中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030401

滾積木遊戲之研究與推廣

學校名稱：高雄市立明華國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃宇綸	廖思涵
國二 賴宥翔	黃任偉
國二 林志穎	

關鍵詞：路徑、移動步數、遞迴關係

摘要

在 $m \times n$ 大小的棋盤上，將一個 $s \times s \times t$ 大小的長方體積木立於左下角的格子(始點)，以「倒、滾、立」三種移動方式，以及「向右、向上」兩種方向移動至右上角格子(終點)。本研究的目的在找出所有的有解盤面，以及盤面有解時所有的可行路徑數。作品中我們找出了路徑數的遞迴關係式，並推導出所有可行路徑數的通式，同時求出最小移動步數與最大移動步數。

壹、前言

一、研究動機

社團課時，老師讓我們玩滾積木遊戲，在 $m \times n$ (m 行 n 列)大小的棋盤上，將一個 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木立於左下角的格子，以「倒、滾、立」三種移動方式，以及「向右、向上」兩種方向成功移動至右上角格子，則此盤面稱為有解。我們發現，並不是任意大小的棋盤皆有解，且過關的方法與移動的步數均不唯一，這引起我們的興趣，便展開一連串的研究。

二、研究目的

(一)找出移動 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木，有解的盤面大小。

(二)找出移動 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木，盤面有解時，所有可行路徑數。

(三)找出移動 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木，盤面有解時，最小移動步數與最大移動步數。

(四)推廣至移動 $1 \times 1 \times t$ $(t \geq 2)$ 大小的長方體積木之情形。

(五)推廣至移動 $s \times s \times t$ $(s \neq t)$ 大小的長方體積木之情形。

三、文獻回顧

我們搜尋到關於滾積木(方塊)的文獻，大多只是研究 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木路徑走法與規律，唯有第 55 屆全國科展作品[1]中，有針對在 $m \times n$ 的棋盤上移動 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木，找出其<u>最小移動步數</u>，以及<u>最小移動步數時的路徑數量</u>，然而公式不夠簡潔，且未做積木大小的推廣。本篇作品對移動的規則加限制，並放寬過關條件，優化證明方法，找出各型路徑數間的<u>遞迴關係</u>，並推導出<u>所有可行路徑數</u>的通式。此外，除了<u>最小移動步數</u>，也推導出<u>最大移動步數</u>的通式。最後，我們更將結論推廣至 $s \times s \times t$ 大小的長方體積木。

貳、研究設備與器材

筆、電腦、Excel、C++

參、研究過程與方法

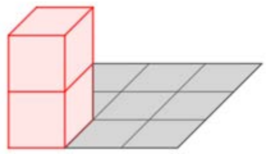
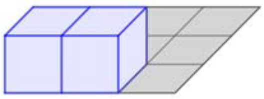
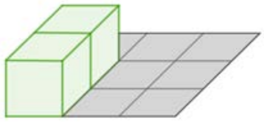
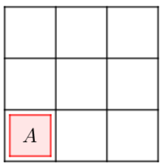
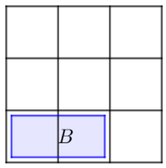
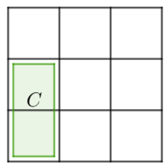
遊戲規則

在 $m \times n$ ($m, n \in N$)大小的棋盤上，將一個 $1 \times 1 \times 2$ 大小的長方體積木立於左下角的格子(始點)，以「倒、滾、立」三種移動方式，以及「向右、向上」兩種方向移動至右上角格子(終點)。

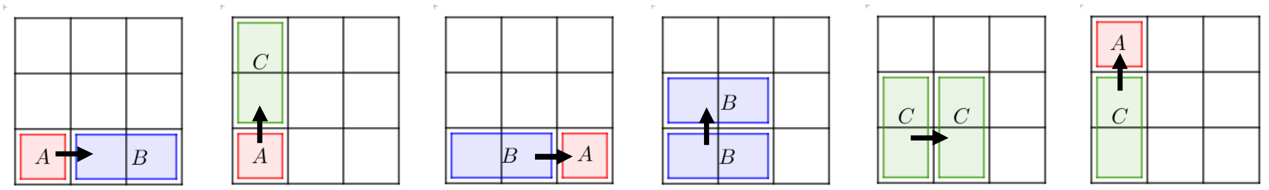
名詞與符號定義

(一) (i,j) ：位於第 i 行、第 j 列的棋格座標。

(二)積木狀態：

狀態	A (立置)	B (橫置)	C (縱置)
圖示			
紀錄			
所在棋格	(1,1)	(2,1)	(1,2)

(三)移動方式：



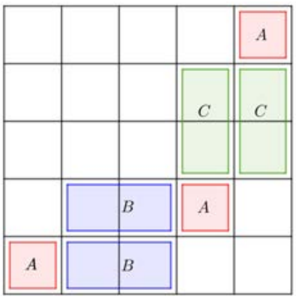
向右倒　向上倒　向右立　向上滾　向右滾　向上立

(四)有解盤面： $m \times n$ 大小的棋盤上，可以成功將積木由始點移動至終點。

(五)可行路徑： $m \times n$ 大小的棋盤上，可以成功將積木由始點移動至終點的路徑。

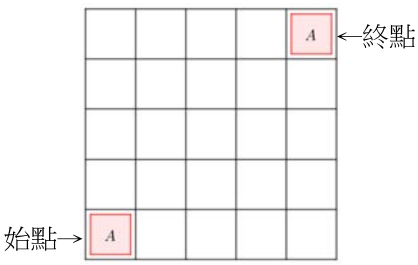
我們可以用以下方式記錄每一條可行路徑：

例：右圖表示路徑 $ABBACCA$



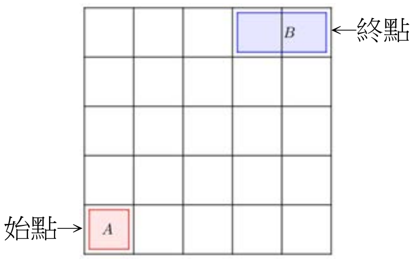
(六)路徑型式：

始點 $A \to$ 終點 A



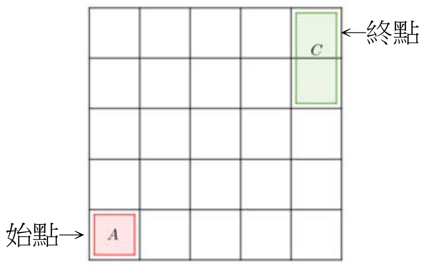
T_1 型路徑

始點 $A \to$ 終點 B



T_2 型路徑

始點 $A \to$ 終點 C



T_3 型路徑

$\underbrace{T_1 \text{型路徑} \quad T_2 \text{型路徑} \quad T_3 \text{型路徑}}_{T \text{ 型路徑}}$

(七)$T_i(m,n)$：在 $m\times n$ 大小的棋盤上，積木由始點移動至終點的所有 T_i 型可行路徑數。

(八)$minS_{T_i}(m,n)$：在 $m\times n$ 大小的棋盤上，積木由始點移動至終點的所有 T_i 型可行路徑中，移動步數的最小值。

(九)$MaxS_{T_i}(m,n)$：在 $m\times n$ 大小的棋盤上，積木由始點移動至終點的所有 T_i 型可行路徑中，移動步數的最大值。

(十)$[x]$：小於或等於 x 的最大整數，稱高斯符號。例：$[3.6]=3$、$[1]=1$、$[-2.2]=-3$。

(十一)C_k^n：從 n 個不同事物中取出 k 個 $(0\le k\le n)$ 的組合數為 $C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，其中 $C_k^n=C_{n-k}^n$。

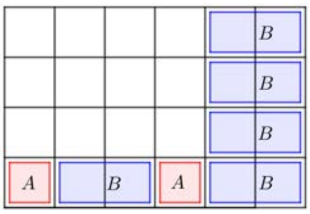
為了本研究需求，參考文獻[2]，擴充定義 $C_k^n=\begin{cases}1 & ,n<0,k=0\\ 0 & ,(0\le n<k)\vee(k<0\le n)\end{cases}$。

(十二)H_k^n：從 n 種(每種至少有 k 件)不同事物中，重複取 k 個的組合數為 $H_k^n=C_k^{n+k-1}$。

由 C_k^n 擴充定義知：$H_0^0=C_0^{-1}=1$、$H_0^n=C_0^{n-1}=1$、$H_k^0=C_k^{k-1}=0\ (k\ne 0)$。

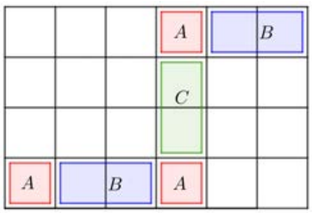
為了本研究需求，再擴充定義 $H_k^n=0\,,k\notin Z$。

【例】窮舉法找出 6×4 的盤面之所有可行路徑



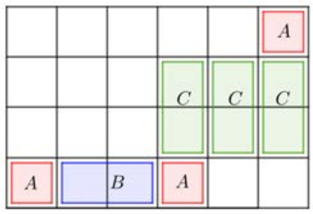
$ABABBBB$

T_2 型、移動 6 步



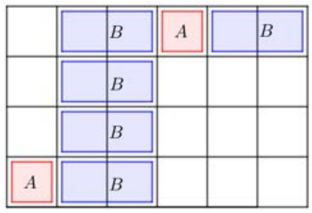
$ABACAB$

T_2 型、移動 5 步



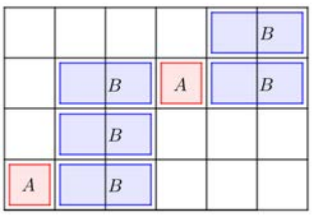
$ABACCCA$

T_1 型、移動 6 步



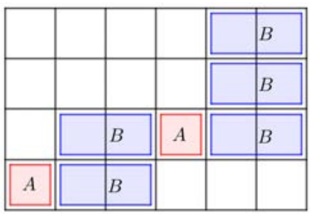
$ABBBBAB$

T_2 型、移動 6 步



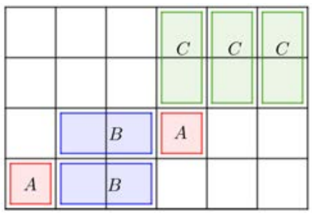
$ABBBABB$

T_2 型、移動 6 步



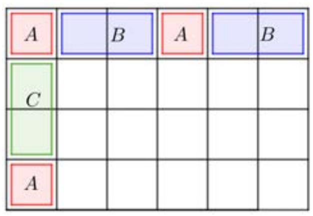
$ABBABBB$

T_2 型、移動 6 步



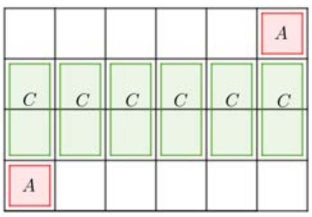
$ABBACCC$

T_3 型、移動 6 步



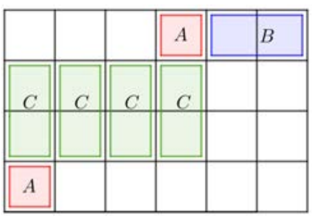
$ACABAB$

T_2 型、移動 5 步



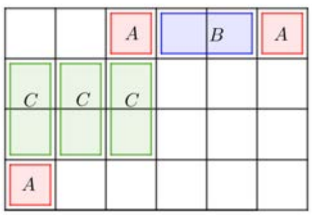
$ACCCCCCA$

T_1 型、移動 7 步



$ACCCCAB$

T_2 型、移動 6 步



$ACCCABA$

T_1 型、移動 6 步

$$\begin{cases}T_1(6,4)=3\\ T_2(6,4)=7\Rightarrow T(6,4)=11\\ T_3(6,4)=1\end{cases}$$

$minS_T(6,4)=5$

$MaxS_T(6,4)=7$

研究一：在 $m\times n$ 大小的盤面上移動 $1\times1\times2$ 大小的長方體積木

(一)找出有解盤面

性質 1.1：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則

(1) $m\times n$ 的盤面存在 T_1 型可行路徑 $\Leftrightarrow$ $n\times m$ 的盤面存在 T_1 型可行路徑

(2) $m\times n$ 的盤面存在 T_2 型可行路徑 $\Leftrightarrow$ $n\times m$ 的盤面存在 T_3 型可行路徑

(3) $m\times n$ 的盤面有解 $\Leftrightarrow$ $n\times m$ 的盤面有解。

【說明】由盤面的對稱性可知，此性質顯然成立。

定理 1.2：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則

(1)當 $m=3k-1,3k(k\in N)$ 、 $1\le n\le 3$ 或 $1\le m\le 3$ 、 $n=3k-1,3k(k\in N)$ 時，

盤面不存在 T_1 型可行路徑。其餘大小的盤面皆存在 T_1 型可行路徑。

(2)當 $m=3k-2,3k-1(k\in N)$ 、 $1\le n\le 3$ 或 $m=1,2$ 時，

盤面不存在 T_2 型可行路徑。其餘大小的盤面皆存在 T_2 型可行路徑。

(3)當 $1\le m\le 3$ 、 $n=3k-2,3k-1(k\in N)$ 或 $n=1,2$ 時，

盤面不存在 T_3 型可行路徑。其餘大小的盤面皆存在 T_3 型可行路徑。

【證明】利用**數學歸納法**以及找尋**特定解**即可證得。(因版面不足，證明於研究日誌)

定理 1.3：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則

當 $m=1,2$ 、 $n=3k-1(k\in N)$ 或 $m=3k-1(k\in N)$ 、 $n=1,2$ 時，盤面無解。

其餘大小盤面皆有解。

【證明】綜合定理 1.2(1)(2)(3)即可得。

(二)尋找 $T_1(m,n)$ 、 $T_2(m,n)$ 、 $T_3(m,n)$ 間的遞迴關係

性質 2.1：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則 $T_1(m,n)=T_1(n,m)$ ； $T_2(m,n)=T_3(n,m)$ 。

【說明】由盤面的對稱性可知，此性質顯然成立。

定理 2.2：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則存在遞迴關係：

$$\begin{cases} T_1(m,n)=T_2(m-1,n)+T_3(m,n-1) \\ T_2(m,n)=T_1(m-2,n)+T_2(m,n-1) \\ T_3(m,n)=T_1(m,n-2)+T_3(m-1,n) \end{cases} ,m\ge 2\text{或}n\ge 2 \text{，其中}$$

$T_1(1,1)=1$ 、 $T_2(1,1)=0$ 、 $T_3(1,1)=0$ 、 $T_1(i,j)=T_2(i,j)=T_3(i,j)=0$, $i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

【證明】

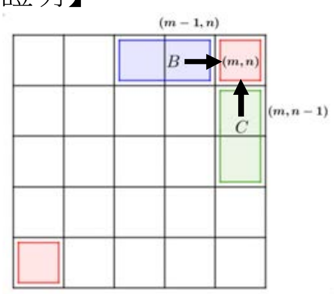


圖 1a

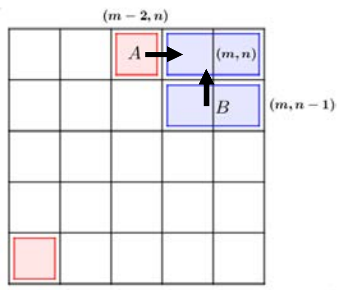


圖 1b

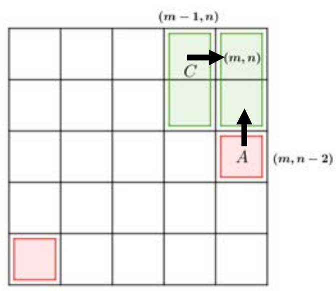


圖 1c

如圖 1a， T_1 型可行路徑達 (m,n) 的前一步必是 B 狀態達 $(m-1,n)$ 或 C 狀態達 $(m,n-1)$ ，

故 $T_1(m,n)=T_2(m-1,n)+T_3(m,n-1)$ 。

同理 $T_2(m,n)=T_1(m-2,n)+T_2(m,n-1)$ (圖 1b)、 $T_3(m,n)=T_1(m,n-2)+T_3(m-1,n)$ (圖 1c)。■

討論 定理 2.2 中的遞迴關係，雖然表示簡單清楚，但因為需在 $T_1(m,n)$、$T_2(m,n)$、$T_3(m,n)$ 間彼此拉關係，求值時並不容易，我們希望能找到更直接的關係。

分析 6×5 的盤面

$$\begin{aligned}T_2(5,5)&=T_1(3,5)+T_2(5,4)\\&=T_1(3,5)+T_1(3,4)+T_2(5,3)\\&=T_1(3,5)+T_1(3,4)+T_1(3,3)+T_2(5,2)\\&=T_1(3,5)+T_1(3,4)+T_1(3,3)+T_1(3,2)+T_2(5,1)\\&=T_1(3,5)+T_1(3,4)+T_1(3,3)+T_1(3,2)+T_1(3,1)\end{aligned}$$

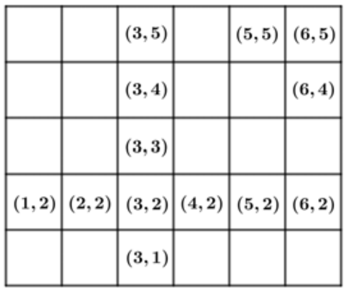


圖 2

同理 $T_3(6,4)=T_1(6,2)+T_1(5,2)+T_1(4,2)+T_1(3,2)+T_1(2,2)+T_1(1,2)$

故 $T_1(6,5)=T_2(5,5)+T_3(6,4)=T_1(3,5)+T_1(3,4)+T_1(3,3)+T_1(3,2)+T_1(3,1)$
$+T_1(6,2)+T_1(5,2)+T_1(4,2)+T_1(3,2)+T_1(2,2)+T_1(1,2)$

定理 2.3：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則存在遞迴關係：

$$\begin{cases}T_1(m,n)=\sum_{j=1}^{n}T_1(m-3,j)+\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-3)\\ T_2(m,n)=\sum_{j=1}^{n}T_1(m-2,j) & ,\ m\ge2\text{或}n\ge2\ ,\\ T_3(m,n)=\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-2)\end{cases}$$

其中 $T_1(1,1)=1$、$T_1(i,j)=0$，$i\le0$ 或 $j\le0$。

【證明】

$$\begin{aligned}T_2(m,n)&=T_1(m-2,n)+T_2(m,n-1)\\&=T_1(m-2,n)+T_1(m-2,n-1)+T_2(m,n-2)\\&=T_1(m-2,n)+T_1(m-2,n-1)+T_1(m-2,n-2)+T_2(m,n-3)\quad\cdots\cdots\\&=T_1(m-2,n)+T_1(m-2,n-1)+T_1(m-2,n-2)+\cdots\cdots+T_1(m-2,2)+\underbrace{T_2(m,1)}_{T_1(m-2,1)}\\&=\sum_{j=1}^{n}T_1(m-2,j)\qquad\text{(圖 3b)}\end{aligned}$$

由盤面的對稱性可知：$T_3(m,n)=\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-2)$ (圖 3c)

由定理 2.2 知：$T_1(m,n)=T_2(m-1,n)+T_3(m,n-1)=\sum_{j=1}^{n}T_1(m-3,j)+\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-3)$ (圖 3a) ■

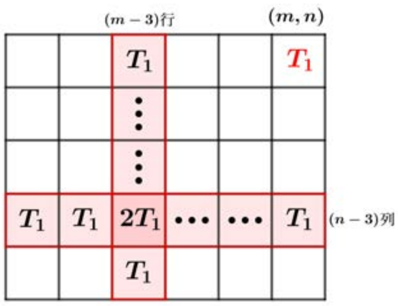


圖 3a

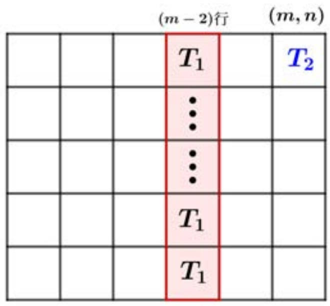


圖 3b

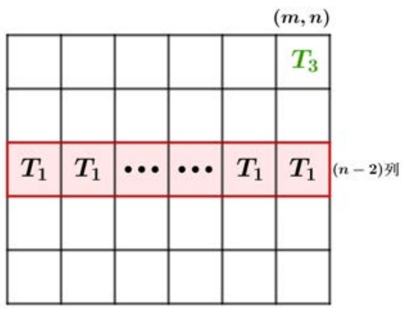


圖 3c

討論 定理 2.3 中的遞迴關係，對於小盤面的求值方便許多，但當 m、n 變大，需加的項數也會變多，我們想知道可否進一步找出更簡化的遞迴關係呢？

分析　6×5的盤面：由定理 2.3 中知

	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	(2, 3)	(3, 3)		(5, 3)	(6, 3)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)

圖 4

$$T_1(5,5)=T_1(1,2)+T_1(2,2)+T_1(3,2)+T_1(4,2)+T_1(5,2)$$
$$+T_1(2,1)+T_1(2,2)+T_1(2,3)+T_1(2,4)+T_1(2,5)$$
$$T_1(6,4)=T_1(1,1)+T_1(2,1)+T_1(3,1)+T_1(4,1)+T_1(5,1)+T_1(6,1)$$
$$+T_1(3,1)+T_1(3,2)+T_1(3,3)+T_1(3,4)$$
$$T_1(5,4)=T_1(1,1)+T_1(2,1)+T_1(3,1)+T_1(4,1)+T_1(5,1)$$
$$+T_1(2,1)+T_1(2,2)+T_1(2,3)+T_1(2,4)$$
$$T_1(5,5)+T_1(6,4)-T_1(5,4)=\underbrace{T_1(1,2)+T_1(2,2)+T_1(3,2)+T_1(4,2)+T_1(5,2)+T_1(6,2)}_{T_3(6,4)}-T_1(6,2)$$
$$+\underbrace{T_1(3,1)+T_1(3,2)+T_1(3,3)+T_1(3,4)+T_1(3,5)}_{T_2(5,5)}-T_1(3,5)+T_1(2,5)+T_1(6,1)$$
$$=T_1(6,5)-T_1(6,2)-T_1(3,5)+T_1(2,5)+T_1(6,1)$$
$$\Rightarrow T_1(6,5)=T_1(5,5)+T_1(6,4)-T_1(5,4)+T_1(6,2)+T_1(3,5)-T_1(2,5)-T_1(6,1)$$
$$T_2(6,5)=T_1(4,5)+T_2(6,4)=T_2(3,5)+T_3(4,4)+T_2(6,4)=T_2(3,5)+T_2(4,4)+T_2(6,4)$$
$$T_3(6,5)=T_1(6,3)+T_3(5,5)=T_2(5,3)+T_3(6,2)+T_3(5,5)=T_3(3,5)+T_3(6,2)+T_3(5,5)$$

由以上關係式可知，**無論 m 、 n 值為何，我們都可以將 $T_1(m,n)$ 分解成某 7 項 $T_1(i,j)$ 值、$T_2(m,n)$ 分解成某 3 項 $T_2(i,j)$ 值、 $T_3(m,n)$ 分解成某 3 項 $T_3(i,j)$ 值，不會隨著 m 、 n 值而增加項數且 $T_2(m,n)$ 、 $T_3(m,n)$ 不用透過計算 $T_1(m,n)$ 即可獨立求解**。我們將結論整理成以下定理：

定理 2.4：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times 1\times 2$ 的積木，則存在遞迴關係：

$$(1)\ T_1(m,n)=T_1(m-1,n)+T_1(m-3,n)+T_1(m,n-1)+T_1(m,n-3)$$
$$-T_1(m-4,n)-T_1(m,n-4)-T_1(m-1,n-1)\qquad (m\ge 3 \text{ 或 } n\ge 3)$$

其中 $T_1(1,1)=1$ 、 $T_1(1,2)=T_1(2,1)=T_1(2,2)=0$ 、 $T_1(i,j)=0,\ i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

$$(2)\ T_2(m,n)=T_2(m-3,n)+T_2(n-1,m-2)+T_2(m,n-1)\qquad (m\ge 4 \text{ 或 } n\ge 2)$$

其中 $T_2(1,1)=T_2(2,1)=0$ 、 $T_2(3,1)=1$ 、 $T_2(i,j)=0,\ i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

$$(3)\ T_3(m,n)=T_3(m,n-3)+T_3(n-2,m-1)+T_3(m-1,n)\qquad (m\ge 2 \text{ 或 } n\ge 4)$$

其中 $T_3(1,1)=T_3(1,2)=0$ 、 $T_3(1,3)=1$ 、 $T_3(i,j)=0,\ i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

【證明】

$$(1)\ T_1(m-1,n)+T_1(m,n-1)-T_1(m-1,n-1)$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{n}T_1(m-4,j)+\sum_{i=1}^{m-1}T_1(i,n-3)\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}T_1(m-3,j)+\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-4)\right)-\left(\sum_{j=1}^{n-1}T_1(m-4,j)+\sum_{i=1}^{m-1}T_1(i,n-4)\right)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{m-1}T_1(i,n-3)+\sum_{j=1}^{n-1}T_1(m-3,j)\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-4)-\sum_{i=1}^{m-1}T_1(i,n-4)\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}T_1(m-4,j)-\sum_{j=1}^{n-1}T_1(m-4,j)\right)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{m}T_1(i,n-3)-T_1(m,n-3)+\sum_{j=1}^{n}T_1(m-3,j)-T_1(m-3,n)\right)+T_1(m,n-4)+T_1(m-4,n)$$
$$=T_1(m,n)-T_1(m,n-3)-T_1(m-3,n)+T_1(m,n-4)+T_1(m-4,n)\qquad \text{移項即可得}$$
$$T_1(m,n)=T_1(m-1,n)+T_1(m-3,n)+T_1(m,n-1)+T_1(m,n-3)-T_1(m-4,n)-T_1(m,n-4)-T_1(m-1,n-1)$$

(圖 5a)

(2) $T_2(m,n)=T_1(m-2,n)+T_2(m,n-1)$

$$=T_2(m-3,n)+T_3(m-2,n-1)+T_2(m,n-1)=T_2(m-3,n)+T_2(n-1,m-2)+T_2(m,n-1)$$ (圖 5b)

(3) $T_3(m,n)=T_2(n,m)=T_2(n-3,m)+T_2(m-1,n-2)+T_2(n,m-1)$

$$=T_3(m,n-3)+T_3(n-2,m-1)+T_3(m-1,n)$$ (圖 5c) ■

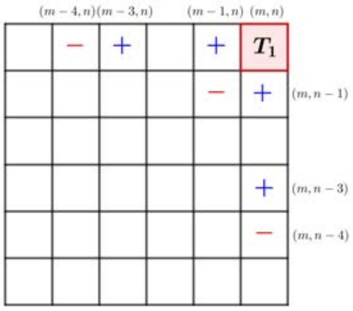


圖 5a

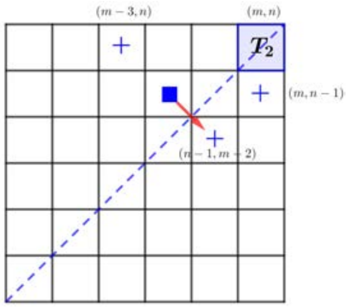


圖 5b

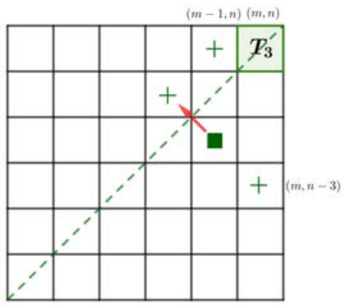


圖 5c

討論 利用**遞迴關係**完成 $T_1(m,n)$ 、 $T_2(m,n)$ 、 $T_3(m,n)$ 、 $T(m,n)$ 表。($1\le m\le 10$ 、 $1\le n\le 10$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	3	6	20	35	56	147	212	302	694
9	0	0	0	6	8	11	59	71	92	302
8	0	0	0	6	8	11	49	56	71	212
7	1	2	3	10	13	17	46	49	59	147
6	0	0	0	3	2	2	17	11	11	56
5	0	0	0	3	2	2	13	8	8	35
4	1	1	1	4	3	3	10	6	6	20
3	0	0	0	1	0	0	3	0	0	6
2	0	0	0	1	0	0	2	0	0	3
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

$T_1(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	4	6	10	55	71	102	347	413
9	0	0	3	3	4	35	36	46	200	201
8	0	0	3	3	4	29	28	35	141	130
7	0	0	3	3	4	23	20	24	92	74
6	0	0	2	1	1	13	7	7	46	25
5	0	0	2	1	1	10	5	5	29	14
4	0	0	2	1	1	7	3	3	16	6
3	0	0	1	0	0	3	0	0	6	0
2	0	0	1	0	0	2	0	0	3	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

$T_2(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	6	14	25	74	130	201	413
9	1	3	6	16	29	46	92	141	200	347
8	0	0	0	3	5	7	24	35	46	102
7	0	0	0	3	5	7	20	28	36	71
6	1	2	3	7	10	13	23	29	35	55
5	0	0	0	1	1	1	4	4	4	10
4	0	0	0	1	1	1	3	3	3	6
3	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$T_3(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	3	10	32	59	136	292	444	850	1520
9	1	3	9	25	41	92	187	258	492	850
8	0	0	3	12	17	47	101	126	258	444
7	1	2	6	16	22	47	86	101	187	292
6	1	2	5	11	13	28	47	47	92	136
5	0	0	2	5	4	13	22	17	41	59
4	1	1	3	6	5	11	16	12	25	32
3	1	1	2	3	2	5	6	3	9	10
2	0	0	1	1	0	2	2	0	3	3
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1

$T(m,n)$

(三)推導出$T_1(m,n)$、$T_2(m,n)$、$T_3(m,n)$、$T(m,n)$的通式

在(二)研究中，我們找出了$T_1(m,n)$、$T_2(m,n)$、$T_3(m,n)$間的遞迴關係，可以幫助我們依序求值，我們查閱許多資料後發現，這種遞迴關係式可能有機會利用雙變數生成函數求解，但並不容易處理，因此我們決定找尋其他的方法，利用分析所有可行路徑的模式，看看是否可以推導出可行路徑數的通式。首先，我們觀察出以下性質：

性質 3.1：在$m\times n$的盤面上移動$1\times1\times2$的積木，所有可行路徑中，不存在A、A相鄰或B、C相鄰。

性質 3.2：在$m\times n$的盤面上移動$1\times1\times2$的積木，所有可行路徑必由S_B、S_C、S_D、S_E四型子路徑銜接而成。其中$S_B=A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{b個}A$、$S_C=A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{c個}A$、$S_D=A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d個}$、$S_E=A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e個}$，且$S_D$、$S_E$存在於路徑末端。

【說明】如路徑$\boxed{A\ B\ B\ A\ C\ A\ C\ C\ C}$即$S_B-S_C-S_E$銜接而成。

性質 3.3：在$m\times n$的盤面上移動$1\times1\times2$的積木，所有可行路徑中，

(1)每含一個S_B型子路徑$A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{b個}A$，積木向右移動 3 格且向上移動$(b-1)$格。

(2)每含一個S_C型子路徑$A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{c個}A$，積木向右移動$(c-1)$格且向上移動 3 格。

(3)每含一個S_D型子路徑$A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d個}$，積木向右移動 2 格且向上移動$(d-1)$格。

(4)每含一個S_E型子路徑$A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e個}$，積木向右移動$(e-1)$格且向上移動 2 格。

【說明】$A\to B$：向右移動 2 格、$A\to C$：向上移動 2 格、$B\to B$：向上移動 1 格、$C\to C$：向右移動 1 格、$B\to A$：向右移動 1 格、$C\to A$：向上移動 1 格。

性質 3.4：在$m\times n$的盤面上移動$1\times1\times2$的積木，所有可行路徑中，型如S_B或S_C的子路徑次序互換後，仍為可行路徑。

【說明】如路徑$\boxed{A\ B\ B\ A\ C\ A\ C\ C\ C}$、$\boxed{A\ C\ A\ B\ B\ A\ C\ C\ C}$皆為$6\times7$的一條可行路徑。

引理 3.5：設有 2 種不同種類的事物(同類事物視為相同)，第 1 類有m_1個，第 2 類有m_2個，共計n個，將此n個事物排成一列，共有$\dfrac{n!}{m_1!m_2!}=C^n_{m_1}=C^n_{m_2}$種排法。

【說明】參考[4]

引理 3.6：$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$的非負整數解個數為H^n_k。

【證明】可視作為k個○與$n-1$個｜作直線排列的排列數，即$\dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=C^{n+k-1}_k=H^n_k$。 ■

引理 3.7：$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$的正整數解個數為H^n_{k-n}。

【證明】由題意知： $x_1\ge 1, x_2\ge 1, \cdots, x_n\ge 1$

假設 $x_1'=x_1-1, x_2'=x_2-1, \cdots, x_n'=x_n-1$

原方程式可改寫成 $x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=k-n$ ，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為非負整數

由引理 3.6 可知，其解的個數為 H_{k-n}^{n} 。 ■

$\boxed{分析}$ 在 8×7 的盤面上移動 $1\times 1\times 2$ 的積木，求 $T_1(8,7)$ 。

積木由始點 $(1,1)$ 移動至終點 $(8,7)$ ， x 的變化量 $\Delta x=8-1=7$ 且 y 的變化量 $\Delta y=7-1=6$ 。

由性質 3.2 知，其可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A$ 。

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑、 y 個 S_C 型子路徑，顯然 $0\le x\le 2$ 、 $0\le y\le 2$ 。

以下分別就不同的 x 值和 y 值討論：

y \ x	0	1	2
0	(無解) 可行路徑數: $H_6^0\times H_7^0\times C_0^0=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A$型 向右 3 向上 (b_1-1) (無解) 可行路徑數： $H_6^1\times H_4^0\times C_1^1=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A$ 型 向右 6 向上 (b_1+b_2-2) (無解) 可行路徑數： $H_6^2\times H_1^0\times C_2^2=0$
1	$A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$ 型 向右 (c_1-1) 向上 3 (無解) 可行路徑數: $H_3^0\times H_7^1\times C_0^1=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$型 向右 $3+(c_1-1)$ 向上 $(b_1-1)+3$ $\Rightarrow b_1=4$ 且 $c_1=5$ 可行路徑數： $H_3^1\times H_4^1\times C_1^2=2$ 移動步數： $2+b_1+c_1=11$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$ 型 向右 $6+(c_1-1)$ 向上 $(b_1+b_2-2)+3$ $\Rightarrow b_1+b_2=5$ 且 $c_1=2$ 可行路徑數： $H_3^2\times H_1^1\times C_2^3=12$ 移動步數： $3+b_1+b_2+c_1=10$
2	$A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$ 向右 (c_1+c_2-2) 向上 6 $\Rightarrow c_1+c_2=9$ 可行路徑數: $H_0^0\times H_7^2\times C_0^2=8$ 移動步數： $2+c_1+c_2=11$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$型 向右 $3+(c_1+c_2-2)$ 向上 $(b_1-1)+6$ $\Rightarrow b_1=1$ 且 $c_1+c_2=6$ 可行路徑數: $H_0^1\times H_4^2\times C_1^3=15$ 移動步數： $3+b_1+c_1+c_2=10$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$型 向右 $6+(c_1+c_2-2)$ 向上 $(b_1+b_2-2)+6$ $\Rightarrow b_1+b_2=2$ 且 $c_1+c_2=3$ 可行路徑數： $H_0^2\times H_1^2\times C_2^4=12$ 移動步數： $4+b_1+b_2+c_1+c_2=9$

說明

可行路徑數： $\underbrace{H_0^1}_{\substack{b_1=1\\ 正整數解\\ 個數}}\times\underbrace{H_4^2}_{\substack{c_1+c_2=6\\ 正整數解\\ 個數}}\times\underbrace{C_1^3}_{\substack{1個\ S_B\ 型和2個\ S_C\ 型\\ (視為同物)的排列數\\ 即S_BS_CS_C或S_CS_BS_C\\ 或S_CS_CS_B三種次序}}=15$ ；移動步數： $\underbrace{3}_{\substack{A\ 的個數\\ 即(x+y)\\ (不含始點)}}+\underbrace{b_1}_{B\ 的個數}+\underbrace{c_1+c_2}_{C\ 的個數}=10$

解得 $b_1=1$ 、 $(c_1,c_2)=(1,5)\vee(2,4)\vee(3,3)\vee(4,2)\vee(5,1)$ ，所有可行路徑(共 15 種)如下：

$S_BS_CS_C$: $ABACACCCCCA$ 、 $ABACCACCCCA$ 、 $ABACCCACCCA$ 、 $ABACCCCACCA$ 、 $ABACCCCCACA$

$S_CS_BS_C$: $ACABACCCCCA$ 、 $ACCABACCCCA$ 、 $ACCCABACCCA$ 、 $ACCCCABACCA$ 、 $ACCCCCABACA$

$S_CS_CS_B$: $ACACCCCCABA$ 、 $ACCACCCCABA$ 、 $ACCCACCCABA$ 、 $ACCCCACCABA$ 、 $ACCCCCACABA$

由上表統計可知： $T_1(8,7)=2+12+8+15+12=49$ ； $minS_{T_1}(8,7)=9$ ； $MaxS_{T_1}(8,7)=11$ 。

定理 3.8：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則

$$(1)\ T_1(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} H_{n-1-3y}^{x}\cdot H_{m-1-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(2)\ T_2(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-3}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} H_{n-1-3y}^{x+1}\cdot H_{m-3-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(3)\ T_3(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]} H_{n-3-3y}^{x}\cdot H_{m-1-3x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(4)\ T(m,n)=T_1(m,n)+T_2(m,n)+T_3(m,n)$$

【證明】

(1)積木由始點 $(1,1)$ 移動至終點 (m,n) ， x 的變化量 $\Delta x=m-1$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-1$

由性質 3.2 知，其 T_1 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1\text{個}}A$、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_x\text{個}}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1\text{個}}A$、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_y\text{個}}A$

此路徑的 x 的變化量為 $3x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)$ 、 y 的變化量為 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+3y$

因此 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+3y=n-1\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x=n-1+x-3y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 H_{n-1-3y}^{x}

$3x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)=m-1\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1-3x+y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 H_{m-1-3x}^{y}

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C_x^{x+y}

因此可行路徑數為 $H_{n-1-3y}^{x}\cdot H_{m-1-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$ ，已知 $0\le x\le\left[\dfrac{m-1}{3}\right]$、$0\le y\le\left[\dfrac{n-1}{3}\right]$，

故所有可行路徑數 $T_1(m,n)=\displaystyle\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} H_{n-1-3y}^{x}\cdot H_{m-1-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$

(2)積木由始點 $(1,1)$ 移動至終點 (m,n) ， x 的變化量 $\Delta x=m-1$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-1$

由性質 3.2 知，其 T_2 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1\text{個}}A$、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_x\text{個}}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1\text{個}}A$、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_y\text{個}}A$

1個 S_D 型子路徑，為 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$ (於路徑末端)

此路徑的 x 的變化量為 $3x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+2$、

y 的變化量為 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+3y+(d-1)$

因此 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+3y+(d-1)=n-1 \Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x+d=n+x-3y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 H_{n-1-3y}^{x+1}

$3x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+2=m-1 \Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-3-3x+y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 H_{m-3-3x}^{y}

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C_x^{x+y}

因此可行路徑數為 $H_{n-1-3y}^{x+1}\cdot H_{m-3-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$，已知 $0\le x\le\left[\dfrac{m-3}{3}\right]$、$0\le y\le\left[\dfrac{n-1}{3}\right]$

所有可行路徑數 $T_2(m,n)=\sum\limits_{x=0}^{\left[\frac{m-3}{3}\right]}\sum\limits_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}H_{n-1-3y}^{x+1}\cdot H_{m-3-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$

$$(3)\, T_3(m,n)=T_2(n,m)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}H_{m-1-3y}^{x+1}\cdot H_{n-3-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}=\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}H_{m-1-3x}^{y+1}\cdot H_{n-3-3y}^{x}\cdot C_y^{x+y}$$

$$=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-3}{3}\right]}H_{n-3-3y}^{x}\cdot H_{m-1-3x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y} \qquad \blacksquare$$

【**舉例**】在 8×7 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木，則

$$(1)\, T_1(8,7)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{8-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{7-1}{3}\right]}H_{7-1-3y}^{x}\cdot H_{8-1-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2}H_{6-3y}^{x}\cdot H_{7-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$=\underbrace{H_6^0\cdot H_7^0\cdot C_0^0}_{0}+\underbrace{H_3^0\cdot H_7^1\cdot C_0^1}_{0}+\underbrace{H_0^0\cdot H_7^2\cdot C_0^2}_{8}+\underbrace{H_6^1\cdot H_4^0\cdot C_1^1}_{0}+\underbrace{H_3^1\cdot H_4^1\cdot C_1^2}_{2}$$

$$+\underbrace{H_0^1\cdot H_4^2\cdot C_1^3}_{15}+\underbrace{H_6^2\cdot H_1^0\cdot C_2^2}_{0}+\underbrace{H_3^2\cdot H_1^1\cdot C_2^3}_{12}+\underbrace{H_0^2\cdot H_1^2\cdot C_2^4}_{12}=49$$

$$(2)\, T_2(8,7)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{8-3}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{7-1}{3}\right]}H_{7-1-3y}^{x+1}\cdot H_{8-3-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}H_{6-3y}^{x+1}\cdot H_{5-3x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$=\underbrace{H_6^1\cdot H_5^0\cdot C_0^0}_{0}+\underbrace{H_3^1\cdot H_5^1\cdot C_0^1}_{1}+\underbrace{H_0^1\cdot H_5^2\cdot C_0^2}_{6}+\underbrace{H_6^2\cdot H_2^0\cdot C_1^1}_{0}+\underbrace{H_3^2\cdot H_2^1\cdot C_1^2}_{8}+\underbrace{H_0^2\cdot H_2^2\cdot C_1^3}_{9}=24$$

$$(3)\, T_3(8,7)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{8-1}{3}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{7-3}{3}\right]}H_{7-3-3y}^{x}\cdot H_{8-1-3x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y}=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1}H_{4-3y}^{x}\cdot H_{7-3x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y}$$

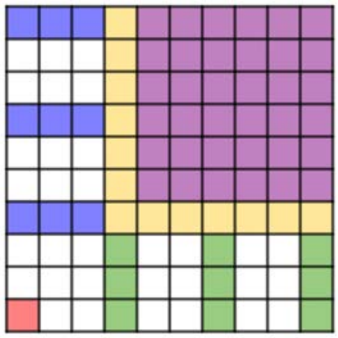
$$=\underbrace{H_4^0\cdot H_7^1\cdot C_0^0}_{0}+\underbrace{H_1^0\cdot H_7^2\cdot C_0^1}_{0}+\underbrace{H_4^1\cdot H_4^1\cdot C_1^1}_{1}+\underbrace{H_1^1\cdot H_4^2\cdot C_1^2}_{10}+\underbrace{H_4^2\cdot H_1^1\cdot C_2^2}_{5}+\underbrace{H_1^2\cdot H_1^2\cdot C_2^3}_{12}=28$$

(4) $T(m,n)=T_1(m,n)+T_2(m,n)+T_3(m,n)=49+24+28=101$

在 8×7 大小的棋盤上，積木由始點移動至終點的所有 T_1 型、T_2 型、T_3 型可行路徑數分別為 49、24、28，故所有 T 型可行路徑數為 101。(結果與 P7 相符)

(四)找出可行路徑中移動步數的最小值與最大值

定理 4.1：在$m\times n$的盤面上移動$1\times1\times2$的積木，若存在T_1型可行路徑(除白區外)，則



(1) $minS_{T_1}(m,n)=(m+n)-\left[\frac{m-1}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2$

(2)(i)當$m\le3$時(藍、紅區)，$MaxS_{T_1}(m,n)=m+\frac{2n}{3}-\frac{5}{3}$

(ii)當$n\le3$時(綠、紅區)，$MaxS_{T_1}(m,n)=\frac{2m}{3}+n-\frac{5}{3}$

(iii)當$m=4$、$n\ge4$或$n=4$、$m\ge4$時(黃區)，$MaxS_{T_1}(m,n)=m+n-3$

(iv)當$m\ge5$、$n\ge5$時(紫區)，$MaxS_{T_1}(m,n)=m+n-4$

【證明】

由定理 3.8(1)的證明過程知：存在T_1型可行路徑的充要條件為

$$\begin{cases}b_1+b_2+\cdots+b_x=n-1+x-3y\ ---(a)\\ c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1-3x+y---(b)\end{cases},\ 其中\ 0\le x\le\left[\frac{m-1}{3}\right]、0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]\ 有解$$

且路徑的移動步數為$(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)$

$$=(x+y)+(n-1+x-3y)+(m-1-3x+y)=(m+n)-(x+y)-2$$

當$(m,n)=(1,1)$時，始點即終點，故$minS_{T_1}(m,n)=MaxS_{T_1}(m,n)=0$。針對其他$m$、$n$值討論：

(i)當$m\le3$時，此時$x=\left[\frac{m-1}{3}\right]=0$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$

①當$n\le3$時，$(x,y)=(0,0)$，$(a)(b)$解得$(m,n)=(1,1)$，除$(m,n)=(1,1)$，不存在T_1型可行路徑。

②當$n\ge4$，$(a)\Rightarrow n-1-3y=0\Rightarrow y=\frac{n-1}{3}$、$(b)\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1+y$必有解($y$取 1)

若$3\nmid n-1$，不存在T_1型可行路徑。

若$3|n-1$，存在T_1型可行路徑，且$x=\left[\frac{m-1}{3}\right]=0$、$y=\left[\frac{n-1}{3}\right]=\frac{n-1}{3}$，

$$\Rightarrow(m+n)-(x+y)-2=\underbrace{(m+n)-\underbrace{\left[\frac{m-1}{3}\right]}_{0}-\underbrace{\left[\frac{n-1}{3}\right]}_{\frac{n-1}{3}}-2}_{minS_{T_1}(m,n)}=\underbrace{m+\frac{2n}{3}-\frac{5}{3}}_{MaxS_{T_1}(m,n)}$$

(ii)當$n\le3$時，由(i)與盤面的對稱性可證得

(iii)當$m=4$、$n\ge4$時，此時$0\le x\le\left[\frac{m-1}{3}\right]=1$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$

若$(x,y)=(0,0)$，$(a)(b)$解得$(m,n)=(1,1)$ $\rightarrow\leftarrow$ 故$x+y\ne0$

若$(x,y)=(1,0)$，$(a)\Rightarrow b_1=n$、$(b)\Rightarrow m=4$皆有解，故$x+y$有最小值 1

若$(x,y)=\left(\left[\frac{m-1}{3}\right],\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$，$(a)(b)$顯然有解，故$x+y$有最大值$\left[\frac{m-1}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-\left[\frac{m-1}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2}_{minS_{T_1}(m,n)} \le (m+n)-(x+y)-2 \le \underbrace{m+n-3}_{MaxS_{T_1}(m,n)}$$

同理可證$n=4$、$m\ge 4$的情形

(iv)當$m\ge 5$、$n\ge 5$，此時$0\le x\le\left[\frac{m-1}{3}\right]$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$

若$(x,y)=(0,0)$，$(a)(b)$解得$(m,n)=(1,1)\to\leftarrow$　故$x+y\ne 0$

若$(x,y)=(1,0)$，$(a)\Rightarrow b_1=n$、$(b)\Rightarrow m=4\to\leftarrow$

若$(x,y)=(0,1)$，$(a)\Rightarrow n=4$、$(b)\Rightarrow c_1=m\to\leftarrow$　故$x+y\ne 1$

若$(x,y)=(1,1)$，$(a)\Rightarrow b_1=n-3$、$(b)\Rightarrow c_1=m-3$皆有解，故$x+y$有最小值 2

若$(x,y)=\left(\left[\frac{m-1}{3}\right],\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$，$(a)(b)$顯然有解，故$x+y$有最大值$\left[\frac{m-1}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-\left[\frac{m-1}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2}_{minS_{T_1}(m,n)} \le (m+n)-(x+y)-2 \le \underbrace{m+n-4}_{MaxS_{T_1}(m,n)}$$ ■

討論 $minS_{T_1}(m,n)$、$MaxS_{T_1}(m,n)$表。($1\le m\le 10$、$1\le n\le 10$)

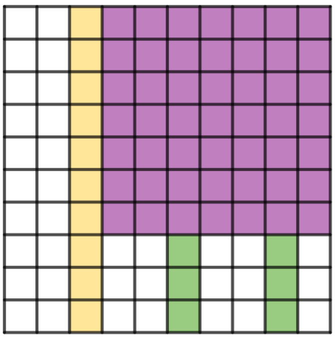
10	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
9	0	0	0	8	9	10	10	11	12	12
8	0	0	0	7	8	9	9	10	11	11
7	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
6	0	0	0	6	7	8	8	9	10	10
5	0	0	0	5	6	7	7	8	9	9
4	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8
3	0	0	0	4	0	0	6	0	0	8
2	0	0	0	3	0	0	5	0	0	7
1	始點 0	0	0	2	0	0	4	0	0	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$minS_{T_1}(m,n)$

10	6	7	8	11	11	12	13	14	15	16
9	0	0	0	10	10	11	12	13	14	15
8	0	0	0	9	9	10	11	12	13	14
7	4	5	6	8	8	9	10	11	12	13
6	0	0	0	7	7	8	9	10	11	12
5	0	0	0	6	6	7	8	9	10	11
4	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0	0	0	4	0	0	6	0	0	8
2	0	0	0	3	0	0	5	0	0	7
1	始點 0	0	0	2	0	0	4	0	0	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$MaxS_{T_1}(m,n)$

定理 4.2：在$m\times n$的盤面上移動$1\times 1\times 2$的積木，若存在T_2型可行路徑(除白區外)，則



(1) $minS_{T_2}(m,n)=(m+n)-\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2$

(2)(i)當$m=3$時(黃區)，$MaxS_{T_2}(m,n)=m+n-3$

(ii)當$m\ge 4$、$n\le 3$時(綠區)，$MaxS_{T_2}(m,n)=\frac{2m}{3}+n-2$

(iii)當$m\ge 4$、$n\ge 4$時(紫區)，$MaxS_{T_2}(m,n)=m+n-4$

【證明】

由定理 3.8(2)的證明過程知：存在T_2型可行路徑的充要條件為

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x+d=n+x-3y---(a) \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=m-3-3x+y---(b) \end{cases}$$，其中$0\le x\le\left[\frac{m-3}{3}\right]$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$有解

且路徑的移動步數為$(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x+d)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)$

$$=(x+y)+(n+x-3y)+(m-3-3x+y)=(m+n)-(x+y)-3$$

當$m=1,2$時，顯然不存在T_2型可行路徑。針對其他m、n值討論：

(i)當$m=3$時，此時$x=\left[\frac{m-3}{3}\right]=0$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$

若$(x,y)=(0,0)$，$(a)\Rightarrow d=n$、$(b)\Rightarrow m=3$ 皆有解，故$x+y$有最小值 0

若$(x,y)=\left(\left[\frac{m-3}{3}\right],\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$，$(a)(b)$顯然有解，

故$x+y$有最大值 $\left[\frac{m-3}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]-1$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2}_{minS_{T_2}(m,n)}\le(m+n)-(x+y)-3\le\underbrace{m+n-3}_{MaxS_{T_2}(m,n)}$$

(ii)當$m\ge4$、$n\le3$時，此時$0\le x\le\left[\frac{m-3}{3}\right]$，$y=\left[\frac{n-1}{3}\right]=0$

$(a)\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x+d=n+x$必有解(取$x=0$)、$(b)\Rightarrow m-3-3x=0\Rightarrow x=\frac{m-3}{3}$

若$3\nmid m-3$，不存在T_2型可行路徑。

若$3|m-3$，存在T_2型可行路徑，且$x=\frac{m-3}{3}=\left[\frac{m}{3}\right]-1$、$y=\left[\frac{n-1}{3}\right]=0$，

$$\Rightarrow(m+n)-(x+y)-3=\underbrace{(m+n)-\underbrace{\left[\frac{m}{3}\right]}_{\frac{m}{3}}-\underbrace{\left[\frac{n-1}{3}\right]}_{0}-2}_{minS_{T_2}(m,n)}=\underbrace{\frac{2m}{3}+n-2}_{MaxS_{T_2}(m,n)}$$

(iii)當$m\ge4$、$n\ge4$時，此時$0\le x\le\left[\frac{m-3}{3}\right]$、$0\le y\le\left[\frac{n-1}{3}\right]$

若$(x,y)=(0,0)$，$(b)\Rightarrow m=3\rightarrow\leftarrow$ 故$x+y\ne0$

若$(x,y)=(0,1)$，$(a)\Rightarrow d=n-3$、$(b)\Rightarrow c_1=m-2$皆有解，故$x+y$有最小值 1

若$(x,y)=\left(\left[\frac{m-3}{3}\right],\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$，$(a)(b)$顯然有解，

故$x+y$有最大值$\left[\frac{m-3}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]-1$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{n-1}{3}\right]-2}_{minS_{T_2}(m,n)}\le(m+n)-(x+y)-3\le\underbrace{m+n-4}_{MaxS_{T_2}(m,n)}$$ ■

討論 $minS_{T_2}(m,n)$ 、 $MaxS_{T_2}(m,n)$ 表。($1 \le m \le 10$ 、 $1 \le n \le 10$)

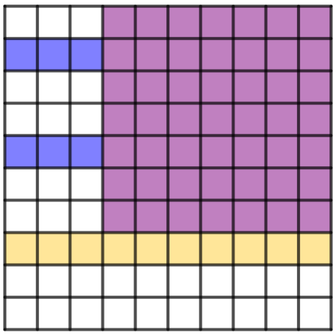
10	0	0	7	8	9	9	10	11	11	12
9	0	0	7	8	9	9	10	11	11	12
8	0	0	6	7	8	8	9	10	10	11
7	0	0	5	6	7	7	8	9	9	10
6	0	0	5	6	7	7	8	9	9	10
5	0	0	4	5	6	6	7	8	8	9
4	0	0	3	4	5	5	6	7	7	8
3	0	0	3	0	0	5	0	0	7	0
2	0	0	2	0	0	4	0	0	6	0
1	始點 0	0	1	0	0	3	0	0	5	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$minS_{T_2}(m,n)$

10	0	0	10	10	11	12	13	14	15	16
9	0	0	9	9	10	11	12	13	14	15
8	0	0	8	8	9	10	11	12	13	14
7	0	0	7	7	8	9	10	11	12	13
6	0	0	6	6	7	8	9	10	11	12
5	0	0	5	5	6	7	8	9	10	11
4	0	0	4	4	5	6	7	8	9	10
3	0	0	3	0	0	5	0	0	7	0
2	0	0	2	0	0	4	0	0	6	0
1	始點 0	0	1	0	0	3	0	0	5	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$MaxS_{T_2}(m,n)$

定理 4.3：在 $m \times n$ 的盤面上移動 $1 \times 1 \times 2$ 的積木，若存在 T_3 型可行路徑(除白區外)，則



$$(1)\ minS_{T_3}(m,n) = (m+n) - \left[\frac{m-1}{3}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] - 2$$

(2)(i)當 $n = 3$ 時(黃區)， $MaxS_{T_3}(m,n) = m+n-3$

(ii)當 $m \le 3$ 、 $n \ge 4$ 時(藍區)， $MaxS_{T_3}(m,n) = m + \frac{2n}{3} - 2$

(iii)當 $m \ge 4$ 、 $n \ge 4$ 時(紫區)， $MaxS_{T_3}(m,n) = m+n-4$

【證明】由定理 4.2 與盤面的對稱性可證得。

討論 $minS_{T_3}(m,n)$ 、 $MaxS_{T_3}(m,n)$ 表。($1 \le m \le 10$ 、 $1 \le n \le 10$)

10	0	0	0	8	9	10	10	11	12	12
9	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11
8	0	0	0	7	8	9	9	10	11	11
7	0	0	0	6	7	8	8	9	10	10
6	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9
5	0	0	0	5	6	7	7	8	9	9
4	0	0	0	4	5	6	6	7	8	8
3	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	始點 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$minS_{T_3}(m,n)$

10	0	0	0	10	11	12	13	14	15	16
9	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15
8	0	0	0	8	9	10	11	12	13	14
7	0	0	0	7	8	9	10	11	12	13
6	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	0	0	0	5	6	7	8	9	10	11
4	0	0	0	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	始點 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$MaxS_{T_3}(m,n)$

討論 由定理 4.1~4.3 可完成 $minS_T(m,n)$ 、 $MaxS_T(m,n)$ 表。($1\le m\le 10$ 、 $1\le n\le 10$)

10	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12
9	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11
8	0	0	6	7	8	8	9	10	10	11
7	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
6	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9
5	0	0	4	5	6	6	7	8	8	9
4	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8
3	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7
2	0	0	2	3	0	4	5	0	6	7
1	始點 0	0	1	2	0	3	4	0	5	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$minS_T(m,n)$

10	6	7	10	11	11	12	13	14	15	16
9	5	6	9	10	10	11	12	13	14	15
8	0	0	8	9	9	10	11	12	13	14
7	4	5	7	8	8	9	10	11	12	13
6	3	4	6	7	7	8	9	10	11	12
5	0	0	5	6	6	7	8	9	10	11
4	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	2	3	0	4	5	0	6	7
1	始點 0	0	1	2	0	3	4	0	5	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$MaxS_T(m,n)$

研究二：在 $m\times n$ 大小的盤面上移動 $1\times 1\times t\ (t\ge 2)$ 大小的長方體積木

研究一中，我們找出了在 $m\times n$ 大小的盤面上移動 $1\times 1\times 2$ 大小的長方體積木時，其有解盤面與路徑數的遞迴關係，並推導出所有可行路徑數以及最小移動步數與最大移動步數的通式。接著，我們想將結論推廣至 $1\times 1\times t\ (t\ge 2)$ 大小積木之情形。研究結果整理如下：

定理 5.1：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times 1\times t\ (t\ge 2)$ 的積木，則存在遞迴關係：

(1) $T_1(m,n)=T_1(m-1,n)+T_1(m-t-1,n)+T_1(m,n-1)+T_1(m,n-t-1)$

$-T_1(m-t-2,n)-T_1(m,n-t-2)-T_1(m-1,n-1)\quad (m\ge 3$ 或 $n\ge 3)$

其中 $T_1(1,1)=1$ 、 $T_1(1,2)=T_1(2,1)=T_1(2,2)=0$ 、 $T_1(i,j)=0$ ， $i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

(2) $T_2(m,n)=T_2(m-t-1,n)+T_2(n-1,m-t)+T_2(m,n-1)\quad (m\ge t+2$ 或 $n\ge 2)$

其中 $T_2(1,1)=T_2(2,1)=\cdots=T_2(t,1)=0$ 、 $T_2(t+1,1)=1$ 、 $T_2(i,j)=0$ ， $i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

(3) $T_3(m,n)=T_3(m,n-t-1)+T_3(n-t,m-1)+T_3(m-1,n)\quad (m\ge 2$ 或 $n\ge t+2)$

其中 $T_3(1,1)=T_3(1,2)=\cdots=T_3(1,t)=0$ 、 $T_3(1,t+1)=1$ 、 $T_3(i,j)=0$ ， $i\le 0$ 或 $j\le 0$ 。

【證明】略(同定理 2.2~2.4)

性質 5.2：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times 1\times t\ (t\ge 2)$ 的積木，所有可行路徑中，

(1)每含一個 S_B 型子路徑 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{b個}A$ ，積木向右移動 $(t+1)$ 格且向上移動 $(b-1)$ 格。

(2)每含一個 S_C 型子路徑 $A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{c個}A$ ，積木向右移動 $(c-1)$ 格且向上移動 $(t+1)$ 格。

(3)每含一個 S_D 型子路徑 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d個}$ ，積木向右移動 t 格且向上移動 $(d-1)$ 格。

(4)每含一個 S_E 型子路徑 $A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e個}$ ，積木向右移動 $(e-1)$ 格且向上移動 t 格。

定理 5.3：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times t\ (t\ge 2)$ 的積木，則

$$(1)\ T_1^{1\times1\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{t+1}\right]}H_{n-1-(t+1)y}^{x}\cdot H_{m-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(2)\ T_2^{1\times1\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-t-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{t+1}\right]}H_{n-1-(t+1)y}^{x+1}\cdot H_{m-t-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(3)\ T_3^{1\times1\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-t-1}{t+1}\right]}H_{n-t-1-(t+1)y}^{x}\cdot H_{m-1-(t+1)x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y}$$

$$(4)\ T^{1\times1\times t}(m,n)=T_1^{1\times1\times t}(m,n)+T_2^{1\times1\times t}(m,n)+T_3^{1\times1\times t}(m,n)$$

【證明】

(1)積木由始點 $(1,1)$ 移動至終點 (m,n) ，x 的變化量 $\Delta x=m-1$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-1$

同性質 3.2 知，其 T_1 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1\text{個}}A$、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_x\text{個}}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1\text{個}}A$、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_y\text{個}}A$

此路徑的 x 的變化量為 $(t+1)x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)$ 、

y 的變化量為 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(t+1)y$

因此 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(t+1)y=n-1\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x=n-1+x-(t+1)y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H_{n-1-(t+1)y}^{x}$

$(t+1)x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)=m-1\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1-(t+1)x+y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H_{m-1-(t+1)x}^{y}$

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C_x^{x+y}

因此可行路徑數為 $H_{n-1-(t+1)y}^{x}\cdot H_{m-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$ ，已知 $0\le x\le\left[\frac{m-1}{t+1}\right]$ 、 $0\le y\le\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$ ，

故所有可行路徑數 $T_1^{1\times1\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{t+1}\right]}H_{n-1-(t+1)y}^{x}\cdot H_{m-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$

(2)積木由始點 $(1,1)$ 移動至終點 (m,n) ，x 的變化量 $\Delta x=m-1$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-1$

同性質 3.2 知，其 T_2 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1\text{個}}A$、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_x\text{個}}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1\text{個}}A$、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_2\text{個}}A$、……、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_y\text{個}}A$

1個 S_D 型子路徑，為 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$ (於路徑末端)

此路徑的 x 的變化量為 $(t+1)x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+t$ 、

y 的變化量為 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(t+1)y+(d-1)$

因此 $(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(t+1)y+(d-1)=n-1 \Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x+d=n+x-(t+1)y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H_{n-1-(t+1)y}^{x+1}$

$(t+1)x+(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+t=m-1 \Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-t-1-(t+1)x+y$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H_{m-t-1-(t+1)x}^{y}$

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C_x^{x+y}

因此可行路徑數為 $H_{n-1-(t+1)y}^{x+1}\cdot H_{m-t-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$ ，已知 $0\le x\le\left[\dfrac{m-t-1}{t+1}\right]$ 、 $0\le y\le\left[\dfrac{n-1}{t+1}\right]$

所有可行路徑數 $T_2^{1\times1\times t}(m,n)=\displaystyle\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-t-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-1}{t+1}\right]}H_{n-1-(t+1)y}^{x+1}\cdot H_{m-t-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$

$$(3)\,T_3^{1\times1\times t}(m,n)=T_2^{1\times1\times t}(n,m)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{n-t-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}H_{m-1-(t+1)y}^{x+1}\cdot H_{n-t-1-(t+1)x}^{y}\cdot C_x^{x+y}$$

$$=\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-t-1}{t+1}\right]}\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}H_{m-1-(t+1)x}^{y+1}\cdot H_{n-t-1-(t+1)y}^{x}\cdot C_y^{x+y}=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-t-1}{t+1}\right]}H_{n-t-1-(t+1)y}^{x}\cdot H_{m-1-(t+1)x}^{y+1}\cdot C_x^{x+y} \quad ■$$

定理 5.4：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times t$ $(t\ge2)$ 的積木，若存在 T_1 型可行路徑，則

(1) $minS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=(m+n)-(t-1)\left(\left[\dfrac{m-1}{t+1}\right]+\left[\dfrac{n-1}{t+1}\right]\right)-2$

(2)(i)當 $m\le t+1$ 時， $MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=m+\dfrac{2n}{t+1}-\dfrac{t+3}{t+1}$

(ii)當 $n\le t+1$ 時， $MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=\dfrac{2m}{t+1}+n-\dfrac{t+3}{t+1}$

(iii)當 $m=t+2$ 、 $n\ge t+2$ 或 $n=t+2$ 、 $m\ge t+2$ 時， $MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=m+n-(t+1)$

(iv)當 $m\ge t+3$ 、 $n\ge t+3$ 時， $MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=m+n-2t$

【證明】

由定理 5.3(1)的證明過程知：存在 T_1 型可行路徑的充要條件為

$\begin{cases}b_1+b_2+\cdots+b_x=n-1+x-(t+1)y\ ---(a)\\ c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1-(t+1)x+y---(b)\end{cases}$, 其中 $0\le x\le\left[\dfrac{m-1}{t+1}\right]$ 、 $0\le y\le\left[\dfrac{n-1}{t+1}\right]$ 有解

且路徑的移動步數為 $(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)$

$$=(x+y)+[n-1+x-(t+1)y]+[m-1-(t+1)x+y]=(m+n)-(t-1)(x+y)-2$$

當 $(m,n)=(1,1)$ 時，始點即終點，故 $minS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)=0$。

針對其他 m 、 n 值討論：

(i)當 $m\le t+1$ 時，此時 $x=\left[\frac{m-1}{t+1}\right]=0$ 、 $0\le y\le\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$

①當 $n\le t+1$ 時，$(x,y)=(0,0)$，$(a)(b)$解得 $(m,n)=(1,1)$，除 $(m,n)=(1,1)$，不存在 T_1 型可行路徑。

②當 $n\ge t+2$ ，$(a)\Rightarrow n-1-(t+1)y=0\Rightarrow y=\frac{n-1}{t+1}$ 、 $(b)\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=m-1+y$ 必有解

若 $t+1\nmid n-1$，不存在 T_1 型可行路徑。

若 $t+1\mid n-1$ ，存在 T_1 型可行路徑，且 $x=\left[\frac{m-1}{t+1}\right]=0$ 、 $y=\left[\frac{n-1}{t+1}\right]=\frac{n-1}{t+1}$ ，

$$\Rightarrow (m+n)-(t-1)(x+y)-2=\underbrace{(m+n)-(t-1)(\underbrace{\left[\frac{m-1}{t+1}\right]}_{0}+\underbrace{\left[\frac{n-1}{t+1}\right]}_{\frac{n-1}{t+1}})-2}_{minS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}=\underbrace{m+\frac{2n}{t+1}-\frac{t+3}{t+1}}_{MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}$$

(ii)當 $n\le t+1$ 時，由(i)與盤面的對稱性可證得。

(iii)當 $m=t+2$ 、 $n\ge t+2$ 時，此時 $0\le x\le\left[\frac{m-1}{t+1}\right]=1$ 、 $0\le y\le\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$

若 $(x,y)=(0,0)$ ，$(a)(b)$解得 $(m,n)=(1,1)$ $\rightarrow\leftarrow$ 故 $x+y\ne0$

若 $(x,y)=(1,0)$ ，$(a)\Rightarrow b_1=n$ 、 $(b)\Rightarrow m=t+2$ 皆有解，故 $x+y$ 有最小值 1

若 $(x,y)=\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right],\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)$ ，$(a)(b)$顯然有解，故 $x+y$ 有最大值 $\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2}_{minS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}\le(m+n)-(t-1)(x+y)-2\le\underbrace{m+n-(t+1)}_{MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}$$

同理可證 $n=t+2$ 、 $m\ge t+2$ 的情形

(iv)當 $m\ge t+3$ 、 $n\ge t+3$ ，此時 $0\le x\le\left[\frac{m-1}{t+1}\right]$ 、 $0\le y\le\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$

若 $(x,y)=(0,0)$ ，$(a)(b)$解得 $(m,n)=(1,1)$ $\rightarrow\leftarrow$ 故 $x+y\ne0$

若 $(x,y)=(1,0)$ ，$(a)\Rightarrow b_1=n$ 、 $(b)\Rightarrow m=t+2$ $\rightarrow\leftarrow$

若 $(x,y)=(0,1)$ ，$(a)\Rightarrow n=t+2$ 、 $(b)\Rightarrow c_1=m$ $\rightarrow\leftarrow$ 故 $x+y\ne1$

若 $(x,y)=(1,1)$，$(a)\Rightarrow b_1=n-(t+1)$ 、 $(b)\Rightarrow c_1=m-(t+1)$ 皆有解，故 $x+y$ 有最小值 2

若 $(x,y)=\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right],\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)$ ，$(a)(b)$顯然有解，故 $x+y$ 有最大值 $\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2}_{minS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}\le(m+n)-(t-1)(x+y)-2\le\underbrace{m+n-2t}_{MaxS_{T_1}^{1\times1\times t}(m,n)}\quad\blacksquare$$

定理 5.5：在 $m \times n$ 的盤面上移動 $1 \times 1 \times t$ $(t \geq 2)$ 的積木，若存在 T_2 型可行路徑，則

(1) $minS_{T_2}^{1\times1\times t}(m,n) = (m+n) - (t-1)\left(\left[\dfrac{m}{t+1}\right] + \left[\dfrac{n-1}{t+1}\right]\right) - 2$

(2)(i)當 $m = t+1$ 時，$MaxS_{T_2}^{1\times1\times t}(m,n) = m+n-(t+1)$

(ii)當 $m \geq t+2$ 、 $n \leq t+1$ 時，$MaxS_{T_2}^{1\times1\times t}(m,n) = \dfrac{2m}{t+1} + n - 2$

(iii)當 $m \geq t+2$ 、 $n \geq t+2$ 時，$MaxS_{T_2}^{1\times1\times t}(m,n) = m+n-2t$

【證明】略(類同定理 5.4 證法) (證明於研究日誌)

定理 5.6：在 $m \times n$ 的盤面上移動 $1 \times 1 \times t$ $(t \geq 2)$ 的積木，若存在 T_3 型可行路徑，則

(1) $minS_{T_3}^{1\times1\times t}(m,n) = (m+n) - (t-1)\left(\left[\dfrac{m-1}{t+1}\right] + \left[\dfrac{n}{t+1}\right]\right) - 2$

(2)(i)當 $n = t+1$ 時，$MaxS_{T_3}^{1\times1\times t}(m,n) = m+n-(t+1)$

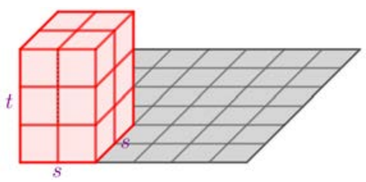
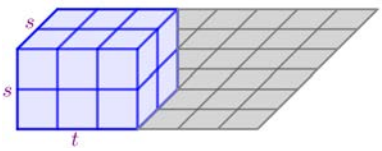
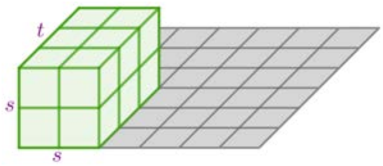
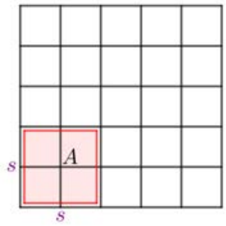
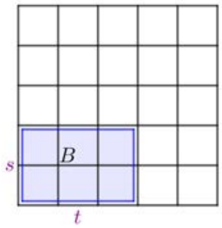
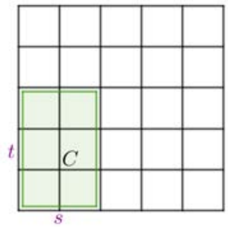
(ii)當 $m \leq t+1$ 、 $n \geq t+2$ 時，$MaxS_{T_3}^{1\times1\times t}(m,n) = m + \dfrac{2n}{t+1} - 2$

(iii)當 $m \geq t+2$ 、 $n \geq t+2$ 時，$MaxS_{T_3}^{1\times1\times t}(m,n) = m+n-2t$

【證明】由定理 5.5 與盤面的對稱性即可證得

研究三：在 $m \times n$ 大小的盤面上移動 $s \times s \times t$ $(s \neq t)$ 大小的長方體積木

最後，我們嘗試將研究一、二的結果推廣到移動 $s \times s \times t$ $(s \neq t)$ 大小積木的一般情形。首先，我們再延伸定義 $s \times s \times t$ $(s \neq t)$ 大小積木的狀態、圖示紀錄與所在棋格座標如下：

狀態	A (立置)	B (橫置)	C (縱置)
圖示			
紀錄			
所在棋格	(s,s)	(t,s)	(s,t)

定理 6.1：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，則存在遞迴關係：

(1) $T_1(m,n)=T_1(m-s,n)+T_1(m-s-t,n)+T_1(m,n-s)+T_1(m,n-s-t)$

$-T_1(m-2s-t,n)-T_1(m,n-2s-t)-T_1(m-s,n-s)\quad (m\geq 2s+1$ 或 $n\geq 2s+1)$

其中 $T_1(s,s)=1$ 、 $T_1(i,j)=0$, $1\leq i,j\leq 2s\wedge(i,j)\neq(s,s)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$ 。

(2) $T_2(m,n)=T_2(m-s-t,n)+T_2(n-s,m-t)+T_2(m,n-s)\qquad (m\geq s+t+1$ 或 $n\geq s+1)$

其中 $T_2(s+t,s)=1$ 、$T_2(i,j)=0,1\leq i\leq s+t\wedge 1\leq j\leq s\wedge(i,j)\neq(s+t,s)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$ 。

(3) $T_3(m,n)=T_3(m,n-s-t)+T_3(n-t,m-s)+T_3(m-s,n)\qquad (m\geq s+1$ 或 $n\geq s+t+1)$

其中 $T_3(s,s+t)=1$ 、$T_2(i,j)=0,1\leq i\leq s\wedge 1\leq j\leq s+t\wedge(i,j)\neq(s,s+t)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$ 。

【證明】略(同定理 2.2~2.4)

性質 6.2：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，所有可行路徑中，

(1)每含一個 S_B 型子路徑 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{b個}A$，積木向右移動 $(s+t)$ 格且向上移動 $s(b-1)$ 格。

(2)每含一個 S_C 型子路徑 $A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{c個}A$，積木向右移動 $s(c-1)$ 格且向上移動 $(s+t)$ 格。

(3)每含一個 S_D 型子路徑 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d個}$，積木向右移動 t 格且向上移動 $s(d-1)$ 格。

(4)每含一個 S_E 型子路徑 $A\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e個}$，積木向右移動 $s(e-1)$ 格且向上移動 t 格。

定理 6.3：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，則

(1) $$T_1^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

(2) $$T_2^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

(3) $$T_3^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]}H^{x}_{\frac{n-(s+t)-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y+1}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

(4) $T^{s\times s\times t}(m,n)=T_1^{s\times s\times t}(m,n)+T_2^{s\times s\times t}(m,n)+T_3^{s\times s\times t}(m,n)$

【證明】

(1)積木由始點 (s,s) 移動至終點 (m,n) ， x 的變化量 $\Delta x=m-s$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-s$

同性質 3.2 知，其 T_1 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{皆B或皆C}A$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A$、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A$、……、$A\underbrace{B\cdots B}_{b_x個}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$、……、$A\underbrace{C\cdots C}_{c_y個}A$

此路徑的 x 的變化量為 $(s+t)x+s(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)$ 、

y 的變化量為 $s(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(s+t)y$

因此 $s(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(s+t)y=n-s\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x=\dfrac{n-s-(s+t)y}{s}+x$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}$

$$(s+t)x+s(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)=m-s\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=\frac{m-s-(s+t)x}{s}+y$$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}$

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C^{x+y}_{x}

因此可行路徑數為 $H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$ ，已知 $0\le x\le\left[\dfrac{m-s}{s+t}\right]$ 、 $0\le y\le\left[\dfrac{n-s}{s+t}\right]$ ，

故所有可行路徑數 $T_1^{s\times s\times t}(m,n)=\displaystyle\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$

(2)積木由始點 (s,s) 移動至終點 (m,n) ， x 的變化量 $\Delta x=m-s$ 且 y 的變化量 $\Delta y=n-s$

同性質 3.2 知，其 T_2 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$

假設其可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑，依序為 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_1\text{個}}A$ 、 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_2\text{個}}A$ 、……、 $A\underbrace{B\cdots B}_{b_x\text{個}}A$

y 個 S_C 型子路徑，依序為 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_1\text{個}}A$ 、 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_2\text{個}}A$ 、……、 $A\underbrace{C\cdots C}_{c_y\text{個}}A$

1個 S_D 型子路徑，為 $A\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d\text{個}}$ (於路徑末端)

此路徑的 x 的變化量為 $(s+t)x+s(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+t$ 、

y 的變化量為 $s(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(s+t)y+s(d-1)$

因此 $s(b_1+b_2+\cdots+b_x-x)+(s+t)y+s(d-1)=n-s\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_x+d=\dfrac{n-(s+t)y}{s}+x$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}$

$$(s+t)x+s(c_1+c_2+\cdots+c_y-y)+t=m-s\Rightarrow c_1+c_2+\cdots+c_y=\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}+y$$

由引理 3.7 知：其正整數解個數為 $H^{y}_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}$

又 x 個 S_B 型子路徑(視為同物)和 y 個 S_C 型子路徑(視為同物)的排列數為 C^{x+y}_{x}

因此可行路徑數為 $H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$，已知 $0\le x\le\left[\dfrac{m-(s+t)}{s+t}\right]$、$0\le y\le\left[\dfrac{n-s}{s+t}\right]$

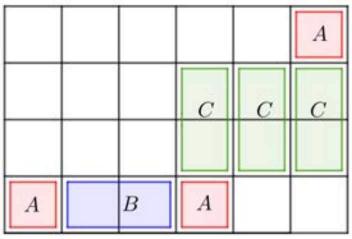
所有可行路徑數 $T_2^{s\times s\times t}(m,n)=\displaystyle\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$

$$(3)\ T_3^{s\times s\times t}(m,n)=T_2^{s\times s\times t}(n,m)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]} H^{x+1}_{\frac{m-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{n-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

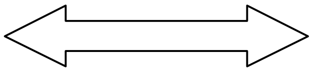
$$=\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]} H^{y+1}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot H^{x}_{\frac{n-(s+t)-(s+t)y}{s}}\cdot C^{x+y}_{y}=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]} H^{x}_{\frac{n-(s+t)-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y+1}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}\quad\blacksquare$$

討論 我們觀察到，當 s、t 有公因數 d 時，移動 $s\times s\times t$ 大小積木的情形剛好是移動 $\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}$ 大小積木時伸縮 d 倍的情形，因此我們相信，它們的公式間，必定有一個關係式存在。

分析

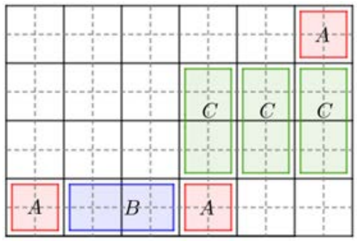


路徑同型



所有路徑一對一對應

故 $T_1^{2\times2\times4}(12,8)=T_1^{1\times1\times2}(6,4)$



6×4 盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木　　　　盤面 12×8 上移動 $2\times2\times4$ 的積木

> **定理 6.4**：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，若 $d|s$ 、 $d|t$ ，則當 $d|m$ 、 $d|n$ 時，
>
> $T_i^{s\times s\times t}(m,n)=T_i^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ ，否則 $T_i^{s\times s\times t}(m,n)=0$ ，其中 $i=1,2,3$ 。同理，
>
> $minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=minS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ 、 $MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=MaxS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ 。

【證明】

由定理 6.3 知， $T_1^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]} H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$

$$=\sum_{x=0}^{\left[\frac{\frac{m}{d}-\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}+\frac{t}{d}}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{\frac{n}{d}-\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}+\frac{t}{d}}\right]} H^{x}_{\frac{\frac{n}{d}-\frac{s}{d}-(\frac{s}{d}+\frac{t}{d})y}{\frac{s}{d}}}\cdot H^{y}_{\frac{\frac{m}{d}-\frac{s}{d}-(\frac{s}{d}+\frac{t}{d})x}{\frac{s}{d}}}\cdot C^{x+y}_{x}=T_1^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$$

若 $d\nmid m$ 或 $d\nmid n$ ， $H^{x}_{\frac{\frac{n}{d}-\frac{s}{d}-(\frac{s}{d}+\frac{t}{d})y}{\frac{s}{d}}}=0$ 或 $H^{y}_{\frac{\frac{m}{d}-\frac{s}{d}-(\frac{s}{d}+\frac{t}{d})x}{\frac{s}{d}}}=0\Rightarrow T_1^{s\times s\times t}(m,n)=0$ 　其餘同理可證 ■

討論 1.定理 6.3 的公式若計算出來 $T_i^{s\times s\times t}(m,n)=0$，即代表 $m\times n$ 的盤面不存在 T_i 型可行路徑，反之則存在 T_i 型可行路徑。

2.由定理 6.4 可知，**對於移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，在探討可行路徑數與移動步數時，我們不妨可以假設 $(s,t)=1$ 。**

在嘗試移動各式大小的積木過程中，我們發現一個很重要的性質，當限定$(s,t)=1$，$m\times n$的盤面足夠大時，必定有解。敘述如下：

引理 6.5：若$s,t\in N$、$(s,t)=1$，$a_0,a_1,\cdots,a_{s-1}$為模s的一個完全剩餘系，則$ta_0,ta_1,\cdots,ta_{s-1}$也為模$s$的一個完全剩餘系。

【證明】[3]p55 定理 2.

引理 6.6：若$s,t\in N$、$(s,t)=1$，$k\cdot t\equiv r_k \pmod s$，其中$k=1,2,\cdots,s$、$0\le r_k\le s-1$，則$\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}=\{0,1,\cdots,s-1\}$。

【證明】由引理 6.5 即可得。

定理 6.7：在$m\times n$的盤面上移動$s\times s\times t\ (s\ne t,(s,t)=1)$的積木，則

(1)當$m\ge s+s(s+t)$、$n\ge s+s(s+t)$，$m\times n$盤面必存在T_1型可行路徑。

(2)當$m\ge s(s+t)$、$n\ge s+s(s+t)$，$m\times n$盤面必存在T_2型可行路徑。

(3)當$m\ge s+s(s+t)$、$n\ge s(s+t)$，$m\times n$盤面必存在T_3型可行路徑。

【證明】

(1)由定理 6.3(1)的證明過程知，存在T_1型可行路徑的充要條件為

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x=\dfrac{n-s-(s+t)y}{s}+x\ --(a) \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=\dfrac{m-s-(s+t)x}{s}+y--(b)\end{cases},\text{其中 }0\le x\le\left[\frac{m-s}{s+t}\right]、0\le y\le\left[\frac{n-s}{s+t}\right]\ (*)\text{有解，}$$

當$m\ge s+s(s+t)$、$n\ge s+s(s+t)$時，$\left[\frac{m-s}{s+t}\right]\ge s$、$\left[\frac{n-s}{s+t}\right]\ge s$，

令$k\cdot t\equiv r_k \pmod s$，其中$k=1,2,\cdots,s$、$0\le r_k\le s-1$，由引理 6.6 知$\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}=\{0,1,\cdots,s-1\}$

接著，將所有m、n值分割成s^2個部分，即$m\equiv r_i \pmod s$、$n\equiv r_j \pmod s$，其中$i,j=1,2,\cdots,s$，顯然i,j唯一存在。取$(x,y)=(i,j)$，則

$n-s-(s+t)j=sA+r_j-s-sj-(sB+r_j),A、B\in Z\Rightarrow s\,|\,n-s-(s+t)j\Rightarrow(a)$有解

$m-s-(s+t)i=sC+r_i-s-si-(sD+r_i),C、D\in Z\Rightarrow s\,|\,m-s-(s+t)i\Rightarrow(b)$有解

即$(x,y)=(i,j)$必為$(*)$的可行解，故$m\times n$盤面必存在T_1型可行路徑。

(2)由定理 6.3(2)的證明過程知，存在T_2型可行路徑的充要條件為

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x+d=\dfrac{n-(s+t)y}{s}+x\ --(a) \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=\dfrac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}+y-(b)\end{cases},\text{其中 }0\le x\le\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]、0\le y\le\left[\frac{n-s}{s+t}\right]\ (※)$$

有解，同理(1)，取$(x,y)=(i-1,j)$必為(※)的可行解，故$m\times n$盤面必存在T_2型可行路徑。

(3)由(2)與盤面的對稱性即可證得。 ■

最後，我們要尋找最小移動步數與最大移動步數，以下以$\boxed{T_1\text{型可行路徑}}$的情形說明：

為了敘述方便，我們做了以下定義：

【**定義**】若存在(x,y)使得方程組$(*)$有解，我們稱(x,y)為$(*)$的一組<u>可行解</u>。而所有可行解中，$x+y$有最小值的解稱為<u>最小解</u>，有最大值的解稱為<u>最大解</u>。

$\boxed{\text{討論}}$ 如何找出最小移動步數與最大移動步數呢？

$\boxed{\text{分析}}$ 由定理 6.7(1)的證明過程中可知，若方程組(∗)存在可行解(x,y)，則路徑的移動步數為 $(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(x+y)-2s\right]$，由此式可看出 $minS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)$、$MaxS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)$ 的值決定於 $x+y$ 的最小值與最大值。因此我們只要能找到(∗)的最小解與最大解，問題就可以解決了！

引理 6.8：已知 $(s,t)=1$ 且 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組(∗)的一組可行解，若 (x',y') 也為方程組(∗)的一組可行解，則存在 $p,q\in Z$，使得 $(x',y')=(\alpha+ps,\beta+qs)$。

【證明】

已知 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組(∗)的一組可行解，即

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_\alpha=\dfrac{n-s-(s+t)\beta}{s}+\alpha \quad --(a) \\ c_1+c_2+\cdots+c_\beta=\dfrac{m-s-(s+t)\alpha}{s}+\beta \quad --(b) \end{cases}$$，其中 $0\le\alpha\le\left[\frac{m-s}{s+t}\right]$、$0\le\beta\le\left[\frac{n-s}{s+t}\right]$ 有解。

則 $s\,|\,m-s-(s+t)\alpha \Rightarrow m-s-(s+t)\alpha=sA\,,A\in Z$

若 (x',y') 為方程組(∗)的一組可行解，則 $s\,|\,m-s-(s+t)x' \Rightarrow m-s-(s+t)x'=sA'\,,A'\in Z$

$m-s-(s+t)x'=sA+(s+t)\alpha-(s+t)x'=sA' \Rightarrow sA+s\alpha-sx'-sA'=t(x'-\alpha)\Rightarrow s\,|\,x'-\alpha$

故存在 $p\in Z$，使得 $x'-\alpha=ps \Rightarrow x'=\alpha+ps$，同理存在 $q\in Z$，使得 $y'=\beta+qs$。 ■

引理 6.9：已知 $(s,t)=1$ 且 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組(∗)的一組最小解，則 $(x',y')=(\alpha+ps,\beta+qs)$，其中 $p=\left[\dfrac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-\alpha}{s}\right],q=\left[\dfrac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-\beta}{s}\right]$ 為方程組(∗)的一組最大解。

【證明】

已知 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組(∗)的解，則 $s\,|\,m-s-(s+t)\alpha$、$s\,|\,n-s-(s+t)\beta$

由引理 6.8 知，若 (x',y') 為方程組(∗)的解，則存在 $p,q\in Z$，使得 $(x',y')=(\alpha+ps,\beta+qs)$。

令 $0\le\alpha+ps\le\left[\frac{m-s}{s+t}\right]$、$0\le\beta+qs\le\left[\frac{n-s}{s+t}\right] \Rightarrow \dfrac{-\alpha}{s}\le p\le\dfrac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-\alpha}{s}$、$\dfrac{-\beta}{s}\le q\le\dfrac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-\beta}{s}$

因此若取 $p=\left[\dfrac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-\alpha}{s}\right],q=\left[\dfrac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-\beta}{s}\right]$，顯然 $0\le x'\le\left[\frac{m-s}{s+t}\right]$、$0\le y'\le\left[\frac{n-s}{s+t}\right]$。

又 $n-s-(s+t)y'=n-s-(s+t)(\beta+qs)=n-s-(s+t)\beta-(s+t)qs \Rightarrow s\,|\,n-s-(s+t)y'$

$m-s-(s+t)x'=m-s-(s+t)(\alpha+ps)=m-s-(s+t)\alpha-(s+t)ps \Rightarrow s\,|\,m-s-(s+t)x'$

①當 $\alpha\ne0\,,\beta\ne0$，則 $x'\ne0,y'\ne0 \Rightarrow (a)(b)$ 皆有解

②當 $\alpha\ne0\,,\beta=0$，則 $s\,|\,n-s,m=s+(s+t)\alpha \Rightarrow x'=\alpha,y'=\left[\dfrac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}{s}\right]\cdot s \Rightarrow (a)(b)$ 皆有解

③當$\alpha=0,\beta\neq 0$，同② $\Rightarrow(a)(b)$ 皆有解

④當$\alpha=0,\beta=0$，則$m=s$, $n=s\Rightarrow(x',y')=(0,0)$為$(a)(b)$唯一解

由①~④知 (x',y')為方程組(∗)的一組最大解。 ■

討論 由引理 6.9 知，只要找出方程組(∗)的最小解，即可推出最大解，進而求得最小移動步數與最大移動步數。以下是我們找出的方程組(∗)和方程組(※)的<u>最小解表</u>：

1.方程組(∗)的最小解表：

	$m\equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$	$m\equiv i\cdot t(\mathrm{mod}\, s), i=1,2,\ldots,s-1$
$n\equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$	• $m=s,n=s\Rightarrow(0,0)$ • $m=s+\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(s,0)$ ② $\ell\geq 2,n<s+s(s+t)\Rightarrow(\ell\cdot s,0)$ • $n=s+\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(0,s)$ ② $\ell\geq 2,m<s+s(s+t)\Rightarrow(0,\ell\cdot s)$ • $m>s+s(s+t),n>s+s(s+t)\Rightarrow(s,s)$	• $m=s+(i+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(i,0)$ ② $\ell\geq 1,n<s+s(s+t)\Rightarrow(i+\ell\cdot s,0)$ • $m>s+i(s+t),n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(i,s)$
$n\equiv j\cdot t(\mathrm{mod}\, s)$ $j=1,2,\cdots,s-1$	• $n=s+(j+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(0,j)$ ② $\ell\geq 1,m<s+s(s+t)\Rightarrow(0,j+\ell\cdot s)$ • $m\geq s+s(s+t),n>s+j(s+t)\Rightarrow(s,j)$	• $m\geq s+i(s+t)$、$n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(i,j)$

【註】未符合此表中條件的m、n值，代表不存在T_1型可行路徑。

2.方程組(※)的最小解表：

	$m\equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$	$m\equiv i\cdot t(\mathrm{mod}\, s), i=1,2,\ldots,s-1$
$n\equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$	• $m=\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(s-1,0)$ ② $\ell\geq 2,n<s+s(s+t)\Rightarrow(\ell s-1,0)$ • $m>s+s(s+t),n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(s-1,s)$	• $m=(i+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(i-1,0)$ ② $\ell\geq 1,n<s+s(s+t)\Rightarrow(i-1+\ell\cdot s,0)$ • $m>s+i(s+t),n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(i-1,s)$
$n\equiv j\cdot t(\mathrm{mod}\, s)$ $j=1,2,\cdots,s-1$	• $m\geq s(s+t)$、$n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(s-1,j)$	• $m\geq i(s+t)$、$n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(i-1,j)$

【註】未符合此表中條件的m、n值，代表不存在T_2型可行路徑。

由以上討論可知，當積木大小為$s\times s\times t$ $(s\neq 1)$時，其最小移動步數與最大移動步數的討論在小盤面時的分類是很繁瑣的，<u>為了簡潔呈現定理，本作品僅列出盤面足夠大時的情形</u>。

定理6.10：在$m\times n$的盤面上移動$s\times s\times t$ $(s\neq t,(s,t)=1)$的積木，當$m>s+s(s+t)$、$n>s+s(s+t)$且$m\equiv i\cdot t(\mathrm{mod}\, s)$、$n\equiv j\cdot t(\mathrm{mod}\, s)$, $i,j=1,2,\cdots,s-1$時，若$s<t$，則

$$minS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left[\frac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-i}{s}\right]s+j+\left[\frac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-j}{s}\right]s\right)-2s\right];$$

$$MaxS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j)-2s\right]$$

。若$s>t$，公式互換。

【證明】

由定理 6.7 知，當 $m>s+s(s+t)$ 、 $n>s+s(s+t)$ 時，必存在 T_1 型可行路徑。即

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x=\dfrac{n-s-(s+t)y}{s}+x \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=\dfrac{m-s-(s+t)x}{s}+y \end{cases}$$，其中 $0\le x\le\left\lfloor\dfrac{m-s}{s+t}\right\rfloor$ 、 $0\le y\le\left\lfloor\dfrac{n-s}{s+t}\right\rfloor$ 有解。

路徑的移動步數為 $(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)=\dfrac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(x+y)-2s\right]$◎

由定理 6.7 證明過程知，$(x,y)=(i,j)$ 為其中一組可行解也是最小解，故 $x+y$ 有最小值 $i+j$ 。

由引理 6.9 知，$x+y$ 有最大值 $i+\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{m-s}{s+t}\right\rfloor-i}{s}\right\rfloor s+j+\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{n-s}{s+t}\right\rfloor-j}{s}\right\rfloor s$ 。代入◎即得證。■

定理 6.11：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t$ $(s\ne t,(s,t)=1)$ 的積木，當 $m>s(s+t)$ 、 $n>s+s(s+t)$ 且 $m\equiv i\cdot t(\bmod s)$ 、 $n\equiv j\cdot t(\bmod s)$, $i,j=1,2,\cdots,s-1$ 時，若 $s<t$ ，則

$$minS_{T_2}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left((i-1)+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{m-(s+t)}{s+t}\right\rfloor-(i-1)}{s}\right\rfloor s+j+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{n-s}{s+t}\right\rfloor-j}{s}\right\rfloor s\right)-(s+t)\right]$$

$$MaxS_{T_2}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)\right]$$ 。若 $s>t$ ，公式互換。

【證明】

由定理 6.7 知，當 $m>s(s+t)$ 、 $n>s+s(s+t)$ 時，必存在 T_2 型可行路徑。即

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x+d=\dfrac{n-(s+t)y}{s}+x \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=\dfrac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}+y \end{cases}$$，其中 $0\le x\le\left\lfloor\dfrac{m-(s+t)}{s+t}\right\rfloor$ 、$0\le y\le\left\lfloor\dfrac{n-s}{s+t}\right\rfloor$ 有解，路徑的移動步數為 $(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x+d)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)=\dfrac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(x+y)-(s+t)\right]$◎

由定理 6.7 證明過程知，$(x,y)=(i-1,j)$ 為一組最小解，故 $x+y$ 有最小值 $i+j-1$。同引理 6.9 知，$x+y$ 有最大值 $(i-1)+\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{m-(s+t)}{s+t}\right\rfloor-(i-1)}{s}\right\rfloor s+j+\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{n-s}{s+t}\right\rfloor-j}{s}\right\rfloor s$ 。代入◎即可證。■

定理 6.12：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t$ $(s\ne t,(s,t)=1)$ 的積木，當 $m>s+s(s+t)$ 、 $n>s(s+t)$ 且 $m\equiv i\cdot t(\bmod s)$ 、 $n\equiv j\cdot t(\bmod s)$, $i,j=1,2,\cdots,s-1$ 時，若 $s<t$ ，則

$$minS_{T_3}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{m-s}{s+t}\right\rfloor-i}{s}\right\rfloor s+(j-1)+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{n-(s+t)}{s+t}\right\rfloor-(j-1)}{s}\right\rfloor s\right)-(s+t)\right]$$

$$MaxS_{T_3}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)\right]$$ 。若 $s>t$ ，公式互換。

【證明】由定理 6.11 與盤面的對稱性即可證得

【**舉例**】在17×14的盤面上移動$2\times2\times3$的積木，則代入定理 6.3(1)得

$$T_1^{2\times2\times3}(17,14)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{17-2}{5}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{14-2}{5}\right]}H^x_{\frac{14-2-5y}{2}}\cdot H^y_{\frac{17-2-5x}{2}}\cdot C^{x+y}_x=\underbrace{H^3_6\cdot H^0_0\cdot C^3_3}_{28}+\underbrace{H^1_1\cdot H^2_5\cdot C^3_1}_{18}+\underbrace{H^3_1\cdot H^2_0\cdot C^5_3}_{30}=76$$

又 $17\equiv1\cdot3(\mathrm{mod}\,2)\,,14\equiv2\cdot3(\mathrm{mod}\,2)\Rightarrow i=1\,,\,j=2$ ，則代入定理 6.10 得

$$minS_{T_1}^{2\times2\times3}(17,14)=\frac{1}{2}\left[(17+14)-(3-2)\left(1+\left[\frac{\left[\frac{17-2}{5}\right]-1}{2}\right]2+2+\left[\frac{\left[\frac{14-2}{5}\right]-2}{2}\right]2\right)-4\right]=11$$

$$MaxS_{T_1}^{2\times2\times3}(17,14)=\frac{1}{2}\left[(17+14)-(3-2)(1+2)-4\right]=12$$

故所有T_1型可行路徑數為 76，其中最小移動步數為 11、最大移動步數為 12。

肆、研究結果

在$m\times n$的盤面上移動$s\times s\times t\ (s\neq t)$的積木，我們有以下幾個重要的結果：

一、各型可行路徑數的遞迴關係式：

(1) $T_1(m,n)=T_1(m-s,n)+T_1(m-s-t,n)+T_1(m,n-s)+T_1(m,n-s-t)$

$\qquad -T_1(m-2s-t,n)-T_1(m,n-2s-t)-T_1(m-s,n-s)\quad (m\geq2s+1$ 或 $n\geq2s+1)$

其中$T_1(s,s)=1$ 、 $T_1(i,j)=0\,,1\leq i,j\leq2s\wedge(i,j)\neq(s,s)$ 或 $i\leq0$ 或 $j\leq0$ 。

(2) $T_2(m,n)=T_2(m-s-t,n)+T_2(n-s,m-t)+T_2(m,n-s)\quad (m\geq s+t+1$ 或 $n\geq s+1)$

其中$T_2(s+t,s)=1$ 、 $T_2(i,j)=0,1\leq i\leq s+t\wedge1\leq j\leq s\wedge(i,j)\neq(s+t,s)$ 或 $i\leq0$ 或 $j\leq0$ 。

(3) $T_3(m,n)=T_3(m,n-s-t)+T_3(n-t,m-s)+T_3(m-s,n)\quad (m\geq s+1$ 或 $n\geq s+t+1)$

其中$T_3(s,s+t)=1$ 、 $T_2(i,j)=0,1\leq i\leq s\wedge1\leq j\leq s+t\wedge(i,j)\neq(s,s+t)$ 或 $i\leq0$ 或 $j\leq0$ 。

二、各型可行路徑數的通式：

(1) $$T_1^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^x_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^y_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_x$$

(2) $$T_2^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^y_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_x$$

(3) $$T_3^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]}H^x_{\frac{n-(s+t)-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y+1}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_x$$

(4) $T^{s\times s\times t}(m,n)=T_1^{s\times s\times t}(m,n)+T_2^{s\times s\times t}(m,n)+T_3^{s\times s\times t}(m,n)$

三、若$d\,|\,s$ 、 $d\,|\,t$ ，則當$d\,|\,m$ 、 $d\,|\,n$時， $T_i^{s\times s\times t}(m,n)=T_i^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ ，否則$T_i^{s\times s\times t}(m,n)=0$ ，其中

$i=1,2,3$ 。同理， $minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=minS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ 、 $MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=MaxS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ 。

四、存在各型可行路徑的條件：($(s,t)=1$)

(1) $m\times n$ 的盤面存在 T_i 型可行路徑 $\Leftrightarrow T_i^{s\times s\times t}(m,n)\neq 0$ (檢驗時不需完全算出 $T_i^{s\times s\times t}(m,n)$)

(2)①當 $m\geq s+s(s+t)$ 、 $n\geq s+s(s+t)$ ， $m\times n$ 盤面必存在 T_1 型可行路徑。

②當 $m\geq s(s+t)$ 、 $n\geq s+s(s+t)$ ， $m\times n$ 盤面必存在 T_2 型可行路徑。

③當 $m\geq s+s(s+t)$ 、 $n\geq s(s+t)$ ， $m\times n$ 盤面必存在 T_3 型可行路徑。

五、各型可行路徑的最小移動步數與最大移動步數 (若存在 T_1 、 T_2 、 T_3 型可行路徑)

(1)當 $s=1$ 時

	$minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$ (最小移動步數)	$MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$ (最大移動步數)
T_1	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2$	① $m\leq t+1\Rightarrow m+\frac{2}{t+1}n-\frac{t+3}{t+1}$ ② $n\leq t+1\Rightarrow \frac{2}{t+1}m+n-\frac{t+3}{t+1}$ ③ $m=t+2$ 、 $n\geq t+2$ 或 $n=t+2$ 、 $m\geq t+2$ $\Rightarrow m+n-(t+1)$ ④ $m\geq t+3$ 、 $n\geq t+3\Rightarrow m+n-2t$
T_2	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2$	① $m=t+1\Rightarrow m+n-(t+1)$ ② $m\geq t+2$ 、 $n\leq t+1\Rightarrow \frac{2m}{t+1}+n-2$ ③ $m\geq t+2$ 、 $n\geq t+2\Rightarrow m+n-2t$
T_3	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n}{t+1}\right]\right)-2$	① $n=t+1\Rightarrow m+n-(t+1)$ ② $m\leq t+1$ 、 $n\geq t+2\Rightarrow m+\frac{2n}{t+1}-2$ ③ $m\geq t+2$ 、 $n\geq t+2\Rightarrow m+n-2t$

(2)當 $s\neq 1$ 、 $(s,t)=1$ 時 ($m\equiv i\cdot t(\mathrm{mod}\,s)$ 、 $n\equiv j\cdot t(\mathrm{mod}\,s)$, $i,j=1,2,\cdots,s-1$)

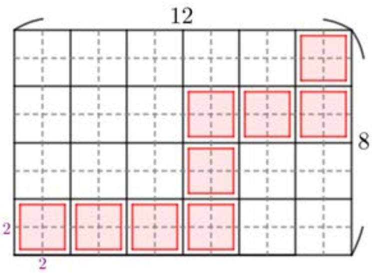
T_1 $m>s+s(s+t)$ $n>s+s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$minS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left[\frac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-i}{s}\right]s+j+\left[\frac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-j}{s}\right]s\right)-2s\right]$ $MaxS_{T_1}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j)-2s\right]$
T_2 $m>s(s+t)$ $n>s+s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$minS_{T_2}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left((i-1)+\left[\frac{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]-(i-1)}{s}\right]s+j+\left[\frac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-j}{s}\right]s\right)-(s+t)\right]$ $MaxS_{T_2}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)\right]$
T_3 $m>s+s(s+t)$ $n>s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$minS_{T_3}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left[\frac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-i}{s}\right]s+(j-1)+\left[\frac{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]-(j-1)}{s}\right]s\right)-(s+t)\right]$ $MaxS_{T_3}^{s\times s\times t}(m,n)=\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)\right]$

伍、討論與未來展望

一、本作品聚焦於$T_i(i=1,2,3)$型路徑的研究，其它型式的路徑也可以本作品的研究方法求解。比如B或C狀態起始A狀態結束的情形，等同於本文中的T_2、T_3型路徑；B或C狀態起始B或C狀態結束的情形，只需在T_2、T_3型路徑前增加$S_{D'}$型子路徑$\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d'\text{個}}A$或$S_{E'}$型子路徑$\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e'\text{個}}A$，再用本作品的解題方法即可。

二、本作品所探討的積木大小為$s\times s\times t\ (s\neq t)$，事實上，當$s=t$時，積木大小為邊長$s$的立方體，其公式即為本作品中$T$型路徑$(T_1\cup T_2\cup T_3)$的情形，然而，我們並不需要代到本作品的公式，因為其所有可行路徑數只需視為向右移動$\left(\dfrac{m}{s}-1\right)$次與向上移動$\left(\dfrac{n}{s}-1\right)$次的排列數即可，也就是當$s|m$、$s|n$時，

$$T^{s\times s\times s}(m,n)=\frac{\left(\frac{m}{s}+\frac{n}{s}-2\right)!}{\left(\frac{m}{s}-1\right)!\left(\frac{n}{s}-1\right)!}$$，且移動步數固定為$\dfrac{m}{s}+\dfrac{n}{s}-2$。



▲在12×8的盤面上移動$2\times 2\times 2$的積木，每條可行路徑皆移動8次，其中向右移動5次、向上移動3次，排列數為$\dfrac{8!}{5!3!}=56$，故 $T^{2\times 2\times 2}(12,6)=56$。

三、本作品最大的貢獻是，成功將滾積木問題推廣到積木大小為$s\times s\times t\ (s\neq t)$的情形，除了找出各型可行路徑數的遞迴關係式，並推導出可行路徑數的簡潔公式，透過找尋方程組中的最小解與最大解，證明了最小移動步數與最大移動步數的通式。我們以程式驗證其正確性，並給予嚴謹的證明。

四、若想將積木大小推廣至$r\times s\times t\ (r\leq s\leq t)$的情形，則需要考慮積木狀態可能為$r\times s$、$s\times t$、$t\times r$分別橫置與縱置共六種狀態，再以本作品解題方法即可求解，但這是個很繁複的過程，我們期待未來能找到更好的解決辦法。

陸、參考文獻資料

1.游復廷、蔣沁珊、吳書磊。**滾積木遊戲探討**。中華民國第55屆中小學科學展覽會　國中組。
2.編輯部(民國78年)。**組合數學－算法與分析－**。台北：九章出版社。孫文先發行。
3.閔嗣鶴、嚴士健(民國82年)。**初等數論**。新竹：凡異出版社。
4.許志農(主編)(2019)。**普通高級中學數學2**。台北：龍騰文化。
5.**組合**。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/組合。

【評語】30401

考慮在棋盤上放置一個大小為 1x1x2 的長方體棋子，依據倒下、滾動、站立三個簡單的規則移動，最後能否移到終點的一個有趣的遊戲。作者們透過巧妙的分析技巧，針對在 mxn 的棋盤上，遊戲是否可以完成，完成遊戲的不同方法數、最少與最多移動步數等問題給出了完整的解答。並把結果進一步擴展到棋子大小為 sxsxt 的更一般化的情況。說理清楚而且完整，非常的難得。作者們顯然已經掌握了處理更一般化問題的技巧。是否可以運用在解決棋子大小為 sxsxt 的問題時所使用的工具，針對棋子大小為 rxsxt 的問題給出結果？如果可以針對這個一般化的問題，給出一些好的結論，作品會更完整也更好。

作品簡報

滾積木遊戲之研究與推廣

科　別：數　學　科

組　別：國　中　組

研究動機

社團課時，老師讓我們玩滾積木遊戲，在$m \times n$ (m行n列)大小的棋盤上，將一個$1\times1\times2$大小的長方體積木立於左下角的格子，以「倒、滾、立」三種移動方式，以及「向右、向上」兩種方向(類走捷徑)成功移動至右上角格子，則此盤面稱為有解。我們發現，並不是任意大小的棋盤皆有解，且過關的方法與移動的步數均不唯一，這引起我們的興趣，便展開一連串的研究。

遊戲規則

在$m \times n$ $(m,n \in N)$大小的棋盤上，將一個$1\times1\times2$大小的長方體積木立於左下角的格子(始點)，以「倒、滾、立」三種移動方式，以及「向右、向上」兩種方向移動至右上角格子(終點)。

研究目的

一、找出移動$1\times1\times2$大小的長方體積木，有解的盤面大小。

二、找出移動$1\times1\times2$大小的長方體積木，盤面有解時，所有可行路徑數。

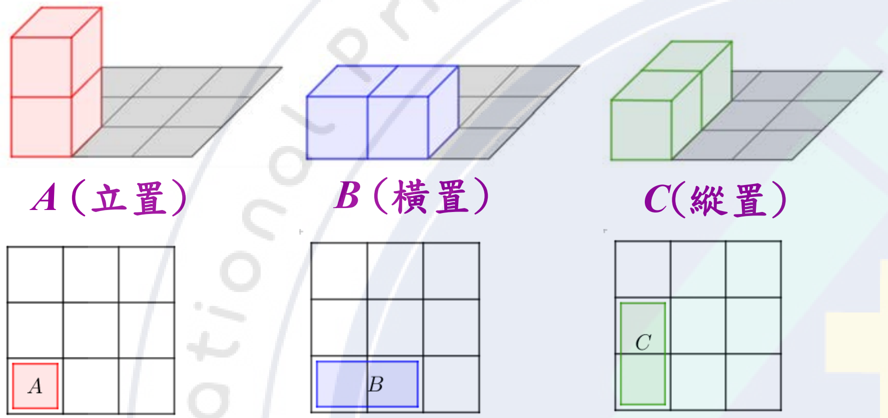
三、找出移動$1\times1\times2$大小的長方體積木，盤面有解時，最小移動步數與最大移動步數。

四、推廣至移動$1\times1\times t$ $(t\geq2)$大小的長方體積木之情形。

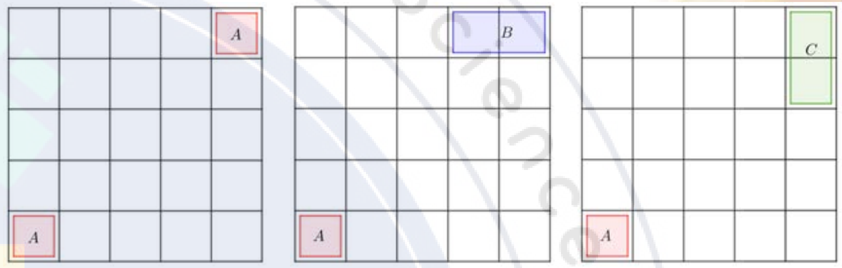
五、推廣至移動$s\times s\times t$ $(s\neq t)$大小的長方體積木之情形。

名詞與符號定義

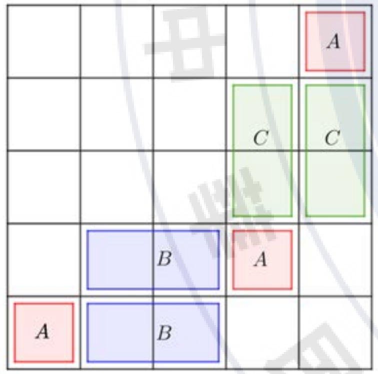
積木狀態



路徑型式



可行路徑



路徑 *ABBACCA*

- ▲ $T_i(m,n)$:所有 T_i 型可行路徑數。
- ▲ $minS_{T_i}(m,n)$:所有 T_i 型可行路徑中，移動步數的最小值。
- ▲ $MaxS_{T_i}(m,n)$:所有 T_i 型可行路徑中，移動步數的最大值。
- ▲ C_k^n:從 n 個不同事物中取出k個 $(0\le k\le n)$ 的組合數為 $C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，其中 $C_k^n=C_{n-k}^n$。

  擴充定義: $C_k^n=\begin{cases}1 & ,n<0,k=0\\ 0 & ,(0\le n<k)\vee(k<0\le n)\end{cases}$。
- ▲ H_k^n:從 n 種(每種至少有 k 件)不同事物中，重複取 k 個的組合數為 $H_k^n=C_k^{n+k-1}$。

  擴充定義: $H_0^0=C_0^{-1}=1$、$H_0^n=C_0^{n-1}=1$、$H_k^0=C_k^{k-1}=0\ (k\ne 0)$、$H_k^n=0\ ,k\notin Z$。

研究結果

一、各型可行路徑數的遞迴關係式

定理1：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t(s\neq t)$ 的積木，則存在遞迴關係：

(1) $T_1(m,n)=T_1(m-s,n)+T_1(m-s-t,n)+T_1(m,n-s)+T_1(m,n-s-t)-T_1(m-2s-t,n)$

$-T_1(m,n-2s-t)-T_1(m-s,n-s)\quad (m\geq 2s+1$ 或 $n\geq 2s+1)$

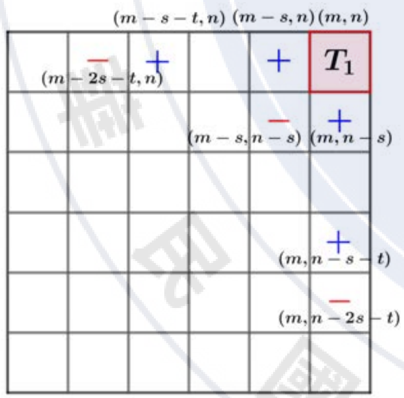
其中 $T_1(s,s)=1$、$T_1(i,j)=0$，$1\leq i,j\leq 2s\wedge(i,j)\neq(s,s)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$。

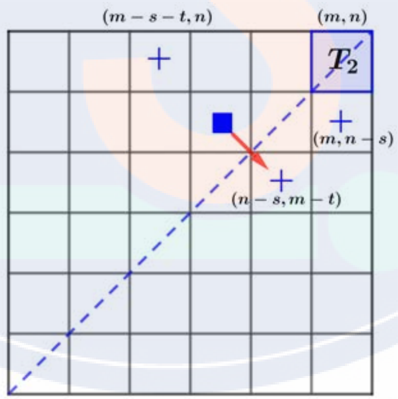
(2) $T_2(m,n)=T_2(m-s-t,n)+T_2(n-s,m-t)+T_2(m,n-s)\quad (m\geq s+t+1$ 或 $n\geq s+1)$

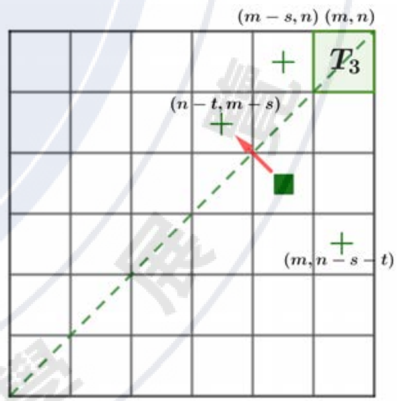
其中 $T_2(s+t,s)=1$、$T_2(i,j)=0$，$1\leq i\leq s+t\wedge 1\leq j\leq s\wedge(i,j)\neq(s+t,s)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$。

(3) $T_3(m,n)=T_3(m,n-s-t)+T_3(n-t,m-s)+T_3(m-s,n)\quad (m\geq s+1$ 或 $n\geq s+t+1)$

其中 $T_3(s,s+t)=1$、$T_2(i,j)=0$，$1\leq i\leq s\wedge 1\leq j\leq s+t\wedge(i,j)\neq(s,s+t)$ 或 $i\leq 0$ 或 $j\leq 0$。







舉例 在 $m\times n$ 的盤面上移動 $1\times1\times2$ 的積木之 $T_1(m,n)$、$T_2(m,n)$、$T_3(m,n)$ 表

$T_1(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	3	6	20	35	56	147	212	302	694
9	0	0	0	6	8	11	59	71	92	302
8	0	0	0	6	8	11	49	56	71	212
7	1	2	3	10	13	17	46	49	59	147
6	0	0	0	3	2	2	17	11	11	56
5	0	0	0	3	2	2	13	8	8	35
4	1	1	1	4	3	3	10	6	6	20
3	0	0	0	1	0	0	3	0	0	6
2	0	0	0	1	0	0	2	0	0	3
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

$T_2(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	4	6	10	55	71	102	347	413
9	0	0	3	3	4	35	36	46	200	201
8	0	0	3	3	4	29	28	35	141	130
7	0	0	3	3	4	23	20	24	92	74
6	0	0	2	1	1	13	7	7	46	25
5	0	0	2	1	1	10	5	5	29	14
4	0	0	2	1	1	7	3	3	16	6
3	0	0	1	0	0	3	0	0	6	0
2	0	0	1	0	0	2	0	0	3	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

$T_3(m,n)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	6	14	25	74	130	201	413
9	1	3	6	16	29	46	92	141	200	347
8	0	0	0	3	5	7	24	35	46	102
7	0	0	0	3	5	7	20	28	36	71
6	1	2	3	7	10	13	23	29	35	55
5	0	0	0	1	1	1	4	4	4	10
4	0	0	0	1	1	1	3	3	3	6
3	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

二、各型可行路徑數的通式

定理2：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\,(s\neq t)$ 的積木，則

$$(1)\ T_1^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

$$(2)\ T_2^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]}H^{x+1}_{\frac{n-s-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y}_{\frac{m-(s+t)-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

$$(3)\ T_3^{s\times s\times t}(m,n)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]}H^{x}_{\frac{n-(s+t)-(s+t)y}{s}}\cdot H^{y+1}_{\frac{m-s-(s+t)x}{s}}\cdot C^{x+y}_{x}$$

$$(4)\ T^{s\times s\times t}(m,n)=T_1^{s\times s\times t}(m,n)+T_2^{s\times s\times t}(m,n)+T_3^{s\times s\times t}(m,n)$$

舉例 在8×7的盤面上移動1×1×2的積木，求$T_1(8,7)$。(x的變化量$\Delta x=7$、y的變化量$\Delta y=6$)

T_1型可行路徑必型如$A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A$。

S_B型子路徑：$A\underbrace{BB\cdots B}_{b個}A$、$S_C$型子路徑：$A\underbrace{CC\cdots C}_{c個}A$

假設可行路徑中含有x個S_B型子路徑、y個S_C型子路徑。則$0\le x\le 2$、$0\le y\le 2$。

y \ x	0	1	2
0	（無解） 可行路徑數：$H_6^0\times H_7^0\times C_0^0=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A$型 向右 3 向上$(b_1-1)$ （無解） 可行路徑數：$H_6^1\times H_4^0\times C_1^1=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A$型 向右 6 向上$(b_1+b_2-2)$ （無解） 可行路徑數：$H_6^2\times H_1^0\times C_2^2=0$
1	$A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$型 向右$(c_1-1)$向上 3 （無解） 可行路徑數：$H_3^0\times H_7^1\times C_0^1=0$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$型 向右$3+(c_1-1)$向上$(b_1-1)+3$ $\Rightarrow\ b_1=4$且$c_1=5$ 可行路徑數：$H_3^1\times H_4^1\times C_1^2=2$ 移動步數：$2+b_1+c_1=11$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A$型 向右$6+(c_1-1)$向上$(b_1+b_2-2)+3$ $\Rightarrow\ b_1+b_2=5$且$c_1=2$ 可行路徑數：$H_3^2\times H_1^1\times C_2^3=12$ 移動步數：$3+b_1+b_2+c_1=10$
2	$A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$ 向右(c_1+c_2-2)向上6 $\Rightarrow\ c_1+c_2=9$ 可行路徑數：$H_0^0\times H_7^2\times C_0^2=8$ 移動步數：$2+c_1+c_2=11$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$型 向右$3+(c_1+c_2-2)$向上$(b_1-1)+6$ $\Rightarrow\ b_1=1$且$c_1+c_2=6$ 可行路徑數：$H_0^1\times H_4^2\times C_1^3=15$ 移動步數：$3+b_1+c_1+c_2=10$	$A\underbrace{B\cdots B}_{b_1個}A\underbrace{B\cdots B}_{b_2個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_1個}A\underbrace{C\cdots C}_{c_2個}A$型 向右$6+(c_1+c_2-2)$ 向上$(b_1+b_2-2)+6$ $\Rightarrow\ b_1+b_2=2$且$c_1+c_2=3$ 可行路徑數：$H_0^2\times H_1^2\times C_2^4=12$ 移動步數：$4+b_1+b_2+c_1+c_2=9$

$T_1(8,7)=49$ 、 $minS_{T_1}(8,7)=9$ 、 $MaxS_{T_1}(8,7)=11$

三、移動相似形積木的關係式

定理3：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的積木，若 $d|s$、$d|t$，則當 $d|m$、$d|n$ 時，

$T_i^{s\times s\times t}(m,n)=T_i^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$，否則 $T_i^{s\times s\times t}(m,n)=0$，其中 $i=1,2,3$。

同理 $minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=minS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$、$MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)=MaxS_{T_i}^{\frac{s}{d}\times\frac{s}{d}\times\frac{t}{d}}(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$。

四、存在各型可行路徑的條件($(s,t)=1$)

定理4：在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t(s\neq t)$ 的積木，則

(1) $m\times n$ 的盤面存在 T_i 型可行路徑 $\Leftrightarrow T_i^{s\times s\times t}(m,n)\neq 0$ (不需完全算出 $T_i^{s\times s\times t}(m,n)$)

(2) (i)當 $m\geq s+s(s+t)$、$n\geq s+s(s+t)$，$m\times n$ 的盤面必存在 T_1 型可行路徑。

(ii)當 $m\geq s(s+t)$、$n\geq s+s(s+t)$，$m\times n$ 的盤面必存在 T_2 型可行路徑。

(iii)當 $m\geq s+s(s+t)$、$n\geq s(s+t)$，$m\times n$ 的盤面必存在 T_3 型可行路徑。

小結：限定 $(s,t)=1$，$m\times n$ 的盤面足夠大時，必定有解。

五、各型可行路徑的最小移動步數與最大移動步數

問題 如何找出最小移動步數與最大移動步數呢？（以 T_1 型可行路徑作說明）

最小(大)解
數對(x,y)使得$(*)$有解且 $x+y$ 有最小(大)值

分析 已知 T_1 型可行路徑必型如 $A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A\cdots A\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{皆B或皆C}}A$。

假設可行路徑中含有 x 個 S_B 型子路徑、y 個 S_C 型子路徑，則存在 T_1 型可行路徑的充要條件為

$$\begin{cases} b_1+b_2+\cdots+b_x=\dfrac{n-s-(s+t)y}{s}+x \quad --(a) \\ c_1+c_2+\cdots+c_y=\dfrac{m-s-(s+t)x}{s}+y \quad --(b) \end{cases}$$，其中 $0\le x\le\left[\dfrac{m-s}{s+t}\right]$、$0\le y\le\left[\dfrac{n-s}{s+t}\right]$ $(*)$ 有解，

且路徑的移動步數為$(x+y)+(b_1+b_2+\cdots+b_x)+(c_1+c_2+\cdots+c_y)=\dfrac{1}{s}[(m+n)-(t-s)(x+y)-2s]$

找出滿足方程組$(*)$的最小解 ➡ 推出最大解 ➡ 求出最小移動步數與最大移動步數

引理1：已知 $(s,t)=1$ 且 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組 $(*)$ 的一組可行解，若 (x',y') 也為方程組 $(*)$ 的一組可行解，則存在 $p,q\in Z$，使得 $(x',y')=(\alpha+ps,\beta+qs)$。

引理2：已知 $(s,t)=1$ 且 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ 為方程組 $(*)$ 的一組最小解，則 $(x',y')=(\alpha+ps,\beta+qs)$，其中 $p=\left[\dfrac{\left[\dfrac{m-s}{s+t}\right]-\alpha}{s}\right]$，$q=\left[\dfrac{\left[\dfrac{n-s}{s+t}\right]-\beta}{s}\right]$ 為方程組 $(*)$ 的一組最大解。

方程組(＊)的最小解表(T_1 型可行路徑)

	$m\equiv 0(\bmod s)$	$m\equiv i\cdot t(\bmod s), i=1,2,\ldots,s-1$
$n\equiv 0(\bmod s)$	• $m=s, n=s\Rightarrow(0,0)$ • $m=s+\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(s,0)$ ② $\ell\geq 2, n<s+s(s+t)\Rightarrow(\ell\cdot s,0)$ • $n=s+\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(0,s)$ ② $\ell\geq 2, m<s+s(s+t)\Rightarrow(0,\ell\cdot s)$ • $m>s+s(s+t), n>s+s(s+t)\Rightarrow(s,s)$	• $m=s+(i+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(i,0)$ ② $\ell\geq 1, n<s+s(s+t)\Rightarrow(i+\ell\cdot s,0)$ • $m>s+i(s+t), n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(i,s)$
$n\equiv j\cdot t(\bmod s)$ $j=1,2,\cdots,s-1$	• $n=s+(j+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(0,j)$ ② $\ell\geq 1, m<s+s(s+t)\Rightarrow(0,j+\ell\cdot s)$ • $m\geq s+s(s+t), n>s+j(s+t)\Rightarrow(s,j)$	• $m\geq s+i(s+t)$、$n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(i,j)$

方程組(※)的最小解表(T_2 型可行路徑)

	$m\equiv 0(\bmod s)$	$m\equiv i\cdot t(\bmod s), i=1,2,\ldots,s-1$
$n\equiv 0(\bmod s)$	• $m=\ell\cdot s(s+t)$ ① $\ell=1\Rightarrow(s-1,0)$ ② $\ell\geq 2, n<s+s(s+t)\Rightarrow(\ell s-1,0)$ • $m>s+s(s+t), n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(s-1,s)$	• $m=(i+\ell\cdot s)(s+t)$ ① $\ell=0\Rightarrow(i-1,0)$ ② $\ell\geq 1, n<s+s(s+t)\Rightarrow(i-1+\ell\cdot s,0)$ • $m>s+i(s+t), n\geq s+s(s+t)\Rightarrow(i-1,s)$
$n\equiv j\cdot t(\bmod s)$ $j=1,2,\cdots,s-1$	• $m\geq s(s+t)$ 、 $n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(s-1,j)$	• $m\geq i(s+t)$ 、 $n\geq s+j(s+t)\Rightarrow(i-1,j)$

定理5： 在 $m\times n$ 的盤面上移動 $s\times s\times t(s\neq t,(s,t)=1)$ 的積木 (若存在 T_1、T_2、T_3 型可行路徑)

(1)當 $s=1$ 時

	$minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$	$MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$
T_1	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2$	① $m\leq t+1\Rightarrow m+\frac{2}{t+1}n-\frac{t+3}{t+1}$　② $n\leq t+1\Rightarrow \frac{2}{t+1}m+n-\frac{t+3}{t+1}$ ③ $m=t+2$、$n\geq t+2$ 或 $n=t+2$、$m\geq t+2\Rightarrow m+n-(t+1)$ ④ $m\geq t+3$、$n\geq t+3\Rightarrow m+n-2t$
T_2	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m}{t+1}\right]+\left[\frac{n-1}{t+1}\right]\right)-2$	① $m=t+1\Rightarrow m+n-(t+1)$　② $m\geq t+2$、$n\leq t+1\Rightarrow \frac{2m}{t+1}+n-2$ ③ $m\geq t+2$、$n\geq t+2\Rightarrow m+n-2t$
T_3	$(m+n)-(t-1)\left(\left[\frac{m-1}{t+1}\right]+\left[\frac{n}{t+1}\right]\right)-2$	① $n=t+1\Rightarrow m+n-(t+1)$　② $m\leq t+1$、$n\geq t+2\Rightarrow m+\frac{2n}{t+1}-2$ ③ $m\geq t+2$、$n\geq t+2\Rightarrow m+n-2t$

(2)當 $s\neq 1$ 時 $(m\equiv i\cdot t(\bmod s)$、$n\equiv j\cdot t(\bmod s),\ i,j=1,2,\cdots,s)$

	$minS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$	$MaxS_{T_i}^{s\times s\times t}(m,n)$
T_1 $m>s+s(s+t)$ $n>s+s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left[\frac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-i}{s}\right]s+j+\left[\frac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-j}{s}\right]s\right)-2s\right]$	$\frac{1}{s}[(m+n)-(t-s)(i+j)-2s]$
T_2 $m>s(s+t)$ $n>s+s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left((i-1)+\left[\frac{\left[\frac{m-(s+t)}{s+t}\right]-(i-1)}{s}\right]s+j+\left[\frac{\left[\frac{n-s}{s+t}\right]-j}{s}\right]s\right)-(s+t)\right]$	$\frac{1}{s}[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)]$
T_3 $m>s+s(s+t)$ $n>s(s+t)$ $s<t$ ($s>t$ 公式互換)	$\frac{1}{s}\left[(m+n)-(t-s)\left(i+\left[\frac{\left[\frac{m-s}{s+t}\right]-i}{s}\right]s+(j-1)+\left[\frac{\left[\frac{n-(s+t)}{s+t}\right]-(j-1)}{s}\right]s\right)-(s+t)\right]$	$\frac{1}{s}[(m+n)-(t-s)(i+j-1)-(s+t)]$

舉例 在17×14的盤面上移動2×2×3的積木，則代入定理2得

$$T_1^{2\times2\times3}(17,14)=\sum_{x=0}^{\left[\frac{17-2}{5}\right]}\sum_{y=0}^{\left[\frac{14-2}{5}\right]}H^{x}_{\frac{14-2-5y}{2}}\cdot H^{y}_{\frac{17-2-5x}{2}}\cdot C^{x+y}_{x}=\underbrace{H^3_6\cdot H^0_0\cdot C^3_3}_{28}+\underbrace{H^1_1\cdot H^2_5\cdot C^3_1}_{18}+\underbrace{H^3_1\cdot H^2_0\cdot C^5_3}_{30}=76$$

又 $17\equiv1\cdot3\,(\bmod 2)$, $14\equiv2\cdot3\,(\bmod 2)\Rightarrow i=1$, $j=2$ ，則代入定理5得

$$minS^{2\times2\times3}_{T_1}(17,14)=\frac{1}{2}\left[(17+14)-(3-2)\left(1+\left[\frac{\left[\frac{17-2}{5}\right]-1}{2}\right]2+2+\left[\frac{\left[\frac{14-2}{5}\right]-2}{2}\right]2\right)-4\right]=11$$

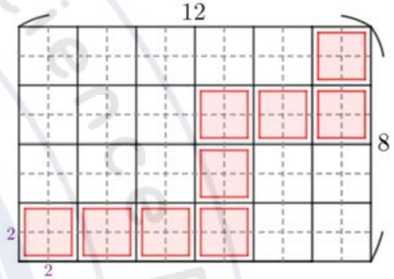
$$MaxS^{2\times2\times3}_{T_1}(17,14)=\frac{1}{2}\left[(17+14)-(3-2)(1+2)-4\right]=12$$

故所有 T_1 型可行路徑數為76，其中最小移動步數為11、最大移動步數為12。

討論與未來展望

一、本作品聚焦於 $T_i(i=1,2,3)$ 型路徑的研究，其它型式的路徑也可以本作品的研究方法求解。比如 B 或 C 狀態起始 A 狀態結束的情形，等同於本文中的 T_2、T_3 型路徑；B 或 C 狀態起始 B 或 C 狀態結束的情形，只需在 T_2、T_3 型路徑前增加 $S_{D'}$ 型子路徑 $\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{d'個}A$ 或 $S_{E'}$ 型子路徑 $\underbrace{CC\cdots\cdots C}_{e'個}A$，再用本作品的解題方法即可。

二、本作品所探討的積木大小為 $s\times s\times t\ (s\neq t)$，事實上，當 $s=t$ 時，積木大小為邊長 s 的立方體，其公式即為本作品中 T 型路徑 $(T_1\cup T_2\cup T_3)$ 的情形，然而，我們並不需要代到本作品的公式，因為其所有可行路徑數只需視為向右移動 $\left(\frac{m}{s}-1\right)$ 次與向上移動 $\left(\frac{n}{s}-1\right)$ 次的排列數即可，也就是當 $s|m$、$s|n$ 時，



$$T^{s\times s\times s}(m,n)=\frac{\left(\frac{m}{s}+\frac{n}{s}-2\right)!}{\left(\frac{m}{s}-1\right)!\left(\frac{n}{s}-1\right)!}$$

，且移動步數固定為 $\frac{m}{s}+\frac{n}{s}-2$。

三、本作品最大的貢獻是，成功將滾積木問題推廣到積木大小為 $s\times s\times t\ (s\neq t)$ 的情形，除了找出各型可行路徑數的遞迴關係式，並推導出可行路徑數的簡潔公式，透過找尋方程組中的最小解與最大解，證明了最小移動步數與最大移動步數的通式，同時以程式驗證其正確性。

四、若想將積木大小推廣至 $r\times s\times t\ (r\leq s\leq t)$ 的情形，則需要考慮積木狀態可能為 $r\times s$、$s\times t$、$t\times r$ 分別橫置與縱置共六種狀態，再以本作品解題方法即可求解。

參考文獻資料

1.游復廷、蔣沁珊、吳書磊。**滾積木遊戲探討**。中華民國第55屆中小學科學展覽會 國中組。

2.編輯部(民國78年)。**組合數學－算法與分析－**。台北：九章出版社。孫文先發行。

3.閔嗣鶴、嚴士健(民國82年)。**初等數論**。新竹：凡異出版社。

4.許志農(主編)(2019)。**普通高級中學數學2**。台北：龍騰文化。

5.**組合**。取自https://zh.wikipedia.org/wiki/組合。