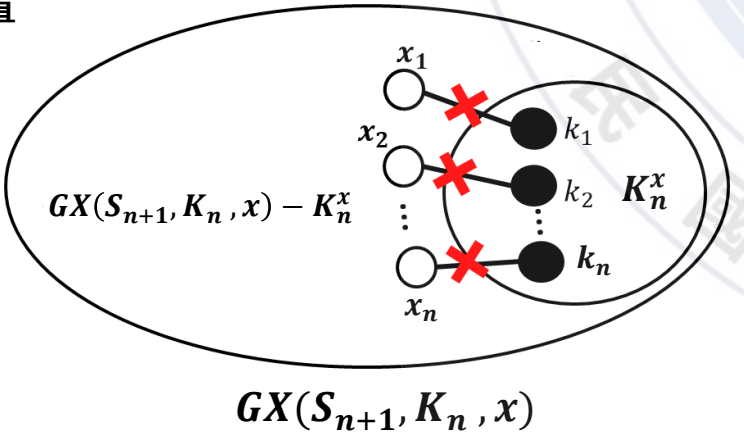
壞邊位置
 示意圖：



根據引理四，完全圖邊容錯漢米爾頓連通性質。當 $|F_e| \leq n - 4$ 時，點 s 和點 t 之間存在存在漢米爾頓連通。

情況2： $|F_e \cap \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n - 4$

壞邊位置
 示意圖：



$|F_e| \leq n - 4$ ，所以可以推導出 $n - (n - 4) = 4$ ，表示至少有四條邊不屬於 F_e 。

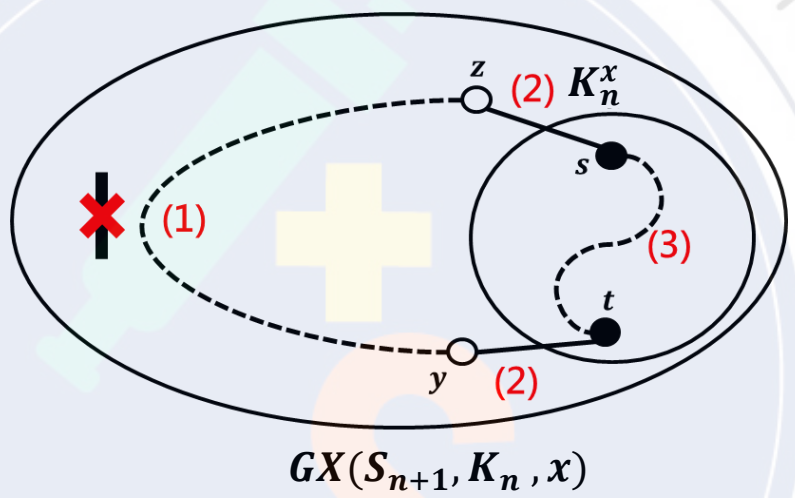
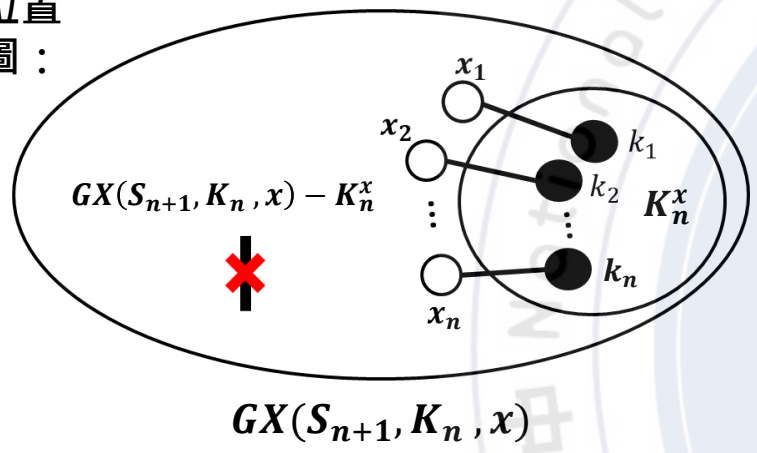
引理五：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是一個經過點擴展運算後的星狀圖， F_e 表示壞邊的集合。
 當 $n \geq 5$ ，且壞邊數 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈。

星狀圖使用點擴展運算後
 漢米爾頓容錯性質

(詳細證明在作品說明書第 25 頁)

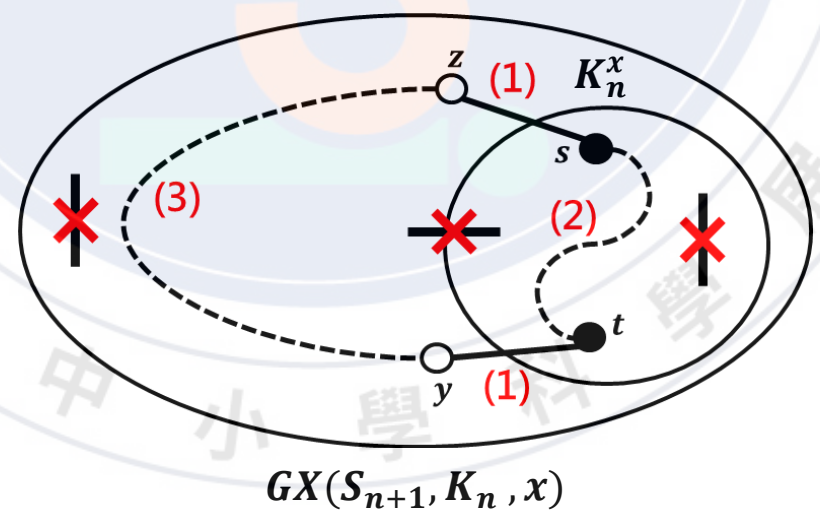
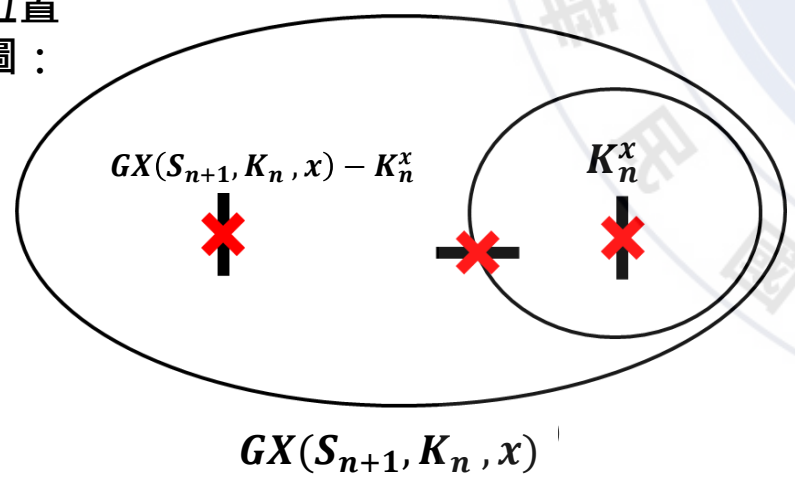
證明 情況3： $|F_e \cap (E(GX(S_{n+1}, K_n, x)) - E(K_n) - \{(x_i, k_i^x) \mid 1 \leq i \leq n\})| = n - 4$

壞邊位置
 示意圖：



根據定理一，超漢米爾頓可蕾絲性質。點 z 和點 y 之間存在存在漢米爾頓路徑。

情況4：壞邊分散
 壞邊位置
 示意圖：



定理三：當 $n \geq 5$ ，且 $|F_e| \leq n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 是漢米爾頓圖。

- 一、主要的證明結果：令 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 是 $n + 1$ 維度星狀圖做點擴展運算後的圖形。
 - (一) 證明了 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 存在漢米爾頓迴圈，是漢米爾頓圖。
 - (二) 證明了 $GX(S_{n+1}, K_n, x)$ 的壞邊數量最多是 $n - 4$ 時， $GX(S_{n+1}, K_n, x) - F_e$ 存在漢米爾頓迴圈，是漢米爾頓圖。
- 二、使用點擴展運算的優點：
 - (一) 使用點擴展運算後，還能保證存在漢米爾頓迴圈性質，並且壞邊數量可以估計。
 - (二) 可以應用在網路環境需要局部擴展的情況下。
- 三、未來可研究方向：
 - (一) 考慮壞點和壞邊同時發生的情況。
 - (二) 證明漢米爾頓連通性質。(作品說明書第 29 頁，討論五，第 (二) 點)
 - (三) 容錯數量最佳化問題。

- 徐力行 (2003) . *沒有數字的數學* . 台北市：天下文化。
- 徐力行 (2011) . *動物園裡的數學：網路時代一定要懂的圖形理論* . 台北市：天下文化。
- 張鎮華、蔡牧村 (2020) . *演算法觀點的圖論* . 台北市：國立臺灣大學出版中心。
- S.B. Akers, D. Harel, B. Krishnamurthy. (1987). *The star graph: An attractive alternative to the n-cube. in: Proc. International Conference on Parallel Processing, Illinois, 393-400.*
- Chun-Nan Hung, Hsuan-Han Chang, and Guan-Yi Shi. (2007). *Fault tolerance for Hamiltonian cycle of node expansion on Hypercube, National Computer Symposium, 621-626.*
- Chun-Nan Hung, Lih-Hsing Hsu, and Ting-Yi Sung. (2001). *On the Construction of Combined k-Fault-Tolerant Hamiltonian Graphs. NETWORKS, 165-170.*
- Sun-Yuan Hsieh, G. H. Chen, and C. W. Ho. (2000). *Hamiltonian-laceability of star graphs. Networks, vol. 36, 225-232.*
- Tseng-Kuei Li, Jimmy J.M. Tan, and Lih-Hsing Hsu. (2004). *Hyper hamiltonian laceability on edge fault star graph. Information Sciences, vol.165, 59-71.*