中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030402

拿破崙的多角戀-與初始 n 邊形有約

學校名稱：臺南市私立瀛海高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 黃博瑞	黃世諺
國三 劉子琦	鄭宏偉

關鍵詞：拿破崙定理、初始多邊形、正 n 邊形

摘要

在「幾何明珠」一書中提到拿破崙定理及逆拿破崙定理。本研究透過數學繪圖軟體 GeoGebra 作圖，嘗試以逆拿破崙定理找出正多邊形的可能初始多邊形，接著歸納其性質，並確認只有符合該性質的初始多邊形，才能夠透過「拿破崙法」得到原本的拿破崙正多邊形。

我們先從三邊形及四邊形開始，接著推廣至正多邊形，並分成奇、偶數邊進行討論，最終希望盡可能透過實際的量測來證明初始多邊形的特性，並得到初始多邊形性質的通論。

Abstract

"Napoleon's theorem" and the "inverse Napoleon's theorem" are mentioned in the book "Geometry Pearl". We use the mathematical drawing software GeoGebra to find out the possible "initial polygons" of regular polygons by "inverse Napoleon's theorem". Then summarize its properties, and confirm that only the "initial polygons" that meet the properties can obtain the original "Napoleon regular polygon" through the "Napoleon method".

We start with triangles and quadrilaterals, then generalize to regular polygons and discuss them as odd and even sides. Finally, we hope to prove the properties of the "initial polygons" as much as possible by practical measurements, and obtain a general theory of the properties of the "initial polygons".

壹、 研究動機

從過去歷屆的科學展覽作品中尋找可行的研究題目時，發現在第 53 屆全國中小學科展中國中組有一個題目探討拿破崙定理對四邊形的推廣；在第 55 屆全國科展的高中組出現了一個題目探討了拿破崙定理對多邊形之推廣，然而對於奇數與偶數多邊形的拿破崙定理的推廣並沒有進一步的證明；在第 58 屆全國科展的國中組也從零開始，探討了初始多邊形及拿破崙多角星的性質；第 60 屆全國科展的國中組中則有對於拿破崙三角形的重心相對位置的因素影響分析。在過去的科展中對於初始多邊形的性質探討不多，因此引起了我們的好奇，想要深入了解初始多邊形於拿破崙定理在多邊形探討中所扮演的角色，並希冀可以針對初始多邊形與拿破崙多邊形的關係有更深入的探究並證明之。

貳、 研究目的

一、找出作為正 n 邊形的初始 n 邊形應具有何種條件。

二、找出初始多邊形的性質及其在拿破崙定理中所扮演的角色。

參、 研究設備及器材

紙、筆、尺規、電腦、數學繪圖軟體 GeoGebra

肆、 研究過程或方法

一、名詞釋義

(一)拿破崙定理

在「幾何明珠」一書中的第十八章提到拿破崙定理，其描述為「以三角形各邊為邊分別向外側作等邊三角形，則三個等邊三角形的中心構成一個等邊三角形」。

(二)初始 n 邊形

應用拿破崙定理的方法所得到的正三角形被稱為「拿破崙三角形」，而其作圖方法稱作「拿破崙法」，以此法得到的正 n 邊形就稱為「拿破崙正 n 邊形」，而原本給定的 n 邊形則稱為「初

始 n 邊形」。

(三)逆拿破崙定理

作一正 n 邊形，向內以頂點為頂角，作$180° -$(正 n 邊形頂角)的等腰三角形，可得出一 n 邊形。(此 n 邊形即為原正 n 邊形之初始 n 邊形)。

(四)道格拉斯定理

道格拉斯定理又稱為道格拉斯-諾伊曼定理、諾伊曼-道格拉斯-佩特定理或佩特定理；拿破崙定理是道格拉斯定理的特例(只作一次正 n 邊形，相當於只作一次的等腰三角形，但是道格拉斯定理卻不只有作一次等腰三角形)。其定理敘述如下：若一任意的 n 邊形A_0，每邊上往外畫頂角為$\frac{2k\pi}{n}$ $(1 \le k \le n-2)$的等腰三角形，再針對各等腰三角形的頂角形成的 n 邊形再進行類似的作法，但需要不同的數字 k，一直到用完所有滿足$1 \le k \le n-2$的數值為止(可以不依大小順序)最後形成的 n 邊形A_{n-2}會是正多邊形，且其重心和原 n 邊形A_0的重心重合。

二、定理證明

(一)拿破崙定理的證明(三角形)

法一：

如圖 1，分別以ΔABC的三邊長為邊長向外側作正三角形，$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$。

分別連接$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$。在$\Delta ABB'$、$\Delta AC'C$中，$\because \overline{AB} = \overline{AC'}$，$\overline{AB'} = \overline{AC}$，

$\angle BAB' = \angle BAC + 60° = \angle C'AC$， $\therefore \Delta ABB' \cong \Delta AC'C$(SAS 全等)，$\overline{BB'} = \overline{C'C}$。

同理可證，$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{C'C}$。

分別連接$\overline{BP}$、$\overline{BQ}$。在ΔPBQ、$\Delta C'BC$中，$\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC'}$，($\because$ P正$\Delta ABC'$之中心，即為重心)，$\overline{BQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC}$，($\because$ Q 為正$\Delta A'BC$之中心，即為重心)，$\angle PBQ = \angle ABC + \angle PBA + \angle CBQ = \angle ABC + 30° + 30° = \angle ABC + 60° = \angle ABC + \angle ABC' = \angle CBC'$($\because$ 、Q 為正三角形之重心，$\therefore \angle PBA = \angle CBQ = 30°$)，$\therefore \Delta PBQ \sim \Delta C'BC$(SAS 相似)，$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{C'C}$。同理可證$\overline{PR} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BB'}$，$\overline{QR} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{A'A}$。又$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{C'C}$，$\therefore \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR}$，$\therefore \Delta PQR$為正三角形。

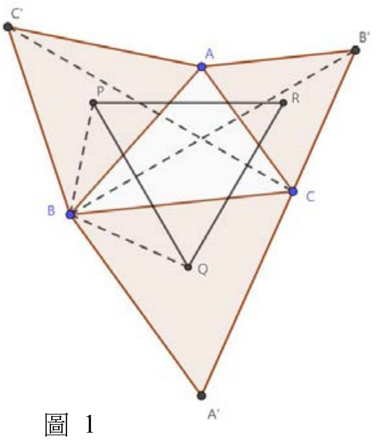


圖 1

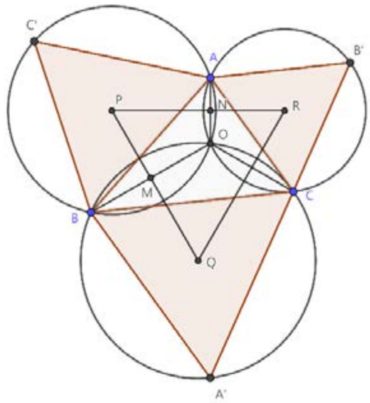


圖 2

法二：

如圖 2，分別以 P、Q、R 為圓心各作一個外接圓，圓 P、圓 Q 和圓 R 分別過 A、B 兩點，B、C 兩點和 A、C 兩點。設圓 P 和圓 R 交於 A、O 兩點，圓 P 和圓 Q 交於 B、O 兩點，圓 Q 和圓 R 交於 C、O 兩點。連接$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$。

設$\Delta ABC'$、$\Delta AB'C$皆為正三角形，$\because \angle AOB + \angle C' = 180° = \angle AOC + \angle B'$(圓內接四邊形對角互補)，且$\angle C' = 60° = \angle B'$，$\therefore \angle AOB = \angle AOC = 120°$。

$\because \angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 360°$，$\therefore \angle BOC = 120°$

又$\angle A' = 60°$，$\angle A' + \angle BOC = 60° + 120° = 180°$，$\therefore$ B、O、C、A'四點共圓(對角互補)。

且點 O 在$\Delta A'BC$的外接圓上，∴點 O 是三個正三角外接圓的公共交點。

設$\overline{PQ}$與$\overline{BO}$交於點 M，$\overline{PR}$與$\overline{AO}$交於點 N。

$\because \overline{PQ}$為圓 P 與圓 Q 之連心線，且$\overline{BO}$為圓 P 上之一弦亦為圓 Q 上之一弦。

$\therefore \overline{PQ} \perp \overline{BO}$，$\angle PMO = 90°$。同理可得，$\angle PNO = 90°$。

又$\angle PMO + \angle PNO = 180°$，∴四邊形 PMNO 為圓內接四邊形(對角互補)。

可得$\angle NPM + \angle NOM = 180° = \angle NPM + \angle AOB = \angle NPM + 120°$，$\therefore \angle NPM = 60° = \angle RPQ$。

同理可證$\angle PQR = \angle PRQ = 60°$，$\therefore \Delta PQR$ 為正三角形。

(二)逆拿破崙定理的證明(三角形)

如 3 所示，分別以ΔABC的三邊長為邊長，向三角形內側作頂角為$120°$的等腰三角形ΔABP、ΔBCQ、ΔACR (在 GeoGebra 中，作圖方式是以畫指定角的作法處理的，分別以邊的兩端為頂點作底角$30°$的指定角，交於頂角，連接兩邊即為所求知等腰三角形)。透過逆拿破崙法向那側作三角形而得到的正三角形又被稱為內拿破崙三角形。

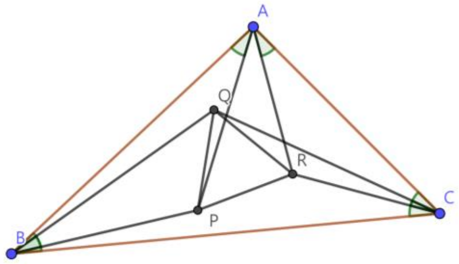


圖 3

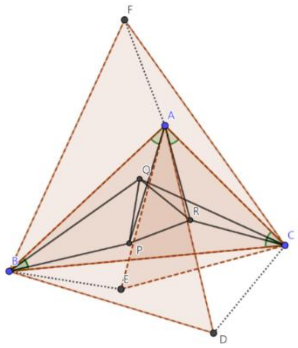


圖 4

證明如下：

首先透過利用逆拿破崙法所畫出的三角形還原出三個正三角形，ΔBCF、ΔABD、ΔACE，如圖 4 所示。分別連接$\overline{AF}$、$\overline{BE}$、$\overline{CD}$。

在ΔACF、ΔECB 中，$\overline{AC}=\overline{EC}$，$\overline{CF}=\overline{CB}$($\because \Delta BCF$ 和ΔACE 為正三角形)，

$\angle BCF=\angle BCA+\angle ACF=60°=\angle ECA=\angle ECB+\angle BCA$， $\therefore \angle ACF=\angle ECB$，

$\therefore \Delta ACF\cong\Delta ECB$(SAS 全等)，$\overline{AF}=\overline{EB}$。同理可證，$\overline{AF}=\overline{CD}$，$\therefore \overline{AF}=\overline{EB}=\overline{CD}$。

在ΔPBQ、ΔABF中，$\overline{BQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BF}$，($\because$ Q為正ΔBCF重心)，$\overline{PB}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$，($\because$ P 為正ΔABD重心)，$\angle ABQ+\angle QBP=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°=\angle ABF+\angle ABQ$， $\therefore \angle QBP=\angle ABQ$，$\therefore$

$\Delta PBQ\sim\Delta ABF$(SAS 相似)，$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AF}$。同理可證，$\overline{PR}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BE}$，$\overline{QR}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{CD}$。

又$\overline{AF}=\overline{BE}=\overline{CD}$，$\therefore \overline{PQ}=\overline{PR}=\overline{QR}$，$\therefore \Delta PQR$為正三角形，得證。

三、定理推廣至四邊形之證明

任意四邊形可約略分為兩類，一為平行四邊形，包含了矩形、正方形，一為非平行四邊形。

從逆拿破崙定理可知，事實上只有平行四邊形作為初始四邊形時，才能夠畫出正方形，因此並非所有的四邊形皆可為初始多邊形。這在過去的歷屆科展就已經有過探討了，以四邊形的四個邊，分別向外作正方形，依次連接四個正方形的重心，其結果如表 1：

表 1

初始圖形	平行四邊形	等腰梯形	鳶形	直角梯形
結果圖形	正方形	鳶形	等腰梯形	有一直角之四邊形

本研究從逆拿破崙定理的方式來嘗試確認證明只有平行四邊形向外作正方形時，各個重心的連接才能形成正方形。

如圖 5，已知一正方形 ABCD，在正方形內側任取一點 P，以 A 為頂角作一等腰三角形 ΔPAQ，其中$\angle PAQ = 90°$，$\overline{PA} = \overline{AQ}$ 。在 GeoGebra 中，作圖方式是以畫指定角的作法處理的，先連接$\overline{PA}$，以 A 為頂點，$\overline{PA}$為一邊，順時針作底角$90°$的指定角，再以 P 為頂點，$\overline{PA}$為一邊，逆時針作底角$45°$的指定角，交於 Q，連接$\overline{PQ}$和$\overline{AQ}$兩邊即為所求之等腰三角形。依序以點 B、點 C、點 D 重複上述動作，進而得到 R 點、S 點，連接$\overline{QR}$、$\overline{RS}$和$\overline{SP}$，可得四邊形 PQRS，欲求證由逆拿破崙法從正方形得到的四邊形 PQRS，應為平行四邊形。

證明如下：

在 ΔAPD 和ΔAQB 中 ， $\overline{PA} = \overline{QA}$，$\overline{DA} = \overline{BA}$($\because$ ABCD 為正方形)，$\angle PAD + \angle PAB = 90° = \angle QAB + \angle PAB$($\because$ ΔPAQ 為等腰直角三角形)，$\angle PAD = \angle QAB$， $\therefore \Delta APD \cong \Delta AQB$(SAS 全等) ，$\overline{PD} = \overline{QB}$。又$\Delta QBR$ 和ΔPDS皆為等腰直角三角形，且$\overline{PD} = \overline{QB}$，$\therefore \Delta QBR \cong \Delta PDS$(ASA 全等)，$\overline{QR} = \overline{PS}$。同理可證，$\Delta APQ \cong \Delta CRS$，$\overline{PQ} = \overline{RS}$。

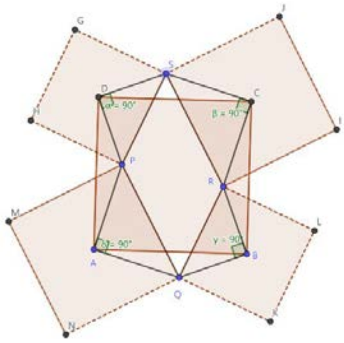
在四邊形 PQRS 中，$\overline{QR} = \overline{PS}$，$\overline{PQ} = \overline{RS}$，∴PQRS 為平行四邊形(∵兩組對邊分別相等)，上述得證。

進一步，透過 Geogeba 對於任意點 P 的移動，可得到下列圖形的狀況。

如圖 6 所示，當點 P 落在正方形 ABCD 的任一邊上時，使用逆拿破崙法所畫出得到的四邊形是一個矩形。

如圖 7 所示，當點 P 恰好與正方形 ABCD 的任一邊上的中點重合時，使用逆拿破崙法所畫出來的圖形是一個正方形，也是屬於矩形的一種，是圖 6 的一個特例。

圖 5



如圖 8 所示，當任意點 P 取在正方形 ABCD 的外部時，使用逆拿破崙法所畫出來的圖形仍舊是一個平行四邊形，但是這個平行四邊形 PQRS 未必全部的頂點都會落在正方形 ABCD 的內部。

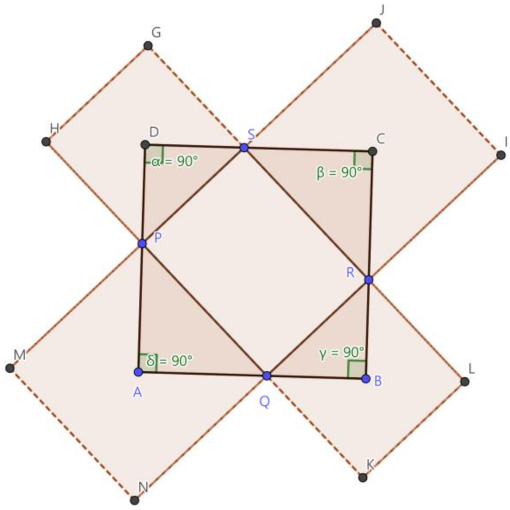


圖 6

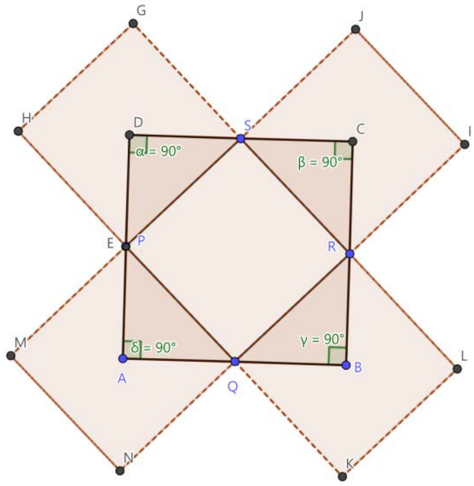


圖 7

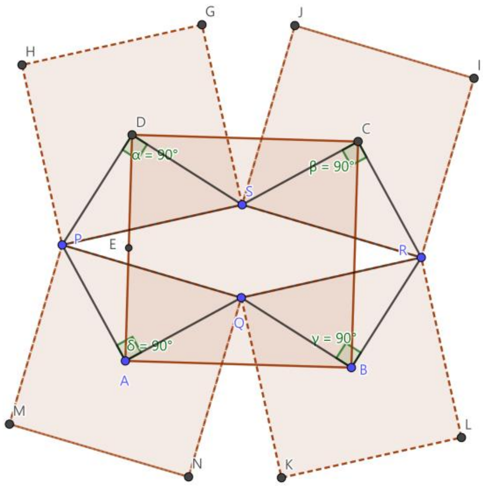


圖 8

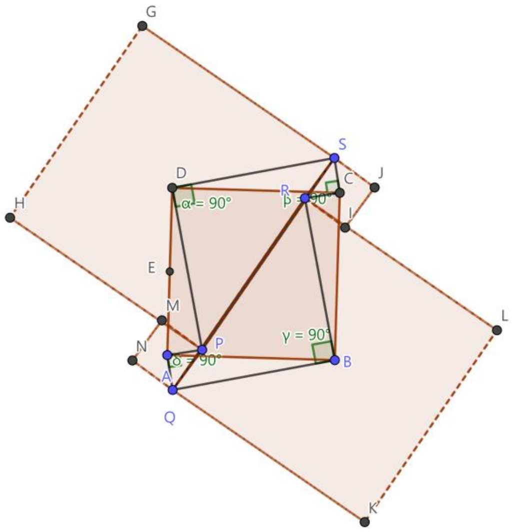


圖 9

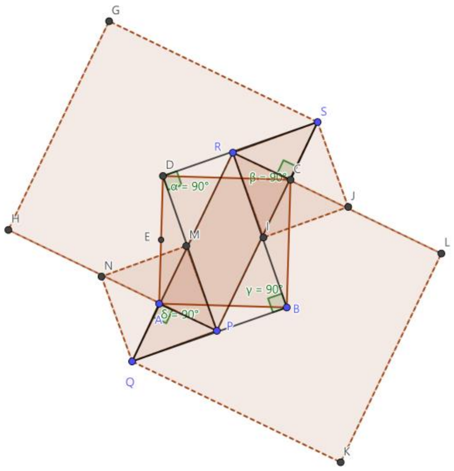


圖 10

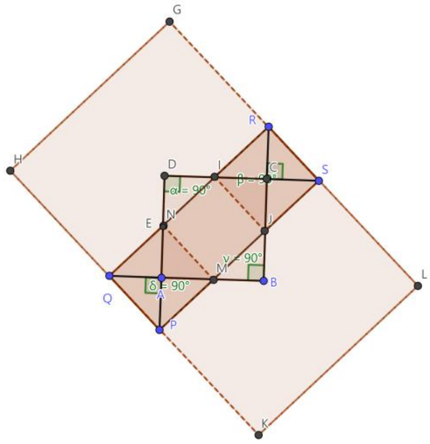


圖 11

如圖 9 所示，隨著任意點 P 的移動，特別地，當 P、Q、R、S 四點共線時，使用逆拿破

崙法是畫不出來一個四邊形的，只能畫出一條直線，換句話說，在某些限制條件下，共線的四個點是可以透過拿破崙法畫出一個正方形的，這是值得探討的地方。

如圖 10 所示。任意點 P 從 A 點的左側移動到 A 點的右側時，使用逆拿破崙法所畫出來的圖形仍舊是一個平行四邊形,而這個平行四邊形 PQRS 的四個頂點全部都落在正方形 ABCD 的外部。

如圖 11 所示，如果一開始的任意點 P 落在$\overleftrightarrow{AD}$上，也就正方形某一邊的延長線上時，那麼使用逆拿破崙法所畫出來的圖形，或使得所畫出的四邊形 PQRS 的四個頂點都分別落在各個邊的延長線上，進而形成了一個矩形，這個矩形的四個頂點皆落在正方形 ABCD 的外部。

因此，可以推論得知，當所取的任意點 P 落在各邊上或各邊的延長線上時，使用逆拿破崙法所畫出的四邊形會是一個矩形；而其他的點，則只能畫出平行四邊形。

所以我們可以確認只有當初始四邊形為平行四邊形時,使用拿破崙法才能夠畫出正方形。此外，從圖 6~圖 11 中，我們也可以觀察到，一個正方形可以從很多個不同的初始四邊形透過拿破崙法而得到，例如正方形、矩形、和平行四邊形等。但是一個初始四邊形頂多只能畫出一個正方形。

從上述的探討得知，如果初始四邊形是任意四邊形是無法透過僅僅拿破崙法畫出正方形的，因此考慮使用道格拉斯定理所提供的方法來畫出正方形。

如圖 12 所示，已知一任意四邊形 ABCD (不為平行四邊形)，應用道格拉斯定理的作圖法，先以四邊形 ABCD 的各邊往外作，當$k = 1$時，頂角為$90°$的等腰三角形，即等腰直角三角形。在 GeoGegra 中，作圖方法是以$\overline{AB}$為一邊，A 和 B 為頂角，分別順時針、逆時針作指定角為$45°$的角度，得到交點 G，則ΔABG即為頂角為$90°$的等腰三角形，依次可畫出其他三個等腰直角三角形ΔBCF、ΔCDE 和ΔADH。分別連接$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HE}$，可得一四邊形 EFGH，即A_1四邊形。繼而，再以四邊形 EFGH 的各邊往外作，當$k = 2$時，頂角為$180°$平角的等腰三角形，但是沒有這種三角形，所以其實就轉換成在各邊上分別取中點 I、J、K、L，分別連接$\overline{IJ}$、$\overline{JK}$、$\overline{KL}$、$\overline{LI}$，可得一四邊形 IJKL，即A_2四邊形，就是應用道格拉斯定理所畫出的圖形，應為正方形。

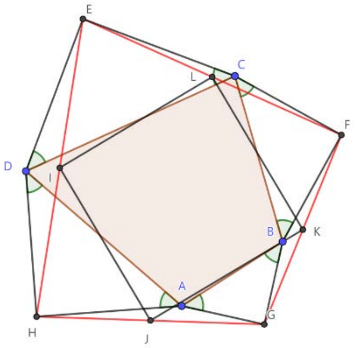


圖 12

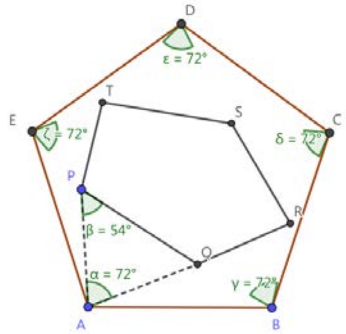


圖 13

四、定理推廣至五邊形之證明

當拿破崙定理在任意四邊形是無法完全適用的，因此也可以合理地推論拿破崙定理應該也無法適用於所有的五邊形也就是說並非所有五邊形皆可為初始五邊形。所以我們也可循例以逆拿破崙法的作圖方式找出初始五邊形。

如圖 13 所示，已知一正五邊形 ABCDE，在五邊形內部任取一點 P，已 A 為頂角作一等腰三角形ΔPAQ，其中$\angle PAQ = 72°$，$\overline{PA} = \overline{AQ}$ 。在 GeoGebra 中，作圖方式是以畫指定角的作法處理的，先連接$\overline{PA}$，以 A 為頂點，$\overline{PA}$為一邊，順時針作底角$72°$的指定角，再以 P 為頂點，$\overline{PA}$為一邊，逆時針作底角$54°$的指定角，交於 Q，連接$\overline{PQ}$和$\overline{AQ}$兩邊即為所求之等腰三角形。依序以點 B、點 C、點 D、點 E 重複上述動作，進而得到 R 點、S 點、T 點，連接$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{ST}$和$\overline{TP}$，可得一五邊形，則此五邊形 PQRST，即為一拿破崙初始五邊形。

反過來，以五邊形 PQRST 各邊向外做正五邊形，則各五邊形之中心，及形心，如圖 14 所示，以拿破崙法確實可以得到一正五邊形 ABCDE。

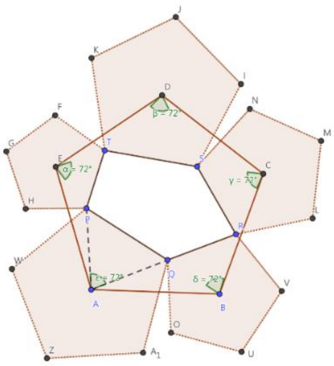


圖 14

透過 GeoGebra 對於任意點 P 移動，進一步來推論初始五邊形所可能需要具備的條件。在推論之前，我們必須先探討一下正五邊形的特性。如圖 15 所示，一正五邊形 ABCDE 中，若連接$\overline{CE}$、$\overline{BD}$兩線段，交於 G’，則$\overline{CE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{AB}$，$\overline{BD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{AE}$，且四邊形 ABG’E 為一平行四邊形。

證明如下：

設$\overline{\mathrm{AB}} = a$，$\overline{\mathrm{CE}} = x$，其中$a > 0$、$x > 0$

$\because$ ABCDE 為正五邊形，$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{EA}}$，$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{CDE} = \angle\mathrm{DEA} = \angle\mathrm{EAB} = \angle\mathrm{ABC} = 108°$，而$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36° = \angle\mathrm{DCE} = \angle\mathrm{DEC}$，$\angle\mathrm{EDP} = \angle\mathrm{CDE} - \angle\mathrm{CEP} = 108° - 36° = 72° = \angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ABD}$

在四邊形 ABG'E 中，$\because$ $\angle\mathrm{PEA} + \angle\mathrm{EAB} = 72° + 108° = 180°$，$\therefore$ $\overline{\mathrm{EP}}//\overline{\mathrm{AB}}$ (同側內角互補)，$\angle\mathrm{ABP} + \angle\mathrm{EAB} = 72° + 108° = 180°$，$\therefore$ $\overline{\mathrm{AE}}//\overline{\mathrm{BP}}$ (同側內角互補)，$\therefore$四邊形 ABG'E 為平行四邊形得證。因此$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EP}}$，$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BP}}$。

進一步在$\Delta\mathrm{DEC}$、$\Delta\mathrm{PCD}$中，$\because$ $\angle\mathrm{DEC} = \angle\mathrm{PCD} = 36°$，$\angle\mathrm{DCE} = \angle\mathrm{PDC} = 36°$(AA 相似)，$\therefore$ $\overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{PC}} : \overline{\mathrm{CD}}$，即$a : x = (x-a) : a$，$x(x-a) = a^2$，$x^2 - ax - a^2 = 0$，

解得$x = \dfrac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{a \pm \sqrt{5}a}{2} = \dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}a$ (負不合)，

$\therefore$ $\overline{\mathrm{CE}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{EC}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$，$\overline{\mathrm{CE}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$，同理可得$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{\mathrm{AE}}$ 得證。

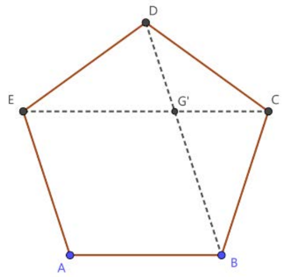


圖 15

因此我們可以知道，一正五邊形必須要符合以下兩個條件，(1)$\overline{\mathrm{CE}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{\mathrm{AE}}$；(2)四邊形 ABG'E 為一平行四邊形。其中$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \fallingdotseq \frac{2.236+1}{2} = 1.618 \fallingdotseq 1.62$(四捨五入到小數點以下第二位)。以正五邊形的性質為基礎，我們可以來推論初始五邊形可能的性質。

如圖 16 所示，當任意點 P 在正五邊形內時，以 GeoGebra 來測量距離，進而計算出 $\frac{\overline{\mathrm{TR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{\mathrm{PS}}}{\overline{\mathrm{QR}}} \fallingdotseq 1.62$。

如圖 17 所示，當任意點 P 落在正五邊形的某一個邊上時，以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{\mathrm{TR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{\mathrm{PS}}}{\overline{\mathrm{QR}}} \fallingdotseq 1.62$，比例是一樣的。

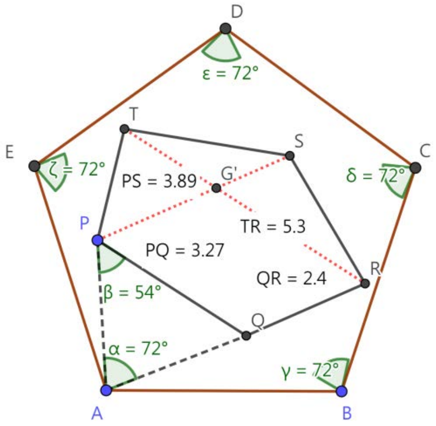


圖 16

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{5.3}{3.27} = 1.62 = \frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{3.89}{2.4} = 1.62$$

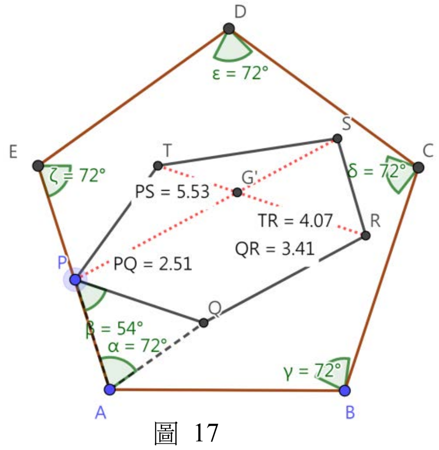


圖 17

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{4.07}{2.51} = 1.62 = \frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{5.53}{3.41} = 1.62$$

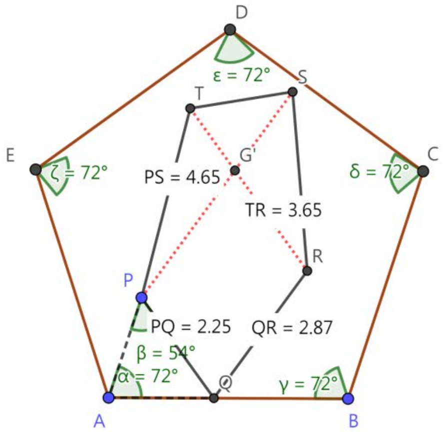


圖 18

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{3.65}{2.25} = 1.62 = \frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{4.65}{2.87} = 1.62$$

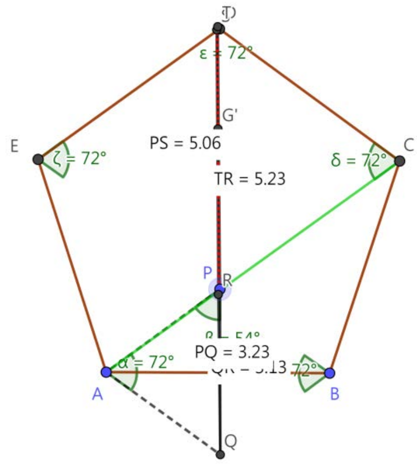


圖 19

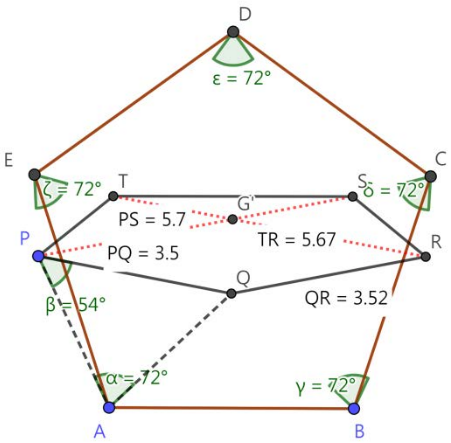


圖 20

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{5.67}{3.5} = 1.62 = \frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{5.7}{3.52} = 1.62$$

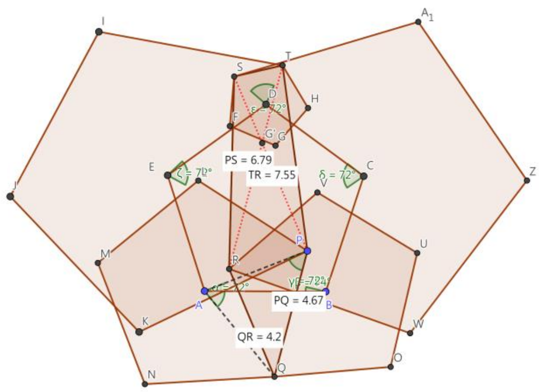


圖 21

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{7.55}{4.67} = 1.62 = \frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{6.79}{4.2} = 1.62$$

如圖 18 所示，移動任意點 P，使得 Q 點落在正五邊形某一個邊上時，以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} \fallingdotseq 1.62$，比例也是一樣的。

如圖 19 所示，移動任意點 P，當 P 點落在$\overline{AC}$線段上時，是無法畫出正五邊形的，因此不是正五邊形內部的任何點能夠作為初始五邊形的開始點的。

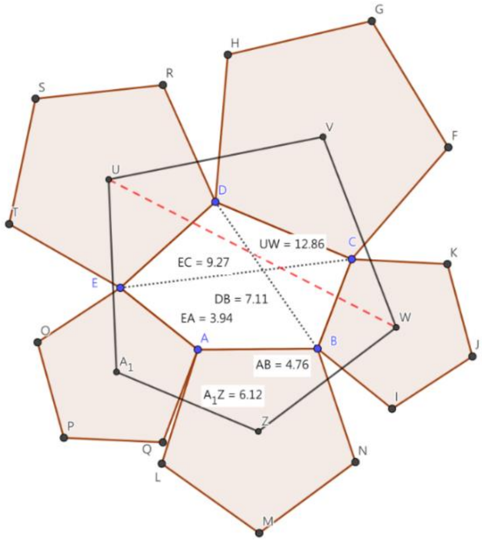


圖 22

如圖 20 所示，移動任意點 P，當 P 點落在正五邊形的外部時，仍舊是能夠以逆拿破崙法作出正五邊形的，而以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} \fallingdotseq 1.62$，比例也是一樣的。

如圖 21 所示，當移動任意點 P，雖然 P 點仍落在正五邊形，仍舊是能夠以逆拿破崙法做出五邊形的，但是這個初始五邊形是以各邊向內側作正五邊形而非向外側作正五邊形才得到的拿破崙五邊形。即使如此，以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} \fallingdotseq 1.62$，比例也是一樣的。

此外觀察圖 16、圖 17、圖 18 圖 19、圖 20、圖 21 中的初始五邊形，我們可以發現，四邊形 PQRG'應為一平行四邊形。因此，我們可以推論得知，能夠作為拿破崙的初始五邊形的五邊形 PQRST，是有一些特性需要符合的。(1) $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \fallingdotseq 1.62$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \fallingdotseq 1.62$；(2)四邊形 PQRG'為一平行四邊形，其中 G'為$\overline{PS}$、$\overline{RT}$兩線段之交點。所以並不是任意一個五邊形都可以作為初始五邊形畫出正五邊形的，畢竟不是所有的五邊形都可以符合上述這兩個特性的。如圖 22 所示，五邊形 ABCDE 很明顯並不符合(2)這個特性，而以各邊為邊長所作出的五個正五邊形的中心所形成的五邊形 UVWZA$_1$，我們觀察圖形，很明顯也並非是一個正五邊形，因此五邊形 ABCDE 是不能作為拿破崙的初始五邊形的，也就是說並非所有的五邊形都

可以透過拿破崙法作出正五邊形的。事實上，透過 GeoGebra 測量距離也可以更確認上述的結果。$\frac{\overline{EC}}{\overline{AB}}=\frac{9.27}{4.76}=1.94\neq1.62$；$\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}}=\frac{7.11}{3.94}=1.80\neq1.62$；$\frac{\overline{UW}}{\overline{A_1Z}}=\frac{12.86}{6.12}=2.10\neq1.62$。因此五邊形 ABCDE 是無法符合(1)的特性，而 $UVWZA_1$ 五邊形也是不符合正五邊形比例的特性。

初始五邊形應具有的性質如下: (1) $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\fallingdotseq1.62$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\fallingdotseq1.62$；(2)四邊形 PQRG’為一平行四邊形，其中 G’為$\overline{PS}$、$\overline{RT}$兩線段之交點。

在我們已經找到初始五邊形需要具備的性質後，那麼就可以進一步來證明拿破崙定理和逆拿破崙定理推廣到五邊形上的情況。

如圖 23 所示，已知 PQRST 為符合上述兩個條件的初始五邊形，則以各邊向外做正五邊形，則各五邊形之中心，即形心，連接可得一正五邊形 ABCDE。

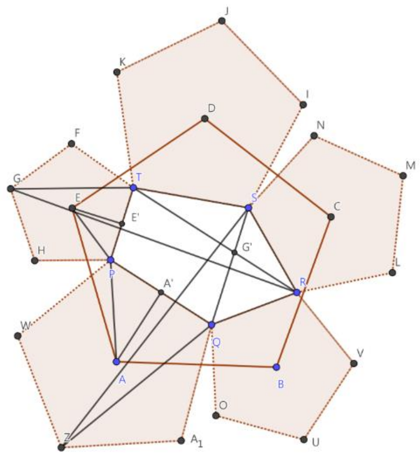


圖 23

證明如下：

分別連接$\overline{GT}$、$\overline{GR}$、$\overline{TR}$和$\overline{QS}$、$\overline{QZ}$、$\overline{SZ}$。設$\overline{TR}$和$\overline{QS}$相交於 G’。

在ΔSQZ 和ΔGTR中，$\because\ \overline{QZ}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PW}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PQ}=\overline{TR}$ (正五邊形及初始五邊形之性質)，

且$\overline{SQ}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PT}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PH}=\overline{GT}$，$\because$ PQG′T 為平行四邊形(初始五邊形的性質)，

$\therefore\ \overline{PQ}//\overline{TR}$，$\overline{PT}//\overline{QS}$，$\angle PQG'=\angle PTG'$。 $\because \angle PQZ=180°-108°=72°=\angle GTP$， $\therefore \angle SQZ=\angle PQS+\angle PQZ=\angle PTG'+\angle GTP=\angle GTR$， $\therefore \Delta SQZ\cong\Delta GTR$(SAS 全等)，$\overline{SZ}=\overline{GR}$。

同理可得，$\overline{PM}=\overline{QJ}=\overline{RG}=\overline{SZ}=\overline{TU}$。

連接$\overline{PE}$、$\overline{PA}$，分別過 E 和 A 作$\overline{EE'}\perp\overline{PT}$、$\overline{AA'}\perp\overline{PQ}$。

在$\Delta PEE'$和$\Delta PAA'$中，$\angle PE'E=\angle PA'A=90°$，

$\angle EPE' = 54° = \angle APA'$($\because$ ΔPET、ΔPAQ 為頂角為 72°的等腰三角形)，

$\therefore \Delta PEE' \sim \Delta PAA'$(AA相似)，$\therefore \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PE'}}{\overline{PA'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{PT}}{\frac{1}{2}\overline{PQ}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PQ}}$

在ΔSQZ 和ΔEPA中，$\because \overline{PT} // \overline{QS}$(初始五邊形的性質)，$\therefore \angle QPT = 180° - \angle PQG'$。

$$\angle EPA = \angle EPH + \angle HPW + \angle WPA = 54° + (360° - 108° - 108° - \angle QPT) + 54°$$

$$= 360° - 108° - \angle QPT = 360° - 108° - (180° - \angle PQG') = 72° + \angle PQG'$$

$\therefore \angle SQZ = \angle PQZ + \angle PQS = 72° + \angle PQG' = \angle EPA$

$\because \frac{\overline{QS}}{\overline{QZ}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PT}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{PW}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PW}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PQ}}$(正五邊形及初始五邊形的性質)，又$\frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PQ}}$，

$\therefore \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{QZ}}$，可得$\frac{\overline{PE}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{QZ}}$，$\therefore \Delta SQZ \sim \Delta EPA$(SAS 相似)，$\frac{\overline{EA}}{\overline{SZ}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{QS}}$，$\angle QZS = \angle PAE$。

同理可得，$\frac{\overline{AB}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{JQ}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{GR}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{SZ}}$($= \frac{\overline{PE}}{\overline{QS}}$為一個固定比值)

$\because \overline{PM} = \overline{QJ} = \overline{RG} = \overline{SZ} = \overline{TU}$， $\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$，$\therefore$ ABCDE 為等邊五邊形。

同理亦可證，$\therefore \Delta PSZ \sim \Delta QBA$(SAS 相似)，$\angle SZP = \angle QAB$。

而$\angle BAE = \angle QAB + 72° + \angle PAE = \angle SZP + 72° + \angle QZS = 72° + (\angle SZP + \angle QZS)$

$= 72° + \angle PZQ = 72° + 36° = 108°$，

同理可得，$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB = 108°$，$\therefore$ ABCDE 為等角五邊形。

$\therefore$ 五邊形 ABCDE 為正五邊形，得證。

五、定理推廣至六邊形之證明

同樣地，當拿破崙定理在任意四邊形和任意五邊形皆是無法完全適用的，因此也可以合理地推論拿破崙定理應該也無法適用於所有的六邊形也就是說並非所有六邊形皆可為初始六邊形。所以我們也可循例以逆拿破崙法的作圖方式找出初始六邊形。

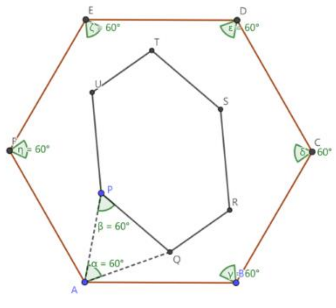


圖 24

如圖 24 所示，已知一正六邊形 ABCDEF，在六邊形內部任取一點 P，以 A 為頂角作一等腰三角形ΔPAQ，其中$\angle PAQ = 60°$，$\overline{PA} = \overline{AQ}$ ，即正三角形。在 GeoGebra 中，作圖方式是

以畫指定角的作法處理的，先連接$\overline{\mathrm{PA}}$，以 A 為頂點，$\overline{\mathrm{PA}}$為一邊，順時針作底角$60°$的指定角，再以 P 為頂點，$\overline{\mathrm{PA}}$為一邊，逆時針作底角$60°$的指定角，交於 Q，連接$\overline{\mathrm{PQ}}$和$\overline{\mathrm{AQ}}$兩邊即為所求之等腰三角形。依序以點 B、點 C、點 D、點 E、點 F 重複上述動作，進而得到 R 點、S 點、T 點、U 點，連接$\overline{\mathrm{QR}}$、$\overline{\mathrm{RS}}$、$\overline{\mathrm{ST}}$、$\overline{\mathrm{TU}}$和$\overline{\mathrm{UP}}$，可得一六邊形，則此六邊形 PQRSTU，即為一拿破崙初始六邊形。

反過來，以六邊形 PQRSTU 各邊向外在正六邊形，如圖 25 所示，以拿破崙法確實也可以得到一正六邊形 ABCDEF。

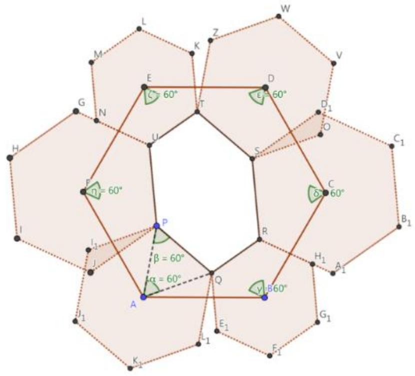


圖 25

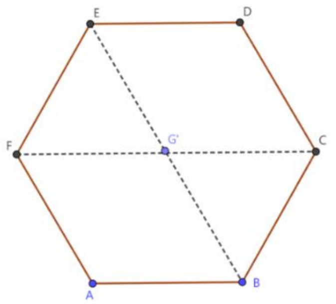


圖 26

同樣的，透過 GeoGebra 對於任意點 P 移動，進一步來推論初始六邊形所可能需要具備的條件。在推論之前，我們仍舊必須先探討一下正六邊形的特性。如**錯誤! 找不到參照來源。**所示，一正六邊形 ABCDEF 中，若連接$\overline{\mathrm{BE}}$、$\overline{\mathrm{CF}}$兩線段，交於 G’，則$\overline{\mathrm{CF}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BE}} = 2\overline{\mathrm{AF}}$，且四邊形 ABG’F、CDEG’皆為平行四邊形。

證明如下：

如圖 26 所示，∵ABCDEF 為一正六邊形，∴ ΔEFG’和$\Delta \mathrm{BCG}'$皆為正三角形。在正六邊形中，每一個內角都為$120°$，而正三角形的每一個內角則為$60°$，$\therefore \angle\mathrm{AFG}' = 120° - \angle\mathrm{EFG}' = 60° = 120° - \angle\mathrm{CBG}' = \angle\mathrm{ABG}'$，$\angle\mathrm{FG}'\mathrm{B} = 180° - \angle\mathrm{EG}'\mathrm{F} = 120° = \angle\mathrm{BAF}$。

在四邊形 ABG’F 中，$\because \angle\mathrm{AFG}' + \angle\mathrm{FG}'\mathrm{B} = 180°$，$\therefore \overline{\mathrm{AF}} // \overline{\mathrm{BG}'}$(同側內角互補)，$\because \angle\mathrm{FAB} + \angle\mathrm{AFG}' = 180°$，$\therefore \overline{\mathrm{AB}} // \overline{\mathrm{FG}'}$(同側內角互補)，∴ABG’F 為平行四邊邊形(兩組對邊分別平行)，$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{BG}'}$，$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{FG}'}$。又$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{EF}'}$，$\therefore \overline{\mathrm{BG}'} = \overline{\mathrm{G}'\mathrm{E}}$，$\therefore \overline{\mathrm{BE}} = 2\overline{\mathrm{BG}'} = 2\overline{\mathrm{AF}}$。

同理可證，四邊形 CDEG’亦為一平行四邊形，$\overline{\mathrm{CF}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$，得證。

因此我們可以確認，一個正六邊形 ABCDEF 至少要符合以下兩個條件，(1) $\overline{\mathrm{CF}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BE}} = 2\overline{\mathrm{AF}}$，(2)四邊形 ABG’F、CDEG’皆為平行四邊形。(當然進一步需要符合更多的條件才可以作為一個正六邊形就不在我們的討論範圍內。)

如圖 27 所示，當任意點 P 在正六邊形內時，以 GeoGebra 來測量距離，進而計算出 $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$。

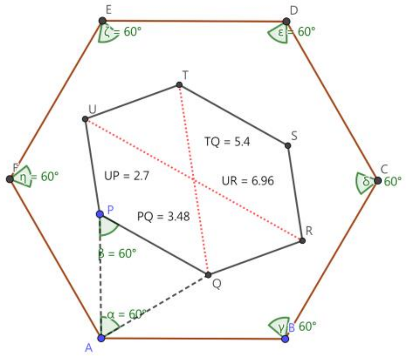


圖 27

$$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=\frac{6.96}{3.48}=2=\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=\frac{5.4}{2.7}=2$$

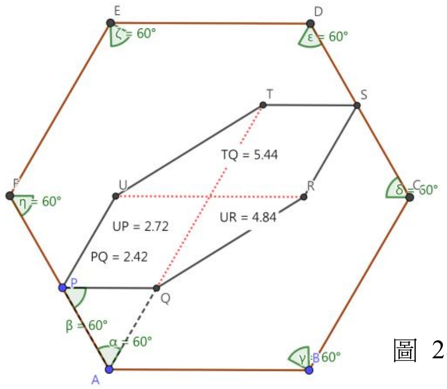


圖 28

$$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=\frac{4.84}{2.42}=2=\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=\frac{5.44}{2.72}=2$$

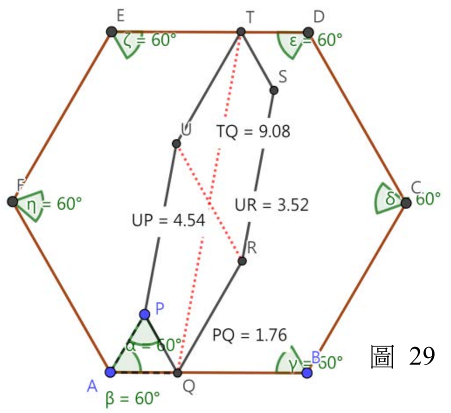


圖 29

$$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=\frac{3.69}{1.85}=2=\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=\frac{9}{4.5}=2$$

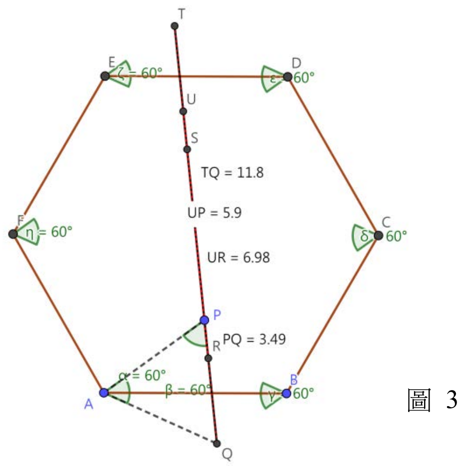


圖 30

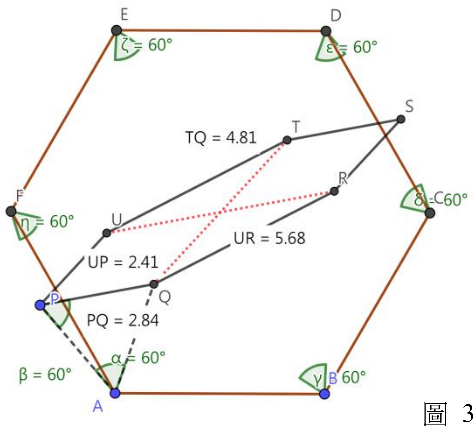


圖 31

$$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=\frac{5.68}{2.84}=2=\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=\frac{4.81}{2.41}=2$$

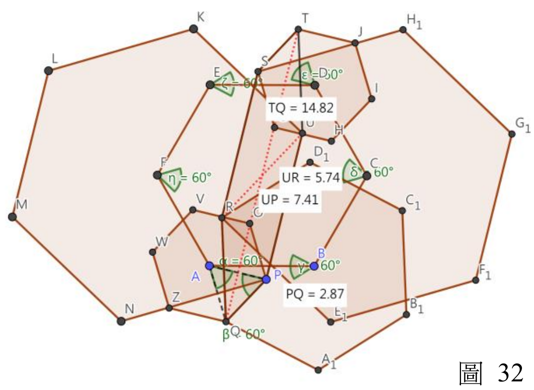


圖 32

$$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=\frac{5.74}{2.87}=2=\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=\frac{14.82}{7.41}=2$$

如圖 28 所示，當任意點 P 落在正六邊形的某一個邊上時，以 GeoGebra 來測量距離，計

算 $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$，比例是一樣的。

如圖 29 所示，移動任意點 P，使得 Q 點落在正六邊形某一個邊上時，以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$，比例也是一樣的。

如圖 30 所示，移動任意點 P，是有可能無法畫出正六邊形的，因此不是正六邊形內部的任何點能夠作為初始六邊形的開始點的。

如圖 31 所示，移動任意點 P，當 P 點落在正六邊形的外部時，仍舊是能夠以逆拿破崙法作出正六邊形的，而以 GeoGebra 來測量距離，計算 $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$，比例也是一樣的。

如圖 32 所示，當移動任意點 P，雖然 P 點仍落在正六邊形，仍舊是能夠以逆拿破崙法做出六邊形的，但是這個初始六邊形是以各邊向內側作正六邊形而非向外側作正六邊形才得到的拿破崙六邊形。即使如此，以 GeoGebra 來測量距離，計算$\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$，比例也是一樣的。

此外觀察圖 27、圖 28、圖 29、圖 30、圖 31、圖 32 中的初始六邊形，我們可以發現，四邊形 ABG’F、CDEG’應該皆為平行四邊形。因此，我們可以推論得知，能夠作為拿破崙的初始六邊形的六邊形 PQRSTU，是有一些特性需要符合的。(1) $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$；(2)四邊形 ABG’F、CDEG’皆為平行四邊形，其中 G’為$\overline{UR}$、$\overline{QT}$兩線段之交點。所以並不是任意一個六邊形都可以作為初始六邊形畫出正六邊形的，畢竟不是所有的六邊形都可以符合上述這兩個特性的。如圖 33 所示，六邊形 ABCDEF 很明顯並不符合(2)這個特性，而以各邊為邊長所作出的六個正六邊形的中心所形成的六邊形 $OPUB_1GL_1$，我們觀察圖形，很明顯也並非是一個正六邊形，因此六邊形 ABCDEF 是不能作為拿破崙的初始六邊形的，也就是說並非所有的六邊形都可以透過拿破崙法作出正六邊形的。事實上，透過 GeoGebra 測量距離也可以更確認上述的結果。$\frac{\overline{FC}}{\overline{AB}}=\frac{6.1}{3.65}=1.67\neq 2$；$\frac{\overline{BE}}{\overline{AF}}=\frac{5.97}{3.16}=1.89\neq 2$；$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{L_1G_1}}=\frac{10.33}{5.93}=1.74\neq 2$。因此六邊形 ABCDEF 是無法符合(1)的特性，而 $OPUB_1GL_1$ 六邊形也是不符合正六邊形比例的特性。

因此，我們可以做出一個關於初始六邊形的性質的結論，初始六邊形應具有的性質如下:
(1) $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$；(2)四邊形 ABG’F、CDEG’皆為平行四邊形，其中 G’為$\overline{UR}$、$\overline{QT}$兩線段之交點。

在我們已經找到初始六邊形需要具備的性質後，那麼就可以進一步來證明拿破崙定理和逆拿破崙定理推廣到六邊形上的情況。

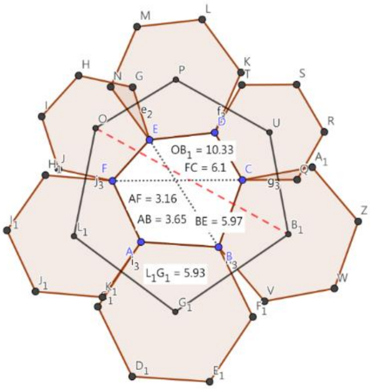


圖 33

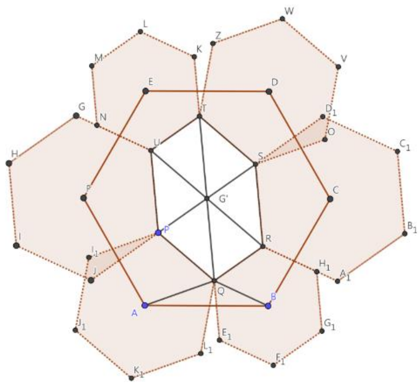


圖 34

如圖 34 所示，已知 PQRSTU 為符合上述兩個條件的初始六邊形，以各邊向外做正六邊形，則連接各正六邊形之中心，即形心，連接可得一正六邊形 ABCDEF。

證明如下：

如圖 34 所示，初始六邊形 PQRSTU，以其各邊向外做六個正六邊形，其中心分別為 A、B、C、D、E、F。而六邊形 PQRSTU 的三條對角線相交於 G'。連接$\overline{\mathrm{AQ}}$、$\overline{\mathrm{QB}}$。

設$\angle \mathrm{AQB} = \theta$，則$\angle \mathrm{PQR} = 360° - \angle \mathrm{PQA} - \angle \mathrm{BQR} - \angle \mathrm{AQB} = 360° - 60° - 60° - \theta = 240° - \theta$

$\because$ 六邊形 PQRSTU 為初始六邊形，$\therefore$ $\mathrm{PQRG'}$為平行四邊形，$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{RG'}}$，$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PG'}}$。

在$\Delta \mathrm{PQG'}$和$\Delta \mathrm{RG'Q}$ 中，$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{RG'}}$，$\overline{\mathrm{PG'}} = \overline{\mathrm{RQ}}$，$\overline{\mathrm{QG'}} = \overline{\mathrm{G'Q}}$，$\therefore$ $\Delta \mathrm{PQG'} \cong \Delta \mathrm{RG'Q}$(SSS 全等)，$\angle \mathrm{PQG'} = \angle \mathrm{QG'R}$。

在$\Delta \mathrm{FPI_1}$和$\Delta \mathrm{G'QP}$ 中，$\because$ $\angle \mathrm{I_1PJ} = \angle \mathrm{UPQ} + \angle \mathrm{JPU} + \angle \mathrm{I_1PQ} - 360° = 180° - \angle \mathrm{PQG'} + 120° + 120° - 360° = 60° - \angle \mathrm{PQG'}$，$\therefore$ $\angle \mathrm{FPI_1} = \angle \mathrm{UPJ} - \angle \mathrm{UPF} - \angle \mathrm{I_1PJ} = 120° - 60° - \angle \mathrm{I_1PJ} = 60° - (60° - \angle \mathrm{PQG'}) = \angle \mathrm{PQG'}$，$\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{UP}} = \overline{\mathrm{G'Q}}$，$\overline{\mathrm{I_1P}} = \overline{\mathrm{PQ}}$，

$\therefore$ $\Delta \mathrm{FPI_1} \cong \Delta \mathrm{G'QP}$(SAS 全等)，$\overline{\mathrm{FI_1}} = \overline{\mathrm{G'P}}$，

$\therefore$ $\angle \mathrm{PI_1F} = \angle \mathrm{QPG'} = 180° - \angle \mathrm{PG'Q} - \angle \mathrm{PQG'} = 180° - \angle \mathrm{PQR} = 180° - (240° - \theta) = \theta - 60°$，$\angle \mathrm{AI_1F} = \angle \mathrm{AI_1P} + \angle \mathrm{PI_1F} = 60° + (\theta - 60°) = \theta$

在$\Delta \mathrm{AQB}$ 和$\Delta \mathrm{AI_1F}$ 中，$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AI_1}}$，$\overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PG'}} = \overline{\mathrm{I_1F}}$，$\angle AQB = \theta = \angle \mathrm{AI_1F}$，

$\therefore$ $\Delta \mathrm{AQB} \cong \Delta \mathrm{AI_1F}$(SAS 全等)。同理可證$\Delta \mathrm{AQB} \cong \Delta \mathrm{CH_1B} \cong \Delta \mathrm{DOC} \cong \Delta \mathrm{DTE} \cong \Delta \mathrm{FNE} \cong \Delta \mathrm{AI_1F}$，

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{FE}} = \overline{\mathrm{AF}}$，六邊形 ABCDEF 為等邊六邊形。

又$\angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{BAQ} + \angle \mathrm{QAI_1} - \angle \mathrm{FAI_1} = \angle \mathrm{BAQ} + 120° - \angle \mathrm{BAQ} = 120°$，同理可得，

$\angle ABC = \angle ABQ + \angle QBH_1 - \angle CBH_1 = \angle ABQ + 120° - \angle ABQ = 120°$，

$\angle DEF = \angle DET + \angle TEN - \angle NEF = \angle DET + 120° - \angle DET = 120°$，

$\angle CDE = \angle TDE + \angle TDO - \angle CDO = \angle TDE + 120° - \angle TDE = 120°$。

連接$\overline{BF}$、$\overline{BD}$、$\overline{DF}$。在ΔABF、ΔCDB、ΔEDF 中，$\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{ED} = \overline{EF}$，且$\angle BAF = \angle DCB = \angle DEF = 120°$，$\therefore \Delta ABF \cong \Delta CDB \cong \Delta EDF$ (SAS 全等)，$\angle ABF = \angle CDB = \angle EDF = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30° = \angle AFB = \angle CBD = \angle DFE$。且$\overline{BF} = \overline{BD} = \overline{DF}$，$\therefore$ ΔBDF 為正三角形，$\angle BFD = 60°$。又$\angle AFE = \angle AFB + \angle BFD + \angle DFE = 30° + 60° + 30° = 120°$，同理可得，$\angle DCE = 120°$。$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB = 120°$，$\therefore$ 六邊形 ABCDEF 為等角六邊形。又 ABCDEF 為等邊六邊形，$\therefore$ ABCDEF 為正六邊形得證。

六、正 n 邊形與初始 n 邊形的特性探討

(一) 當 n 為奇數時

我們先探討正七邊形的特性。如下圖所示，一正七邊形 ABCDEFG 中，作$\overline{AB}$、$\overline{FG}$兩線段之中垂線$\overline{EH}$、$\overline{CQ}$，分別必過點 E、點 C，且相交於點 O，而交$\overline{AB}$、$\overline{FG}$於點H 和點 Q。分別連接$\overline{CG}$、$\overline{DF}$及$\overline{OF}$、$\overline{OG}$、$\overline{OA}$。

因為 ABCDEFG 為正七邊形，$\therefore \angle FOG = \frac{360°}{7} = \angle GOA$，$\overline{DF} \parallel \overline{CG} \parallel \overline{AB}$，$\angle ERF = \angle EPG = \angle OHA = 90°$，而$\angle GOQ = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{7} = \frac{180°}{7} = \angle AOH = \angle EFD$，且$\frac{\overline{GQ}}{\overline{OG}} = \sin(\angle GOQ) = \sin\frac{180°}{7}$，又$\overline{AB} = \overline{FG}$，$\overline{OG} = \overline{GQ} \times \frac{1}{\sin\frac{180°}{7}}$，$\overline{CQ} = 2\overline{OQ} = 2\overline{OG}$，$\overline{CG} = 2\overline{PG}$，$\angle POG = \angle AOG + \angle AOH = \frac{360°}{7} + \frac{180°}{7} = \frac{540°}{7}$，$\frac{\overline{PG}}{\overline{OG}} = \sin(\angle POG)$，$\therefore \overline{CG} = 2\overline{PG} = 2\overline{OG} \times \sin\frac{540°}{7} = 2\overline{GQ} \times \frac{1}{\sin\frac{180°}{7}} \times \sin\frac{540°}{7} = \overline{FG} \times \frac{1}{\sin\frac{180°}{7}} \times \sin\frac{540°}{7} = \overline{AB} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}$。$\frac{\overline{FR}}{\overline{EF}} = \cos(\angle EFR) = \cos\frac{180°}{7}$，$\overline{DF} = 2\overline{FR} = 2\overline{EF} \times \cos\frac{180°}{7} = 2\overline{AB} \times \cos\frac{180°}{7}$。$\therefore \overline{AB} = \overline{CG} \times \frac{\sin\frac{180°}{7}}{\sin\frac{540°}{7}}$，$\frac{\overline{CG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}}{2\overline{AB} \times \cos\frac{180°}{7}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}} \times \frac{1}{\cos\frac{180°}{7}}$。

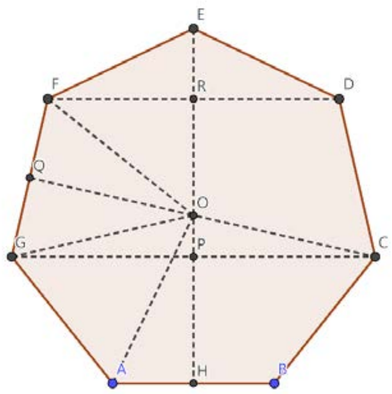


圖 35

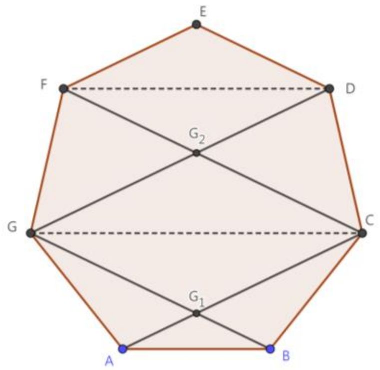


圖 36

因此我們可以確認，一個正七邊形 ABCDEFG 至少要符合以下兩個條件，(1) $\overline{CG} = \overline{AB} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}$，$\overline{DF} = 2\overline{AB} \times \cos\frac{180°}{7}$；$\overline{CF} = \overline{DE} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}}$，$\overline{BG} = 2\overline{DE} \times \cos\frac{180°}{7}$。，(2)四邊形 GG_1CG_2、FG_2DE皆為平行四邊形(當然進一步需要符合更多的條件才可以作為一個正七邊形就不再我們的討論範圍內)。如圖 37 所示。正七邊形以逆拿破崙法所得到的初始七邊形一樣具有類似於初始五邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊形，如下圖右側所示，僅列出部分比值和明顯可以看到的平行四邊形。

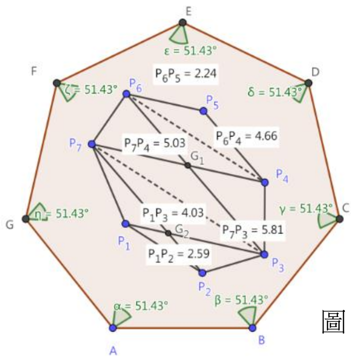


圖 37

$$\frac{\overline{P_6P_5}}{\overline{P_7P_4}} = \frac{2.24}{5.03} = 0.45 = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_7P_3}} = \frac{2.59}{5.81} \doteqdot \frac{\sin\frac{180°}{7}}{\sin\frac{540°}{7}}$$

$$\frac{\overline{P_7P_4}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{5.03}{4.03} = 1.25 = \frac{\overline{P_7P_3}}{\overline{P_6P_4}} = \frac{5.81}{4.66}$$

$$\doteqdot \frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{540°}{7}}{\sin\frac{180°}{7}} \times \frac{1}{\cos\frac{180°}{7}}$$

四邊形$P_4P_5P_6G_1$、$P_3G_1P_7G_2$為平行四邊形

再探討正九邊形的特性。如圖 38 所示，一正九邊形 ABCDEFGHI 中，作$\overline{AB}$、$\overline{HI}$兩線段之中垂線$\overline{FS}$、$\overline{DQ}$，分別必過點 F、點 D，且相交於點 O，而交$\overline{AB}$、$\overline{HI}$於點 S和點 Q。分別連接$\overline{CI}$、$\overline{DH}$、$\overline{EG}$，分別交$\overline{FS}$於點 P、點 T、點 R，並連接$\overline{OH}$、$\overline{OI}$、$\overline{OA}$。

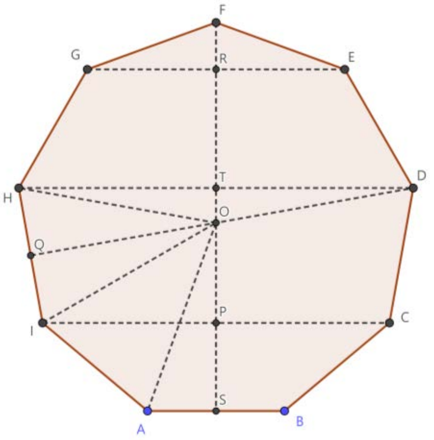


圖 38

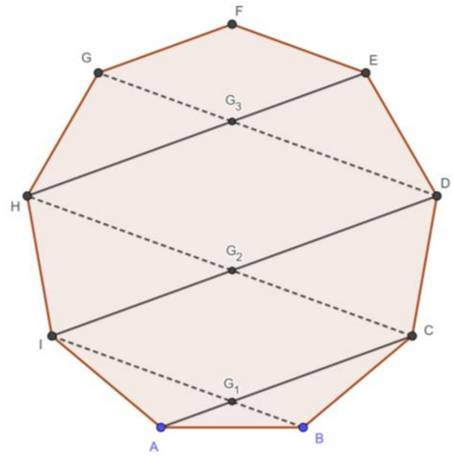


圖 39

因為 ABCDEFGHI 為正九邊形，$\therefore \angle HOI=\frac{360°}{9}=40°=\angle IOA$，$\overline{CI}\parallel\overline{DH}\parallel\overline{EG}\parallel\overline{AB}$，$\angle FRG=\angle FTH=\angle FPI=\angle OSA=90°$，而$\angle IOQ=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{9}=\frac{180°}{9}=20°=\angle AOS=\angle FGE$，且$\frac{\overline{IQ}}{\overline{OI}}=\sin(\angle IOQ)=\sin\frac{180°}{9}=\sin 20°$，又$\overline{AB}=\overline{HI}$，$\overline{OI}=\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{9}}=\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin 20°}$，$\overline{DQ}=2\overline{OQ}=2\overline{OI}$，$\overline{CI}=2\overline{PI}$，$\angle POI=\angle AOI+\angle AOS=\frac{360°}{9}+\frac{180°}{9}=\frac{540°}{09}=60°$，$\frac{\overline{PI}}{\overline{OI}}=\sin(\angle POI)$，$\therefore \overline{CI}=2\overline{PI}=2\overline{OI}\times\sin\frac{540°}{9}=2\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{9}}\times\sin\frac{540°}{9}=\overline{IH}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{9}}\times\sin\frac{540°}{9}=\overline{AB}\times\frac{\sin\frac{540°}{9}}{\sin\frac{180°}{9}}=\overline{AB}\times\frac{\sin 60°}{\sin 20°}$。$\frac{\overline{GR}}{\overline{FG}}=\cos(\angle FGR)=\cos\frac{180°}{9}=\cos 20°$，$\overline{EG}=2\overline{RG}=2\overline{FG}\times\cos\frac{180°}{9}=2\overline{AB}\times\cos\frac{180°}{9}=2\overline{AB}\times\cos 20°$。$\angle TOH=180°-\angle IOH-\angle IOA-\angle SOA=180°-\frac{360°}{9}-\frac{360°}{9}-\frac{180°}{9}=\frac{720°}{9}=80°$，$\frac{\overline{TH}}{\overline{OH}}=\sin(\angle TOH)=\sin\frac{720°}{9}=\sin 80°$，$\overline{DH}=2\overline{TH}=2\overline{OH}\times\sin\frac{720°}{9}=2\overline{OI}\times\sin 80°=2\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{9}}\times\sin 80°=\overline{AB}\times\frac{\sin 80°}{\sin 20°}$。$\therefore \overline{AB}=\overline{CI}\times\frac{\sin\frac{180°}{9}}{\sin\frac{540°}{9}}=\overline{CI}\times\frac{\sin 20°}{\sin 60°}$，$\frac{\overline{CI}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{AB}\times\frac{\sin\frac{540°}{9}}{\sin\frac{180°}{9}}}{\overline{AB}\times\frac{\sin\frac{720°}{9}}{\sin\frac{180°}{9}}}=\frac{\sin\frac{540°}{9}}{\sin\frac{720°}{9}}=\frac{\sin 60°}{\sin 80°}$，$\frac{\overline{EG}}{\overline{DH}}=\frac{2\overline{AB}\times\cos\frac{180°}{9}}{\overline{AB}\times\frac{\sin\frac{720°}{9}}{\sin\frac{180°}{9}}}=\frac{2\cos\frac{180°}{9}\sin\frac{180°}{9}}{\sin\frac{720°}{9}}=\frac{2\cos 20°\sin 20°}{\sin 80°}$。

因此我們可以確認，一個正九邊形 ABCDEFGHI 至少要符合以下兩個條件，(1) $\overline{DG}=\overline{EF}\times\frac{\sin 60°}{\sin 20°}$， $\overline{DG}=\overline{CH}\times\frac{\sin 60°}{\sin 80°}$，$\overline{BI}=2\overline{CH}\times\frac{2\cos 20°\sin 20°}{\sin 80°}$。，(2)四邊形$IG_1CG_2$、$HG_2DG_3$、$GG_3EF$皆為平行四邊形(當然進一步需要符合更多的條件才可以作為一個正九邊形就不再我們的討論範圍內)。如圖 40 所示，正九邊形以逆拿破崙法所得到的初始九邊形也是會具有類似於初始五邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊

形，如下圖右側所示，僅列出部分比值和可以看到的平行四邊形。

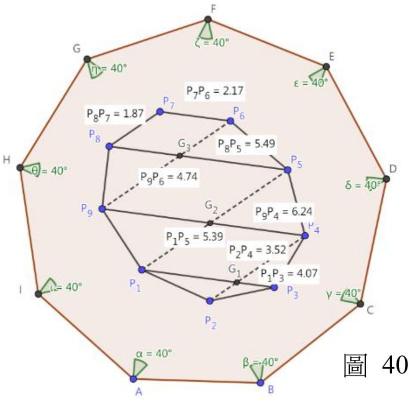


圖 40

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_9P_4}}=\frac{4.07}{6.24}=0.65=\frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}}=\frac{3.52}{5.39}\fallingdotseq\frac{2\cos 20°\sin 20°}{\sin 80°}$$

$$\frac{\overline{P_9P_4}}{\overline{P_8P_5}}=\frac{6.24}{5.49}=1.14=\frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_9P_6}}=\frac{5.39}{4.74}\fallingdotseq\frac{\sin 80°}{\sin 60°}$$

$$\frac{\overline{P_8P_5}}{\overline{P_7P_6}}=\frac{5.49}{2.17}=2.53=\frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}}=\frac{4.74}{1.87}\fallingdotseq\frac{\sin 60°}{\sin 20°}$$

四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_9G_2P_5G_3$、$P_8G_3P_6P_7$皆為平行四邊形

當 n 為奇數時，仿照求得初始五邊形的性質，所以我們可以推論出初始 n 邊形(n 為奇數時)應具有的性質。我們仍舊先探討正 n 邊形的特性。如圖 41 所示，一正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$中（令 $k=\frac{n+1}{2}$），作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_n}$兩線段之中垂線$\overline{A_{k+1}H}$、$\overline{A_kQ}$，分別必過點 H、點 Q，且相交於點 O，並連接$\overline{A_3A_n}$、$\overline{A_4A_{n-1}}$、$\overline{A_5A_{n-2}}$、⋯、$\overline{A_kA_{k+2}}$，則$\overline{A_{k+1}H}$分別交$\overline{A_3A_n}$、$\overline{A_4A_{n-1}}$、$\overline{A_5A_{n-2}}$、⋯、$\overline{A_kA_{k+2}}$於點 P、點 R、點 S、點 T，並連接$\overline{OA_1}$、$\overline{OA_n}$、$\overline{OA_{n-1}}$、$\overline{OA_{n-2}}$、$\overline{OA_{k+2}}$ 。

因為$A_1A_2\ldots A_n$為正 n 邊形，$\therefore \angle A_1OA_2=\frac{360°}{n}=\angle A_{n-1}OA_{n-2}=\angle A_1OA_n=\angle A_{n-1}OA_n$，$\overline{A_1A_2}\parallel\overline{A_nA_3}\parallel\overline{A_{n-1}A_4}\parallel\overline{A_{n-2}A_5}\cdots\parallel\overline{A_{k+2}A_k}$，而$\angle A_nOQ=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}=\frac{180°}{n}=\angle A_1OH$，且$\frac{\overline{A_nQ}}{\overline{OA_n}}=\sin(\angle A_nOQ)=\sin\frac{180°}{n}$，$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA_n}}=\cos(\angle A_nOQ)=\cos\frac{180°}{n}$，又$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_n}=\overline{A_{n-1}A_n}$，$\overline{OA_n}=\overline{A_nQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}=\overline{OA_1}=\overline{OA_{n-1}}=\overline{OA_k}$，$\overline{A_1A_2}=2\overline{A_nQ}=\overline{OA_n}\times\sin\frac{180°}{n}$，$\angle A_{n-1}OR=\angle A_{n-1}OA_n+\angle A_1OA_n+\angle A_1OR=\frac{360°}{n}+\frac{360°}{n}+\frac{180°}{n}=\frac{900°}{n}$，$\angle A_nOP=\angle A_1OA_n+\angle A_1OH=\frac{360°}{n}+\frac{180°}{n}=\frac{540°}{n}$，$\frac{\overline{A_nP}}{\overline{OA_n}}=\sin(\angle A_nOP)=\sin\frac{540°}{n}$，$\overline{A_nA_3}=2\overline{A_nP}=2\overline{OA_n}\times\sin\frac{540°}{n}=2\overline{OA_1}\times\sin\frac{540°}{n}=2\overline{A_nQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}\times\sin\frac{540°}{n}=\overline{A_1A_2}\times\frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$。 同理，$\overline{A_{n-1}A_4}=2\overline{A_{n-1}R}=2\overline{OA_{n-1}}\times\sin(\angle A_{n-1}OR)=2\overline{OA_{n-1}}\times\sin\frac{900°}{n}=\overline{A_1A_2}\times\frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$。 $\therefore\frac{\overline{A_nA_3}}{\overline{A_{n-1}A_4}}=\frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}}$。$\angle A_{k+1}OA_{K+2}=\angle A_1OA_2=\frac{360°}{n}$，$\angle A_{k+3}OA_{k+1}=\angle A_{k+1}OA_{K+2}+\angle A_{k+3}OA_{K+2}=\frac{360°}{n}+\frac{360°}{n}=\frac{720°}{n}$，$\frac{\overline{A_{k+2}T}}{\overline{OA_{k+2}}}=\sin(\angle A_{k+1}OA_{K+2})=\sin\frac{360°}{n}$，$\overline{A_{k+2}A_k}=2\overline{A_{k+2}T}=2\overline{OA_{k+2}}\times\sin\frac{360°}{n}=$

$2\overline{OA_1}\times\sin\frac{360°}{n} = 2\overline{A_nQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}\times\sin\frac{360°}{n} = \overline{A_1A_2}\times\frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$。$\frac{\overline{A_{k+3}S}}{\overline{OA_{k+3}}} = \sin(\angle A_{k+1}OA_{K+3}) = \sin\frac{720°}{n}$，$\overline{A_{k+3}A_{k-1}} = 2\overline{A_{k+3}S} = 2\overline{OA_{k+3}}\times\sin\frac{720°}{n} = 2\overline{A_nQ}\times\frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}\times\sin\frac{720°}{n} = \overline{A_1A_2}\times\frac{\sin\frac{720°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$，$\frac{\overline{A_{k+2}A_k}}{\overline{A_{k+3}A_{k-1}}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}}$，…$\frac{\overline{A_{k+3}A_{k-1}}}{\overline{A_{k+4}A_{k-2}}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}}$ 。

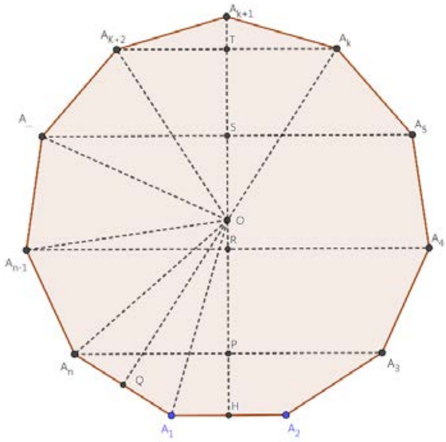


圖 41

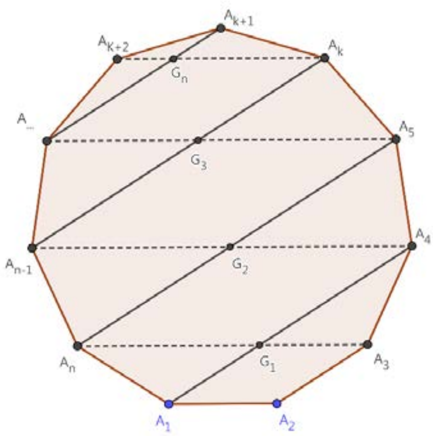


圖 42

因此若如圖 42 所示，連接$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_nA_5}$、$\overline{A_{n-1}A_6}$、…、$\overline{A_{k+3}A_k}$，$\overline{A_nA_3}$、$\overline{A_{n-1}A_4}$、$\overline{A_{n-2}A_5}$、$\overline{A_{n-3}A_6}$、…、$\overline{A_{k+2}A_k}$，兩兩分別交於G_1、G_2、G_3、…、G_n，由於$A_1A_2 \dots A_n$為正 n 邊形，∴ $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_1A_4} \parallel \overline{A_nA_5} \parallel \overline{A_{n-1}A_6} \parallel \overline{A_{k+3}A_{k+1}} \parallel \overline{A_{k+4}A_k}$，$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_nA_3} \parallel \overline{A_{n-1}A_4} \parallel \overline{A_{n-2}A_5} \parallel \overline{A_{n-3}A_6} \parallel \overline{A_{k+2}A_k} \parallel \overline{A_{k+3}A_{k+1}}$，由此可知四邊形$A_1A_2A_3G_1$、$A_nG_1A_4G_2$、$A_{n-1}G_2A_5G_3$、$A_{n-2}G_3A_6G_4$、…、$A_{k+3}G_{n-1}A_kG_n$等皆為平行四邊形(兩組對邊分別平行)。而$\overline{A_nA_3} = \overline{A_1A_2}\times\frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$，$\overline{A_nA_3} = \overline{A_{n-1}A_4}\times\frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}}$，$\frac{\overline{A_{k+2}A_k}}{\overline{A_{k+3}A_{k-1}}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}}$，…$\frac{\overline{A_{k+3}A_{k-1}}}{\overline{A_{k+4}A_{k-2}}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}}$；同理$\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_3}\times\frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$，$\frac{\overline{A_{k+3}A_{k+1}}}{\overline{A_{k+4}A_k}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}}$，…$\frac{\overline{A_{k+4}A_k}}{\overline{A_{k+5}A_{k-1}}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}}$。

因此我們可以推論當 n 為奇數時的正 n 邊形以逆拿破崙法求得初始 n 邊形時，這個初始 n 邊形應該也會如前所述具有類似於初始五邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊形。

以正 11 邊 形為例來驗證上述結果，觀察圖 43 所示的初始 n 邊形(此時 n=11 為奇數)，我們可以發現，四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_nG_2P_5G_3$、$P_{n-1}G_3P_6G_4$、$P_{n-2}G_4P_7G_8$、…應該皆為平行四邊形。因此，我們仿照初始五邊形做出一個結論是拿破崙的初始 n 邊形(當 n 為奇數時)的 n 邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下: (1) $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_nP_4}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}} = \frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}}$、$\frac{\overline{P_nP_4}}{\overline{P_{n-1}P_5}} = \frac{\sin\frac{720°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}} = \frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_nP_6}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_5}}{\overline{P_{n-2}P_6}} = \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_nP_6}}{\overline{P_{n-1}P_7}}$、$\frac{\overline{P_{n-2}P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_{n-2}P_8}}$，…；(2)四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_nG_2P_5G_3$、$P_{n-1}G_3P_6G_4$、

$P_{n-2}G_4P_7G_8$、…皆為平行四邊形，其中G_1、G_2、G_3、 …為初始 n 邊形內的對角線某兩線段之交點。並非任意一個 n 邊形都可以符合上述這兩個特性的作為初始 n 邊形畫出正 n 邊形的，所以並不是所有的 n 邊形都可以作為初始 n 邊形的。

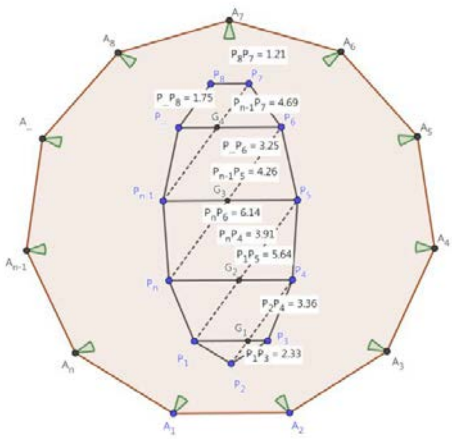


圖 43

當n =11 時

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_nP_4}} = \frac{2.33}{3.91} = 0.60 = \frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}} = \frac{3.36}{5.64} \fallingdotseq \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}}$$

$$\frac{\overline{P_nP_4}}{\overline{P_{n-1}P_5}} = \frac{3.91}{4.26} = 0.92 = \frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_nP_6}} = \frac{5.64}{6.14} \fallingdotseq \frac{\sin\frac{720°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}}$$

$$\frac{\overline{P_{n-1}P_5}}{\overline{P_{n-2}P_6}} = \frac{4.26}{3.25} = 1.31 = \frac{\overline{P_nP_6}}{\overline{P_{n-1}P_7}} = \frac{6.14}{4.69} \fallingdotseq \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}}$$

$$\frac{\overline{P_{n-2}P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{3.25}{1.21} = 2.68 = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_{n-2}P_8}} = \frac{4.69}{1.75} \fallingdotseq \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$$

四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_nG_2P_5G_3$、$P_{n-1}G_3P_6G_4$、$P_{n-2}G_4P_7G_8$…皆為平行四邊形

(二) 當 n 為偶數時

仿照正六邊形探討的特性的方法來推論對於正八邊形所需要的初始八邊形所可能應該具備的條件。因此我們仍舊先探討正八邊形的特性。如下圖左所示，一正八邊形 ABCDEFGH 中，若連接$\overline{CG}$、$\overline{DH}$兩線段，交於點 O，分別過點 O 向$\overline{CH}$、$\overline{GH}$做垂線交$\overline{CH}$、$\overline{GH}$於點 P 和點 Q。因為 ABCDEFGH 為正八邊形，$\therefore \angle GOH = \frac{360°}{8} = 45°$，而$\angle GOQ = \frac{1}{2} \times 45° = 22.5°$，且$\frac{\overline{GQ}}{\overline{OQ}} = \tan(\angle GOQ) = \tan 22.5°$，又$\overline{AB} = \overline{GH}$ ，$\overline{CH} = 2\overline{PH} = 2\overline{OQ}$ ，$\therefore \overline{CH} = 2\overline{OQ} = 2\overline{GQ} \times \frac{1}{tan22.5°} = \overline{AB} \times \frac{1}{tan22.5°} = \overline{AB} \times \frac{1}{\sqrt{2}-1}$。

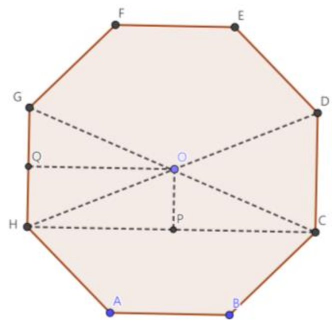


圖 44

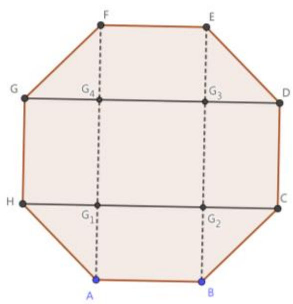


圖 45

因此若如上圖右所示，連接$\overline{AF}$、$\overline{BE}$、$\overline{CH}$、$\overline{DG}$，分別交於G_1、G_2、G_3、G_4，由於

ABCDEFGH 為正八邊形，$\therefore\ \overline{AF} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{GH}$，$\overline{AB} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{CH} \parallel \overline{DG}$，且$\overline{CH}=\overline{DG}$，$\overline{AF}=\overline{BE}$，可知四邊形$G_1G_2G_3G_4$為一平行四邊形(兩組對邊分別平行)，其餘可見之四邊形，ABG_1G_2、FEG_3G_4、DCG_2G_3、GHG_1G_4等亦皆為平行四邊形(兩組對邊分平行)。而$\overline{CH}=\overline{DG}=\overline{AB}\times\frac{1}{tan22.5°}=\overline{AB}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，同理$\overline{AF}=\overline{BE}=\overline{CD}\times\frac{1}{tan22.5°}=\overline{CD}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}$。

因此我們可以確認，一個正八邊形 ABCDEFGH 至少要符合以下兩個條件，(1) $\overline{CH}=\overline{DG}=\overline{AB}\times\frac{1}{tan22.5°}=\overline{AB}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，$\overline{AF}=\overline{BE}=\overline{CD}\times\frac{1}{tan22.5°}=\overline{CD}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，(2)四邊形$G_1G_2G_3G_4$、$ABG_1G_2$、$FEG_3G_4$、$DCG_2G_3$、$GHG_1G_4$皆為平行四邊形(當然進一步需要符合更多的條件才可以作為一個正八邊形就不再我們的討論範圍內)。

我們先以正八邊形為例，如所示。正八邊形以逆拿破崙法所得到的初始八邊形一樣具有類似於初始六邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊形，如下圖右側所示，僅列出部分比值和明顯可以看到的平行四邊形。

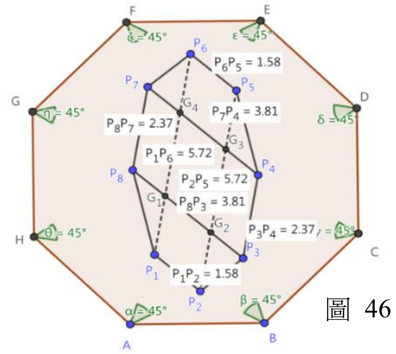


圖 46

$$\frac{\overline{P_7P_4}}{\overline{P_8P_3}}=\frac{3.81}{3.81}=1=\frac{\overline{P_1P_6}}{\overline{P_2P_5}}=\frac{5.72}{5.72}$$

$$\frac{\overline{P_8P_3}}{\overline{P_1P_2}}=\frac{3.81}{1.58}=2.41=\frac{\overline{P_2P_5}}{\overline{P_3P_4}}=\frac{5.72}{2.37}\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\overline{P_6P_5}}{\overline{P_7P_4}}=\frac{1.58}{3.81}=0.41=\frac{\overline{P_8P_7}}{\overline{P_1P_6}}=\frac{2.37}{5.72}\fallingdotseq\sqrt{2}-1$$

四邊形$G_1G_2G_3G_4$為平行四邊形

再探討正十邊形的特性。如下圖左所示，一正十邊形 ABCDEFGHIJ 中，若連接$\overline{CH}$、$\overline{DI}$兩線段，交於點 O，並連接$\overline{CJ}$、$\overline{EJ}$，其中$\overline{EJ}$必過點 O。分別過點 O 向$\overline{CJ}$、$\overline{HI}$做垂線交$\overline{CJ}$、$\overline{HI}$於點 P 和點 Q。

因為 ABCDEFGHIJ 為正十邊形，$\therefore \angle IOH=\frac{360°}{10}=36°=\angle IOJ$，$\overline{ID}\parallel\overline{JC}$，$\angle OJP=\angle IOJ=36°$，而$\angle IOQ=\frac{1}{2}\times 36°=18°$，且$\frac{\overline{IQ}}{\overline{IO}}=\sin(\angle HOQ)=\sin18°$，又$\overline{AB}=\overline{IH}$，$\overline{IO}=\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin18°}$，$\overline{ID}=2\overline{IO}=2\overline{JO}$，$\overline{CJ}=2\overline{PJ}$，$\frac{\overline{JP}}{\overline{JO}}=\cos(\angle OJP)=\cos36°\ \therefore\ \overline{CJ}=2\overline{PJ}=2\overline{OJ}\times cos36°=2\overline{IO}\times cos36°=2\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin18°}\times cos36°=\overline{AB}\times\frac{\cos36°}{\sin18°}$，$\overline{DI}=2\overline{IO}=2\overline{IQ}\times\frac{1}{\sin18°}=\overline{AB}\times\frac{1}{\sin18°}$。

因此若圖 48 所示，連接$\overline{BI}$、$\overline{CH}$、$\overline{DG}$、$\overline{CJ}$、$\overline{DI}$、$\overline{EH}$，分別交於G_1、G_2、G_3，由於 ABCDEFGHIJ 為正十邊形，$\therefore\ \overline{AJ}\parallel\overline{BI}\parallel\overline{CH}\parallel\overline{DG}$，$\overline{AB}\parallel\overline{CJ}\parallel\overline{DI}\parallel\overline{EH}$，且$\overline{BI}=\overline{DG}$，$\overline{CJ}=\overline{EH}$，

由此可知四邊形ABG_1J、G_1CG_2I、FEG_3G_4、G_2DG_3H、G_3EFG等皆為平行四邊形(兩組對邊分平行)。而$\overline{CJ} = \overline{AB} \times \frac{\cos36°}{\sin18°} = \overline{EH}$，$\overline{DI} = \overline{AB} \times \frac{1}{\sin18°}$；同理$\overline{BI} = \overline{AJ} \times \frac{\cos36°}{\sin18°} = \overline{DG}$，$\overline{CH} = \overline{AJ} \times \frac{1}{\sin18°}$。

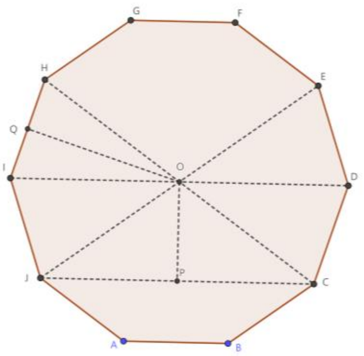


圖 47

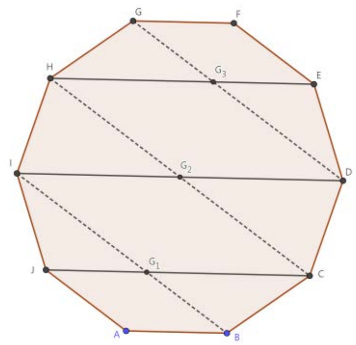


圖 48

因此我們可以確認，一個正十邊形 ABCDEFGHIJ 至少要符合以下兩個條件，(1) $\overline{CJ} = \overline{AB} \times \frac{\cos36°}{\sin18°} = \overline{EH}$，$\overline{DI} = \overline{AB} \times \frac{1}{\sin18°}$；$\overline{BI} = \overline{AJ} \times \frac{\cos36°}{\sin18°} = \overline{DG}$，$\overline{CH} = \overline{AJ} \times \frac{1}{\sin18°}$。，(2)四邊形$ABG_1J$、$G_1CG_2I$、$FEG_3G_4$、$G_2DG_3H$、$G_3EFG$皆為平行四邊形(當然進一步需要符合更多的條件才可以作為一個正十邊形就不再我們的討論範圍內)。如所示。正十邊形以逆拿破崙法所得到的初始十邊形一樣具有類似於初始六邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊形，如下圖右側所示，僅列出部分比值和明顯可以看到的平行四邊形。

當 n 為偶數時，仿照求得初始六邊形的性質，當 n 為奇數時，仿照求得初始五邊形的性質，所以我們可以推論出初始 n 邊形(n 為偶數時)應具有的性質。我們仍舊先探討正 n 邊形的特性。如圖 50 所示，一正 n 邊形$A_1A_2 \ldots A_n$中（令 $k = \frac{n}{2}$），若連接$\overline{A_1A_{k+1}}$、$\overline{A_2A_{k+2}}$兩線段，交於點 O，並連接$\overline{A_3A_n}$、$\overline{A_4A_{n-1}}$、$\overline{A_5A_{n-2}}$、…，分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$上之中垂線必過點於 O，交$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$於點 H 和點 Q，且$\overline{OH}$分別交$\overline{A_3A_n}$、$\overline{A_4A_{n-1}}$於點 P、點 R。

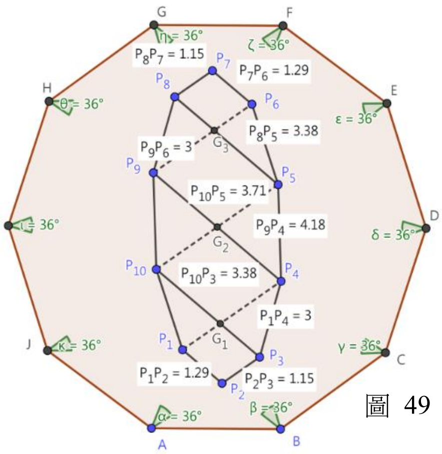


圖 49

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_{10}P_3}} = \frac{1.29}{3.38} = 0.38 = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}} = \frac{1.15}{3.00} \doteqdot \frac{2}{\sqrt{5}+3}$$

$$\frac{\overline{P_{10}P_3}}{\overline{P_9P_4}} = \frac{3.38}{4.18} = 0.81 = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_{10}P_5}} = \frac{3.00}{3.71} \doteqdot \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\frac{\overline{P_9P_4}}{\overline{P_8P_5}} = \frac{4.18}{3.38} = 1.24 = \frac{\overline{P_{10}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \frac{3.71}{3.00} \doteqdot \frac{4}{\sqrt{5}+1}$$

$$\frac{\overline{P_8P_5}}{\overline{P_7P_6}} = \frac{3.38}{1.29} = 2.62 = \frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{3.00}{1.15} \doteqdot \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_{10}G_1P_4G_2$、$P_9G_2P_5G_3$、$P_8G_3P_6P_7$皆為平行四邊形

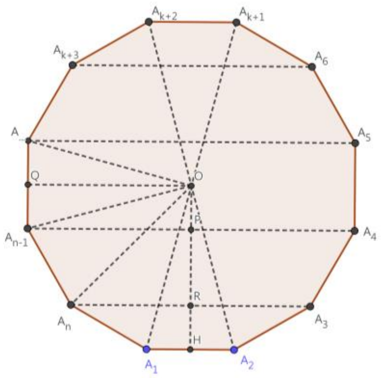


圖 50

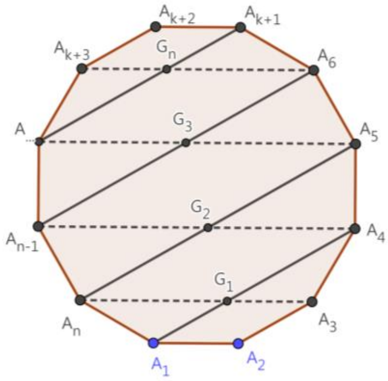


圖 51

因為$A_1A_2 \ldots A_n$為正 n 邊形，$\therefore \angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n} = \angle A_{n-1}OA_{n-2} = \angle A_1OA_n = \angle A_{n-1}OA_n$，$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_nA_3} \parallel \overline{A_{n-1}A_4} \parallel \overline{A_{n-2}A_5} \cdots \parallel \overline{A_{k+2}A_{k+1}}$，而$\angle A_{n-1}OQ = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n} = \angle A_1OH$，且$\frac{\overline{A_{n-1}Q}}{\overline{OA_{n-1}}} = \sin(\angle A_{n-1}OQ) = \sin\frac{180°}{n}$，$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA_{n-1}}} = \cos(\angle A_{n-1}OQ) = \cos\frac{180°}{n}$，又$\overline{A_1A_2} = \overline{A_{n-1}A_{n-2}}$，$\overline{OA_{n-1}} = \overline{A_{n-1}Q} \times \frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}$，$\overline{A_{n-1}A_4} = 2\overline{A_{n-1}P} = 2\overline{OQ} = 2\overline{OA_{n-1}} \times \cos\frac{180°}{n}$，

$\angle A_nOR = \angle A_1OA_n + \angle A_1OR = \frac{360°}{n} + \frac{180°}{n} = \frac{540°}{n}$，$\angle A_{n-1}OP = \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_1OA_n + \angle A_1OR = \frac{360°}{n} + \frac{360°}{n} + \frac{180°}{n} = \frac{900°}{n}$，$\frac{\overline{A_nR}}{\overline{OA_n}} = \sin(\angle A_nOR) = \sin\frac{540°}{n}$，$\overline{A_nA_3} = 2\overline{A_nR} = 2\overline{OA_n} \times \sin\frac{540°}{n} = 2\overline{OA_{n-1}} \times \sin\frac{540°}{n} = 2\overline{A_{n-1}Q} \times \frac{1}{\sin\frac{180°}{n}} \times \sin\frac{540°}{n} = \overline{A_1A_2} \times \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$。 同理，$\overline{A_{n-1}A_4} = 2\overline{A_{n-1}P} = 2\overline{OA_{n-1}} \times \sin(\angle A_{n-1}OP) = 2\overline{OA_{n-1}} \times \sin\frac{900°}{n} = \overline{A_1A_2} \times \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$。$\therefore \frac{\overline{A_nA_3}}{\overline{A_{n-1}A_4}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}}$，$\frac{\overline{A_{n-1}A_4}}{\overline{A_{n-2}A_5}} = \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}}$(當$\frac{n}{2}$為偶數時才有)，$\cdots \frac{\overline{A_{k+3}A_k}}{\overline{A_{k+2}A_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}}$ 。

因此若如圖 51 所示，連接$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_nA_5}$、$\overline{A_{n-1}A_6}$、…、$\overline{A_{k+1}A_{k+4}}$，$\overline{A_nA_3}$、$\overline{A_{n-1}A_4}$、

$\overline{A_{n-2}A_5}$、$\overline{A_{n-3}A_6}$、⋯、$\overline{A_{k+3}A_k}$，兩兩分別交於G_1、G_2、G_3、⋯、G_n，由於$A_1A_2 \dots A_n$為正 n 邊形，∴ $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_1A_4} \parallel \overline{A_nA_5} \parallel \overline{A_{n-1}A_6} \parallel \overline{A_{k+4}A_{k+1}} \parallel \overline{A_{k+3}A_{k+2}}$，$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_nA_3} \parallel \overline{A_{n-1}A_4} \parallel \overline{A_{n-2}A_5} \parallel \overline{A_{n-3}A_6} \parallel \overline{A_{k+3}A_k} \parallel \overline{A_{k+2}A_{k+1}}$，且$\overline{A_nA_3} = \overline{A_{k+3}A_k}$，$\overline{A_1A_4} = \overline{A_1A_4}$，由此可知四邊形$A_1A_2A_3G_1$、$A_nG_1A_4G_2$、$A_{n-1}G_2A_5G_3$、$A_{n-2}G_3A_6G_4$、⋯、$A_{k+3}G_nA_{k+1}A_{k+2}$等皆為平行四邊形(兩組對邊分別平行)。而$\overline{A_nA_3} = \overline{A_1A_2} \times \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \overline{A_{k+2}A_{k+1}}$，$\overline{A_nA_3} = \overline{A_{n-1}A_4} \times \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}}$，⋯$\frac{\overline{A_{k+3}A_k}}{\overline{A_{k+2}A_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}}$；同理$\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_3} \times \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \overline{A_{k+3}A_{k+2}}$，$\frac{\overline{A_{k+3}A_{k+2}}}{\overline{A_{k+4}A_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}}$。

因此我們可以推論當 n 為偶數時的正 n 邊形以逆拿破崙法求得初始 n 邊形時，這個初始 n 邊形應該也會如前所述具有類似於初始六邊形、初始八邊形和初始十邊形的性質。某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形會是平行四邊形。

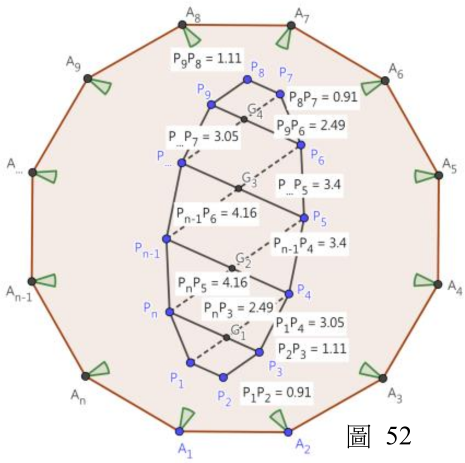


圖 52

當 n =12 時

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_nP_3}} = \frac{0.91}{2.49} = 0.36 = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}} = \frac{1.11}{3.05} \fallingdotseq \frac{\sin15°}{\sin45°}$$

$$\frac{\overline{P_nP_3}}{\overline{P_{n-1}P_4}} = \frac{2.49}{3.4} = 0.73 = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_nP_5}} = \frac{3.05}{4.16} \fallingdotseq \frac{\sin45°}{\sin75°}$$

$$\frac{\overline{P_{n-1}P_4}}{\overline{P_{n-2}P_5}} = \frac{3.4}{3.4} = 1 = \frac{\overline{P_nP_5}}{\overline{P_{n-1}P_6}} = \frac{4.16}{4.16} \fallingdotseq \frac{\sin75°}{\sin75°}$$

$$\frac{\overline{P_{n-2}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \frac{3.4}{2.49} = 1.36 = \frac{\overline{P_{n-1}P_6}}{\overline{P_{n-2}P_7}} = \frac{4.16}{3.05} \fallingdotseq \frac{\sin75°}{\sin45°}$$

$$\frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{2.49}{0.91} = 2.74 = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_9P_8}} = \frac{3.05}{1.11} \fallingdotseq \frac{\sin45°}{\sin15°}$$

四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$…皆為平行四邊形

以正 12 邊形為例來驗證上述結果，觀察圖 51 中的初始 n 邊形(此時 n=12 為偶數)，我們可以發現，四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$、…應該皆為平行四邊形。因此，我們仿照初始六邊形做出一個結論是拿破崙的初始 n 邊形(當 n 為偶數時)的 n 邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下: (1)$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_nP_3}} = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}}$、$\frac{\overline{P_nP_3}}{\overline{P_{n-1}P_4}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_nP_5}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_4}}{\overline{P_{n-2}P_5}} = 1 = \frac{\overline{P_nP_5}}{\overline{P_{n-1}P_6}}$(當$\frac{n}{2}$為偶數時才有)、$\frac{\overline{P_{n-2}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_6}}{\overline{P_{n-2}P_7}}$、$\frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_9P_8}}$，⋯$\frac{\overline{P_{k+3}P_k}}{\overline{P_{k+2}P_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$…；(2)四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$、…皆為平行四邊形，其中$G_1$、$G_2$、$G_3$、…為初始 n 邊形內的對角線某兩線段之交點，如圖中所示。所以並

不是任意一個 n 邊形都可以作為初始 n 邊形畫出正 n 邊形的，畢竟不是所有的 n 邊形都可以符合上述這兩個特性的。

伍、 研究結果

一、拿破崙定理與逆拿破崙定理的證明。

二、拿破崙定理在四邊形的應用可知一個正方形可以從很多個不同的初始四邊形透過拿破崙法而得到，但是一個初始四邊形頂多只能畫出一個正方形。

三、拿破崙定理在正五邊形和正六邊形的證明與探討。

四、推廣至正 n 邊形和初始 n 邊形特性的探討中，分別以奇數邊數（七和九）及偶數邊數（八和十）來推論找出初始 n 邊形應具有的條件，然後將條件驗證於初始 11 和 12 邊形中。

陸、 討論

一、透過逆拿破崙法證明只有初始四邊形為平行四邊形時，才能夠以拿破崙法畫出正方形。特別的是，當所取的任意點與其他的邊共線時，那麼畫出來的初始四邊形會會是矩形，而不僅僅是一個平行四邊形而已。如果初始四邊形是任意四邊形，則必須透過道格拉斯法，才能夠畫出正方形。

二、當初始多邊形為正多邊形時，利用拿破崙法就可以畫出正多邊形，但如果是任意多邊形時，拿破崙法就無法完全適用，有諸多的限制，例如角度或是邊長比例上的要求。

三、一個初始 n 邊形只能畫出一個對應的正 n 邊形，但是一個正 n 邊形卻可以擁有許多的初始 n 邊形。這是透過 GeoGebra 作圖所發現的結果。因為初始 n 邊形可以因為動點的移動而改變而形成不同的初始 n 邊形，但是對應的正 n 邊形卻是不為所動的。

四、一個 n 邊形要作為拿破崙定理中的初始 n 邊形必須符合一些基本條件，例如初始 n 邊形的某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形必須是平行四邊形。以初始五邊形 PQRST 為例，必須符合的特性是：(1) $\frac{\overline{TR}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{\overline{PS}}{\overline{QR}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；(2)四邊形 PQRG’為一平行四邊形，其中 G’為$\overline{PS}$、$\overline{RT}$兩線段之交點。而初始六邊形 PQRSTU，則須符合的特性是：(1) $\frac{\overline{UR}}{\overline{PQ}}=2$，$\frac{\overline{QT}}{\overline{PU}}=2$；(2)四邊形 ABG’F、CDEG’皆為平行四邊形，其中 G’為$\overline{UR}$、$\overline{QT}$兩線段之交點。初

始 n 邊形的條件則如內文所述，n 必須分成偶數和奇數去探討。

五、拿破崙的初始 n 邊形(當 n 為奇數時)的 n 邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下: (1) $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_nP_4}} = \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}} = \frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}}$、$\frac{\overline{P_nP_4}}{\overline{P_{n-1}P_5}} = \frac{\sin\frac{720°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}} = \frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_nP_6}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_5}}{\overline{P_{n-2}P_6}} = \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_nP_6}}{\overline{P_{n-1}P_7}}$、$\frac{\overline{P_{n-2}P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_{n-2}P_8}}$，…；(2)四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_nG_2P_5G_3$、$P_{n-1}G_3P_6G_4$、$P_{n-2}G_4P_7G_8$、…皆為平行四邊形，其中$G_1$ 、G_2 、G_3、 ...為初始 n 邊形內的對角線某兩線段之交點。拿破崙的初始 n 邊形(當 n 為偶數時)的 n 邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下: (1)$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_nP_3}} = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}}$、$\frac{\overline{P_nP_3}}{\overline{P_{n-1}P_4}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{900°}{n}} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_nP_5}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_4}}{\overline{P_{n-2}P_5}} = 1 = \frac{\overline{P_nP_5}}{\overline{P_{n-1}P_6}}$(當$\frac{n}{2}$為偶數時才有) 、 $\frac{\overline{P_{n-2}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_6}}{\overline{P_{n-2}P_7}}$ 、 $\frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_9P_8}}$ ， $\cdots\frac{\overline{P_{k+3}P_k}}{\overline{P_{k+2}P_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$…；(2)四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$、…皆為平行四邊形，其中$G_1$ 、G_2 、G_3、 ...為初始 n 邊形內的對角線某兩線段之交點。因此並不是任意一個 n 邊形都可以作為初始 n 邊形畫出正 n 邊形的，畢竟不是所有的 n 邊形都可以符合上述這兩個特性的。

柒、 結論

一、數學的學習動機來自於發現問題進而解決問題，而數學的存在於隨處可見的日常生活之中，希望能從一個簡單的數學題目開始，結合國中數學課程內容中的幾何概念，讓我們在研究數學題目中的過程中感受到數學的奧妙。

二、研究的過程是辛苦的，但是完成每一個證明都能夠令我們感到興奮，我們竟然可以由小問題出發進而完成整個研究，令人感到相當具有成就感。

三、礙於時間有限與所學能力上有所不足，因此沒有完成初始 n 邊形的證明以及任意四邊形的證明，但是我們已經盡量透過實際的量測來佐證初始 n 邊形的特性，未來有時間會繼續努力完善這個研究主題。

捌、 參考文獻資料

一、黃家禮編著（1997）。幾何明珠。台北市：九章出版社。

二、嚴鎮軍主編（2020）。初中數學競賽教程。台北市：九章出版社。

三、九章出版社（2001）。巧添輔助線。台北市：九章出版社。

【評語】030402

三角形各邊為邊分別向外側作等邊三角形，則三個等邊三角形的中心構成一個等邊三角形。以逆拿破崙定理嘗試找出正多邊形的可能初始多邊形，並先以邊數為 3,4,5,6 為架構，推展至 n 邊形時再分奇偶邊數討論並得到一些不錯的限制條件，用逆定理來驗證與證明一些必要條件，數學證明推導的過程值得鼓勵。

作品簡報

拿破崙的多角戀-與初始n邊形有約

國中組 數學科

摘要與目的

摘要

一、拿破崙定理與逆拿破崙定理的證明。

二、以逆拿破崙定理確認只有平行四邊形能作為正方形的初始n邊形。

三、透過逆拿破崙定理探討正五邊形和正六邊形的初始n邊形條件。

四、將逆拿破崙定理推廣至正n邊形，找出初始n邊形應具有的條件(分別以奇偶數探討)。

目的

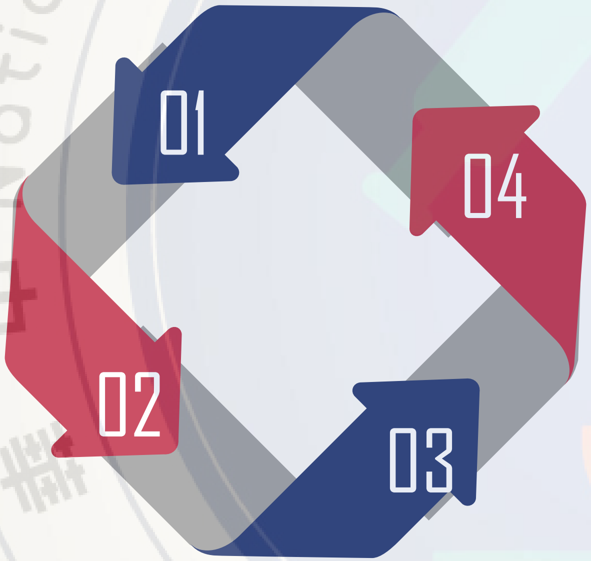
一、找出作為正n邊形的初始n邊形應具備何種條件

二、確認符合條件的初始n邊形能夠以拿破崙法得到拿破崙正n邊形

研究動機

過去的科展有探討初始多邊形的性質，但卻因使用高中複數符號證明而不懂，老師提出是否可使用國中方式，或數學軟體試找到初始n邊形性質，因此使我們栽入初始多邊形與拿破崙定理、逆定理中，並希冀可以藉由之前相關作品為基礎，找到屬於我們”拿破崙多角戀”的“初戀”科展作品。

研究架構



正多邊形

給定正四邊形、正五邊形、正六邊形、正奇數邊形、正偶數邊形

逆拿破崙定理

透過逆拿破崙定理畫出初始n邊形

初始n邊形性質

透過逆拿破崙定理找到初始n邊形，再由GGB軟體進一步推論初始n邊形的條件

拿破崙定理

最後再由給定的初始n邊形條件，利用拿破崙定理卻認為原正多邊形。

名詞釋義

拿破崙定理

以三角形各邊為邊分別向外(內)側作正三角形，則這三個正三角形的外心會構成一個正三角形，並稱外(內)拿破崙三角形；且外(內)拿破崙三角形有共同的外心。

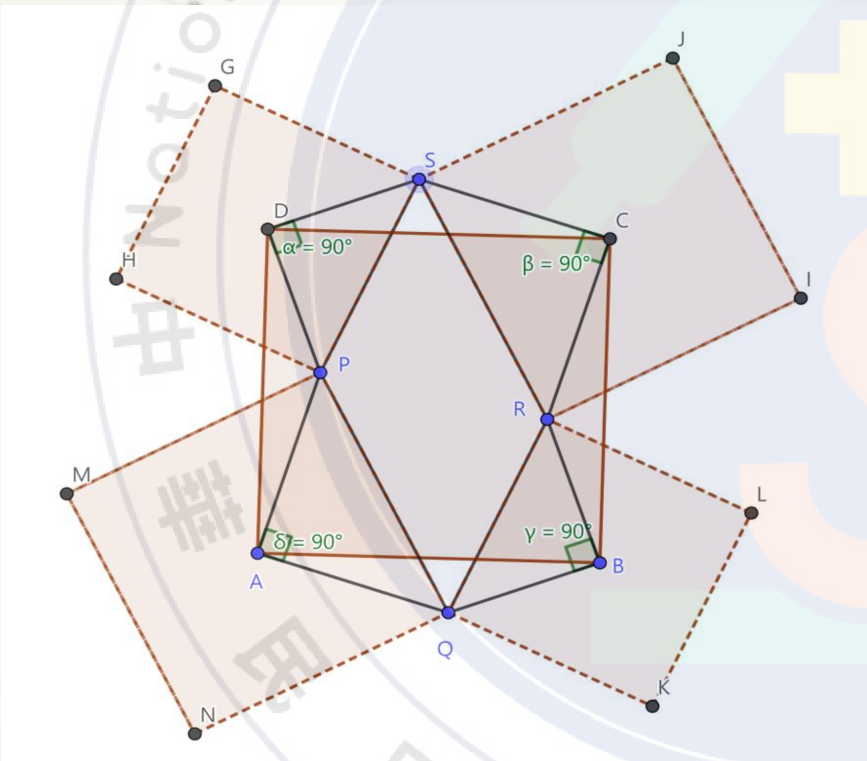
拿破崙逆定理

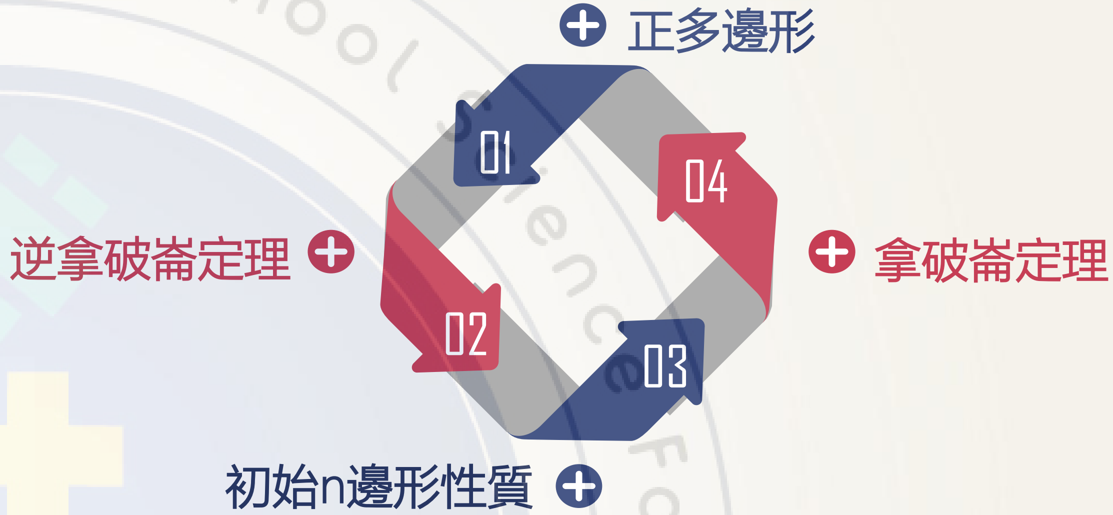
作一正n邊形，向內以頂點為頂角，作 $180° - ($正n邊形頂角$)$的等腰三角形，可得出一n邊形。
(此n邊形即為原正n邊形之初始n邊形)。

初始n邊形

應用拿破崙定理的方法所得到的正三角形被稱為「拿破崙三角形」，而其作圖方法稱作「拿破崙法」，以此法得到的正n邊形就稱為「拿破崙正n邊形」，而原本給定的n邊形則稱為「初始n邊形」。

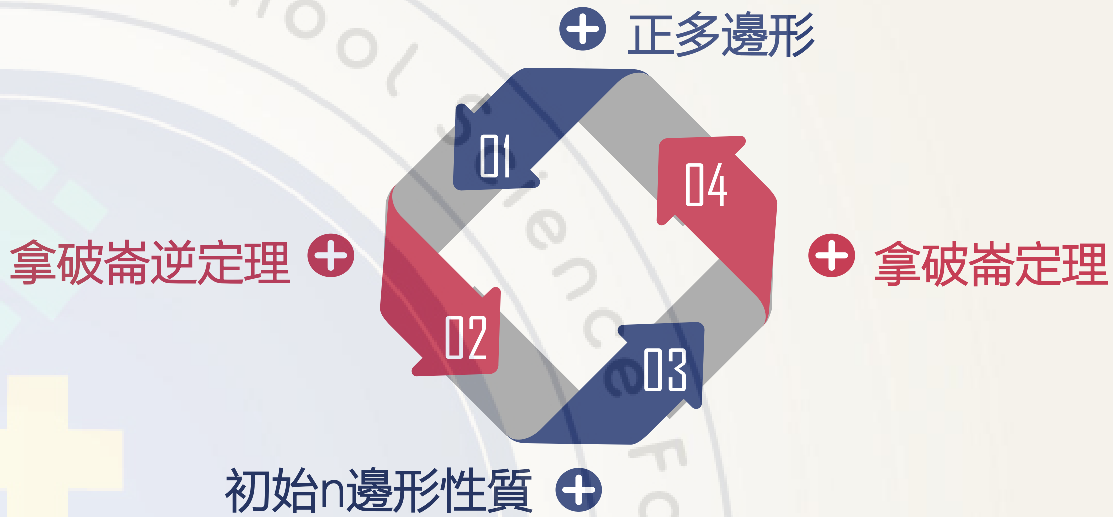
正四邊形使用
逆拿破崙定理

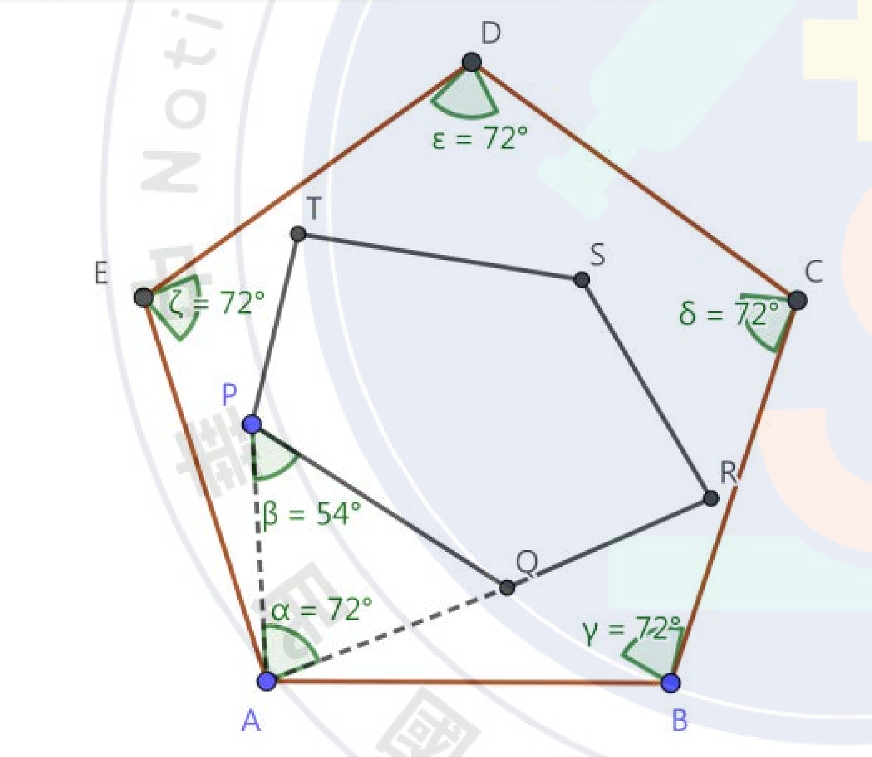


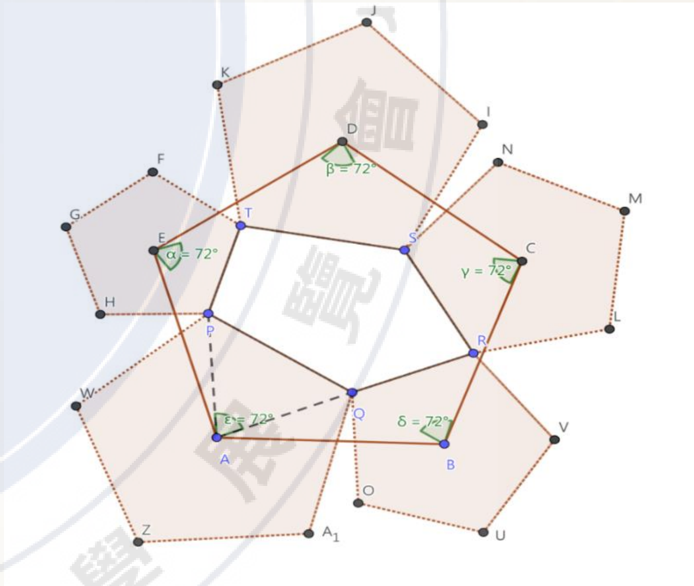


初始圖形	平行四邊形	等腰梯形	鳶形	直角梯形
結果圖形	正方形	鳶形	等腰梯形	有一直角之四邊形

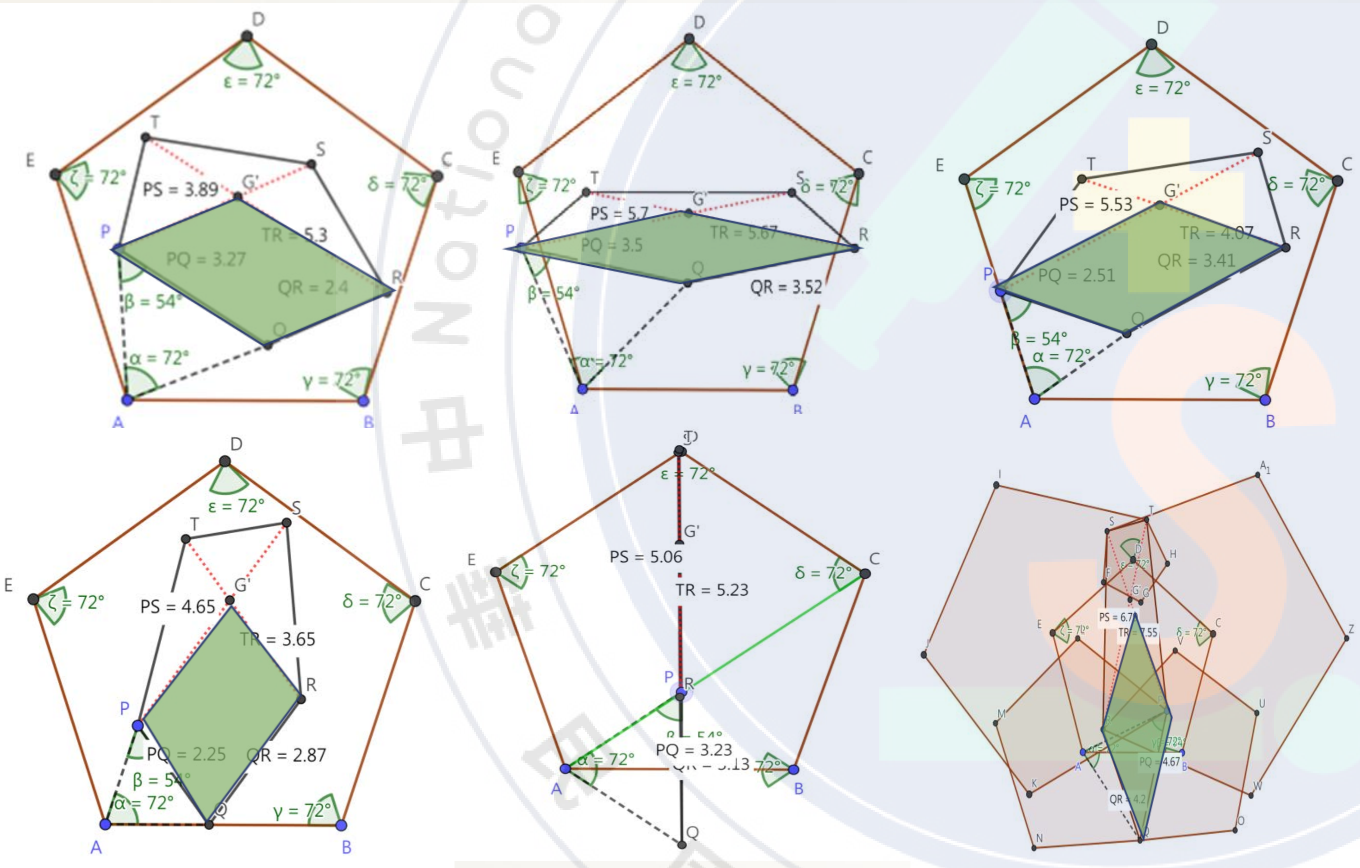
正五邊形使用
拿破崙逆定理







尋找初始五邊形



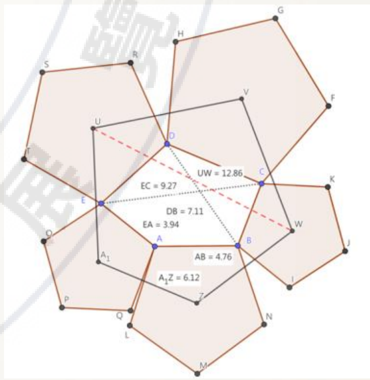
找到初始五邊形性質

(1) $\dfrac{\overline{TR}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

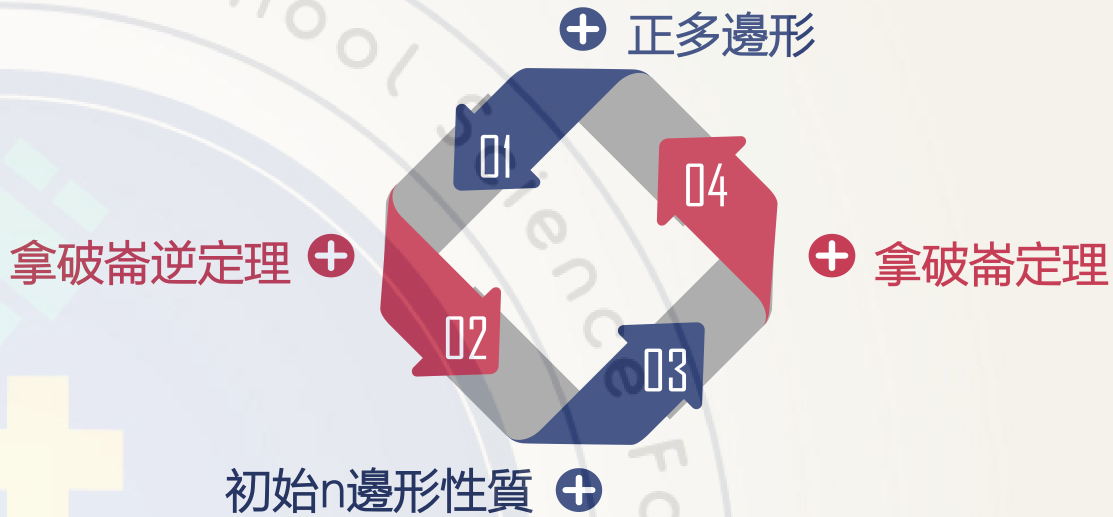
$\dfrac{\overline{PS}}{\overline{QR}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

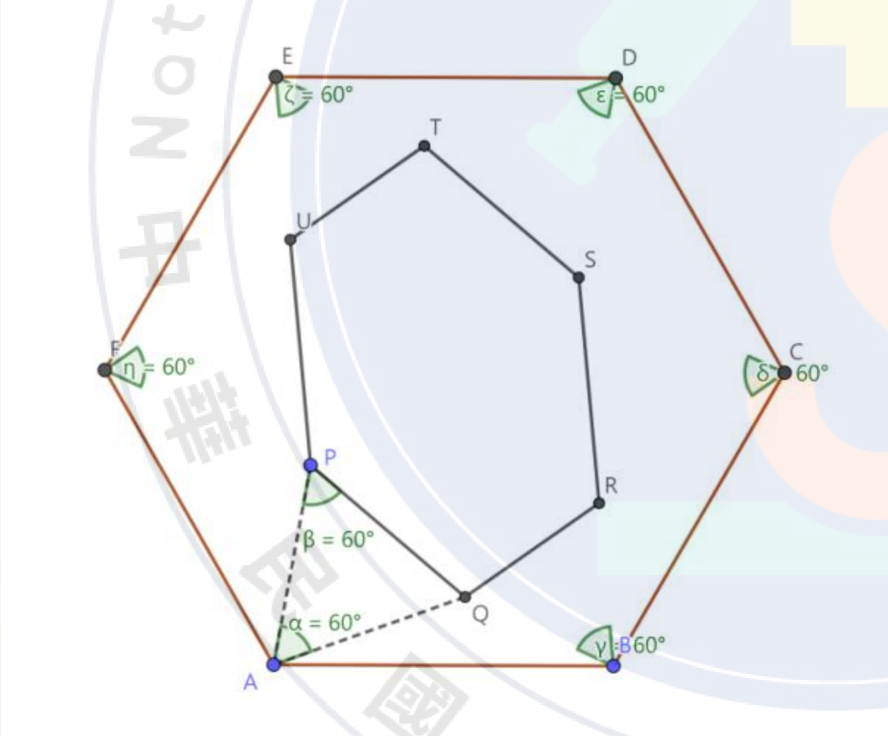
(2) 四邊形PQRG’ 為一平行四邊形，其中G’ 為$\overline{PS}$、$\overline{RT}$兩線段之交點。

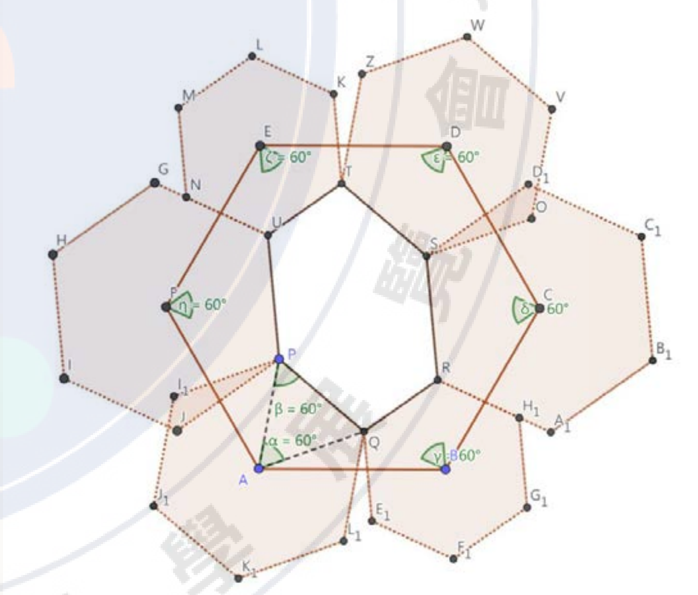
不符合性質之初始五邊形



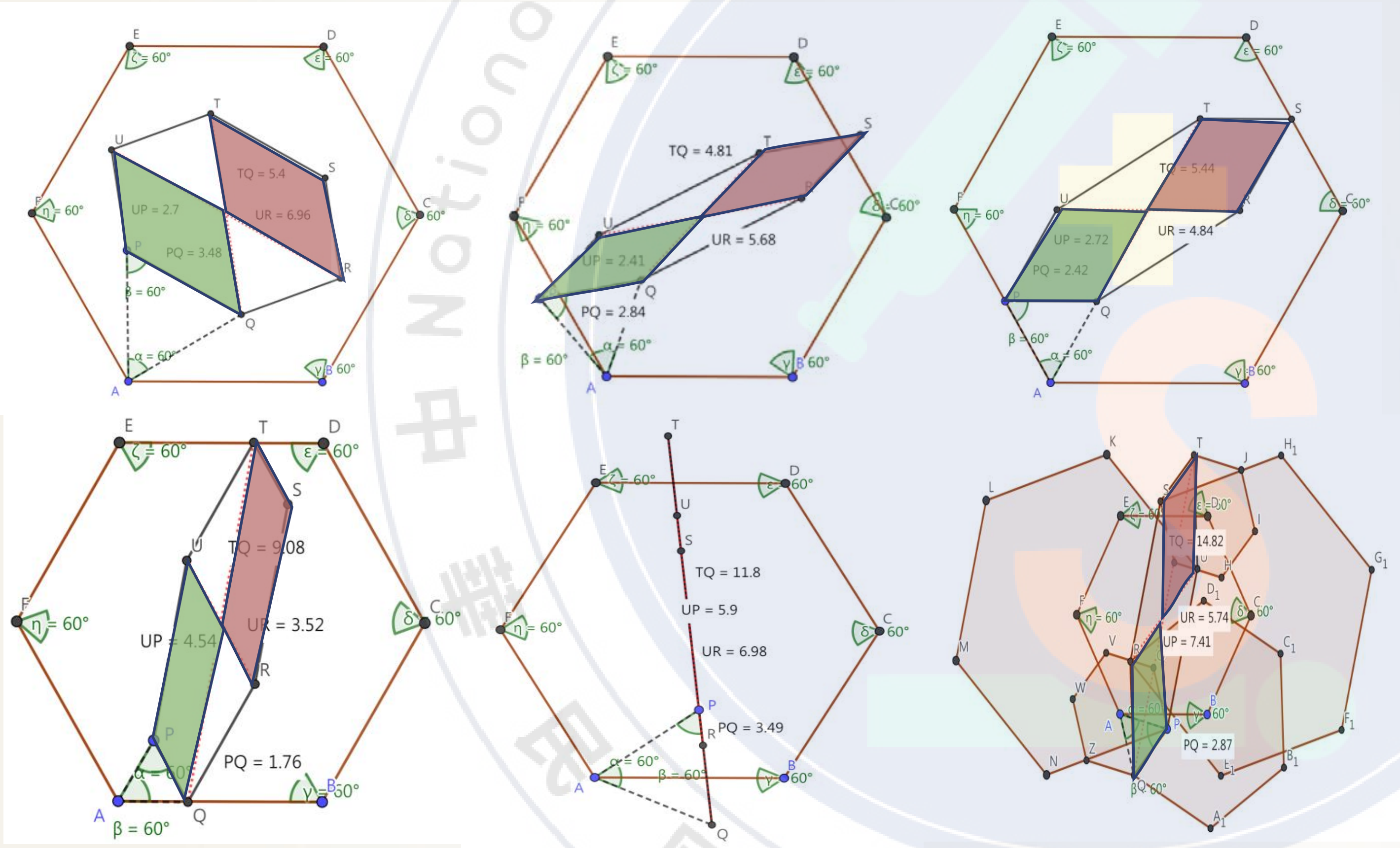
正六邊形使用拿破崙逆定理







尋找初始六邊形

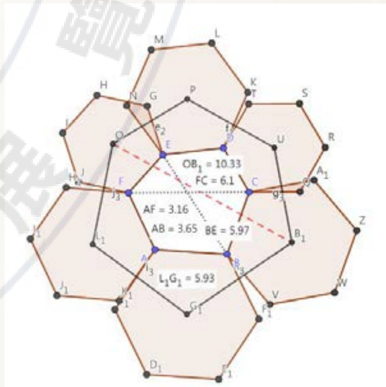


找到初始六邊形性質

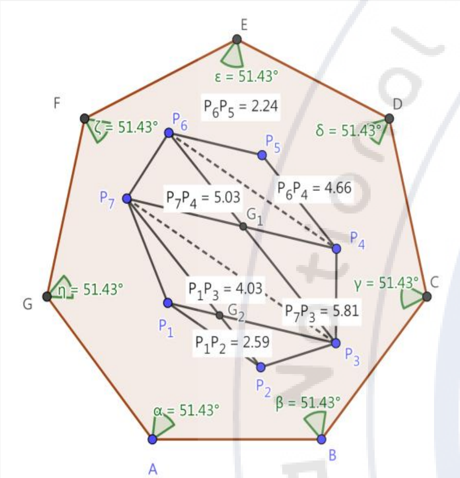
(1) $\dfrac{\overline{UR}}{\overline{PQ}} = 2$ $\dfrac{\overline{QT}}{\overline{PU}} = 2$

(2) 四邊形PQGU、RSTG皆為平行四邊形，其中G為$\overline{UR}$、$\overline{QT}$兩線段之交點。

不符合性質之初始六邊形



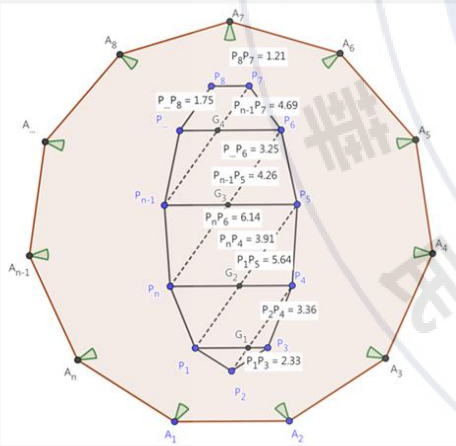
初始7、9、11邊形性質



- $\frac{\overline{P_6P_5}}{\overline{P_7P_4}} = \frac{2.24}{5.03} = 0.45 = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_7P_3}} = \frac{2.59}{5.81}$ ≒ sin 180˚ 7 sin 540˚

- $\frac{\overline{P_7P_4}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{5.03}{4.03} = 1.25 = \frac{\overline{P_7P_3}}{\overline{P_6P_4}} = \frac{5.81}{4.66}$ ≒ 1 2 × sin 540˚ 7 sin 180˚ 7 × 1 cos 180˚ 7

- 四邊形$P_4P_5P_6G_1$、$P_3G_1P_7G_2$為平行四邊形



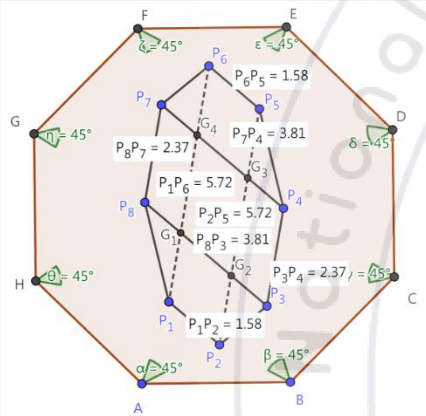
當n =11 時

- $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_nP_4}} = \frac{2.33}{3.91} = 0.60 = \frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}} = \frac{3.36}{5.64} ≒ \frac{\sin\frac{360°}{n}}{\sin\frac{720°}{n}}$　　$\frac{\overline{P_nP_4}}{\overline{P_{n-1}P_5}} = \frac{3.91}{4.26} = 0.92 = \frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_nP_6}} = \frac{5.64}{6.14} ≒ \frac{\sin\frac{720°}{n}}{\sin\frac{1080°}{n}}$

  $\frac{\overline{P_{n-1}P_5}}{\overline{P_{n-2}P_6}} = \frac{4.26}{3.25} = 1.31 = \frac{\overline{P_nP_6}}{\overline{P_{n-1}P_7}} = \frac{6.14}{4.69} ≒ \frac{\sin\frac{900°}{n}}{\sin\frac{540°}{n}}$　　$\frac{\overline{P_{n-2}P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{3.25}{1.21} = 2.68 = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_{n-2}P_8}} = \frac{4.69}{1.75} ≒ \frac{\sin\frac{540°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}$

- 四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$PnG_2P_5G_3$、$Pn-1G_3P_6G_4$、$Pn-2G_4P_7G_8$…皆為平行四邊形

初始8、10、12邊形性質

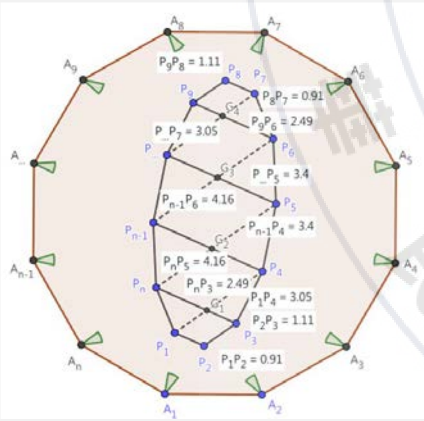


- $\dfrac{\overline{P_7P_4}}{\overline{P_8P_3}} = \dfrac{3.81}{3.81} = 1 = \dfrac{\overline{P_1P_6}}{\overline{P_2P_5}} = \dfrac{5.72}{5.72}$

  $\dfrac{\overline{P_8P_3}}{\overline{P_1P_2}} = \dfrac{3.81}{1.58} = 2.41 = \dfrac{\overline{P_2P_5}}{\overline{P_3P_4}} = \dfrac{5.72}{2.37} ≒ \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

  $\dfrac{\overline{P_6P_5}}{\overline{P_7P_4}} = \dfrac{1.58}{3.81} = 0.41 = \dfrac{\overline{P_8P_7}}{\overline{P_1P_6}} = \dfrac{2.37}{5.72} ≒ \sqrt{2}-1$

- 四邊形$G_1G_2G_3G_4$、$P_8G_1G_4P_7$、$G_4G_3P_5P_6$、$G_2P_3P_4G_3$、$P_2P_1G_1G_2$為平行四邊形



當n =12時

- $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_nP_3}} = \dfrac{0.91}{2.49} = 0.36 = \dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}} = \dfrac{1.11}{3.05} ≒ \dfrac{\sin15°}{\sin45°}$ $\dfrac{\overline{P_nP_3}}{\overline{P_{n-1}P_4}} = \dfrac{2.49}{3.4} = 0.73 = \dfrac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_nP_5}} = \dfrac{3.05}{4.16} ≒ \dfrac{\sin45°}{\sin75°}$

  $\dfrac{\overline{P_{n-1}P_4}}{\overline{P_{n-2}P_5}} = \dfrac{3.4}{3.4} = 1 = \dfrac{\overline{P_nP_5}}{\overline{P_{n-1}P_6}} = \dfrac{4.16}{4.16} ≒ \dfrac{\sin75°}{\sin75°}$ $\dfrac{\overline{P_{n-2}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \dfrac{3.4}{2.49} = 1.36 = \dfrac{\overline{P_{n-1}P_6}}{\overline{P_{n-2}P_7}} = \dfrac{4.16}{3.05} ≒ \dfrac{\sin75°}{\sin45°}$

  $\dfrac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \dfrac{2.49}{0.91} = 2.74 = \dfrac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_9P_8}} = \dfrac{3.05}{1.11} ≒ \dfrac{\sin45°}{\sin15°}$

- 四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$…皆為平行四邊形

推論初始n邊型(奇數邊性質)

拿破崙的初始n邊形(當n為奇數時)的n邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下:

(1) $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_nP_4}} = \frac{\sin\frac{360^\circ}{n}}{\sin\frac{720^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_2P_4}}{\overline{P_1P_5}}$、$\frac{\overline{P_nP_4}}{\overline{P_{n-1}P_5}} = \frac{\sin\frac{720^\circ}{n}}{\sin\frac{1080^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_1P_5}}{\overline{P_nP_6}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_5}}{\overline{P_{n-2}P_6}} = \frac{\sin\frac{900^\circ}{n}}{\sin\frac{540^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_nP_6}}{\overline{P_{n-1}P_7}}$、$\frac{\overline{P_{n-2}P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_{n-2}P_8}}$，…

(2)四邊形$P_1G_1P_4G_2$、$P_nG_2P_5G_3$、$P_{n-1}G_3P_6G_4$、$P_{n-2}G_4P_7G_8$、…皆為平行四邊形，其中G_1、G_2、G_3、 …為初始n邊形內的對角線某兩線段之交點。

推論初始n邊形(偶數邊性質)

拿破崙的初始n邊形(當n為偶數時)的n邊形$P_1P_2 \dots P_n$，應具有的性質如下:

(1) $\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_nP_3}} = \frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{540^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_4}}$、$\frac{\overline{P_nP_3}}{\overline{P_{n-1}P_4}} = \frac{\sin\frac{540^\circ}{n}}{\sin\frac{900^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_nP_5}}$、$\frac{\overline{P_{n-1}P_4}}{\overline{P_{n-2}P_5}} = 1 = \frac{\overline{P_nP_5}}{\overline{P_{n-1}P_6}}$

(當$\frac{n}{2}$為偶數時才有)

$\frac{\overline{P_{n-2}P_5}}{\overline{P_9P_6}} = \frac{\sin\frac{900^\circ}{n}}{\sin\frac{540^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_6}}{\overline{P_{n-2}P_7}}$、$\frac{\overline{P_9P_6}}{\overline{P_8P_7}} = \frac{\sin\frac{540^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\overline{P_{n-1}P_7}}{\overline{P_9P_8}}$，…$\frac{\overline{P_{k+3}P_k}}{\overline{P_{k+2}P_{k+1}}} = \frac{\sin\frac{540^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} \cdots$

(2) 四邊形$P_1P_2P_3G_1$、$P_nG_1P_4G_2$、$P_{n-1}G_2P_5G_3$、$P_{n-2}G_3P_6G_4$、$P_9G_4P_7P_8$、…皆為平行四邊形，其中G_1、G_2、G_3、 …為初始n邊形內的對角線某兩線段之交點

研究結果與討論

結果

一、拿破崙定理與逆拿破崙定理的證明
二、拿破崙逆定理在正四邊形的初始四邊形的證明與探討
三、拿破崙逆定理在正五邊形和正六邊形的初始五、六邊的證明與探討
四、拿破崙定理推廣至正n邊形的探討中，分別以奇數邊數及偶數邊數來找出初始n邊形應有的條件

討論

一、透過逆拿破崙法證明只有初始四邊形為平行四邊形時，才能夠以拿破崙法畫出正方形。
二、當初始多邊形為正多邊形時，利用拿破崙法可以畫出正多邊形，但是若是任意多邊形，拿破崙法就無法完全適用，會有角度或是邊長比例上的限制。
三、一個初始n邊形只能畫出一個對應的正n邊形，但是一個正n邊形卻可以擁有許多的初始n邊形。這是透過GeoGebra作圖所發現的結果。
四、初始n邊形必須符合一些基本條件，如初始n邊形的某些線段的比值固定，而某些點所形成的四邊形必須是平行四邊形。