

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030403

海蟲的棋盤遊戲

學校名稱：臺中市私立明道高級中學(附設國中)

作者： 國三 簡碩君 國三 廖宥翔	指導老師： 陳靖旻 陳鑫達
-------------------------	---------------------

關鍵詞：海蟲圖形、陣列遊戲、六連塊

摘要

本研究主題是在 $n \times n$ 陣列中，甲乙雙方輪流填入三種海蟲的遊戲探討。我們得到下列結果：

- 一、探究海蟲形狀與數量，我們利用「頭部的連接方向」和「頭尾的連接方式」，找出所有的海蟲圖形，並利用六連塊檢驗，確認所有的海蟲個數共是 71 種。
- 二、將陣列邊長點數 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、 $6k+2$ 等 6 個類型討論，找出 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值。
- 三、探討只使用一種海蟲排入陣列的遊戲玩法，得到結果如下：
 1. 6×6 陣列遊戲結果必是甲乙兩方都放 3 隻海蟲，雙方平手。
 2. 7×7 陣列遊戲最佳結果必是先手甲方 4 隻、乙方 3 隻，由甲方勝 1 隻。

壹、前言

一、研究動機

在某次數學課中，數學老師向我們推薦的一本特別的數學書：《數字的異想世界》[1]，在好奇心的驅使下，我們將這本書買回來翻了翻，發現這是一本有關於數學遊戲的書！其中一個關於海蟲的陣列遊戲，引起了我們的興趣，我們拿著這個問題興高采烈地與老師討論，老師也告訴了我們如果有興趣的話可以深入去研究它，因而展開了這場神祕的研究之旅。

第 25 章

亞特蘭提斯的夢幻海蟲

太平洋海床上住著一群人魚數學家，他們整天都在苦思一種稱為海洋之夢的遊戲。人魚用小塊珊瑚和經過訓練的海蟲來玩，至於我們人類則可以在方格紙上玩。

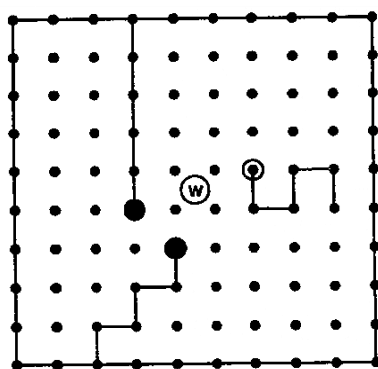





圖 1-1

首先製作 10×10 的圓點陣列(如圖 1-1 所示)。每條海蟲由五線段連結六個圓點構成。海蟲軀體一端的圓點用圓圈圈起來，代表頭部。海蟲可以直角扭動身體，構成不同形狀，不過他們通過的晶格交點不得重複使用。海蟲可以上下左右移動。圖 1-2 顯示海蟲部分的(非全部)扭曲圖案。一端有  的海蟲為殭屍蟲， 為農夫蟲， 為領主蟲。(提示：殭屍蟲還缺一條，農夫蟲也缺一條，你能不能完成圖 1-2 的這兩種海蟲?)

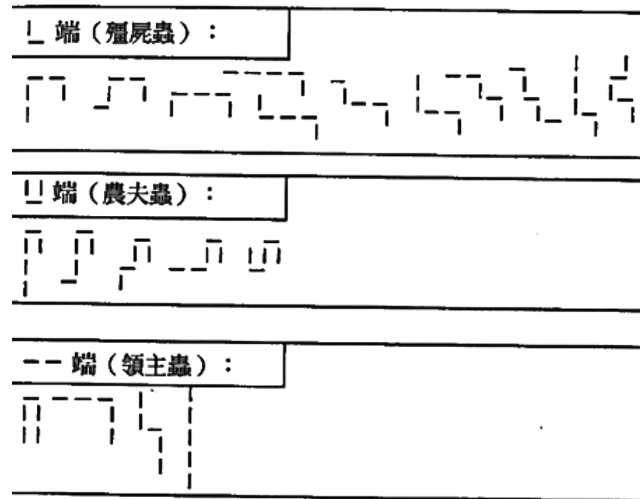


圖 1-2

遊戲時，雙方輪流把一條海蟲擺在晶格交點上。圖 1-1 中，甲方先擺一條黑頭的領主蟲，乙方擺一條白頭的農夫蟲，接著甲方又擺一條黑頭的殭屍蟲，雙方的海蟲不得重疊或占用同一個圓點，換句話說，晶格裡的每個圓點都只能使用一次。海蟲不得彼此交叉，不過可以緊密折疊纏繞。當沒有人能在晶格中增添海蟲時，遊戲就結束。輸贏要由領主蟲、農夫蟲和殭屍蟲的數目來決定。領主蟲各計 3 分，農夫蟲各計 2 分，殭屍蟲則各計 1 分，分數高者則獲勝。

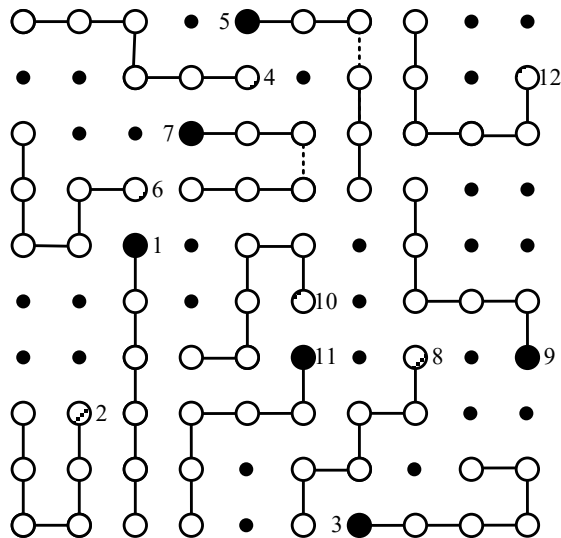
最後還有兩個限制條件，這樣遊戲會更好玩，晶格中間有道古怪暗流形成漩渦(以⊙表示)，這道暗流會把海蟲拉向漩渦。因此，每條海蟲的頭部必須比尾部更接近中央。此外，海蟲會釋放毒素，所以兩隻海蟲的頭部不得位於晶格上下左右相鄰的位置。

古戈爾博士盼望讀者玩了海洋之夢以後能寫信給他，告訴他：最佳策略為何?先玩的人是否較佔優勢?如果有三位以上參賽，是否會改變這種狀況?加大遊戲盤會有什麼影響?

舉一個例子說明遊戲玩法：

由甲方開始擺放黑頭海蟲，完畢後輪到乙方擺放斜線頭海蟲(為了容易區別將白頭改為斜線頭)，兩方輪流直到雙方都無法繼續擺放海蟲時，遊戲結束進入到計分。下圖中，甲乙雙方各放了 6 隻蟲(順序以數字註明在每隻海蟲的頭部旁邊)，計分表如下。甲方得 13 分，乙方得 11 分，故甲方獲勝。

回合順序	1	2	3	4	5	6	得分合計
甲方海蟲	領主蟲 I	農夫蟲 U	領主蟲 I	領主蟲 I	殭屍蟲 L	殭屍蟲 L	
甲方得分	3	2	3	3	1	1	13
乙方海蟲	領主蟲 I	領主蟲 I	殭屍蟲 L	殭屍蟲 L	農夫蟲 U	殭屍蟲 L	
乙方得分	3	3	1	1	2	1	11



二、研究目的

- (一)、依海蟲形狀進行分類及找出海蟲的所有個數。
- (二)、利用六連塊檢驗並確認所有的海蟲個數。
- (三)、在 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值及其排法。
- (四)、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討。

三、文獻回顧

我們利用 Google 搜尋關鍵字「亞特蘭提斯的夢幻海蟲科展」或「海蟲科展數學」進行文獻探討，目前均找不到相關的科展研究報告。

第 52 屆全國科展報告[2，第 20~24 頁]，提供的六連塊圖形是將旋轉、鏡射後相同的圖形當作同一種，共有 35 種。我們用來比對求出的海蟲圖形數量是否正確。

貳、研究設備及器材




紙、筆、Word、Visio 及 Excel 軟體。

參、研究過程或方法













- 一、所有海蟲的分類及個數。




《定義 1》海蟲的分類

所有海蟲圖形都是由 5 個單位線段連接 6 個圓點構成，頭部以黑點表示。當進行棋盤遊戲時，甲方使用黑頭海蟲，乙方使用斜線頭海蟲(為了容易區別圖形將白頭改為斜線頭)。

- 1.若海蟲頭尾都有  形狀，代號 L-L，屬於殭屍蟲，簡稱 L 形蟲。
- 2.若海蟲頭尾都有  形狀，代號 I-I，屬於領主蟲，簡稱 I 形蟲。
- 3.若海蟲頭尾都有  形狀，代號 U-U，屬於農夫蟲，簡稱 U 形蟲。

若海蟲的圖形兩端為下列狀況：

- 4.若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 I-U，此海蟲當作 U 形蟲。
同理，若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 U-I，此海蟲當作 U 形蟲。
- 5.若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 L-U，此海蟲當作 U 形蟲。
同理，若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 U-L，此海蟲當作 U 形蟲。
- 6.若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 I-L，此海蟲當作 L 形蟲。
同理，若海蟲頭部有 ，尾部有  時，代號 L-I，此海蟲當作 L 形蟲。

也就是說當海蟲兩端出現 、、 其中兩種時，海蟲認定的優先順序為 U 形蟲>L 形蟲> I 形蟲。

因為海蟲頭尾都有 3 種形狀可選擇，可分下表的 9 種情形討論海蟲的個數。

情形	頭部	尾部	代號	蟲的種類	得分
1	I	I	I-I	I 形蟲	3
2	I	U	I-U	U 形蟲	2
3	I	L	I-L	L 形蟲	1
4	U	I	U-I	U 形蟲	2
5	U	U	U-U	U 形蟲	2
6	U	L	U-L	U 形蟲	2
7	L	I	L-I	L 形蟲	1
8	L	U	L-U	U 形蟲	2
9	L	L	L-L	L 形蟲	1

為了有順序的討論海蟲的形狀，第一步要先標示「頭部的連接方向」，第二步是「頭尾的連接方式」。

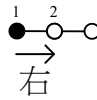
如下圖，因為「頭部的連接方向」可以逆時針每次旋轉 90 度，共有 4 個方向。而這 4 個海蟲圖形均相同。因此「頭部的連接方向」可以只考慮「頭部向右接」即可。



《定義 2》海蟲頭部的連接方向

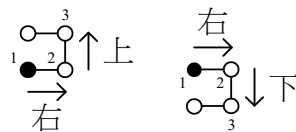
標示「頭部的連接方向」只需考慮「頭部向右接」，

- 1.若頭部是 I 形，向右接只有下圖 1 種。以「頭 I 的第 1 點連第 2 點的方向」，作為標示「頭 I 的連接方向」，下圖記為「頭 I 向右接」。



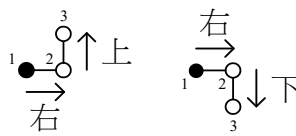
- 2.若頭部是 U 形，向右接只有下圖 2 種。以「頭 U 的第 1 點連第 2 點的方向與第 2 點連第 3 點的方向」，作為標示「頭 U 的連接方向」。

例如：下圖左為「頭 U 向右上接」，下圖右為「頭 U 向右下接」。



- 3.若頭部是 L 形，向右接只有下圖 2 種。以「頭 L 的第 1 點連第 2 點的方向與第 2 點連第 3 點的方向」，作為標示「頭 L 的連接方向」。

例如：下圖左為「頭 L 向右上接」，下圖右為「頭 L 向右下接」。



《定義 3》頭尾的連接方式

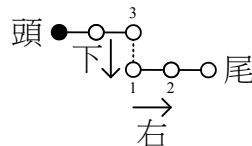
分下表的 9 種情形討論

1.I-I

因為每個 I 形由 3 個點及 2 個線段構成，頭 I 接尾 I 已經有 6 個點及 4 個線段，要加上一單位線段(下圖以虛線表示)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 I 和尾 I 的連接方式」要用「頭 I 的第 3 點連尾 I 第 1 點和尾 I 第 1 點連第 2 點的 2 個方向」標示。

例如：下圖為「頭 I 和尾 I 是下右接」。

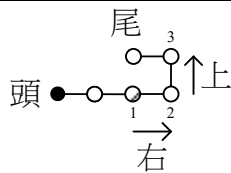


2.I-U

因為 I 形包含 3 點及 2 線段，U 形包含 4 點及 3 線段而構成，頭 I 接尾 U 有 7 點及 5 線段，要重疊 1 點(下圖以虛線點表示，頭第 3 點當成尾第 1 點)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 I 和尾 U 的連接方式」要用「尾 U 第 1 點連第 2 點和第 2 點連第 3 點的 2 個方向」標示。

例如：下圖為「頭 I 和尾 U 是右上接」。

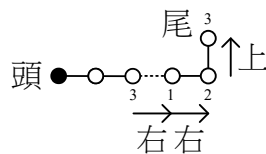


3.I-L

因為 I 形包含 3 點及 2 線段，L 形包含 3 點及 2 線段而構成，頭 I 接尾 L 有 6 點及 4 線段，要加上一單位線段(下圖以虛線表示)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 I 和尾 L 的連接方式」要用「頭 I 的第 3 點連尾 L 第 1 點、尾 L 第 1 點連第 2 點和尾 L 第 2 點連第 3 點的 3 個方向」標示。

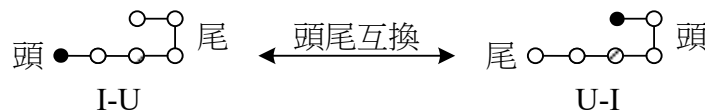
例如：下圖為「頭 I 和尾 L 是右右上接」。



4. U-I

此情形海蟲就是將 2.I-U 情形的海蟲頭尾對調，故其數量和 2.I-U 完全相同。

但因旋轉後仍與 2.I-U 類型之海蟲不相同(如下圖)，故也列入計數。

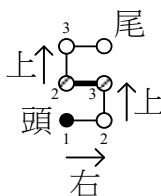


5. U-U

因為每個 U 形包含 4 點及 3 線段，頭 U 接尾 U 有 8 點及 6 線段，要重疊 2 點及 1 線段(下圖以虛線表示重疊點、粗線表示重疊線段，尾第 1 點當成頭第 3 點，頭第 4 點當成尾第 2 點)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 U 和尾 U 的連接方式」要用「頭 U 第 1 點連第 2 點、頭 U 第 2 點連第 3 點與尾 U 第 2 點連第 3 點的 3 個方向」標示。

例如：下圖為「頭 U 和尾 U 是右上上接」。

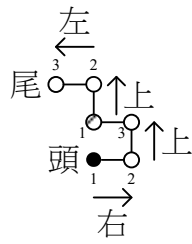


6. U-L

因為 U 形包含 4 點及 3 線段，L 形包含 3 點及 2 線段而構成，頭 U 接尾 L 有 7 點及 5 線段，要重疊 1 點(下圖以虛線點表示，頭第 4 點當成尾第 1 點)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 U 和尾 L 的連接方式」要用「頭 U 第 1 點連第 2 點、第 2 點連第 3 點、尾 L 第 1 點連第 2 點與第 2 點連第 3 點的 4 個方向」標示。

例如：下圖為「頭 U 和尾 L 是右上上左接」。



7. L-I

此情形海蟲就是將 3.I- L 情形的海蟲頭尾對調，故其數量和 3.I- L 完全相同。但因旋轉後仍與 3.I- L 類型之海蟲不相同，故也列入計數。

8. L-U

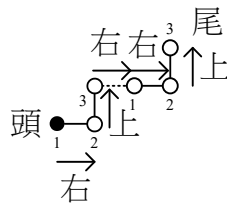
此情形海蟲就是將 6.U- L 情形的海蟲頭尾對調，故其數量和 6.U- L 完全相同。但因旋轉後仍與 6.U- L 類型之海蟲不相同，故也列入計數。

9. L-L

因為每個 L 形由 3 個點及 2 個線段構成，頭 L 接尾 L 已經有 6 個點及 4 個線段，要加上一單位線段(下圖以虛線表示)才能形成 1 隻海蟲。

定義「頭 L 和尾 L 的連接方式」要用「頭 L 第 1 點連第 2 點、頭 L 第 2 點連第 3 點、頭 L 第 3 點連尾 L 第 1 點、尾 L 第 1 點連第 2 點、尾 L 的第 2 個點連尾 L 的第 3 個點的 5 個方向」標示。

例如：下圖為「頭 L 和尾 L 是右上右右上接」。



利用「頭部的連接方向」和「頭尾的連接方式」，可以依序找出所有的海蟲圖形，詳細的列表參考(附錄一)，9 種情形的數量統計表如下。

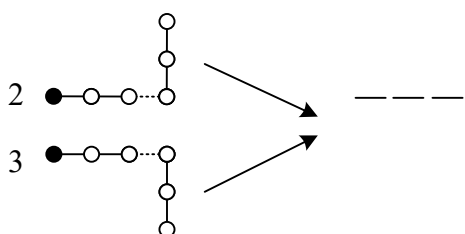
海蟲數量統計表

情形	代號	蟲的種類	個數	編號
1	I-I	I 形蟲	9	1~9
2	I-U	U 形蟲	4	10~13
3	I-L	L 形蟲	12	14~25
4	U-I	U 形蟲	4	26~29
5	U-U	U 形蟲	2	30~31
6	U-L	U 形蟲	6	32~37
7	L-I	L 形蟲	12	38~49
8	L-U	U 形蟲	6	50~55
9	L-L	L 形蟲	16	56~71
合計			71	

三種蟲的個數統整表：

序	蟲的種類	情形數	個數	不分頭尾的個數	書上個數 (不分鏡射)
1	I 形蟲 (領主蟲)	1.I-I	9	6	4
2	U 形蟲 (農夫蟲)	2.I-U、4.U-I、5.U-U、6.U-L、8 L-U	22	12	6
3	L 形蟲 (殭屍蟲)	3.I-L、7.L-I、9.L-L	40	22	12
合計			71	40	22

書上所列個數是「不分頭尾」，而且「左右對稱」的 2 種不同海蟲圖形，也當同一種計算。下圖的編號 2、3 的 I 形蟲(領主蟲)都當成同一種。(參考附錄二)



二、利用六連塊檢驗並確認所有的海蟲個數。

因為海蟲圖形的數目很多，確認沒有遺漏或短少並不容易。我們在研究的過程發現第 52 屆全國科展報告[2，第 20~23 頁]，研究的六連塊圖形總數可以用來檢驗海蟲的個數。因為六連塊是「6 個同樣大小的正方形，邊與邊對齊相接而形成的幾何圖形」，而海蟲圖形是「6 個圓點以 5 個單位線段連接構成的圖形」。可以建立兩種圖形的「對應」方式如下：

《定義 4》六連塊與海蟲圖形的對應

將六連塊的「正方形」對應海蟲圖形的「圓點」，「相鄰兩正方形的邊與邊對齊相接」對應「相鄰兩圓點以單位線段連接」。

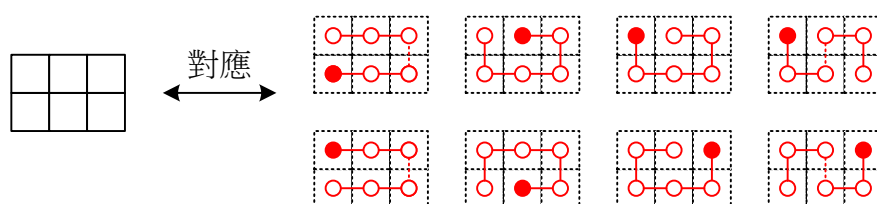
上面的對應方式有幾種情形：

情形 1：一個六連塊對應一個海蟲圖形。

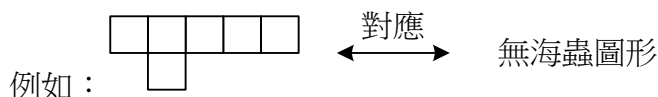


情形 2：一個六連塊對應多個海蟲圖形。

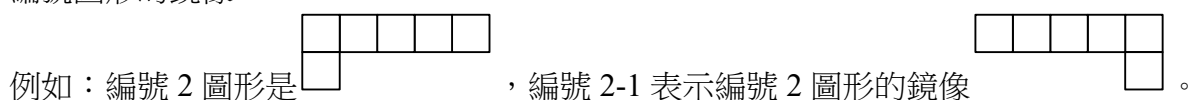
例如：下圖中，1 個六連塊對應 8 個海蟲圖形。



情形 3：一個六連塊沒有對應海蟲圖形。



第 52 屆全國科展報告[2，第 20~24 頁]，提供的六連塊圖形是將旋轉、鏡射後相同的圖形當作同一種，共有 35 種。但實際上鏡射後相同的圖形對應的海蟲圖形是不同的，因此(附錄三)對應表中，也會把鏡射後相同的六連塊圖形列出，再對應到海蟲圖形。「編號-1」表示六連塊原編號圖形的鏡像。



六連塊與海蟲圖形的對應表

六連塊編號	對應的海蟲編號	海蟲數	海蟲累積數量
1	1	1	1
2、2-1	14、15、42、49	4	5
3、3-1	無	0	5
4	無	0	5
5、5-1	10、11、12、13、26、27、28、29	8	13
6	59、66	2	15
7、7-1	16、17、38、44	4	19
8、8-1	無	0	19
9	62、71	2	21
10、10-1	無	0	21
11、11-1	21、23、40、45	4	25
12、12-1	無	0	25
13、13-1	無	0	25
14、14-1	56、60、65、68	4	29
15	無	0	29
16、16-1	無	0	29
17、17-1	19、24、41、47	4	33
18、18-1	58、67	2	35
19、19-1	2、3、5、9	4	39
20、20-1	無	0	39
21、21-1	無	0	39
22、22-1	無	0	39
23、23-1	無	0	39
24、24-1	61、70	2	41
25、25-1	無	0	41
26、26-1	無	0	41
27	6、8、30、31、34、35、52、54	8	49
28、28-1	無	0	49

29、29-1	4、7	2	51
30、30-1	57、63、64、69	4	55
31、31-1	無	0	55
32、32-1	32、33、36、37、50、51、53、55	8	63
33、33-1	無	0	63
34、34-1	18、22、39、46	4	67
35、35-1	20、25、43、48	4	71

經過和六連塊圖形的比對，可以確認海蟲總數是 71 個無誤。

三、在 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值及其排法

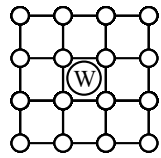
在找出所有海蟲圖形後，我們先找出 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值，且遵循著頭部要比尾巴更接近漩渦的規則。

當 $n \times n$ 陣列的邊長點數 n 為奇數或偶數時，中央漩渦擺放的位置不同，說明如下：

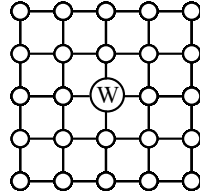
《定義 5》 $n \times n$ 陣列的中央漩渦

如下圖，中央漩渦以 \textcircled{W} 表示。

- 當 n 為偶數時，中央漩渦的位置在正中央 4 個圓點構成的正方形中心。
- 當 n 為奇數時，中央漩渦的位置在正中央圓點上。此情形我們規定海蟲不能擺放在漩渦上。



4*4



5*5

因為 $n \times n$ 陣列有 n^2 個圓點，每隻海蟲有 6 個圓點，可知 n 為 ≥ 3 的自然數，如下表依照 $n^2 \div 6$ 的餘數來進行分析。由於 $n^2 \div 6$ 的餘數僅剩 0、1、3、4 四種可能，所以分四種討論。

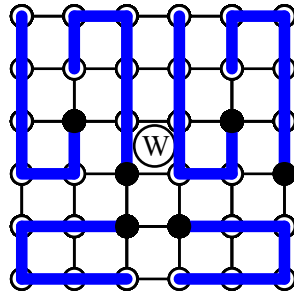
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n^2	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
$n^2 \div 6$ 的餘數	3	4	1	0	1	4	3	4	1	0	1	4

將邊長點數 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、或 $6k+2$ 等 6 類討論 (其中 k 為自然數)。可以知道 $n^2 \div 6$ 餘數所對應的邊長點數 n ，如下表：

情形	$n^2 \div 6$ 的餘數	對應的陣列邊長點數 n
1	0	$6k$
2	1	$6k-1$ 、 $6k+1$
3	3	$6k-3$
4	4	$6k-2$ 、 $6k+2$

1. 若 $n^2 \div 6$ 的餘數是 0，則邊長點數 $n = 6k$ (其中 k 為自然數)。

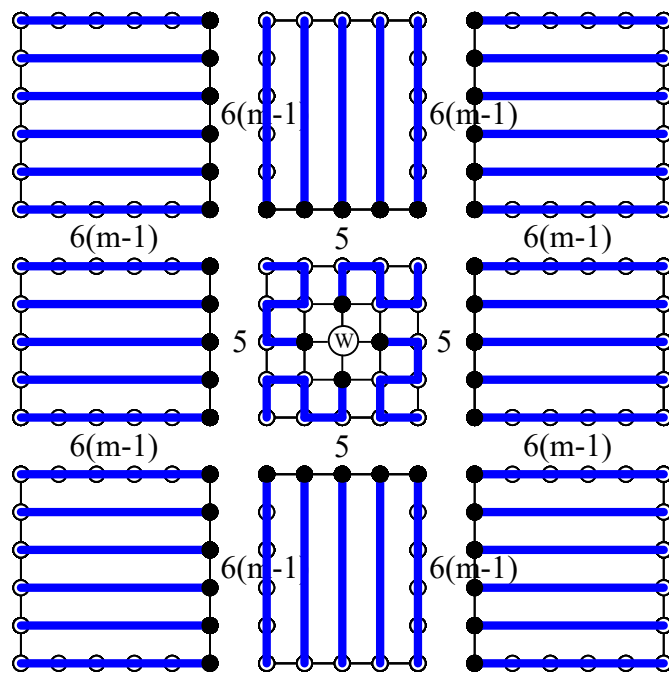
例如：下圖中， 6×6 陣列可以用 6 條海蟲完全填滿，因為 $6k \times 6k$ 陣列可以分割成 k^2 個 6×6 陣列組成，可得 $6k \times 6k$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2$ 個。



2. 若 $n^2 \div 6$ 的餘數是 1，則邊長點數 $n = 6k-1$ 或 $6k+1$ (其中 k 為自然數)。

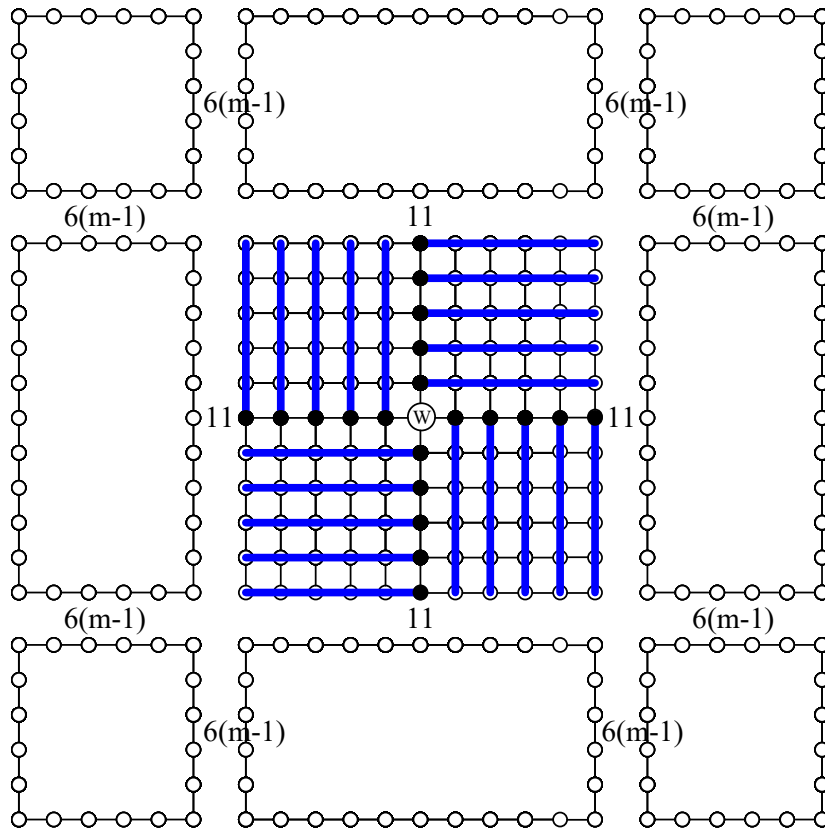
(1) 當 $n = 6k-1$ 時，將 k 分為奇數或偶數討論：

① k 為奇數，設 $k = 2m-1$ (其中 m 為自然數)， $n = 12m-7 = 6(m-1)+5+6(m-1)$ 。可以利用下圖的排法，中央為 5×5 、上下左右相鄰為 $5 \times 6(m-1)$ 、四個角落為 $6(m-1) \times 6(m-1)$ ，使 $(12m-7) \times (12m-7)$ 陣列除中央漩渦外，其餘圓點都可擺滿海蟲。



② k 為偶數，設 $k = 2m$ (其中 m 為自然數)， $n = 12m-1 = 6(m-1)+11+6(m-1)$ 。也可以利用上圖同方式的排法，中央為 11×11 、上下左右相鄰為 $11 \times 6(m-1)$ 、四個角落為 $6(m-1) \times 6(m-1)$ ，如下圖。使 $(12m-1) \times (12m-1)$ 陣列除中央漩渦外，其餘圓點都可擺滿海蟲。

可得 $n \times n = (6k-1) \times (6k-1)$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2-2k$ 個。剩下 1 個圓點。



(2)當 $n = 6k+1$ 時，仿照 $n = 6k-1$ 的討論方式。

可得 $n \times n = (6k+1) \times (6k+1)$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2+2k$ 個。剩下 1 個圓點。

3.若 $n^2 \div 6$ 的餘數是 3，則邊長點數 $n = 6k-3$ (其中 k 為自然數)。仿照 $n = 6k-1$ 的討論方式。

可得 $n \times n = (6k-3) \times (6k-3)$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2-6k+1$ 個。剩下 3 個圓點。

4.若 $n^2 \div 6$ 的餘數是 4，則邊長點數 $n = 6k-2$ 或 $6k+2$ (其中 k 為自然數)。

(1)當 $n = 6k-2$ 時，仿照 $n = 6k-1$ 的討論方式。

可得 $n \times n = (6k-2) \times (6k-2)$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2-4k$ 個。剩下 4 個圓點。

(2)當 $n = 6k+2$ 時，仿照 $n = 6k-1$ 的討論方式。


可得 $n \times n = (6k+2) \times (6k+2)$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值是 $6k^2+4k$ 個。剩下 4 個圓點。

而其他情形， $n = 6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k+1$ 、 $6k+2$ 的海蟲排法請參考附錄四。

我們將結果統整如下表：

情形	邊長點數 n	海蟲個數的最大值	剩下圓點數
1	$6k$	$6k^2$	0
2	$6k-1$	$6k^2-2k$	1
3	$6k+1$	$6k^2+2k$	1
4	$6k-3$	$6k^2-6k+1$	3
5	$6k-2$	$6k^2-4k$	4
6	$6k+2$	$6k^2+4k$	4

四、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討。

原本排入陣列的玩法，因為海蟲多達 71 種形狀，以致討論範圍太過廣泛，難以進行研究，因此我們先從一種海蟲排入陣列的玩法探討，選用最簡單的 1 號海蟲  進行遊戲，下面兩個限制條件只先討論《條件 1》。

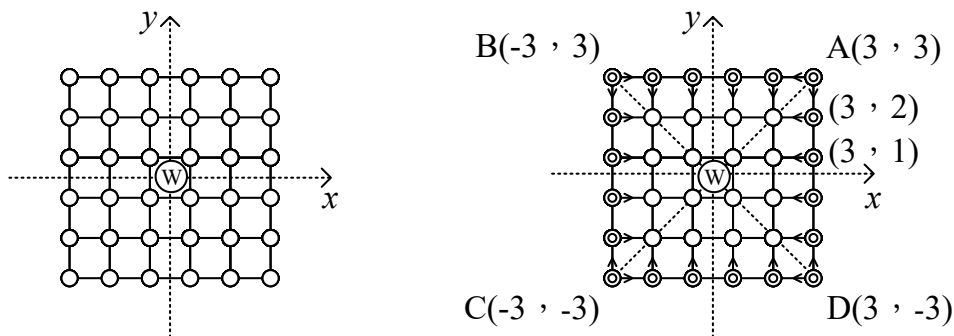
《限制條件》
 1. 每條海蟲的頭部必須比尾部更接近中央漩渦。
 2. 海蟲頭部會釋放毒素，所以兩隻海蟲的頭部不得位於晶格上下左右相鄰的位置。

當 $n \times n$ 陣列的邊長點數 n 為奇數或偶數時，中央漩渦擺放的位置不同，必須分兩種情形討論如下：

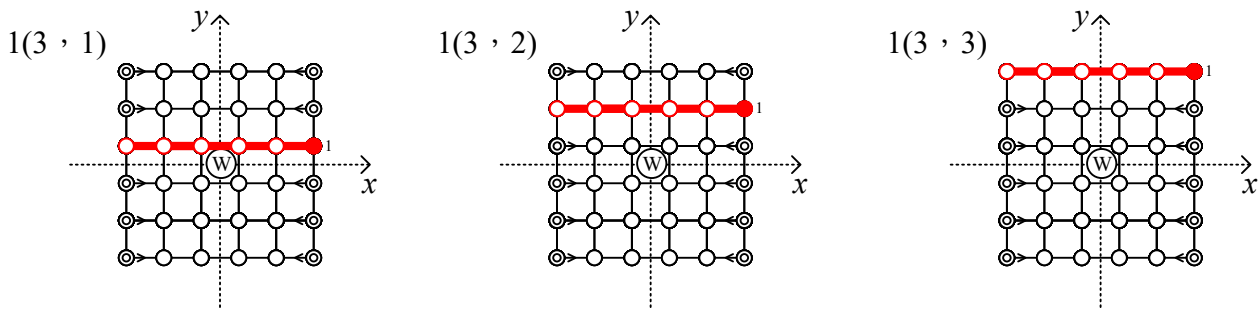
(一) 若 n 為偶數

1. 6×6 陣列

為了方便說明海蟲擺用放位置，當 $n \times n$ 陣列的邊長點數 n 為偶數時，將中央漩渦 \textcircled{W} 定為座標原點 $(0, 0)$ ，過 \textcircled{W} 的水平軸和鉛直軸分別定為 x 、 y 軸。因此海蟲頭部擺放的位置只能是下圖中由 $A(3, 3)$ 、 $B(-3, 3)$ 、 $C(-3, -3)$ 、 $D(3, -3)$ 圍成的正方形外圍陣列(雙圈點列表示)，雙圈點列旁邊的箭頭表示海蟲頭部可以擺放的方向。



因為正方形陣列上下左右和兩條對角線都對稱，甲方第 1 隻海蟲頭部放置的位置，只需考慮 $(3, 1)$ 、 $(3, 2)$ 和 $(3, 3)$ 三種。若第 1 隻海蟲頭部放置的位置是 $(3, 2)$ ，以「 $1(3, 2)$ 」表示。下圖可以看出不論第 1 隻海蟲放在 $(3, 1)$ 、 $(3, 2)$ 和 $(3, 3)$ 哪一點，第 2 隻以後的海蟲都只能水平擺放，最後甲乙雙方都是擺放 3 隻海蟲，因此可能性只有平手一種。



由上面的推論，可得到下面的研究發現。

《研究發現 1》
 6×6 陣列遊戲結果必是甲乙都放 3 隻海蟲，雙方平手。

(二)若 n 為奇數

1. 7×7 陣列

當 $n \times n$ 陣列的邊長點數 n 為奇數時，如下圖左，中央漩渦 \textcircled{W} 仍定為座標原點 $(0, 0)$ ，過 \textcircled{W} 的水平軸和鉛直軸分別定為 x 、 y 軸。海蟲頭部可擺放的位置在下圖中以雙圈點列表示，雙圈點列旁邊的箭頭表示海蟲頭部可以擺放的方向。

因為正方形陣列上下左右和兩條對角線都對稱，再加《條件 1》的限制，甲方第 1 隻海蟲頭部放置的位置，只需考慮 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ 和 $(3, 2)$ 三種。

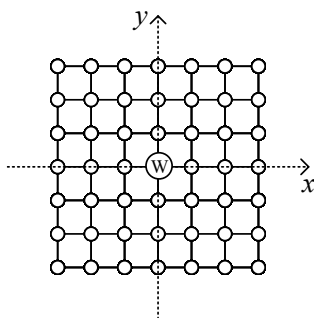


圖 1

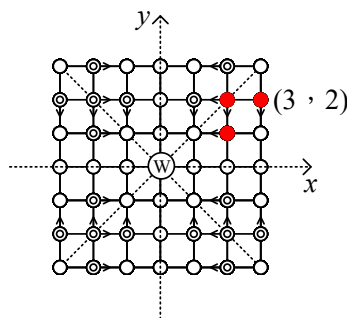


圖 2

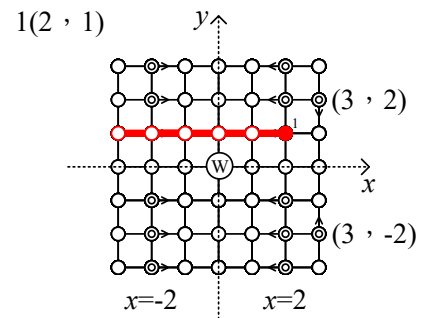


圖 3

(1)若第 1 隻海蟲頭部位置為 $1(2, 1)$

如(圖 3)，第 2 隻能放 $(3, 2)$ 或 $(3, -2)$ 、 $x=2$ 上的 5 個點(稱為 P 型點)或 $x=-2$ 上的 5 個點(稱為 N 型點)三種。

①若第 2 隻海蟲頭部位置為 $2(3, 2)$ 或 $2(3, -2)$

如(圖 4)，第 3 隻以後的海蟲都只能水平擺放，最後甲放 4 隻蟲、乙放 3 隻蟲，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。

②若第 2 隻放 P 型點，例如： $2(2, -2)$

如(圖 5)中，4 對 P、N 型點甲乙雙方都可放 2 隻，甲方只要第 3 隻放 $(3, 2)$ 或 $(3, -2)$ ，最後必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。

③若第 2 隻放 N 型點，例如： $2(-2, -1)$

如(圖 6)中，4 對 P、N 型點甲乙雙方都可放 2 隻，最後必是甲 3、乙 3，雙方平手。因此乙放第 2 隻會選擇此放法。

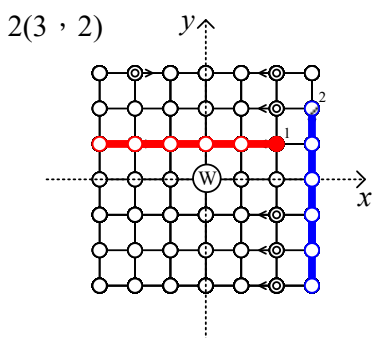


圖 4

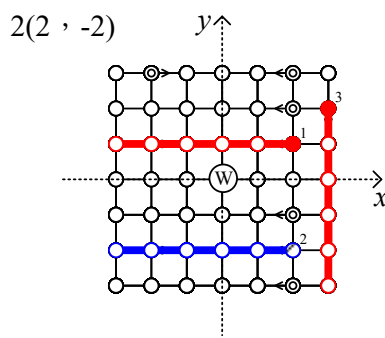


圖 5

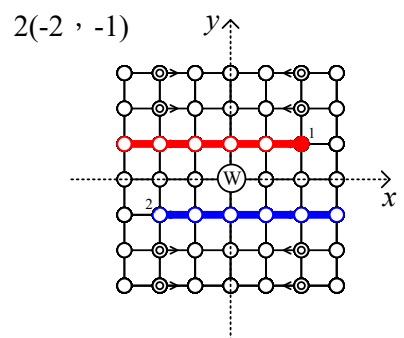
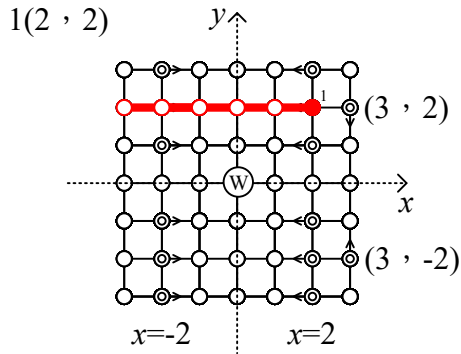


圖 6

(2)若第 1 隻海蟲頭部位置為(2, 2)



如上圖，第 2 隻能放(3, 2)或(3, -2)、P 型點或 N 型點三種。

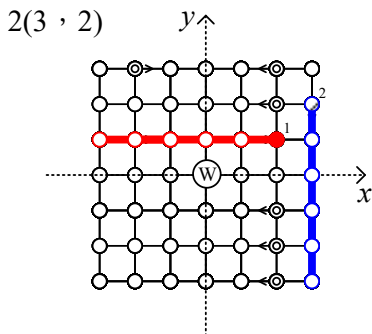


圖 7

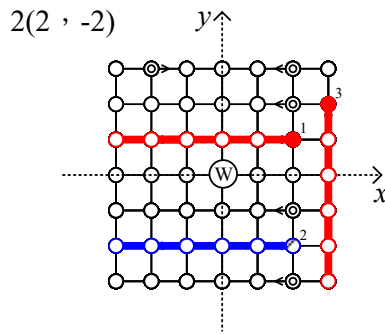


圖 8

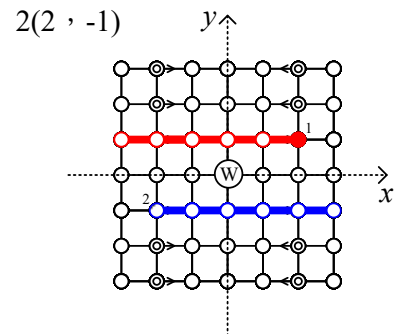


圖 9

①若第 2 隻海蟲頭部位置為 2(3, 2)或 2(3, -2)

如(圖 7)，第 3 隻以後的海蟲都只能水平擺放，最後甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。

②若第 2 隻放 P 型點，例如：2(2, -2)

如(圖 8)，4 對 P、N 型點甲乙雙方都可放 2 隻，甲方只要第 3 隻放(3, 2)，最後必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。

③若第 2 隻放 N 型點，例如：2(-2, -1)

如(圖 9)，4 對 P、N 型點甲乙雙方都可放 2 隻，最後必是甲 3、乙 3，雙方平手。因此乙放第 2 隻會選擇此放法。

(3)若第 1 隻海蟲頭部位置為(3, 2)，如下圖，海蟲可分水平放或鉛直放

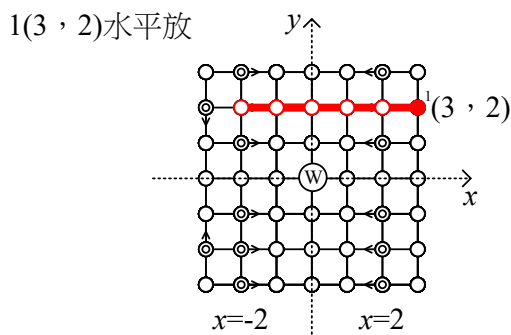


圖 10

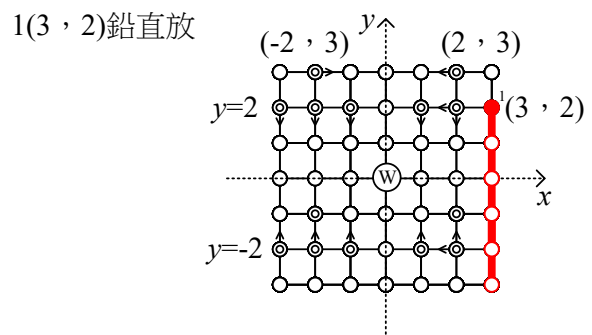


圖 11

- ①若第 1 隻海蟲頭部位置為 $1(3, 2)$ 水平放，圖形和 $1(2, 2)$ 對稱，放法結果相同。
- ②若第 1 隻海蟲頭部位置為 $1(3, 2)$ 鉛直放，
 - 如(圖 10)，第 2 隻能放 $(2, 3)$ 或 $(-2, 3)$ 、 $y=2$ 上的 5 個點(稱為 Q 型點)或 $y=-2$ 上的 5 個點(稱為 M 型點)三種。
 - <1>若第 2 隻海蟲頭部位置為 $2(2, 3)$ 或 $2(-2, 3)$
 - 如(圖 12)，第 3 隻以後的海蟲不管水平或鉛直擺放，最後都是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。
 - <2>若第 2 隻放 Q 型點，例如： $2(-1, 2)$
 - 如(圖 13)，4 對 Q、M 型點甲乙雙方都可放 2 隻，甲方只要第 3 隻放 $(2, 3)$ 或 $(-2, 3)$ ，最後必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。
 - <3>若第 2 隻放 M 型點，例如： $2(2, -2)$
 - 如(圖 14)，4 對 Q、M 型點甲乙雙方都可放 2 隻，甲方只要第 3 隻放 $(2, -3)$ ，最後必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。因此乙放第 2 隻會避免此放法。

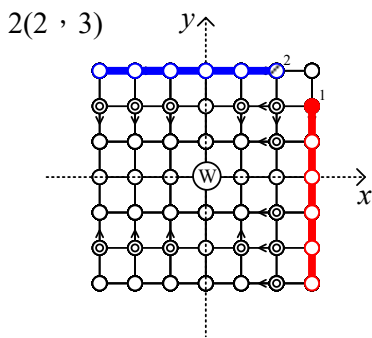


圖 12

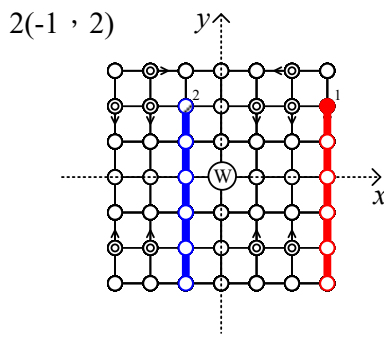


圖 13

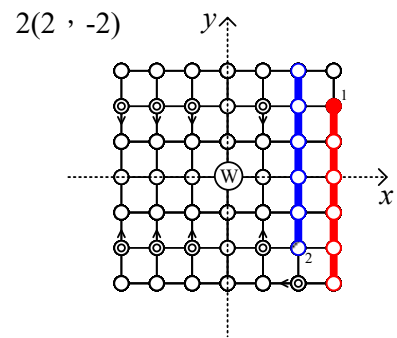


圖 14

由上面的推論，可得到下面的研究發現。

《研究發現 2》
 7×7 陣列遊戲最佳結果必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。

五、利用 Scratch 分析資料驗證第四點的兩個研究發現。

我們利用 Scratch 寫程式，設計出單一海蟲 (I 型海蟲) 下棋遊戲，電腦自動下棋，如下圖所示，並搜集上千筆數據，統計遊戲結果進而分析數據，發現結論與第四點相符。

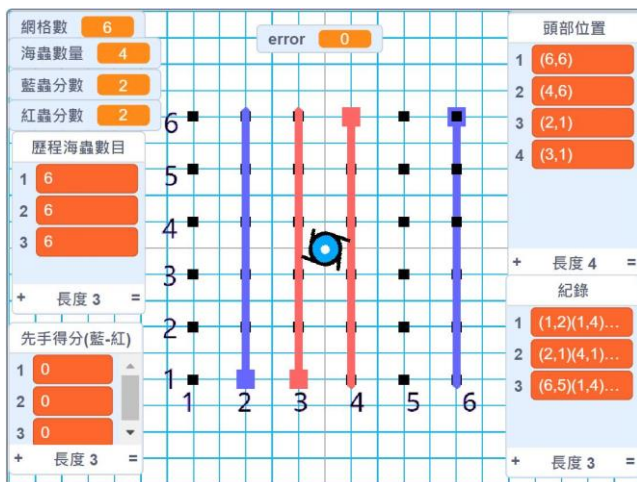


圖 15 電腦自動下棋

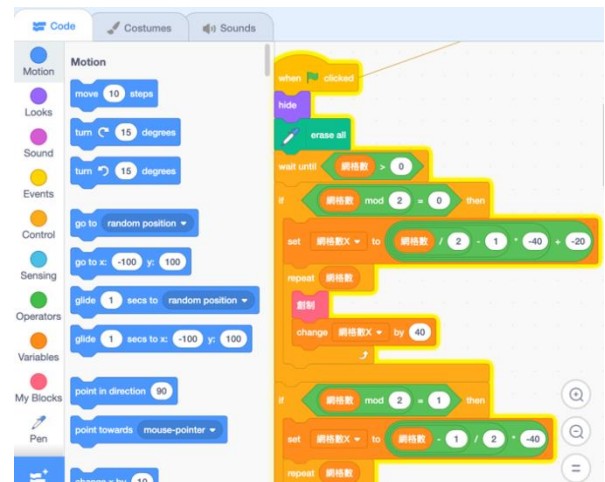


圖 16 後台程式碼

肆、研究結果

- 一、利用「頭部的連接方向」和「頭尾的連接方式」，找出所有的海蟲圖形共有 71 種。其中旋轉對稱的圖形視為相同，鏡射對稱的圖形視為不同。
- 二、利用六連塊對應海蟲圖形，檢驗並確認所有的海蟲個數是 71 種。
- 三、將邊長點數 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、或 $6k+2$ 等 6 類討論(其中 k 為自然數)，找出 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值如下表。(其排法參考附錄三)

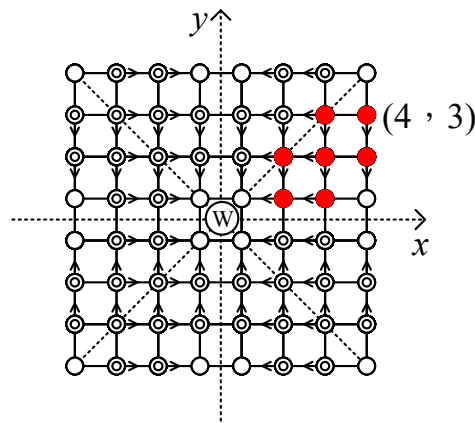
情形	邊長點數 n	海蟲個數的最大值	剩下圓點數
1	$6k$	$6k^2$	0
2	$6k-1$	$6k^2-2k$	1
3	$6k+1$	$6k^2+2k$	1
4	$6k-3$	$6k^2-6k+1$	3
5	$6k-2$	$6k^2-4k$	4
6	$6k+2$	$6k^2+4k$	4

- 四、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討。得到結果如下：
 1. 6×6 陣列遊戲結果必是甲乙都放 3 隻海蟲，雙方平手。
 2. 7×7 陣列遊戲最佳結果必是甲 4、乙 3，甲勝 1 隻。
- 五、我們利用 Scratch 寫程式，設計出單一海蟲 (I 型海蟲) 電腦自動下棋的遊戲，並搜集上千筆數據，統計遊戲結果進而分析數據，發現結論與第四點相符。

伍、討論

可以仿照第四部份的方式，繼續討論 8×8 陣列的最佳玩法和 6×6 陣列相同的座標定法，將中央漩渦[Ⓜ]定為座標原點(0, 0)，過[Ⓜ]的水平軸和鉛直軸分別定為 x 、 y 軸。海蟲頭部可擺放的位置在下圖中以雙圈點列表示，雙圈點列旁邊的箭頭表示海蟲頭部可以擺放的方向。

因為正方形陣列上下左右和兩條對角線都對稱，再加《條件 1》的限制，甲方第 1 隻海蟲頭部放置的位置，有(2, 1)、(2, 2)、(3, 1)、(3, 2)、(3, 3)、(4, 2)和(4, 3)，共七種(如下圖)。因為陣列變大，討論的情形越來越多，使得我們在有限的時間內無法充分地探究陣列大小與遊戲致勝方式是否有規律性？未來若有機會，我們想要繼續利用 Scratch 軟體做進一步研究。



陸、參考文獻資料

- 1.(2003)柯利弗德·皮寇弗(Clifford A. Pickover)著；蔡承志、楊台勇譯（民 92）。數字的異想世界。第 25 章亞特蘭提斯的夢幻海蟲(62-64,383 頁)。臺北市，商周出版：城邦文化發行。
- 2.(2012)林翊欽、李暉霆、王惠萱、王佑恩、周禹彤（民 101）。天羅地網尋芳蹤只為盡訪六連塊。全國科展第 52 屆國小組編號 080414 作品說明書。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/080414.pdf>

【評語】 030403

為一有趣的數學對局遊戲，作者將陣列邊長 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、或 $6k+2$ 等六類，並找出各類陣列的海蟲個數最大值，內容豐富，值得鼓勵。根本的問題可考慮遊戲的致勝策略，對於 7×7 的棋盤（或是更簡單的， 6×6 的棋盤），在不限定只能使用直線六連方的情況下，致勝的策略是什麼？如果可以把重心放在這個部分，說不定會有更多更有趣的結論。

作品簡報

海蟲的棋盤遊戲

科別：數學科/組別：國中組

01 前言

研究動機：我們由《數字的異想世界》這本書中發現了其中一個有趣的遊戲問題，是關於海蟲的陣列遊戲。

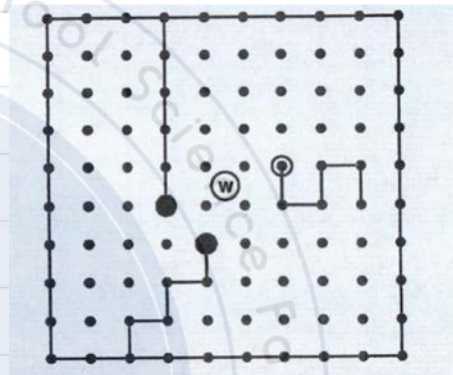


圖1-1

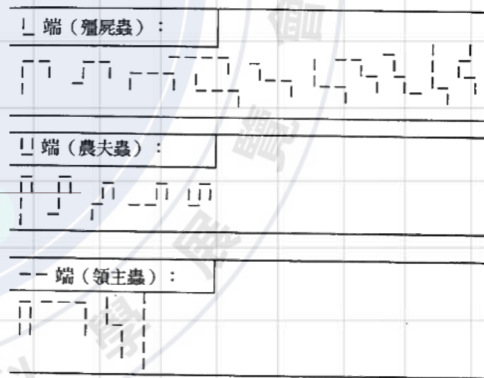


圖1-2

研究目的

- 一、依海蟲形狀進行分類及找出海蟲的所有個數。
- 二、利用六連塊檢驗並確認所有的海蟲個數。
- 三、在 $n \times n$ 陣列中可擺放海蟲個數的最大值及其排法。
- 四、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討。

文獻回顧

我們利用Google搜尋關鍵字「亞特蘭提斯的夢幻海蟲科展」或「海蟲科展數學」進行文獻探討，目前均找不到相關的科展研究報告。


第52屆全國科展報告[2]，第20~24頁，提供的六連塊圖形是將旋轉、鏡射後相同的圖形當作同一種，共有35種六連塊。我們用來比對求出的海蟲圖形數量是否正確。



02 研究過程 與方法


一、所有海蟲的分類及個數

《定義1》海蟲的分類

所有海蟲圖形都是由5個單位線段連接6個圓點構成，頭部以黑點表示。當進行棋盤遊戲時，甲方使用黑頭海蟲，乙方使用斜線頭海蟲。

1.若海蟲頭尾都有 ，代號L-L，屬於殭屍蟲，簡稱L形蟲。

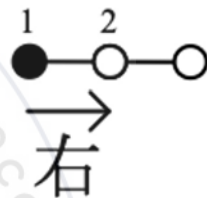
2.若海蟲頭部有 ，尾部有時 ，代號I-U，屬於農夫蟲，簡稱U形蟲。

3.若海蟲頭尾都有 ，代號I-I，屬於領主蟲，簡稱I形蟲。

另代號L-U、U-L、I-L、L-I請參考說明書內文。

《定義2》海蟲頭部的連接方向

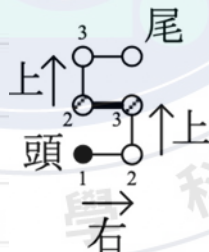
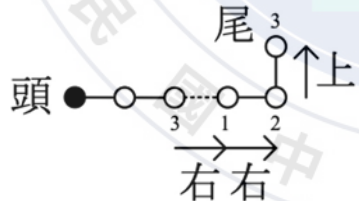
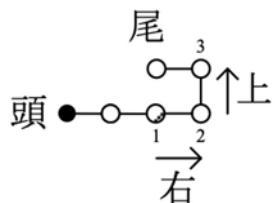
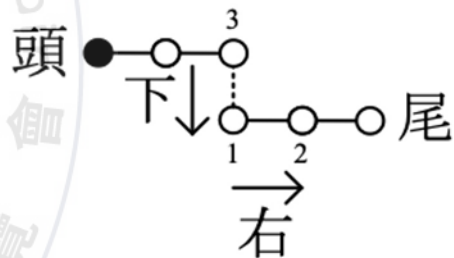
標示「頭部的連接方向」只需考慮「頭部向右接」，若頭部是I形，向右接只有右圖1種。以「頭I的第1點連第2點的方向」，作為標示「頭I的連接方向」，右圖記為「頭I向右接」。



《定義3》頭尾的連接方式

以I-I為例，另外8種情形請參考說明書內文。

因為每個I形由3個點及2個線段構成，頭I接尾I已經有6個點及4個線段，要加上一單位線段(示意圖以虛線表示)才能形成1隻海蟲。

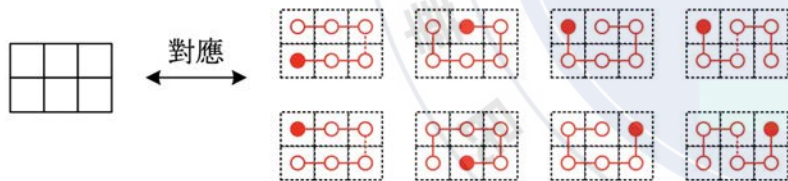


海蟲種類與個數整理表

序	蟲的種類	情形數	個數	不分頭尾的個數	書上個數 (不分鏡射)
1	I形蟲 (領主蟲)	1.I-I	9	6	4
2	U形蟲 (農夫蟲)	2.I-U、4.U-I 、5.U-U、 6.U-L、8 L-U	22	12	6
3	L形蟲 (殭屍蟲)	3.I-L、7.L-I、 9.L-L	40	22	12
合計			71	40	22

二、利用六連塊檢驗並確認所有的海蟲個數

《定義4》六連塊與海蟲圖形的對應
 將六連塊的「正方形」對應海蟲圖形的「圓點」，「相鄰兩正方形的邊與邊對齊相接」對應「相鄰兩圓點以單位線段連接」

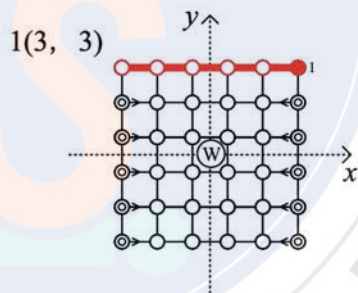
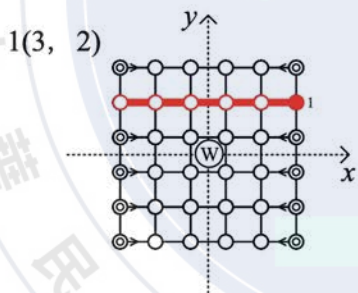
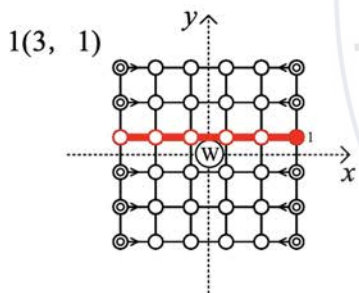
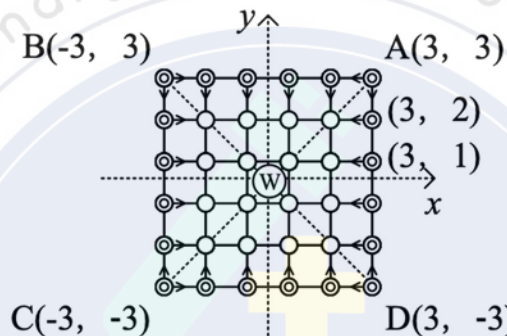
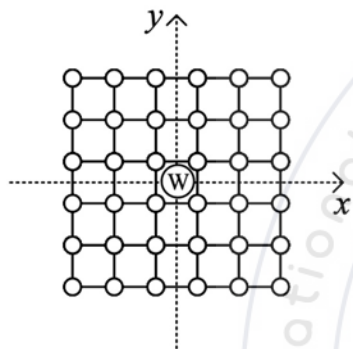


三、在 $n \times n$ 陣列中可擺放海蟲個數的最大值及其排法

將邊長點數 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、或 $6k+2$ 等6類討論 (其中 k 為自然數)。
 可以知道餘數所對應的邊長點數 n 。如下表：

情形	邊長點數 n	海蟲個數的最大值	剩下圓點數
1	$6k$	$6k^2$	0
2	$6k-1$	$6k^2-2k$	1
3	$6k+1$	$6k^2+2k$	1
4	$6k-3$	$6k^2-6k+1$	3
5	$6k-2$	$6k^2-4k$	4
6	$6k+2$	$6k^2+4k$	4

四、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討



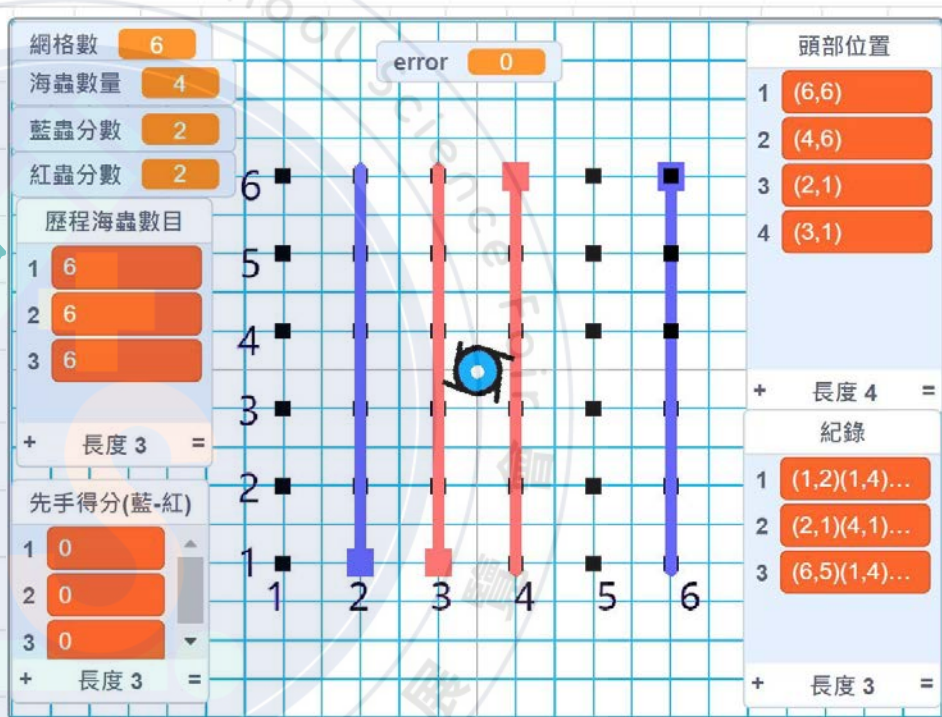
說明：

原本排入陣列的玩法，因為海蟲多達71種形狀，以致討論範圍太過廣泛，難以進行研究，因此我們先從一種海蟲排入陣列的玩法探討，選用最簡單的1號海蟲進行遊戲。

《研究發現1》陣列遊戲結果必是甲乙都放3隻海蟲，雙方平手。

《研究發現2》陣列遊戲最佳結果必是甲4、乙3，甲勝1隻。

03 結論與建議



我們利用Scratch軟體，設計出6*6海蟲棋盤遊戲，來幫助我們驗證研究發現的結果。

結論

一、利用「頭部的連接方向」和「頭尾的連接方式」，找出所有的海蟲圖形共有71種。

二、利用六連塊對應海蟲圖形，檢驗並確認所有的海蟲個數是71種。

三、將邊長點數 n 分成 $6k-3$ 、 $6k-2$ 、 $6k-1$ 、 $6k$ 、 $6k+1$ 、或 $6k+2$ 等6類討論(其中 k 為自然數)，找出 $n \times n$ 陣列可擺放海蟲個數的最大值如ppt第9頁表格。

四、只使用一種海蟲排入陣列的玩法探討。得到結果如下：

1. 陣列遊戲結果必是甲乙都放3隻海蟲，雙方平手。
2. 陣列遊戲最佳結果必是甲4、乙3，甲勝1隻。

網格數 6
海蟲數量 1
藍蟲分數 1
紅蟲分數 0
歷程海蟲數目 (empty)
先手得分(藍-紅) (empty)

頭部位置 1 (-3,-3)
請輸入尾巴朝向 (右0下1左2上3)
+ length 1 = 紀錄 (empty)

+ length 0 =

(3,1) (-3,2) (3,-2) (-3,-1) (3,3) (3,-3) (-3,2) (-3,-1) (-3,1) (-3,-3) (3,-2) (-3,3) (3,3) (2,-3) (-1,3) (-3,-3) (1,3) (-2,-3) (1,3) (3,-3) (-3,-3) (2,3) (-2,3) (-1,-3) (-3,2) (-3,1) (-3,-3) (-3,-2) (3,3) (-3,-1) (3,-2) (3,2) (-3,-3) (3,-1) (-3,1) (-3,3)...

建議：因為正方形陣列上下左右和兩條對角線都對稱，再加《條件1》的限制，甲方第1隻海蟲頭部放置的位置，有(2, 1)、(2, 2)、(3, 1)、(3, 2)、(3, 3)、(4, 2)和(4, 3)，共七種。因為陣列變大，討論的情形越來越多，使得我們在有限的時間內無法充分地探究陣列大小與遊戲致勝方式是否有規律性？未來若有機會，建議可利用scratch繼續討論8*8以上陣列的最佳玩法。

參考文獻

1

(2003)柯利弗德·皮寇弗(Clifford A. Pickover)著；蔡承志、楊台勇譯(民92)。數字的異想世界。第25章亞特蘭提斯的夢幻海蟲(62-64,383頁)。城邦文化發行。

2

(2012)林翊欽、李暉靈、王惠萱、王佑恩、周禹彤(民101)。天羅地網尋芳蹤只為盡訪六連塊。全國科展第52屆國小組編號080414作品說明書。



感謝聆聽!

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**.