

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 物理科

030114

雙龍擺尾盪混沌-探討雙擺轉動時的混沌現象

學校名稱：南投縣立大成國民中學

作者： 國一 謝霈蓉 國一 林琬璇	指導老師： 王百恒 徐敏益
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：雙擺、混沌

摘要

本實驗的目的在探討雙擺在擺動過程中的混沌現象。我們利用 EXILIM 相機及 Tracker 軟體為實驗工具，探討下擺在繞圈運動時的條件。結果發現，雙擺在第 3 次擺動後開始明顯不規則。下擺繞圈現象出現在上擺兩端處，且連續繞圈數多為 1-3 次。此外當擺重越小，擺長越短或擺角越大時，下擺繞圈數及上擺振幅也較大。當擺重越大時，雙擺總能量快速減少，轉動圈數也較少。而當擺動過程中時，根據鉛直面圓周運動原理，只要下擺能量大於臨界能量($5/2mgR$)，即可產生連續繞圈現象。

壹、前言

一、研究動機

上次段考我考了校排一，於是爸爸送我一台愛德華混沌擺當獎品。在操作過程中，我發現既使在同一個高度放下，它的上擺擺動方式雖然比較規律，但下擺在轉動時卻很不穩定，有時候可以一次轉很多圈，有時轉動很少圈，又或者有時轉動一次後，輪到下次轉動要等很久的時間，但也有少數連續轉動很多次才停下來的情形。於是我利用控制變因法，從角度、重量以及長度三個變因下手，找出它在這種混沌現象中大概產生的規則性。並利用能量守恆原理探討它的下擺轉動成功的要件。

二、研究目的

- (一)探討複擺與雙擺間週期與振幅的關係。
- (二)探討不同擺重下雙擺的轉動現象。
- (三)探討不同擺長下雙擺的轉動現象。
- (四)探討不同擺角下雙擺的轉動現象。
- (五)探討雙擺的轉動原理。
- (六)比較動畫模擬與真實雙擺的擺動情形。

三、文獻探討

(一)雙擺總能量大小

我們由維基百科中的雙擺介紹，找出雙擺運動過程中所具有的總能量。

由右圖定義

上擺質心

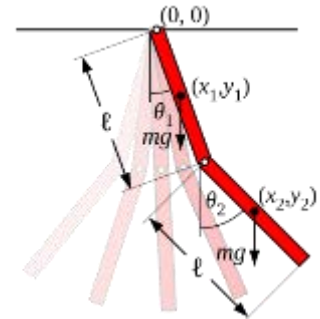
$$x_1 = \frac{l}{2} \sin \theta_1$$

$$y_1 = -\frac{l}{2} \cos \theta_1$$

下擺質心

$$x_2 = l \left(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right)$$

$$y_2 = -l \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right)$$



由雙擺系統找出拉格朗日方程式可得

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetic energy} - \text{potential energy} \\ &= \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

第一項是質心的平移動能，第二項是擺延著質心旋轉的轉動動能，最後一項是雙擺在均勻重心場下的勢能。其點標示表示變數的時間導數。

將以上的座標代入，重組後可得

$$L = \frac{1}{6} ml^2 (\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{1}{2} mgl (3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

這裡只有一個守恆量（能量），沒有守恆的動量，二個廣義的動量可以表示為

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{6} ml^2 (8\dot{\theta}_1 + 3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{6} ml^2 (2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

上式可以求得

$$\dot{\theta}_1 = \frac{6}{ml^2} \frac{2p_{\theta_1} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_2}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{6}{ml^2} \frac{8p_{\theta_2} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

運動方程式為

$$\dot{p}_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3 \frac{g}{l} \sin \theta_1)$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} ml^2 (-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_2).$$

最後四個方程是有系統目前狀態時，系統隨時間演進的顯式方程。

ps：我們利用動能 + 位能 = 總能的方式找出雙擺的總能量

$$E_{\text{總}} = (E_1 \text{translational} + E_1 \text{rotation}) + (E_2 \text{translational} + E_2 \text{rotation}) + m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

當總能量越大時，轉動效果越好。

(二)下擺臨界能量大小

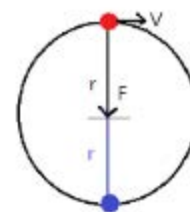
我們由科學 Online-高瞻自然科學教學資源平台中的鉛直面圓周運動，找出下擺在轉動過程中所具有的總能量大小。

在鉛直圓周運動中，如果在最高點的速度最小，則瞬間正向力或繩子張力剛好等於零，此時重力當作向心力，如果重力加速度是 g ，半徑為 R ，因此速度等於 \sqrt{gR} 。再根據力學能定律在最低點的速度至少要是 $\sqrt{5gR}$ ，才能作一完整圓周。一旦在最低點的速度小於這個值，則會在作圓周運動的途中，受到重力而墜下。

由於上擺在最高點時，呈現靜止狀態，所以此時下擺總能量為下擺動能+下擺位能。以下擺最低點臨界速度 $\sqrt{5gR}$ 換算出下擺臨界能量，若雙擺在轉動過程中總能量大於臨界能量，則會產生轉動現象。

ps：因下擺在最低點時位能=0，

所以臨界能量為最低點動能 $1/2mv^2=1/2m(\sqrt{5gR})^2=5/2mgR$



(三) 混沌理論

混沌理論 (Chaos theory) 是在數學和物理學中，研究非線性系統在一定條件下表現出的「混沌」現象的理論。其源由 1963 年美國氣象學家 Edward Lorenz 提出混沌理論

(Chaos)，非線性系統具有的多樣性和多尺度性。混沌理論解釋了決定系統可能產生隨機結果。

非線性是一個相當廣闊的領域，它包括以非線性方式變化的一切現象。和自組織理論一樣，它也是在演化之中探索系統的結構和狀態。但是，它恰恰是和自組織理論的研究方向背道而馳的另一種選擇，它把非合目的性的結果作為研究的焦點，它揭示的是系統在什麼情況下會產生不合目的性的結果，在非線性科學中把這種結果稱為渾沌。

混沌現象起因於物體不斷以某種規則複製前一階段的運動狀態，而產生無法預測的隨機效果。所謂「差之毫釐，失之千里」正是此一現象的最佳註解。具體而言，混沌現象發生於易變動的物體或系統，該物體在行動之初極為單純，但經過一定規則的連續變動之後，卻產生始料所未及的後果，也就是混沌狀態。但是此種混沌狀態不同於一般雜亂無章的的混亂狀況，此一混沌現象經過長期及完整分析之後，可以從中理出某種規則出來。混沌現象雖然最先用於解釋自然界，但是在人文及社會領域中因為事物之間相互牽引，混沌現象尤為多見。如股票市場的起伏、人生的平坦曲折、教育的複雜過程。

混沌理論具有四個核心概念：

- A. 初始條件十分微小，經過不斷變化及放大對其未來狀態會造成極巨大差別(此即蝴蝶效應)
- B. 不可預測性
- C. 遍歷性
- D. 自我相似性

這理論簡單的來說就是『系統看上去可能缺乏秩序，但是總有無法解釋的規則在支配它們，而簡單的事件能導致系統中產生更複雜的事件。』簡單的說，亂中有序正是如此的道理。

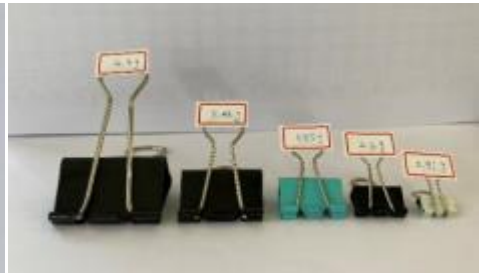
貳、研究設備及器材



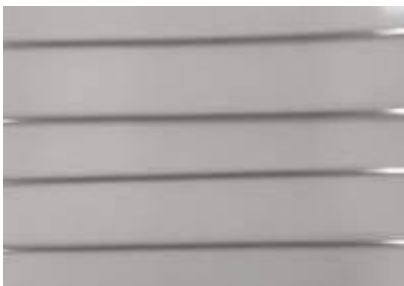
1.鐵絲
(由上到下：7.13cm、
10.2cm、13.11cm、
15.92cm、19.04cm)



2.培林



3.燕尾夾
(由右到左：0.92g、2.50g、
3.85g、8.48g、16.30g)



4.不鏽鋼條



5.電子秤



6.直尺、膠帶、貼紙



7.鐵架



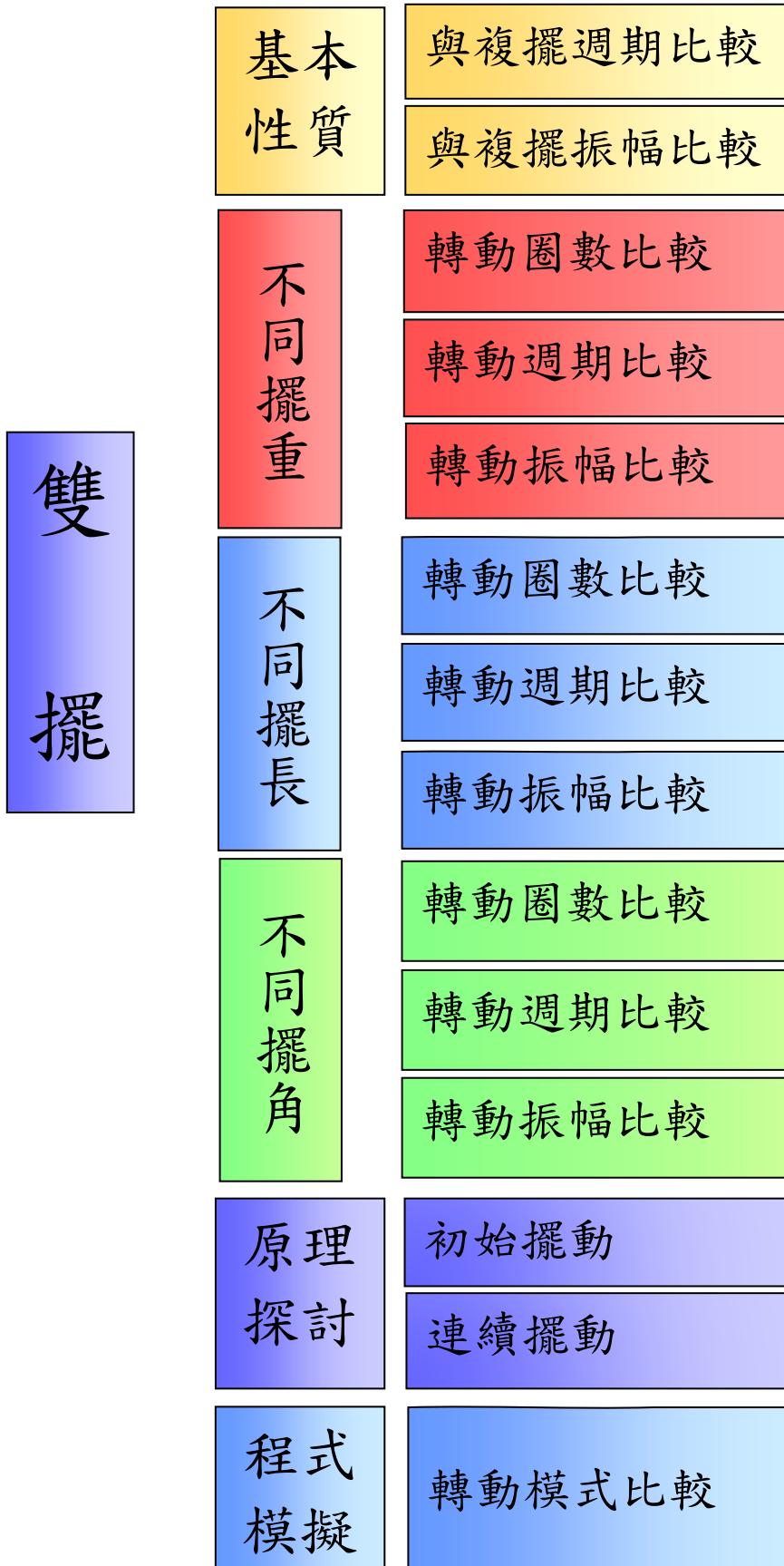
8. EXILIM 相機及腳架



9.Excel、Tracker 軟體

參、研究過程或方法

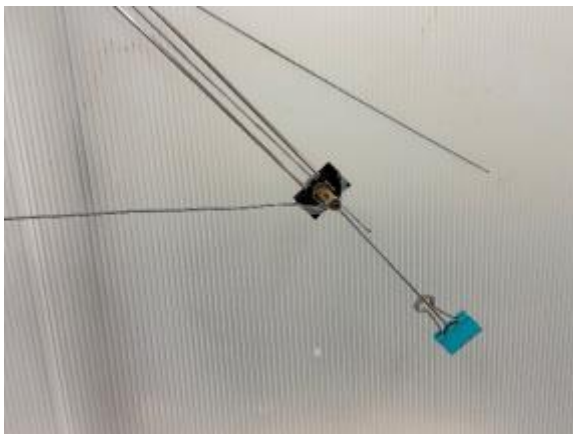
一、研究流程圖



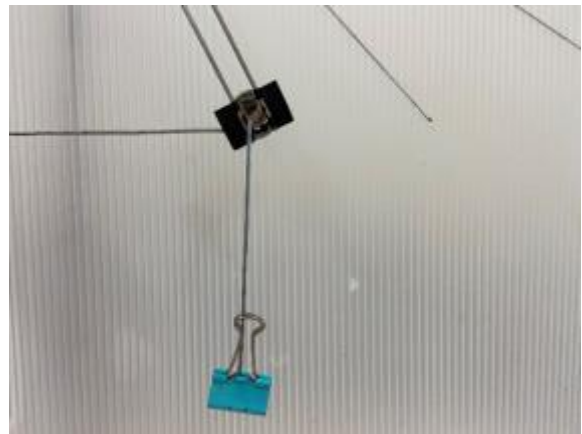
二、研究步驟

一、探討複擺與雙擺間週期與振幅的關係

- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆作成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 3.85g 燕尾夾作成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、先用膠帶固定下擺成直線後(形成複擺)，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄其前 3 次擺動狀態。
- 3、取下膠帶，恢復成雙擺並重複步驟 2。
- 4、利用 tracker 分別找出複擺及雙擺擺動形式下，3 次擺動時的上擺錘的週期與振幅大小。(圖 1)



複擺



雙擺

圖 1 複擺及雙擺的實驗裝置圖

二、探討不同擺重下雙擺的轉動現象

- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、用 0.92g 的燕尾夾作下擺錘、13.11cm 公分的鐵絲作下擺長，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數。
- 3、分別換上 2.50g、3.85g、8.48g、16.30g 的燕尾夾作為下擺錘，重複步驟 2。
- 4、利用 tracker 分別找出雙擺在不同擺重下，前 4 次擺動時的上擺錘的週期與振幅大小。
- 5、將實驗步驟 2、3、4 重複 100 次後統計其結果。



0.92g

2.50g

3.85g

8.48g

16.30g

圖 2 不同擺重下雙擺的實驗裝置圖

三、探討不同擺長下雙擺的轉動現象

- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、用 7.13cm 的鐵絲作下擺長、3.85g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數。
- 3、分別換上 10.20cm、13.11cm、15.92cm、19.04cm 的鐵絲作為下擺長，重複步驟 2。
- 4、利用 tracker 分別找出混沌擺在不同擺長下，前 4 次擺動時的上擺錘的週期與振幅大小。
- 5、將實驗步驟 2、3、4 重複 100 次後統計其結果。

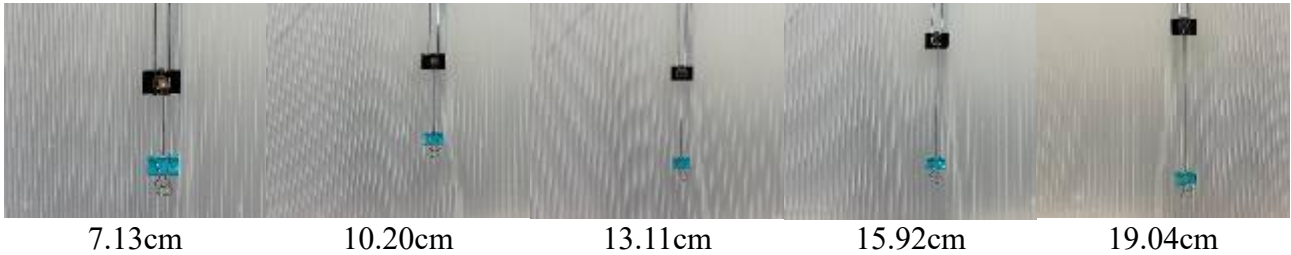


圖 3 不同擺長下雙擺的實驗裝置圖

四、探討不同擺角下雙擺的轉動現象

- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、用 13.11cm 的鐵絲作為下擺長、3.85g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數。
- 3、分別改成 60° 、 45° 作為上擺角，重複步驟 2。
- 4、利用 tracker 分別找出雙擺在不同擺角下，前 4 次擺動時的上擺錘的週期與振幅大小。
- 5、將實驗步驟 2、3、4 重複 100 次後統計其結果。

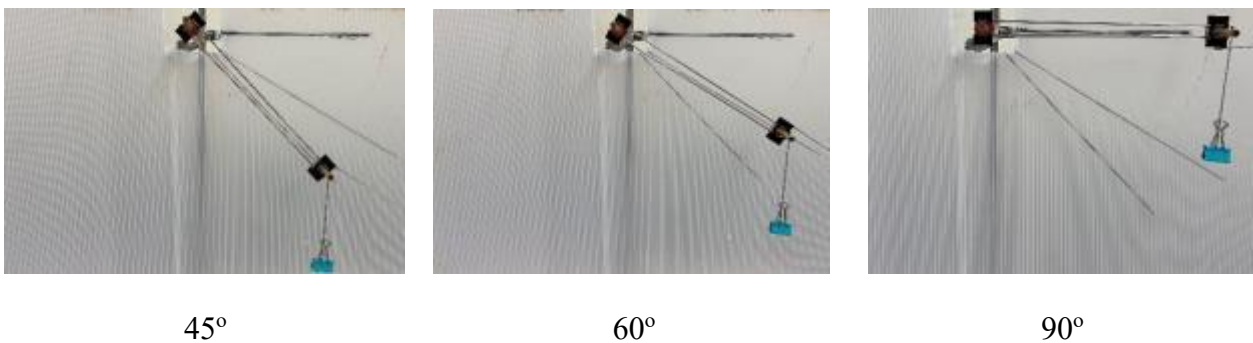


圖 4 不同擺角下雙擺的實驗裝置圖

五、探討雙擺的轉動原理

(一)初始轉動

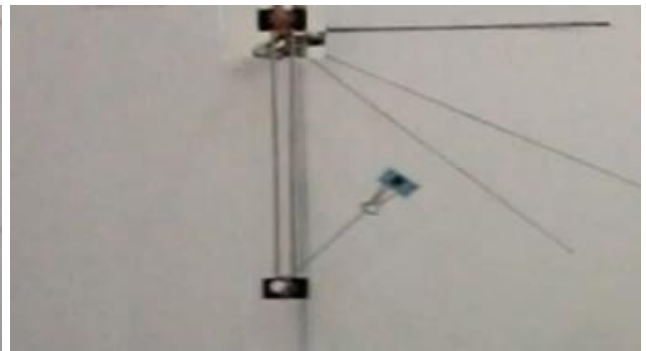
- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、用 13.11cm 的鐵絲作下擺長、0.92g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄當上擺擺動到最高點時的擺動狀態。
- 3、利用 tracker 分別找出雙擺在上擺錘初次擺動到最高點時的速度及角速度大小。(圖 5)
- 4、改變下擺重分別為 2.50g、3.85g、8.48g、16.30g 重複步驟 2、3。
- 5、用轉動動能、平移動能及位能間的相互關係，探討雙擺在不同重量下的能量大小。

(二)連續轉動

- 1、我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及燕尾夾做成下擺將其固定在鐵架上組成一組雙擺。
- 2、用 13.11cm 的鐵絲作下擺長、3.85g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄當下擺擺動出現連續轉動的狀態。(圖 5)
- 3、利用 tracker 分別找出雙擺在下擺出現連續轉動時，上擺在前一個端點的上擺能量大小。



初始轉動



連續轉動

圖 5 雙擺在初始轉動及連續轉動下的實驗裝置圖

六、比較動畫模擬與真實雙擺擺動情形

利用所提供的雙擺模擬程式(圖 6)加入實驗參數，並與我們真正的實驗結果做 y-t 關係圖及軌跡圖比較。

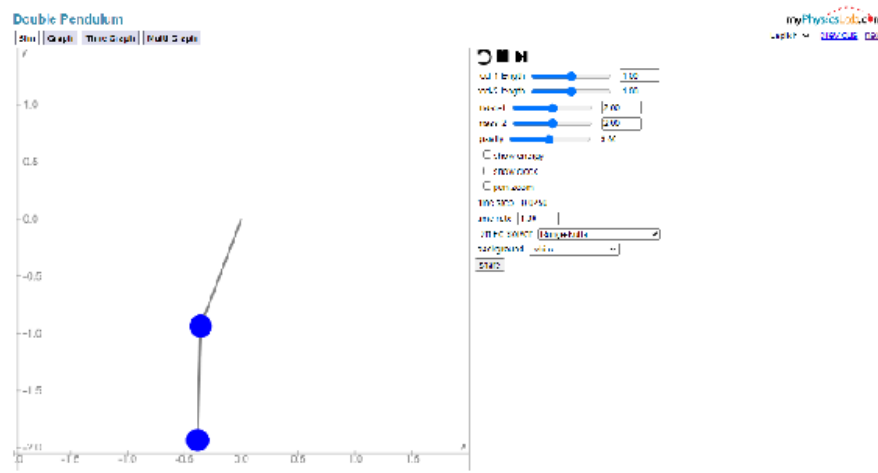


圖 6 雙擺模擬程式

肆、研究結果

一、探討複擺與雙擺間週期與振幅的關係

我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆作成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 3.85g 燕尾夾作成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。分別將雙擺及將膠帶固定下擺形成複擺後，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄其前 3 次擺動狀態。得到複擺的與雙擺的週期的平均值與標準差及振幅的平均值及標準差。(表一、圖 7)

可知複擺的上擺週期及振幅皆大於雙擺的上擺週期及振幅。且雙擺在擺動過程中上擺呈現規則性週期運動(圖 8)，而下擺在兩端點處會呈現不規則擺動，甚至轉動。而下擺出現不規則轉動時，也會進而影響上擺的擺動情形(圖 9)。

表一 複擺與雙擺的週期與振幅的平均值(標準差)

	複擺	雙擺
週期(標準差)	1.13(0)	1.06(0.017)
振幅(標準差)	25.74(0.16)	24.74(0.053)

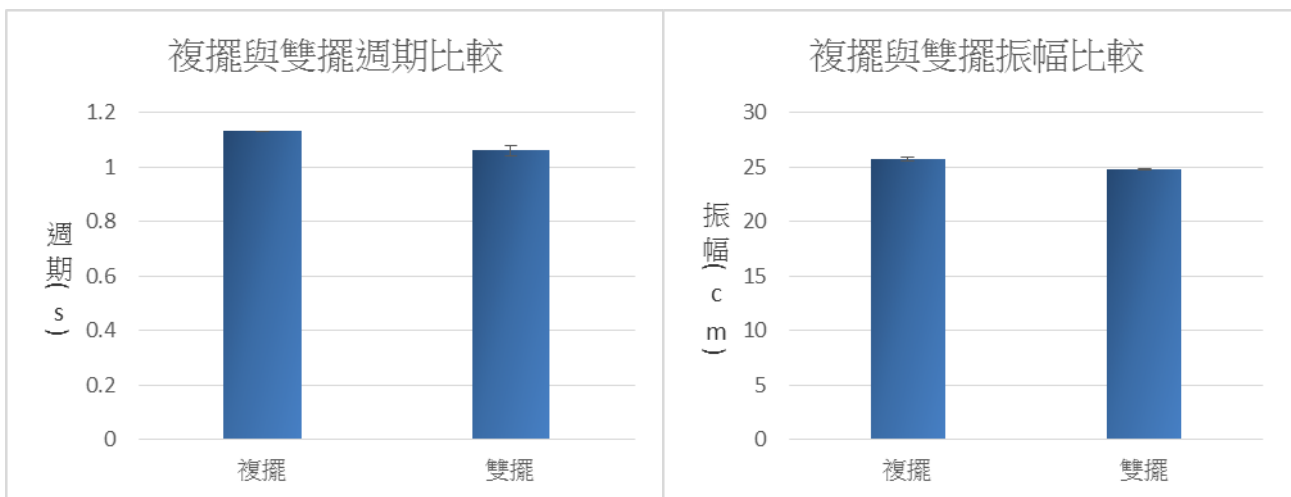


圖 7 複擺與雙擺週期與振幅的比較

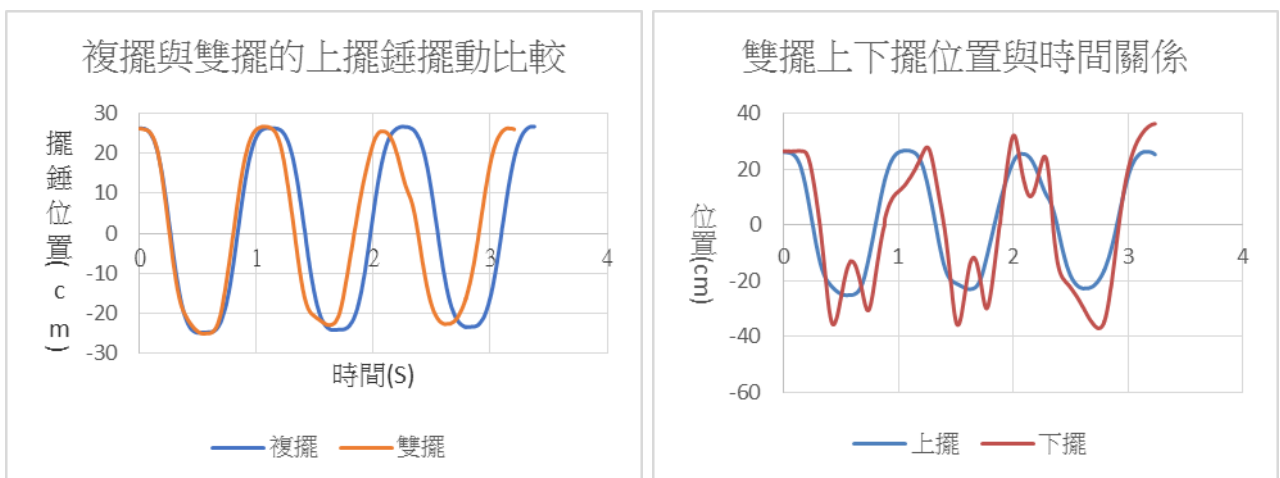


圖 8 複擺與雙擺的上擺錘擺動比較圖

圖 9 雙擺上下擺位置與時間關係圖

二、探討不同擺重下雙擺的轉動現象

我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。分用 0.92g、2.50g、3.85g、8.48g、16.30g 的燕尾夾作下擺錘、13.11cm 公分的鐵絲作下擺長，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數及前 4 次週期、振幅大小。

由實驗結果可以發現，在不同重量下雙擺的順時鐘轉動圈數皆大於逆時鐘轉動圈數。且大多數連續轉動圈數都是 1-3 圈，而且下擺擺重越大時轉動圈數越少。(表二、圖 10、11、12、13、14、15)

在不同擺重下，上擺擺動週期接近介於 1-1.06s 之間。而擺動振幅會隨著擺錘重量增加而變小。(表三、四、圖 16、17)

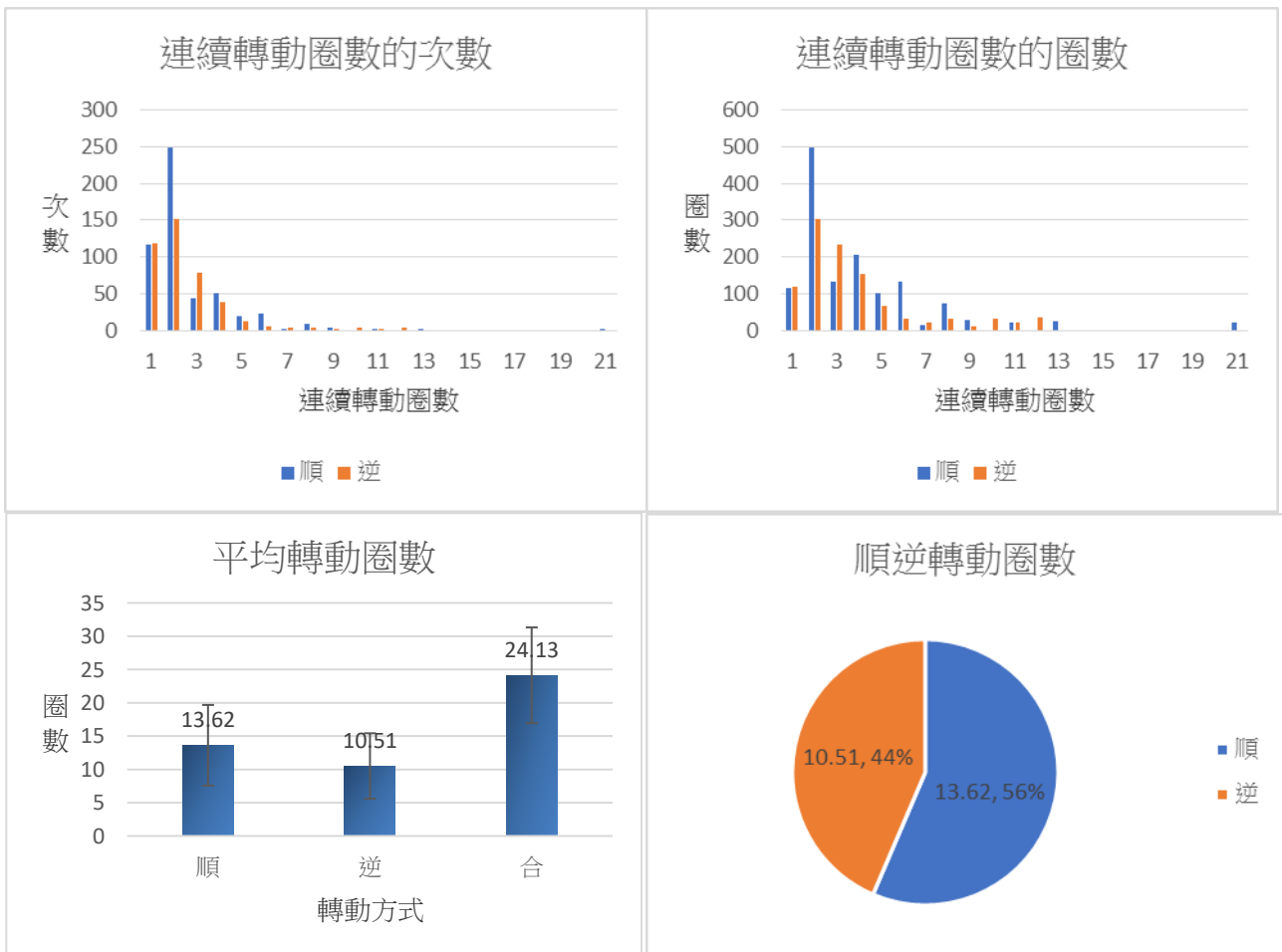


圖 10 下擺重為 0.92g 時的順逆轉動次數及轉動圈數

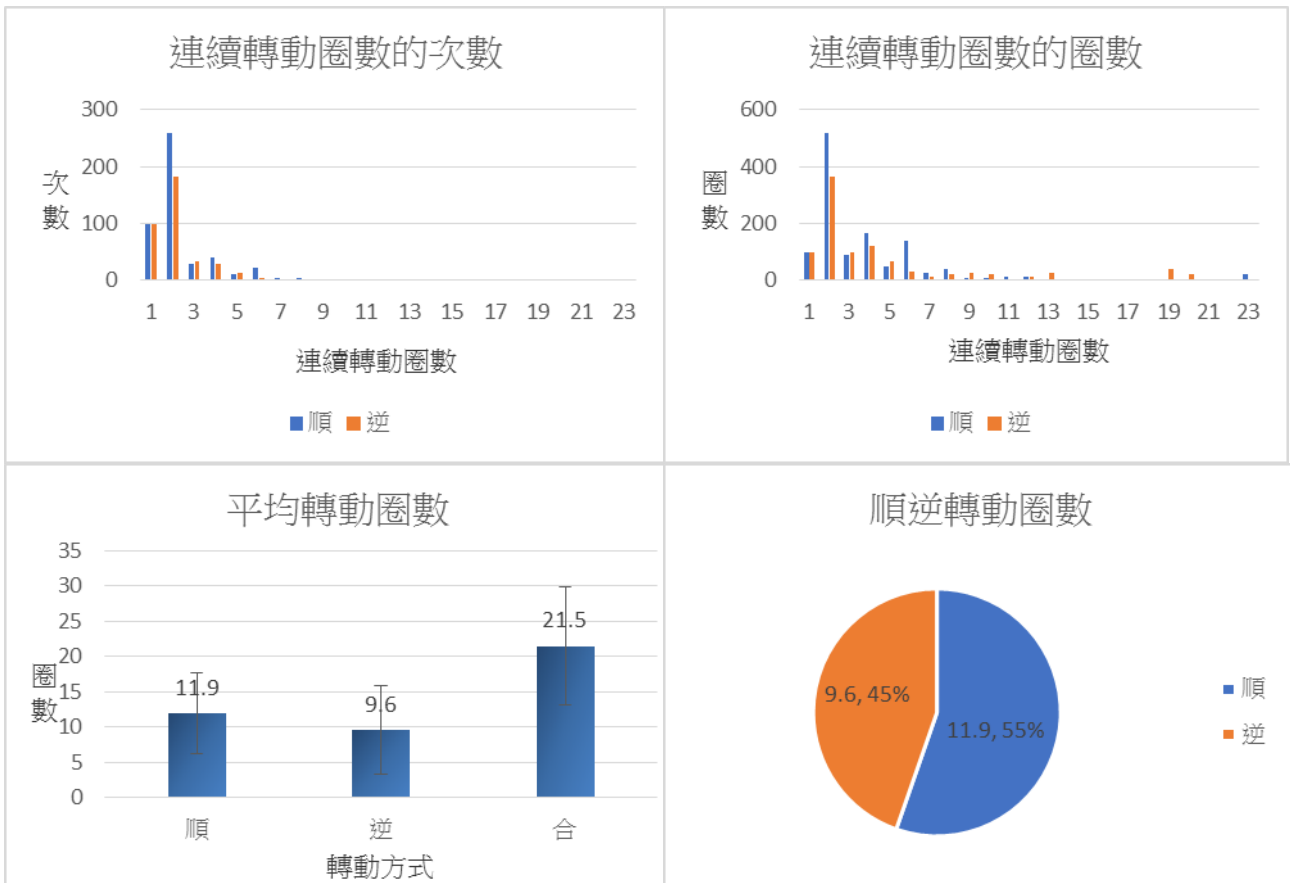


圖 11 下擺重為 2.5g 時的順逆轉動次數及轉動圈數

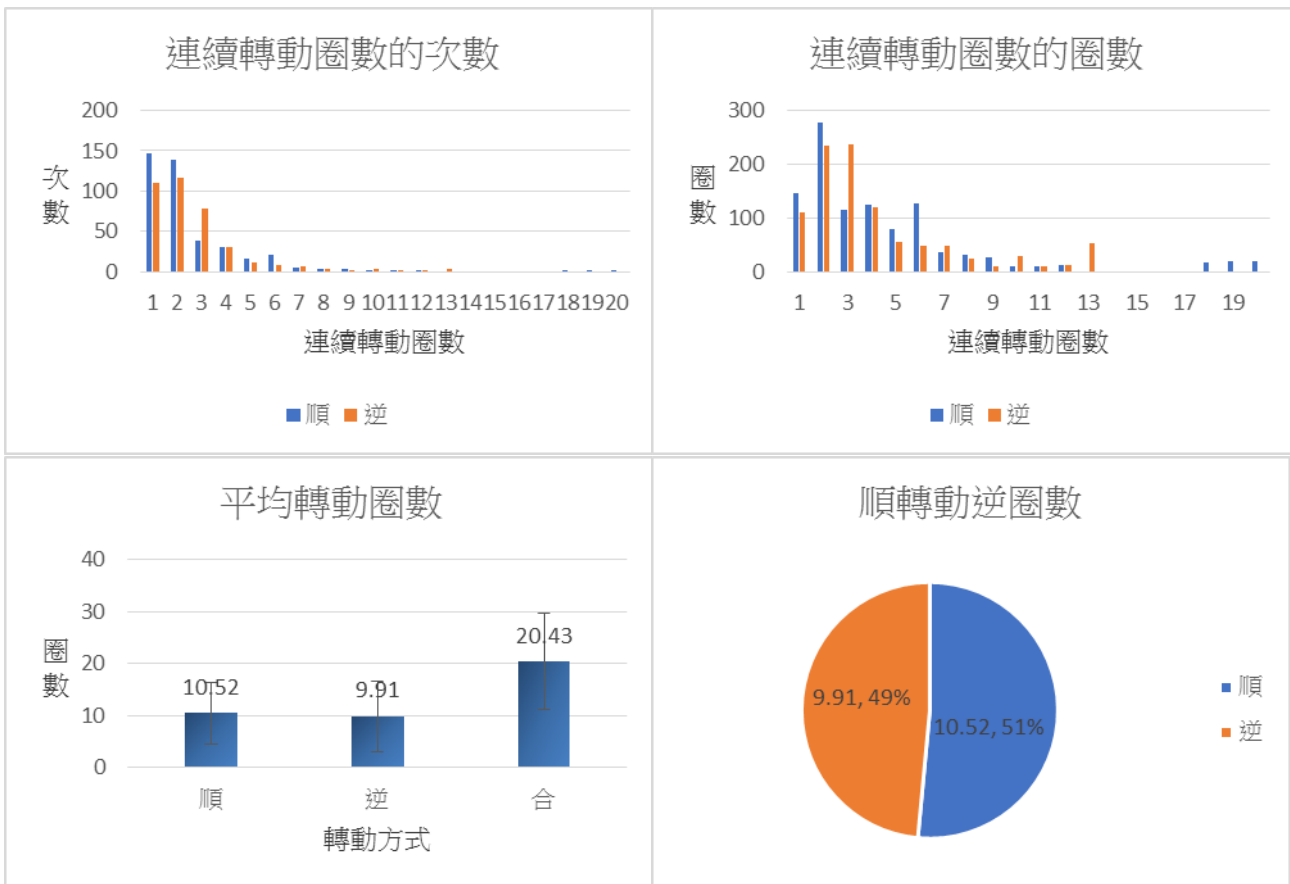


圖 12 下擺重為 3.85g 時的順逆轉動次數及轉動圈數

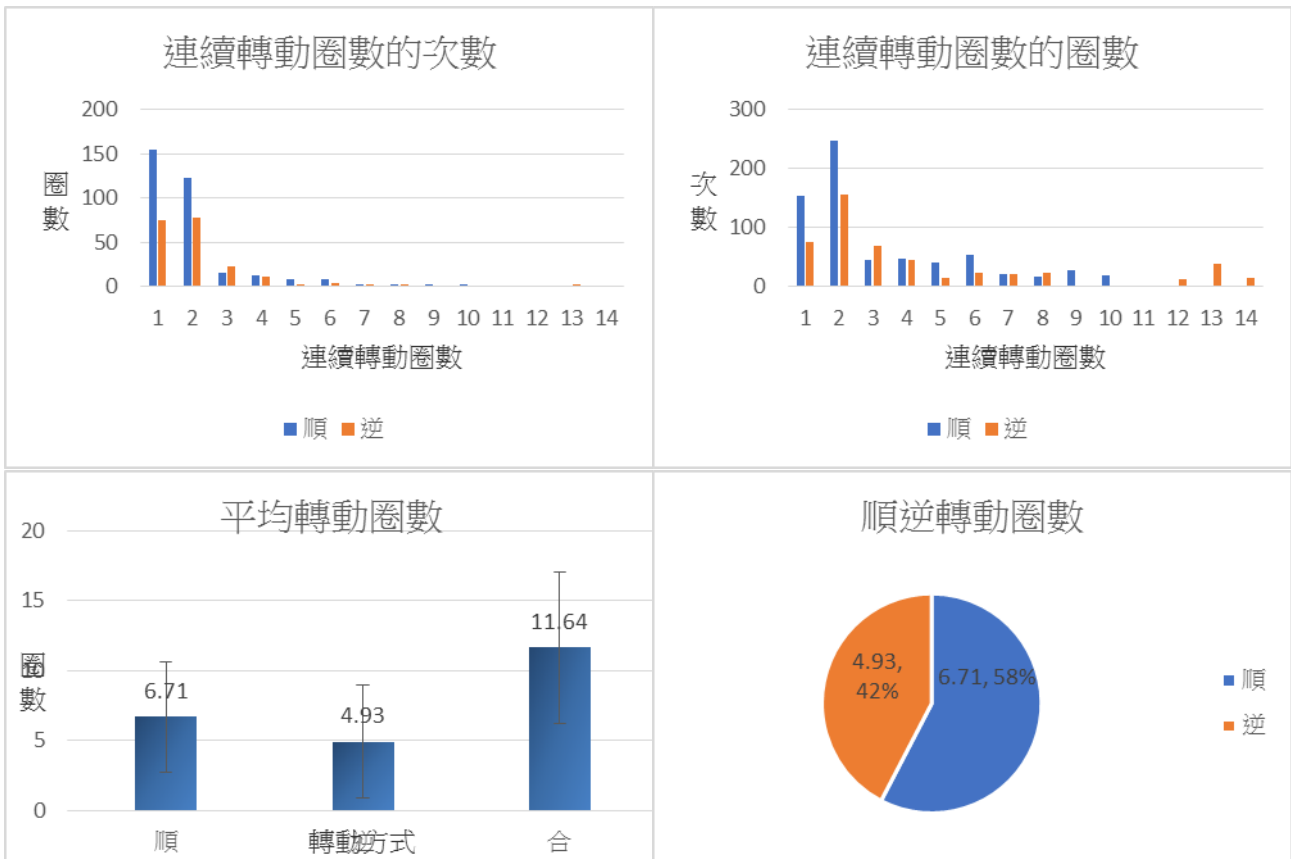


圖 13 下擺重為 8.48g 時的順逆轉動次數及轉動圈數

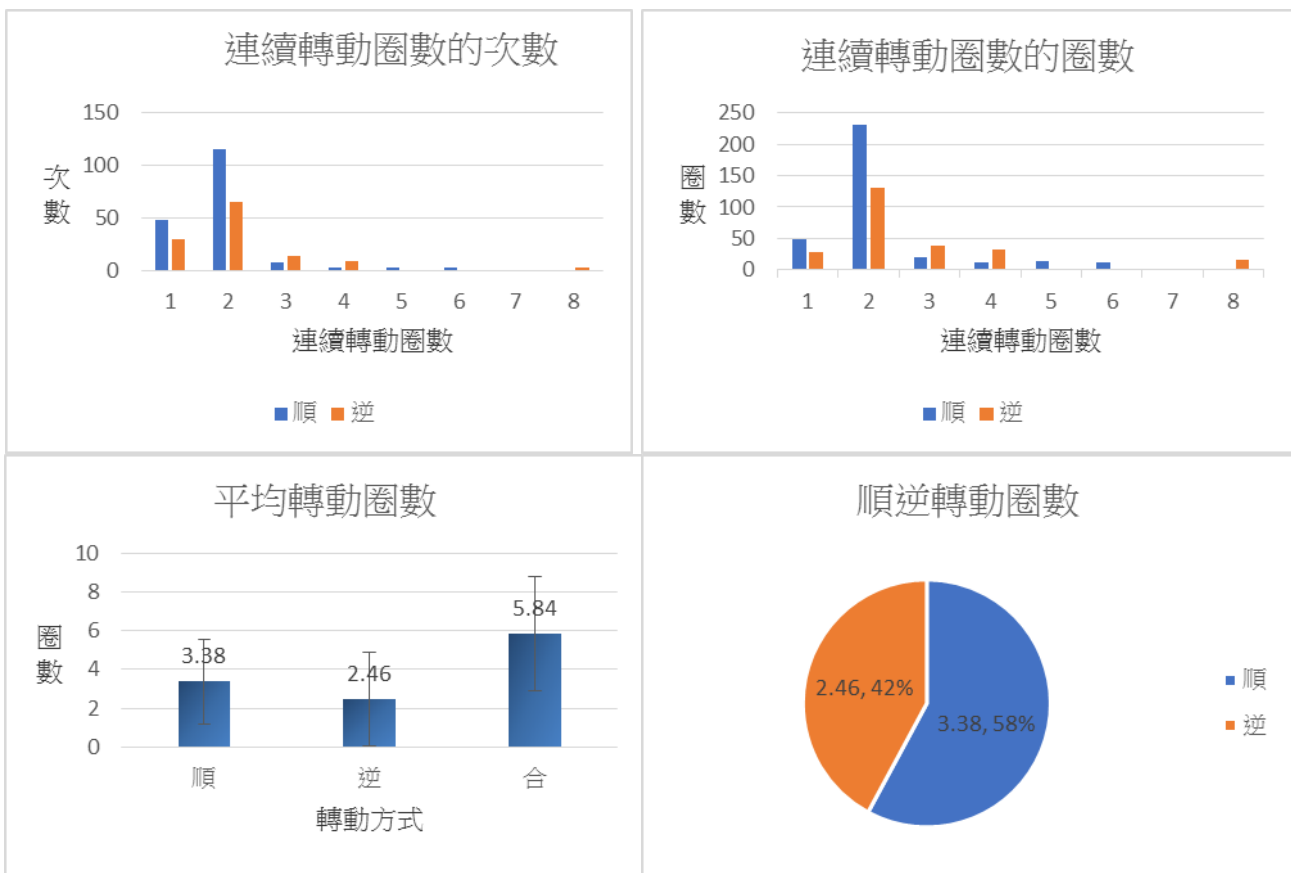


圖 14 下擺重為 16.3g 時的順逆轉動次數及轉動圈數

表二 不同重量下雙擺的轉動圈數及最多最少的圈數與順逆轉動情形

重量(g)	0.92	2.5	3.85	8.48	16.3
圈數	24.13	21.5	20.43	11.64	5.84
標準差	7.19	8.34	9.13	5.40	2.93
最多圈數	43	52	43	23	13
最少圈數	6	2	4	3	2
順時鐘	13.62	11.90	10.52	6.71	3.38
逆時鐘	10.51	9.60	9.91	4.93	2.46

N=100

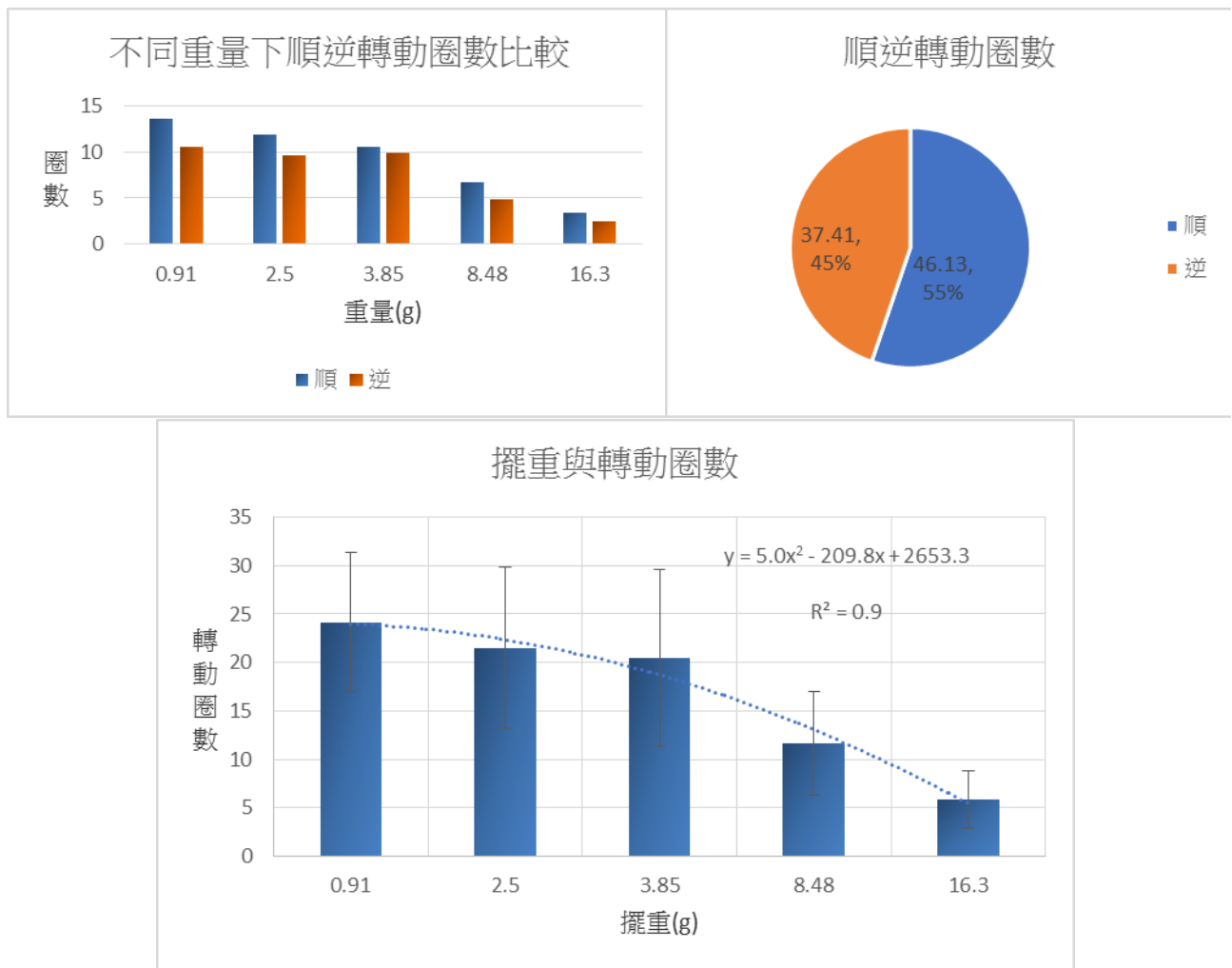


圖 15 不同重量下轉動圈數的比較

表三 不同擺重下的上擺週期平均值與標準差

重量(g)	0.92	2.5	3.85	8.48	16.3
平均值	1.05	1.05	1.06	1.003	1.03
標準差	0.006	0.01	0.018	0.04	0.021

表四 不同擺重下的上擺振幅平均值與標準差

重量(g)	0.91	2.5	3.85	8.48	16.3
平均值	25.1	24.78	24.74	21.97	21.53
標準差	0.18	0.09	0.053	1.16	0.61

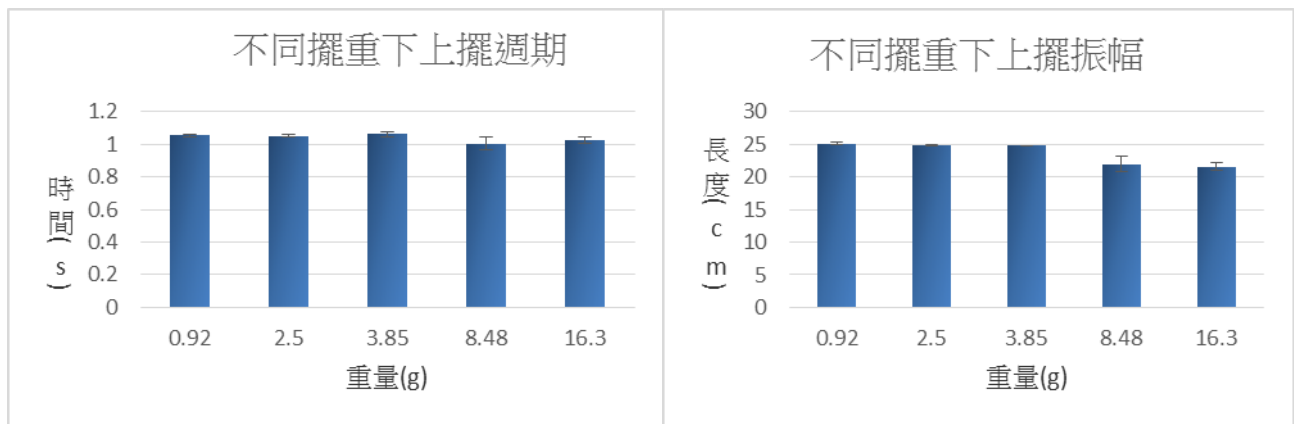


圖 16 不同擺重下上擺的週期與振幅

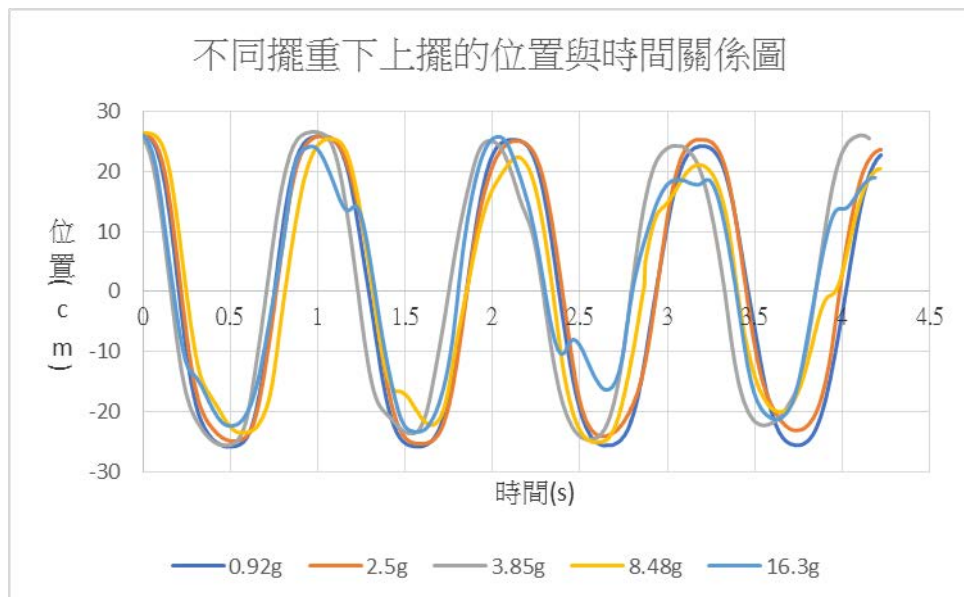


圖 17 不同擺重下上擺的位置與時間關係圖

三、探討不同擺長下雙擺的轉動現象

我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組混沌擺。分別用 7.13cm、10.20cm、13.11cm、15.92cm、19.04cm 的鐵絲作下擺長，3.85g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至 90° 角後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數及前 4 次週期、振幅大小。

由實驗結果可以發現，在不同下擺長下的雙擺的順時鐘轉動圈數與逆時鐘轉動圈數不呈現相關性。且大多數連續轉動圈數都是 1-3 圈。此外，排除 7.11cm 長度，當擺長越長時轉動圈數越少。(表五、圖 18、19、20、21、22、23)

在不同下擺長下，上擺擺動週期接近，介於 1.05-1.06s 之間。而上擺擺動振幅會隨著擺長長度增加而變小。(表六、七、圖 24、25)

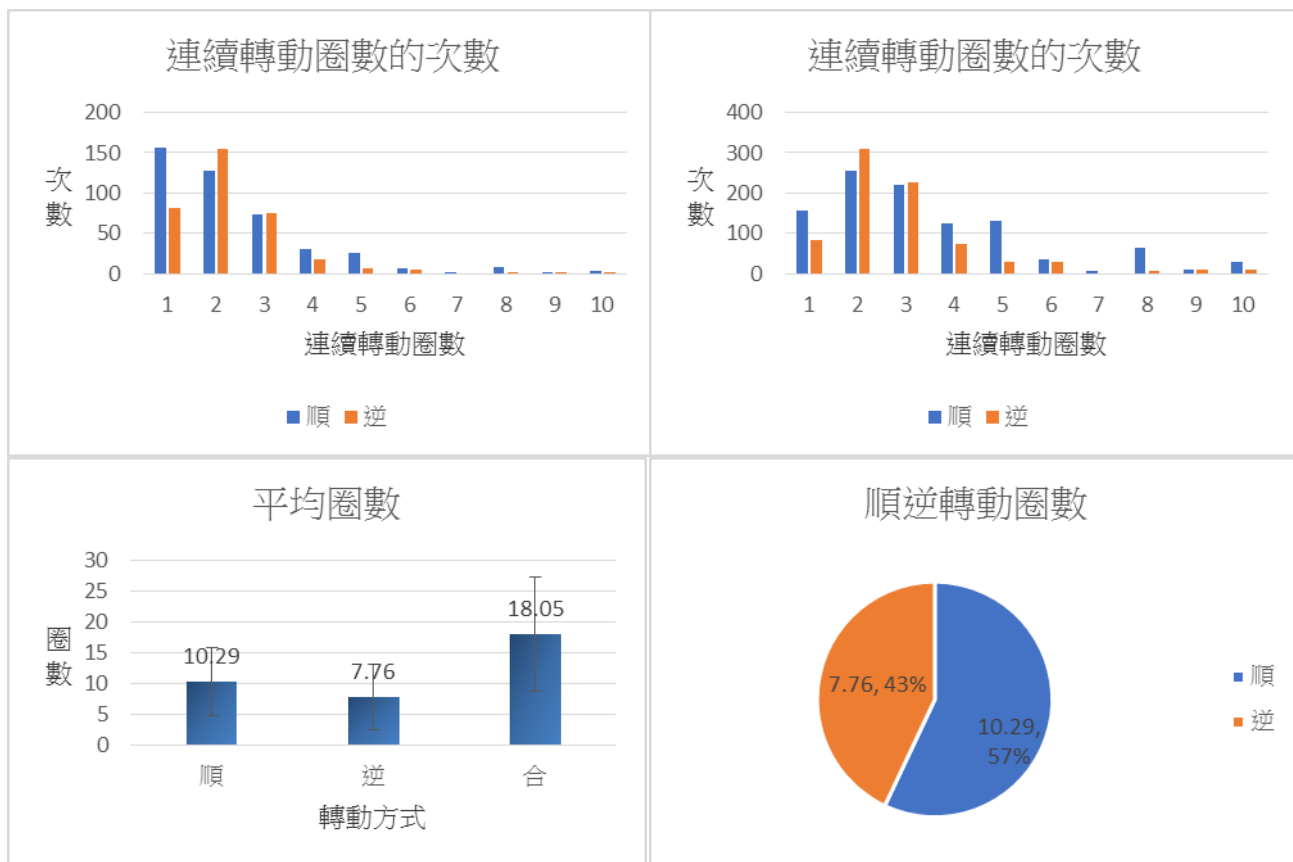


圖 18 下擺長為 7.13cm 時的順逆轉動次數及轉動圈數

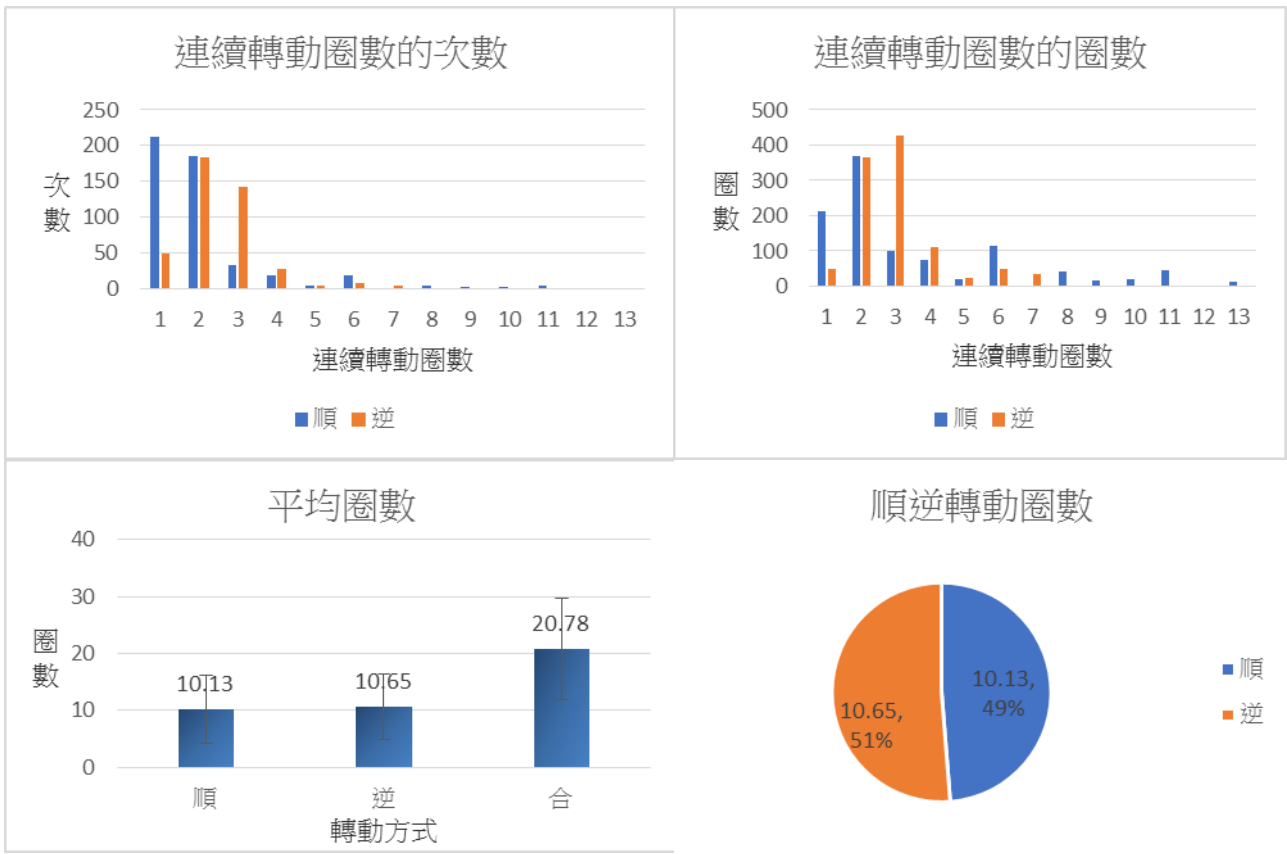


圖 19 下擺長為 10.2cm 時的順逆轉動次數及轉動圈數

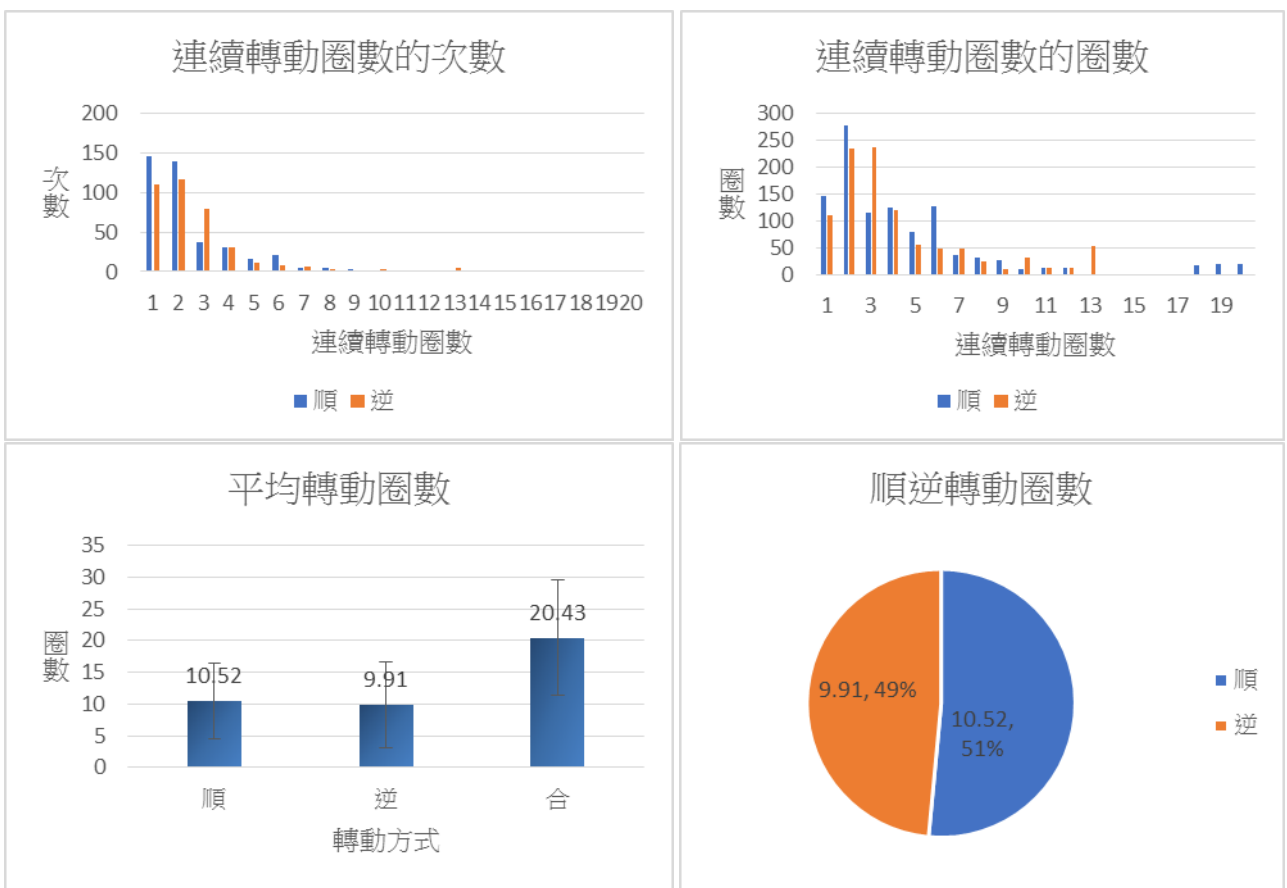


圖 20 下擺長為 13.11cm 時的順逆轉動次數及轉動圈數

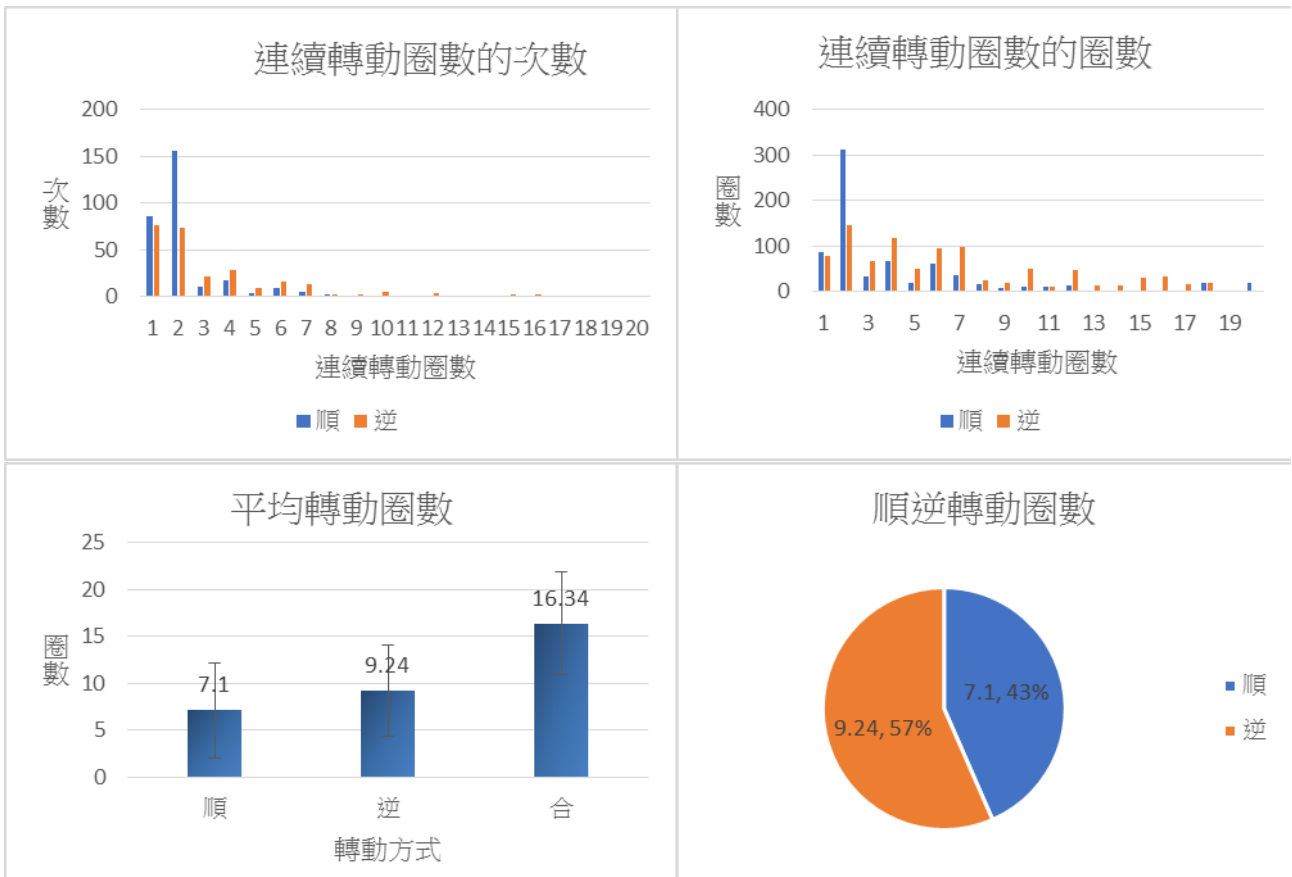


圖 21 下擺長為 15.92cm 時的順逆轉動次數及轉動圈數

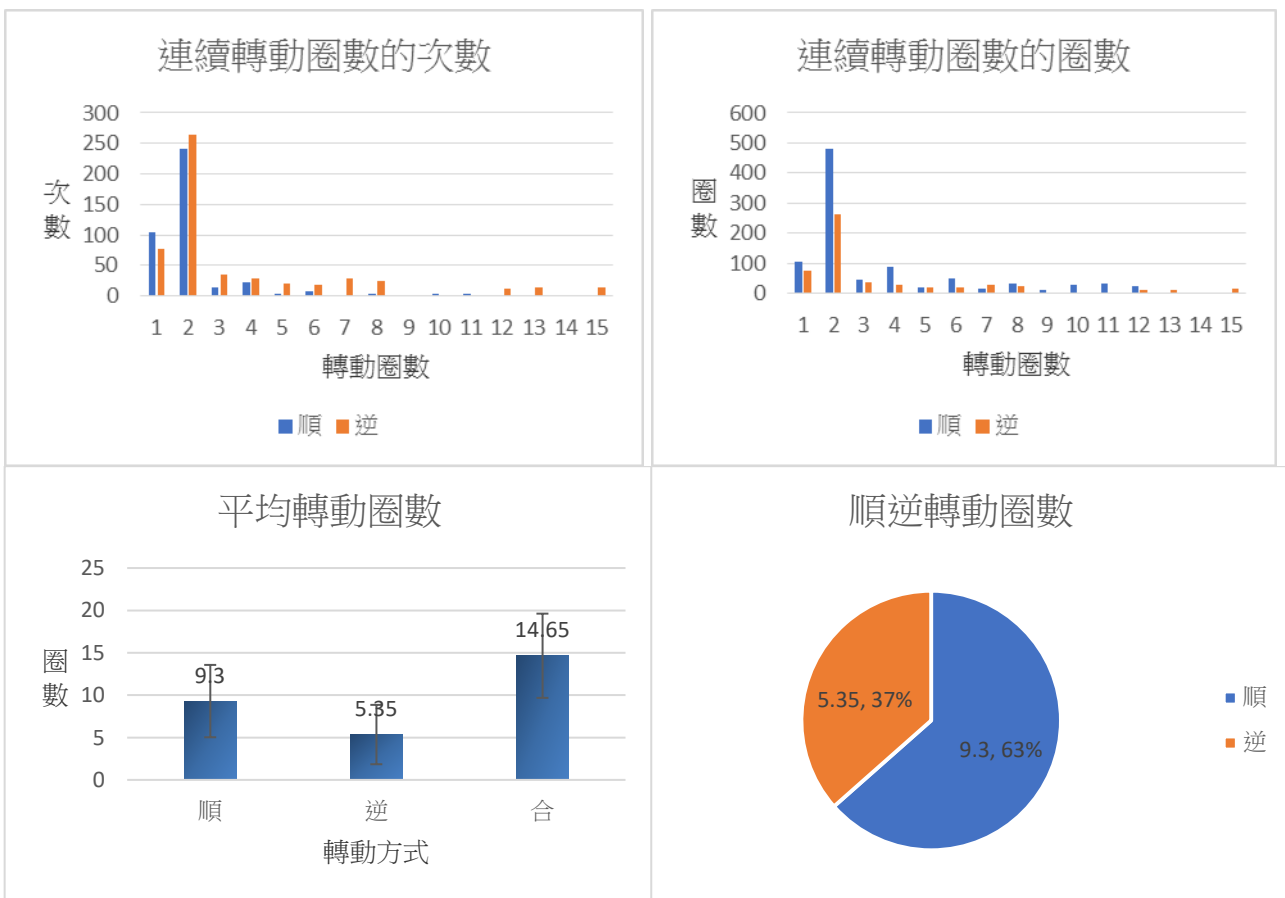


圖 22 下擺長為 19.04cm 時的順逆轉動次數及轉動圈數

表五 不同長度下雙擺的轉動圈數及最多最少的圈數與順逆轉動情形

長度	7.13	10.2	13.11	15.92	19.04
圈數	18.05	20.78	20.43	16.34	14.65
標準差	9.34	9.00	9.13	5.47	4.97
最多	41	39	43	33	25
最少	2	5	2	5	3
順	10.29	10.13	10.52	7.1	9.3
逆	7.76	10.65	9.91	9.24	5.35

N=100

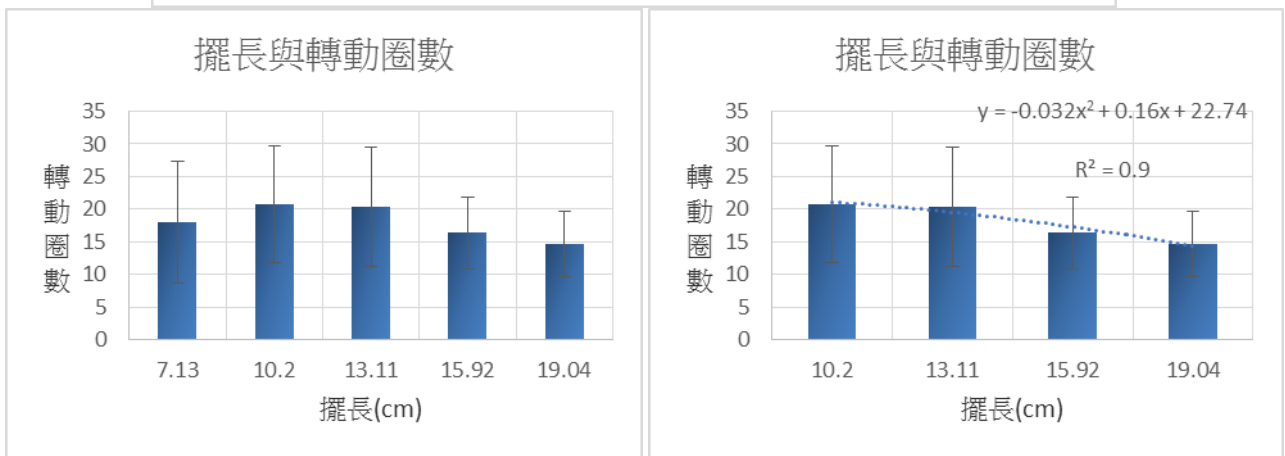
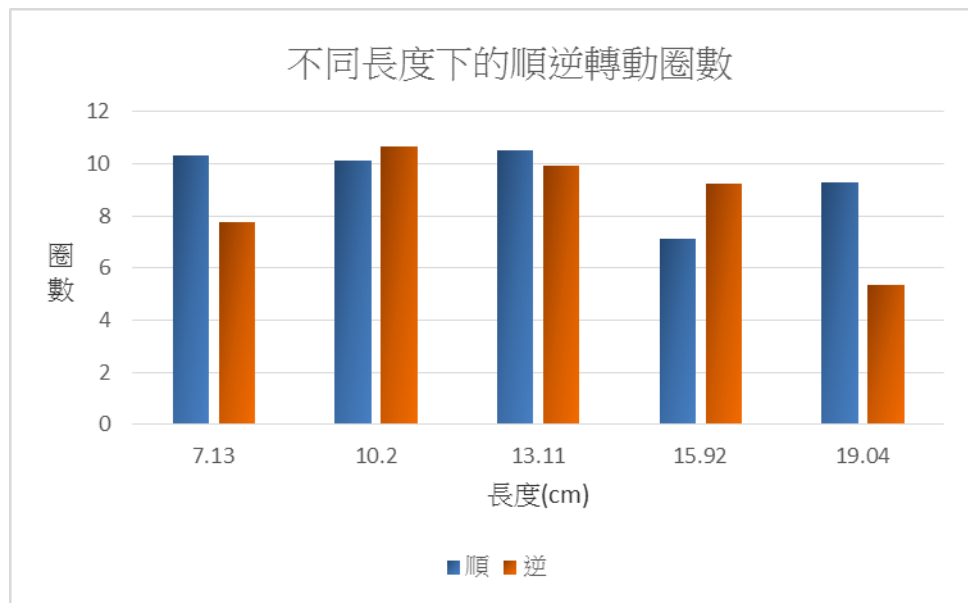


圖 23 不同擺長下轉動圈數的比較

表六 不同擺長下的上擺週期平均值與標準差

長度(cm)	7.13	10.2	13.11	15.92	19.04
平均值	1.06	1.06	1.06	1.05	1.05
標準差	0.0058	0.01	0.017	0.0057	0.0058

表七 不同擺長下的下擺的振幅平均值與標準差

長度(cm)	7.13	10.2	13.11	15.92	19.04
平均值	25.64	24.78	24.74	24.02	23.19
標準差	0.064	0.17	0.053	0.046	0.070

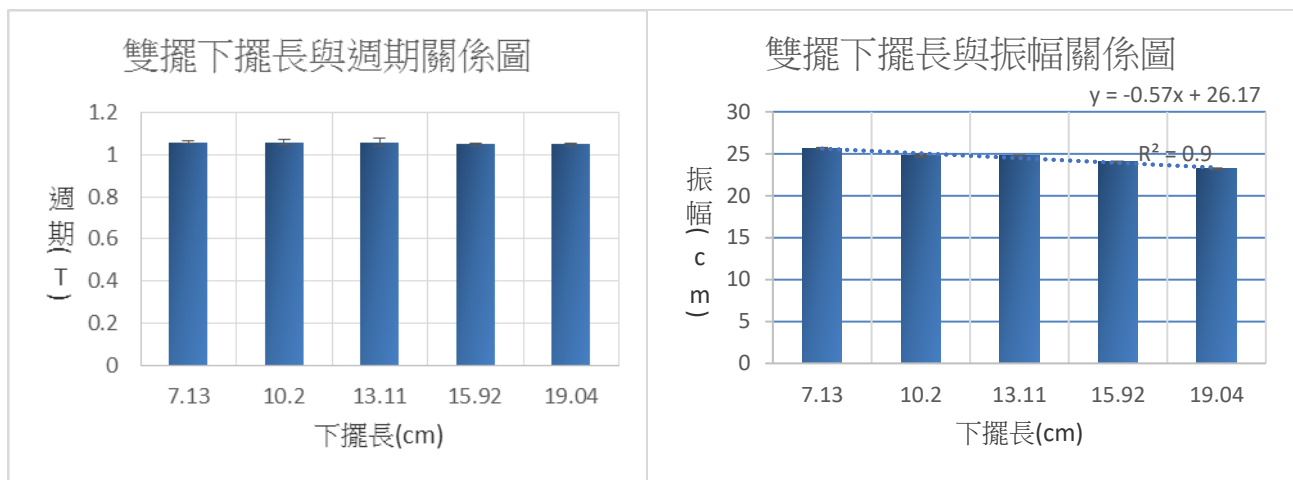


圖 24 不同擺長下上擺的週期與振幅

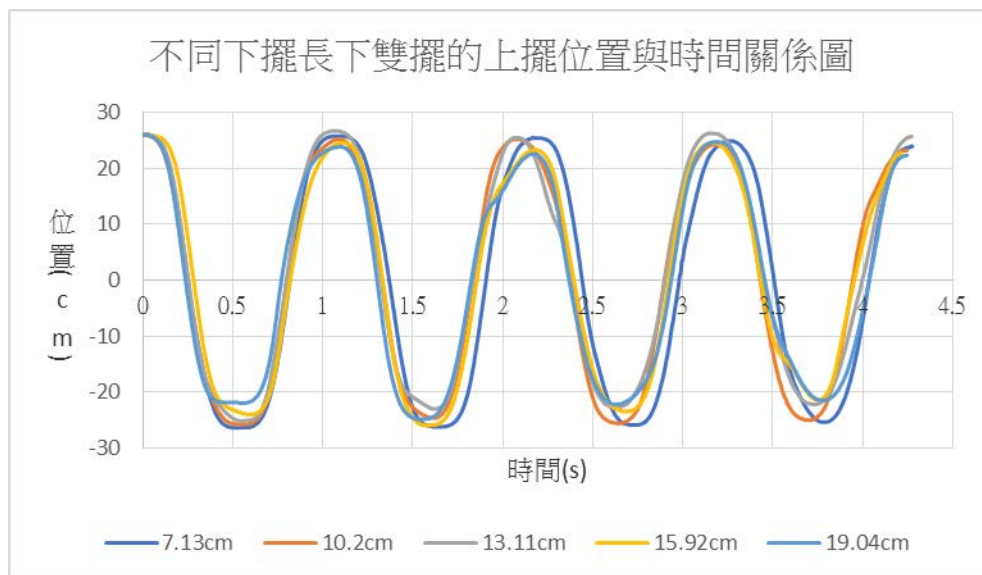


圖 25 不同擺長下雙擺的上擺位置與時間關係圖

四、探討不同擺角下雙擺的轉動現象

我們利用 4 根不銹鋼絲、2 個培林及 2 個燕尾夾及一根鉛筆做成上擺，1 根鐵絲、半根鉛筆及 1 個燕尾夾做成下擺，將其固定在鐵架上組成一組雙擺。分別用 90° 、 60° 、 45° 作為擺角、13.11cm 的鐵絲作下擺長，3.85g 的燕尾夾作下擺錘，將上擺提升至所需角度後放開，使其作自由擺動。利用 EXILIM 相機紀錄擺動狀態並統計其順擺動、逆擺動及連續擺動次數及前 4 次週期、振幅大小。(表八、圖 26、27、28、29)

由實驗結果可以發現，在不同上擺角下雙擺的順時鐘轉動圈數與逆時鐘轉動圈數，不呈現相關性。且大多數連續轉動圈數都是 1-3 圈。此外，當擺角越小時轉動圈數越少。當擺角越小時，上擺擺動週期與振幅也會越小(表九、十、圖 30、31)

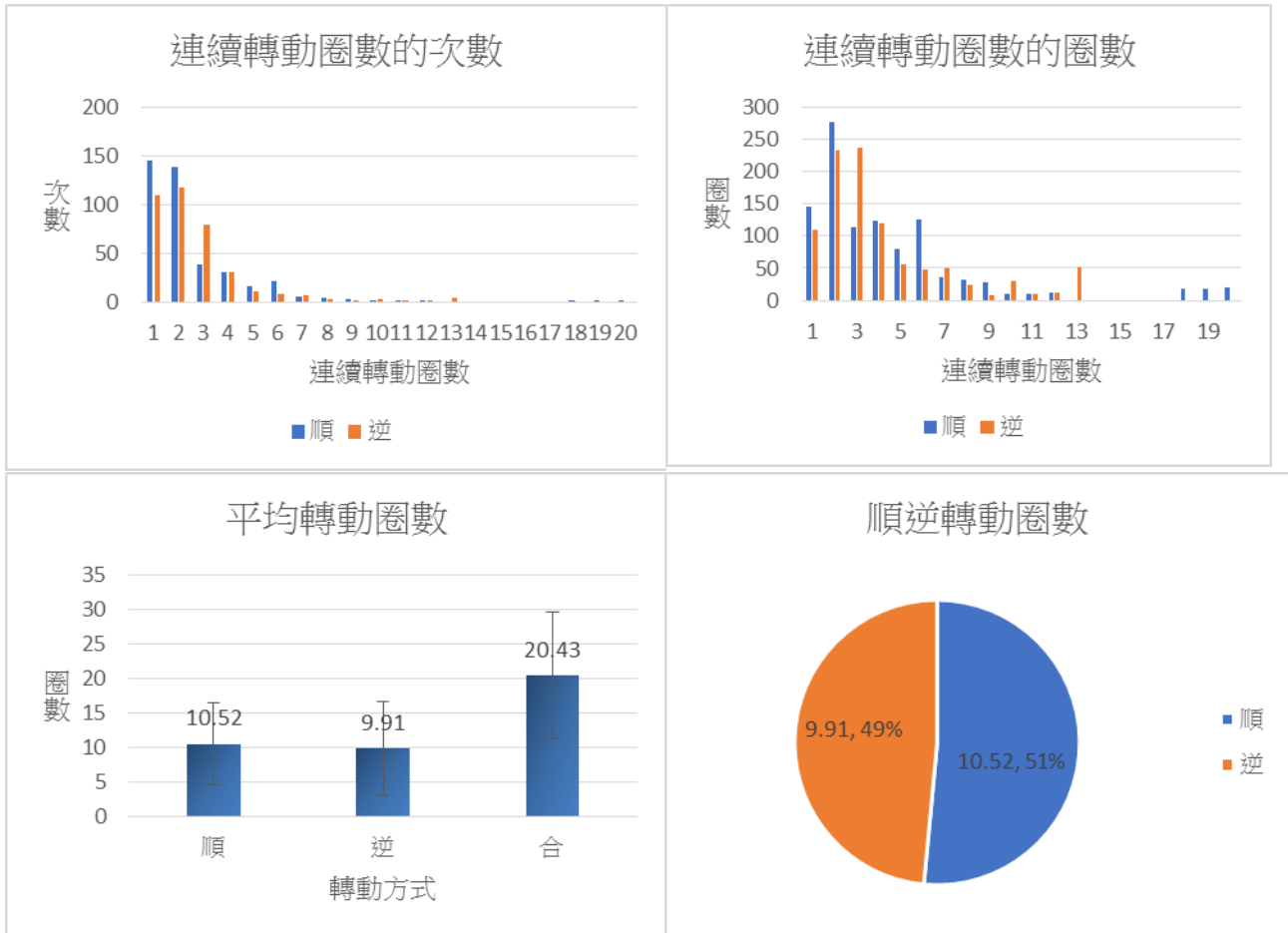


圖 26 擺角為 90° 時的順逆轉動次數及轉動圈數

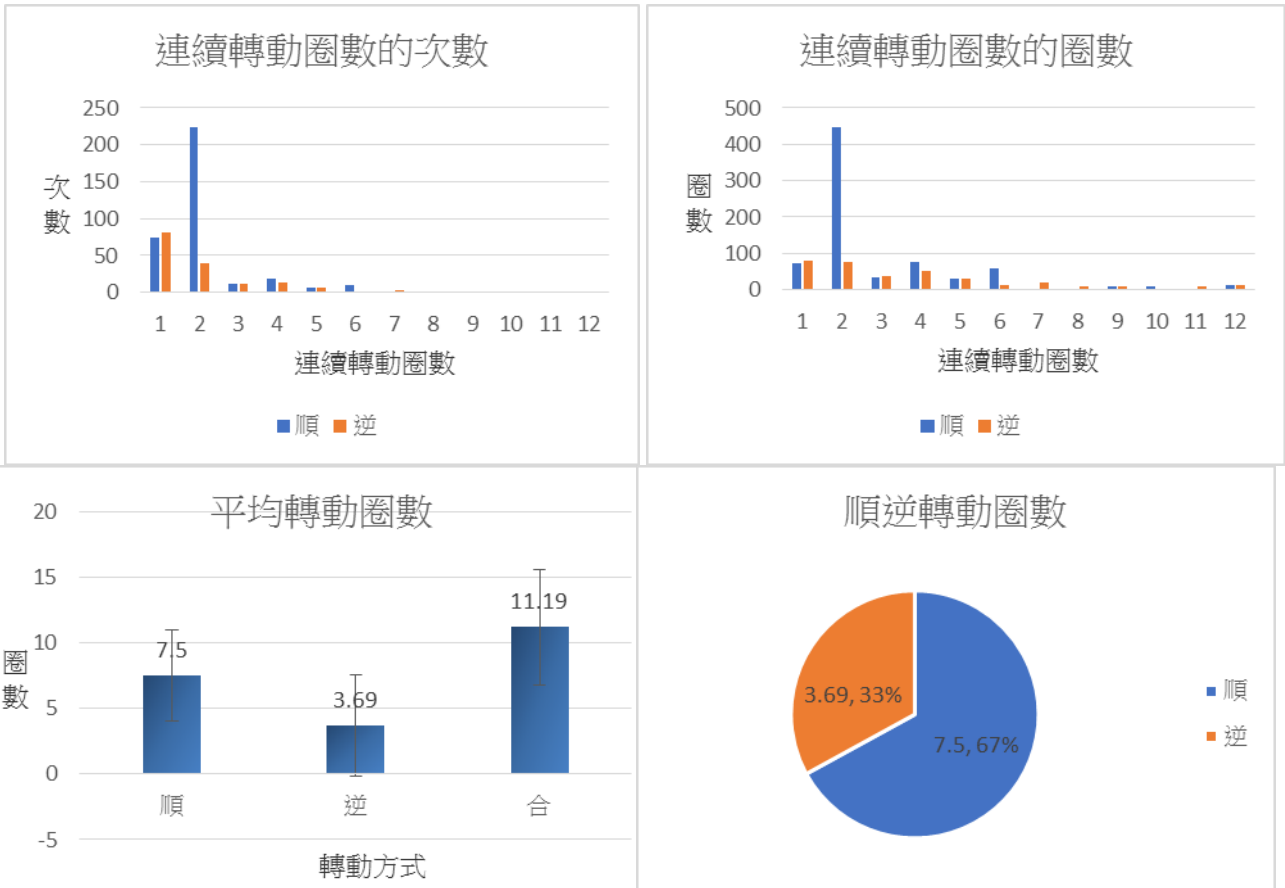


圖 27 擺角為 60° 時的順逆轉動次數及轉動圈數

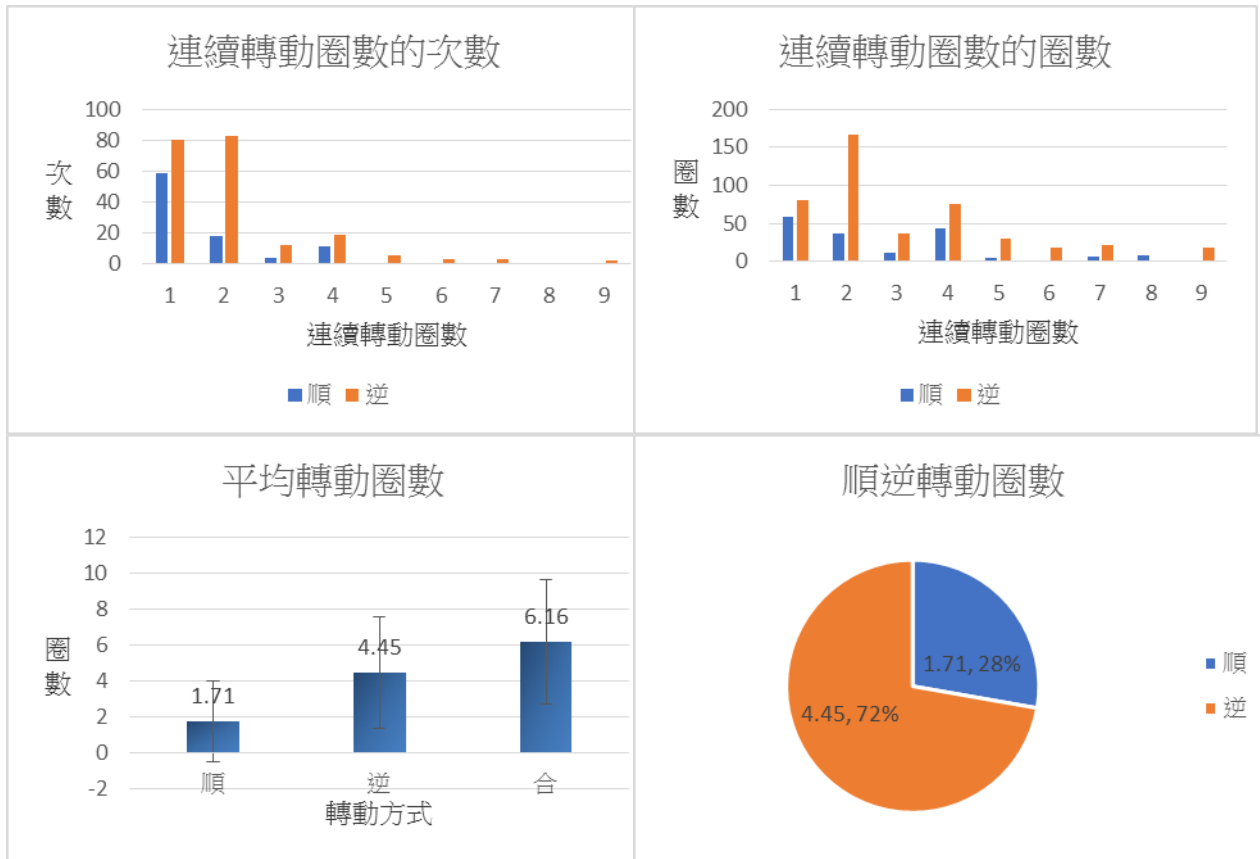


圖 28 擺角為 45° 時的順逆轉動次數及轉動圈數

表八 不同角度下雙擺的轉動圈數及最多最少的圈數與順逆轉動情形

角度(度)	90	60	45
圈數	20.43	11.19	6.16
標準差	9.13	4.43	3.49
最多圈數	43	24	18
最少圈數	2	2	1
順時鐘	10.52	7.50	1.71
逆時鐘	9.91	3.69	4.45

N=100

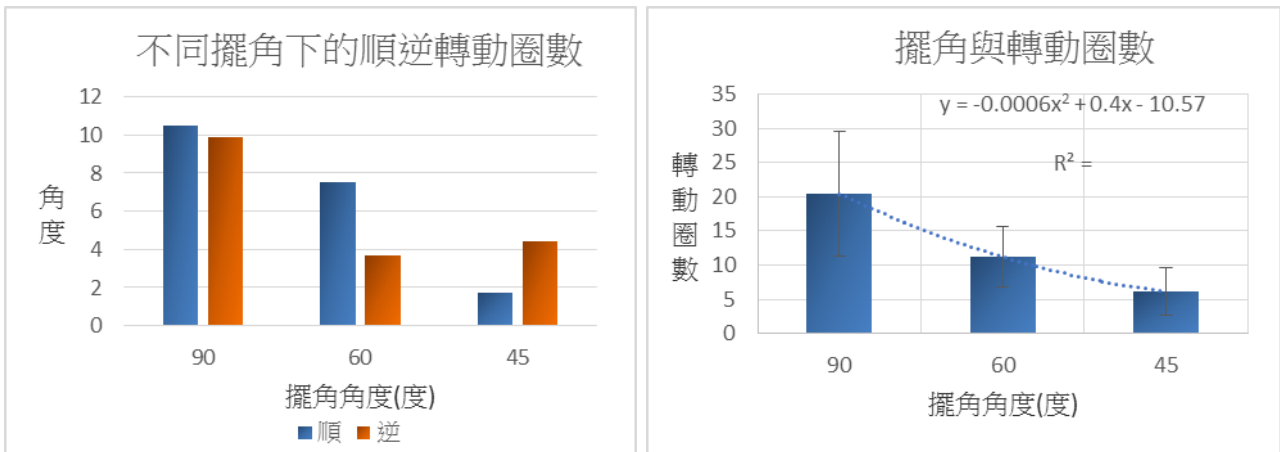


圖 29 不同擺角下轉動圈數的比較

表九 不同擺角下的上擺週期平均值與標準差

角度(度)	90	60	45
平均值	1.06	0.99	0.95
標準差	0.018	0.050	0.02

表十 不同擺角下的上擺振幅平均值與標準差

角度(度)	90	60	45
平均值	24.74	19.58	14.25
標準差	0.053	1.009	1.028

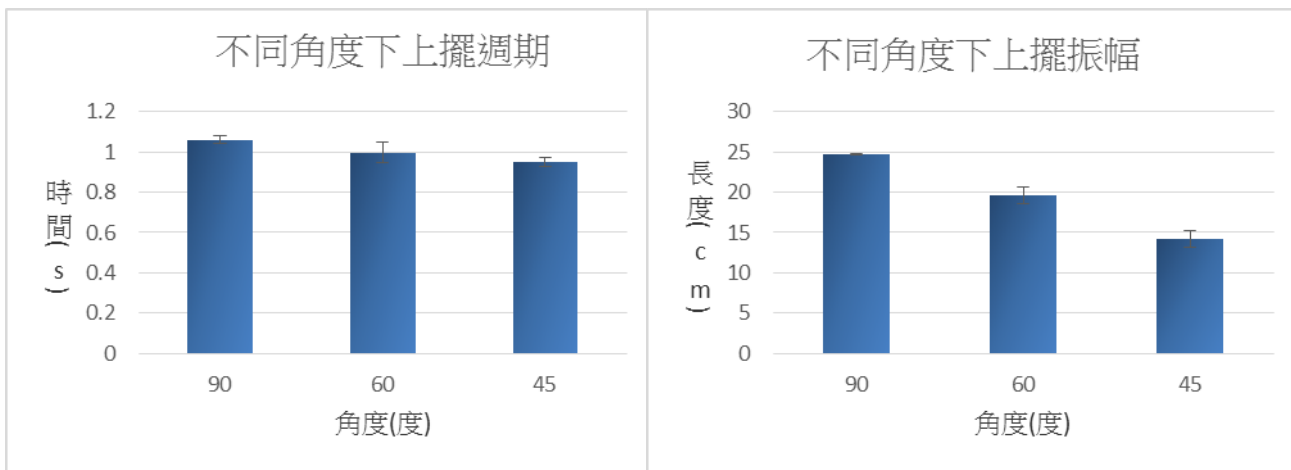


圖 30 不同擺角下上擺的週期與振幅

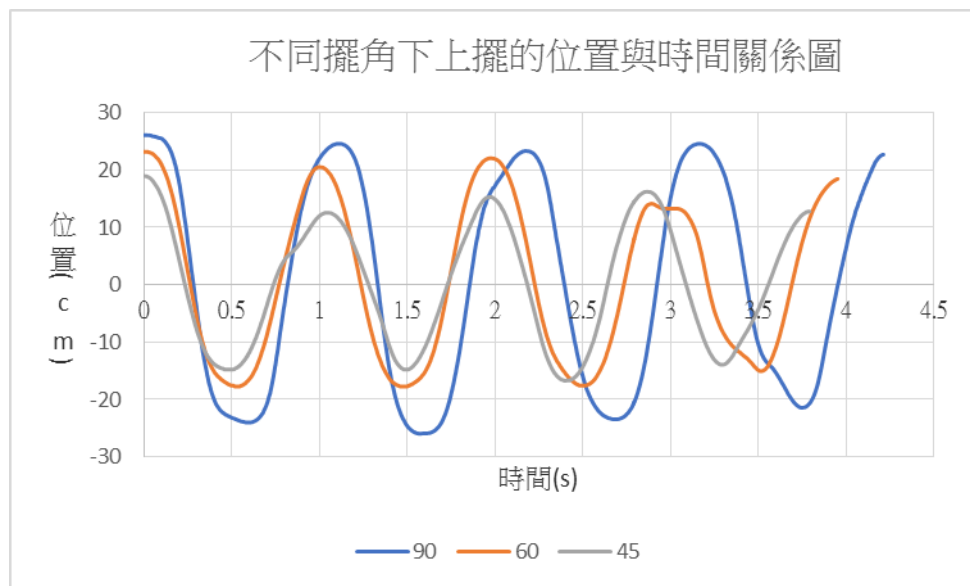


圖 31 不同擺角下上擺的位置與時間關係圖

五、探討雙擺的轉動原理

我們測量出上擺及下擺長度與質量後(表十一)，分別由轉動公式找出其轉動慣量，進而找出雙擺在第一次擺動時及連續擺動時，它們身上所具有的總能量。

表十一 上擺及下擺的質量與長度

	上擺		下擺	
	擺錘	擺棒	擺錘	擺棒
質量(g)	12.5	25.5	3.85	2.08
長度(cm)	26.0	26.0	13.1	13.1

轉動慣量計算

上擺轉動慣量(L_1)

=上擺錘轉動慣量+上擺棒轉動慣量

$$=m_{\text{上擺錘}} r_{\text{上擺}}^2 + 1/3 m_{\text{上擺棒}} r_{\text{上擺}}^2$$

$$=0.000845 + 0.000575$$

$$=0.0014(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$$

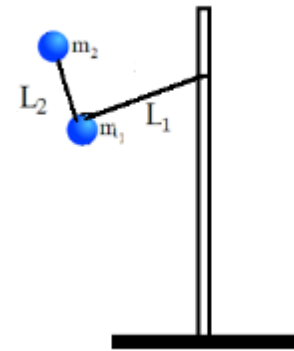
下擺轉動慣量(L_2)

=下擺錘轉動慣量+下擺棒轉動慣量

$$=m_{\text{下擺錘}} r_{\text{下擺}}^2 + 1/3 m_{\text{下擺棒}} r_{\text{下擺}}^2$$

$$=0.000065 + 0.000017$$

$$=0.0000767(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$$



雙擺總能量計算

由 $E = K_{\text{移動}} + K_{\text{轉動}} + U$

$E = K_{\text{上擺棒移動}} + K_{\text{上擺棒轉動}} + U_{\text{上擺棒}} + K_{\text{上擺錘移動}} +$

$K_{\text{上擺錘轉動}} + U_{\text{上擺錘}} + K_{\text{下擺棒移動}} + K_{\text{下擺棒轉動}} +$

$U_{\text{下擺棒}} + K_{\text{下擺錘移動}} + K_{\text{下擺錘轉動}} + U_{\text{下擺錘}}$

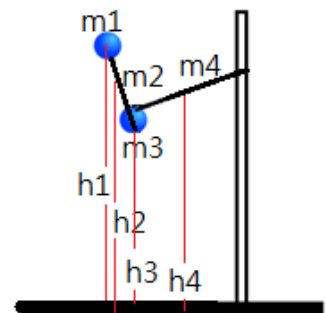
當上擺達到最高點停止時

上擺能量為 $m_3gh_3 + m_4gh_4$

下擺能量為 $(1/2m_2v_2^2 + 1/2I_2\omega_2^2) + (1/2m_1v_1^2 + 1/2I_1\omega_1^2) + m_1gh_1 + m_2gh_2$

總能量為

$$(1/2m_2v_2^2 + 1/2I_2\omega_2^2) + (1/2m_1v_1^2 + 1/2I_1\omega_1^2) + m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 + m_4gh_4$$



(一)初始擺動

將擺錘自由落下後，我們分別選取上擺棒上方交接處為支點，利用 Tracker 求上擺速度 v_1 及角速度 ω_1 ，及下擺速度 v_2 及角速度 ω_2 。當上擺擺動到最高點時，所具有動能為零。並

$$E = (1/2m_2v_2^2 + 1/2I_2\omega_2^2) + (1/2m_1v_1^2 + 1/2I_1\omega_1^2) + m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 + m_4gh_4$$

找出擺動半個週期後的總能量大小。

可以看出當擺重越大，擺動半圈後所具有的總能量越少，從實驗二結果比較可發現平均轉動圈數也較少。(表十二、圖 32)

表十二 擺重與總能量及轉動圈數

擺重(g)	0.92	2.5	3.85	8.48	16.3
-------	------	-----	------	------	------

雙擺動能(J)	3.32	3.24	2.86	2.54	1.20
雙擺位能(J)	0.099	0.11	0.11	0.14	0.17
總能量(J)	3.40	3.33	2.96	2.66	1.36
轉動圈數	24.13	21.5	20.43	11.64	5.84

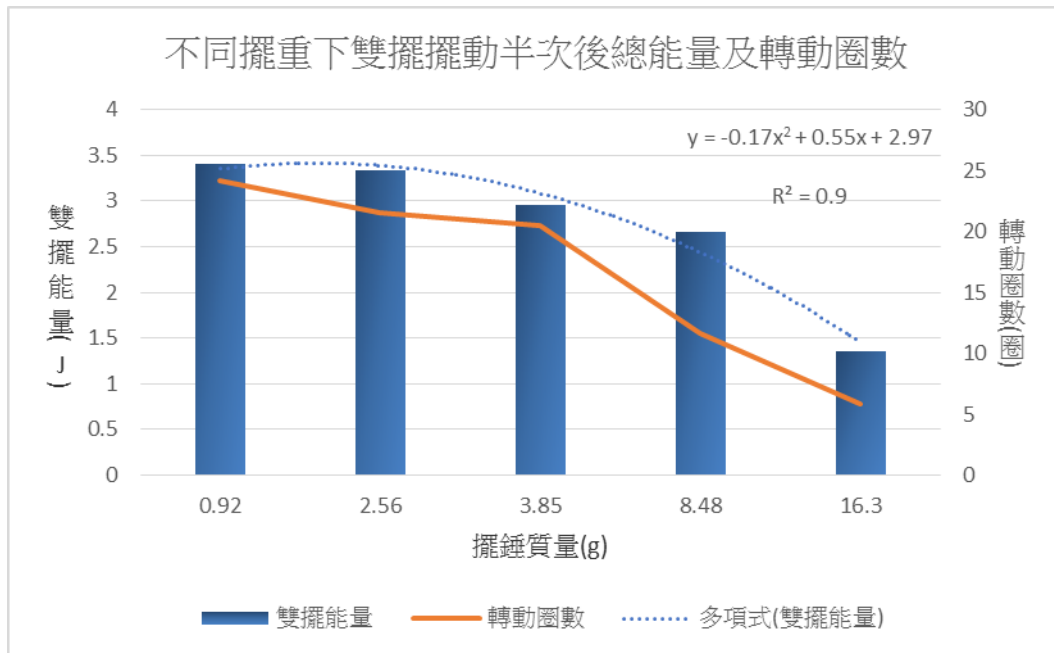


圖 32 不同擺重下雙擺擺動半次後總能量及轉動圈數

(二)連續轉動

利用 Tracker 求下擺產生連續性轉圈時，求上擺位置每一次在兩端時所具有的總能量。

我們由下圖可發現當上擺約在 0.1 秒時下擺 x 位置超過上擺，而 0.25 秒時上擺位置超過下擺。此時下擺完成一個繞圈，而在 3.7 秒處可發現，上擺完成一次擺動後下擺依舊在上擺前方，表示連續轉動結束。(圖 33)

由鉛直面圓周運動公式，求得下擺轉圈的臨界能量為 $5/2mgR=0.012(J)$ 。我們取成功的前 8 次轉動及最後失敗的轉動，求出總能量如下表。可看出前 8 次轉動能量雖然有大有小，但皆高於臨界能量，但最後一次轉動能量低於臨界能量，所以轉動失敗。(表十三、圖 34)

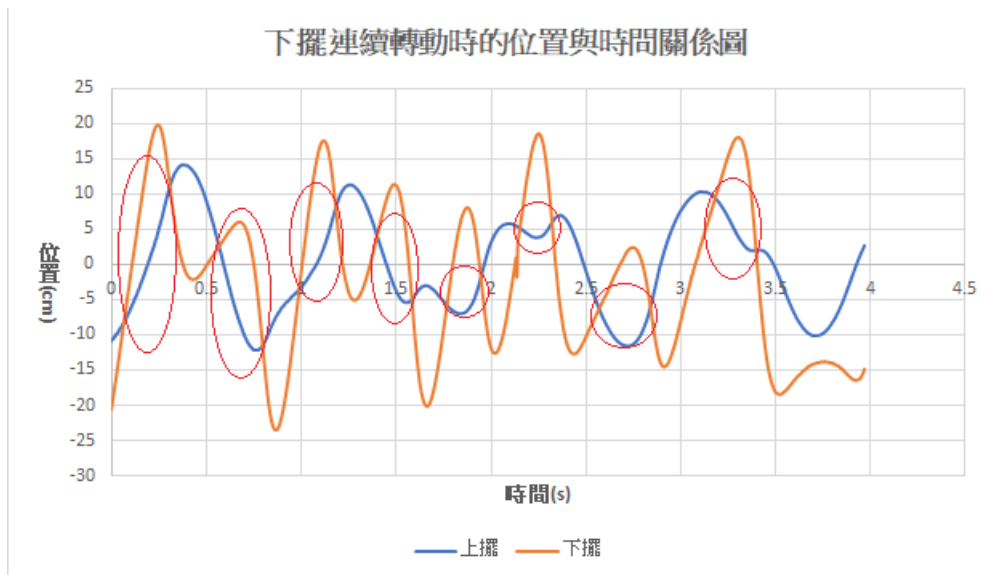


圖 33 下擺連續轉動時的位置與時間關係圖

表十三 下擺每次轉動時所具有的能量大小

圈數	一	二	三	四	五	六	七	八	九
動能	2.048	3.57	2.48	3.58	2.51	3.74	1.18	5.38	0.0042
位能	0.00078	0.0009	0.0007	0.00057	0.0002	0.0009	0.0004	0.001	-0.0002
總能	2.05	3.57	2.48	3.59	2.51	3.74	1.18	5.38	0.004*

*上擺能量 < 臨界能量 0.012J

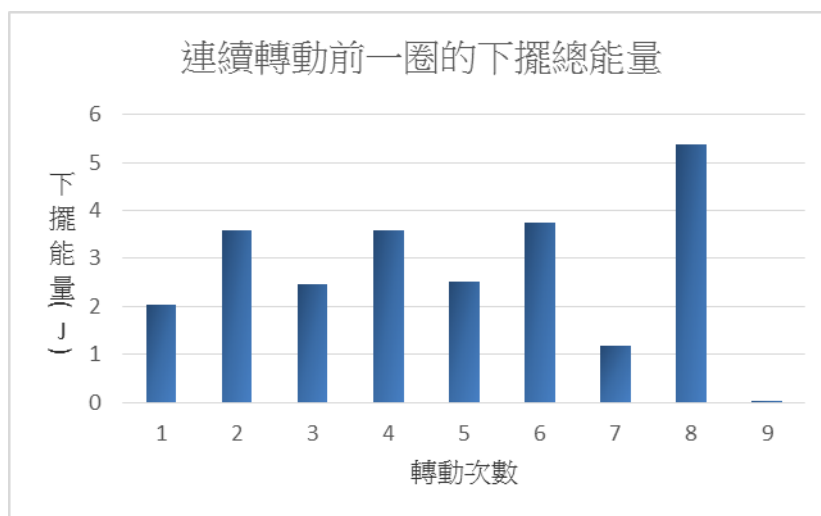


圖 34 續轉動動前一圈的下擺總能量

六、比較動畫模擬與真實雙擺擺動情形

我們利用所提供的雙擺模擬程式加入實驗參數，並與我們真正的實驗結果做 y-t 關係圖及軌跡圖比較後。發現實際做出來的軌跡圖與程式模擬，上擺接近但下擺擺動有落差，因為模擬的條件中上下擺棒質量皆為零，且沒有摩擦力的存在下，雙擺可做無止境有規律性的運動。並不符合我們今天探討的主題-雙擺的混沌現象。(圖 35)

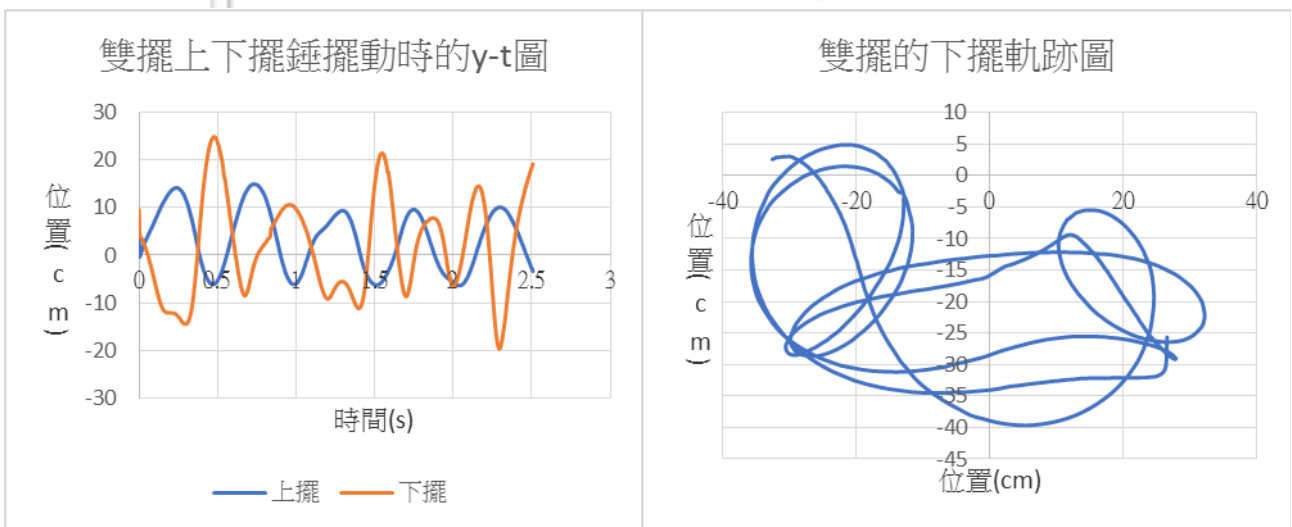
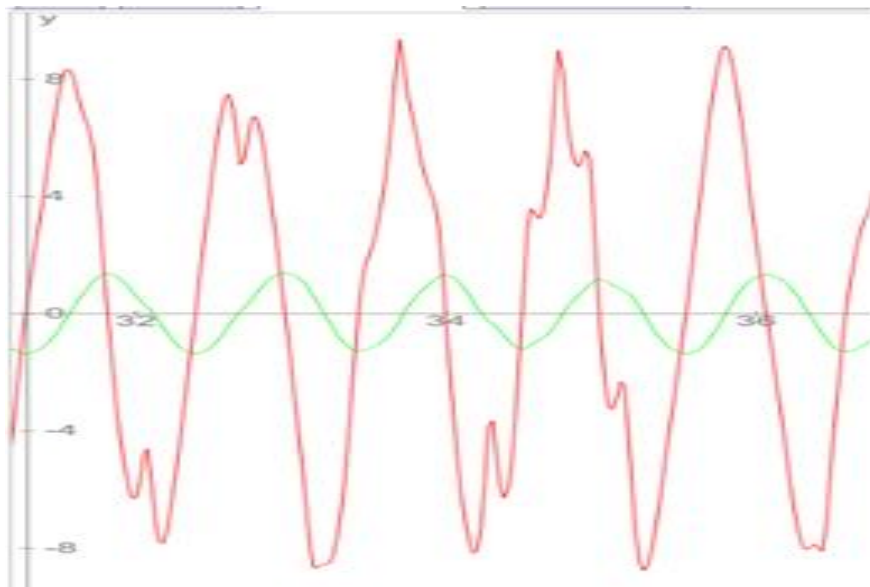


圖 35 程式模擬雙擺及實作的 y-t 圖比較

伍、討論

- 一、由觀察雙擺擺動過程可發現前兩次擺動方式相似，之後擺動開始混亂而無法預測，符合蝴蝶效應。此外當上擺到達兩端點處後，此時上擺能量最小，下擺能量最大，容易產生轉圈現象。
- 二、由於雙擺在擺動過程中，形狀大多處於彎曲狀態，與複擺比較下，擺長較短，週期較小。(圖 36)且因為上下擺之間耦合作用影響，振幅也較小。



圖 36 複擺與雙擺擺長比較

三、由圖 37 及圖 38 可觀察出，當上擺帶動下擺前進時，會將能量傳給下擺(0-0.5s)，而上擺退回原處時，下擺順勢繞圈(0.5-1s)，而上擺再度前進時(1-1.5s)，下擺退回，將能量傳給上擺，上下擺之間能量交互耦合作用下，導致雙擺運動過程的混沌現象。

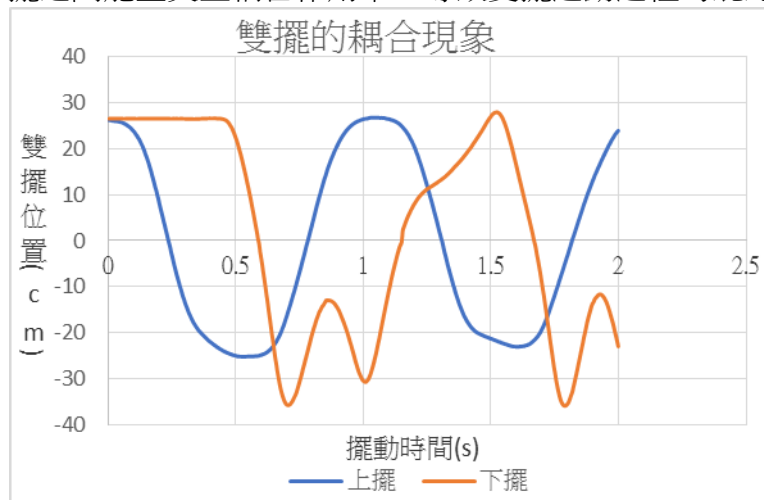


圖 37 雙擺在擺動過程中上下擺的能量交換方式

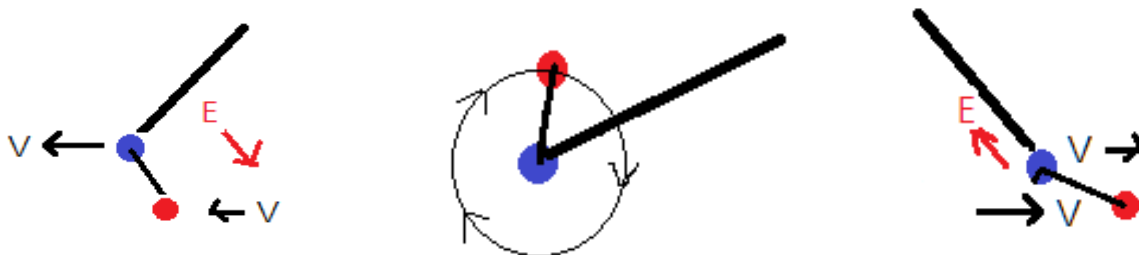


圖 38 雙擺運動時上下擺能量交換原理

四、在改變擺重、擺長下，可發現擺長、擺重愈小，轉動圈數愈多。推論在此條件下，下擺轉圈所需的臨界能量 $5/2mgR$ 較小，轉圈較容易達成(圖 39、40)。而擺角較大時，雙擺所具有的總能量較多，使得上擺容易超過臨界能量，產生轉動。此外，當擺長太短時，會因上下擺質心接近，耦合效果不佳，不易達成轉圈條件(圖 41)。



圖 39 擺重越大，所需臨界能量 $5/2mgR$ 越大，繞圈越難成功



圖 40 擺長越長，所需臨界能量 $5/2mgR$ 越大，繞圈越難成功

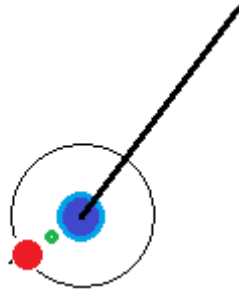


圖 41 下擺長太短，質心接近，能量轉換效果不明顯

- 五、在不同下擺長、擺重、擺角下，連續轉動圈大多為 1-3 圈，而因混沌狀態導致週期不穩定，而當擺重越小，或擺長越小，或擺角越大時，其上擺振幅也越大，推論因擺重及擺長越小時耦合效果較不明顯，上擺保有的能量較大。當擺長及擺角相同時，在不同擺重下，初始方向轉動圈數會大於另一方向轉動圈數。
- 六、不同下擺重的雙擺，當轉動半週期後，較重的雙擺其整體的總能量較小。我們推測因摩擦力大小與正向力成正比，下擺重越大的雙擺因摩擦生熱，產生較小的總能量，造成擺動圈數較少，符合實驗二的結果。
- 七、當雙擺連續擺動時，當上擺兩端呈現停止狀態，我們取下擺的速度及高度作鉛直面圓周運動判斷，當下擺總能量大於臨界能量 $5/2mgR$ 時，會持續轉動，但只要過程中總能量出現小於臨界能量，連續轉動馬上終止。但由於上下擺間能量相互耦合作用，下擺的能量在過程中也是有大有小，並沒有規則性，符合混沌理論中的非線性作用。
- 八、由程式模擬比較後，由於程式中的雙擺的擺棒質量皆為零，所以得到圖形與本實驗並不吻合，但可看出雙擺運動的複雜性。

陸、結論

- 一、雙擺擺動時，因上下擺之間產生耦合作用，導致週期與振幅皆小於複擺。
- 二、由於上下擺錘相對位置、摩擦力等變因產生耦合作用的不確定性，所以雙擺擺動前 2 圈模式較為固定，但通常第 3 圈後開始產生混沌現象。
- 三、雙擺擺動的過程中，下擺繞圈運動會出在兩個端點處，通常出現連續繞圈次數為 1-3

次，此時上擺動能最小，下擺動能最大，容易產生轉圈現象。

- 四、下擺重越大時，因所需臨界能量變大，轉圈次數變少，初始方向轉圈數大於另一方向轉圈數，振幅變小。
- 五、下擺長越長時，因所需臨界能量變大，轉圈次數變少，振幅變小，但擺長過小時會因雙擺錘質心接近影響轉圈效果。
- 六、下擺角越小時，因初始能量較小，臨界能量大小不變，所以轉圈次數變少，週期及振幅也變小。
- 七、當下擺重越大時，雙擺擺動半個週期後總能量越小，轉動圈數也越少。
- 八、連續擺動時，當上擺位於端點，下擺的總能量雖不固定，但只要持續大於臨界能量 ($5/2mgR$)，就會產生成功的連續轉圈運動。
- 九、真實擺動與模擬程式中，因實驗中擺棒質量不為零，所以上擺擺動方式接近但下擺有差異。

柒、參考資料及其他

- 一、James Gleick 原著；林和 譯 (民 80)。混沌-不測風雲的背後。台北：天下文化。
- 二、作者不詳(民 101)。維基百科-雙擺，
取自：<https://www.itread01.com/content/1546089795.html>
- 三、作者不詳(民 98)。科技與科學，取自：<https://blog.toright.com/posts/36/chaos-theory-%E6%B8%BE%E6%B2%8C%E7%90%86%E8%AB%96.html>
- 四、作者不詳。雙擺系統的動畫模擬，
取自：<https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>
- 五、王尊信(民 102)。鉛直圓周運動，
取自：<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=38833>

【評語】 030114

作品研究雙擺的運動軌跡，通過分析其軌跡研究混沌現象。透過改變擺重、擺長及擺角，團隊量測雙擺週期及振幅，呈現雙擺運動的複雜運動。可多探討數學模型，理解當中的物理意義。雖然雙擺並非新議題，但團隊有嘗試挑戰其中的混沌現象，值得鼓勵。

作品簡報

030114

雙龍擺尾盪混沌

探討雙擺轉動時的混沌現象

研究動機

上次段考我考了校排一，於是爸爸送我一台愛德華混沌擺當獎品。在過程中，我發現即使在同一個高度放下，它的上擺擺動方式雖然比較規律，但是下擺轉動時卻很不穩定，有時候可以一次轉很多圈，有時轉動很少，又或者有時轉動一次後，輪到下次轉動要很久的時間，但也會出現可以連續轉動很多次才停下來的情形。於是我利用控制變因法，從角度、重量以及長度三個變因下手，找出它在這種混沌現象中大概擁有的規則性。並利用能量守恆原理探討它的下擺轉動成功的要件。



愛德華混沌擺



自製雙擺

研究目的及流程圖

雙 擺

基本性質

不同擺重

不同擺長

不同擺角

原理探討

程式模擬

期複
比較擺週

幅複
比較擺振

數轉
比較動圈

期轉
比較動週

幅轉
比較動振

數轉
比較動圈

期轉
比較動週

幅轉
比較動振

數轉
比較動圈

期轉
比較動週

幅轉
比較動振

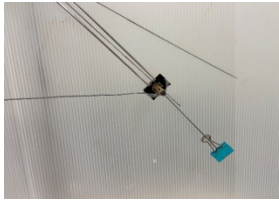
擺初
動始

擺連
動續

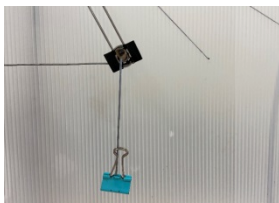
式轉
比較動模

研究方法

實驗一



複擺



雙擺

裝置圖

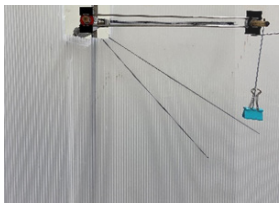
方法

- 一、固定上下擺成複擺
- 二、移動上擺到90度並放下
- 三、鬆開上下擺成雙擺
- 四、重複步驟二取前3次數據

目的

分別找出其週期與振幅大小

實驗二~四



裝置圖(擺角)

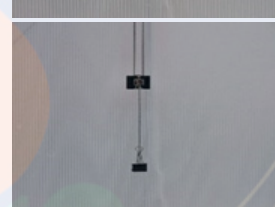
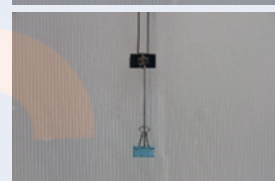
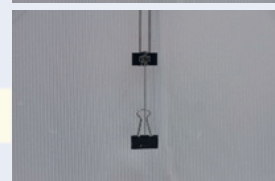
方法

- 一、分別改變5組下擺重
- 二、分別改變5組下擺長
- 三、分別改變3組下擺角
- 四、求操作100次的轉圈數

目的

求正逆轉動圈數，上擺前4次擺動週期及振幅大小

實驗五



裝置圖(擺重)

方法(初始轉動)

分別選取5組擺重操作

目的

找出上擺擺動半個週期後的雙擺總能量

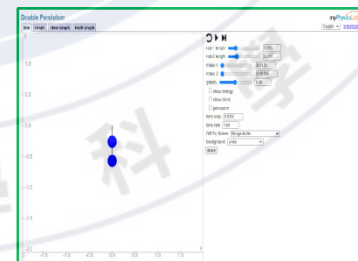
方法(連續轉動)

選出過程中出現連續轉動現象的時段

目的

找出每次轉動時此時下擺能量是否大於臨界能量

實驗六



方法及目的

將實驗數據輸入雙擺模擬程式並比較結果的差異

結果與討論

一、探討複擺與雙擺間週期與振幅的關係

分別找出複擺與雙擺前3次擺動的週期與振幅(圖6)。及上擺比較圖(圖7)與雙擺上下擺位置與時間關係圖(圖8)

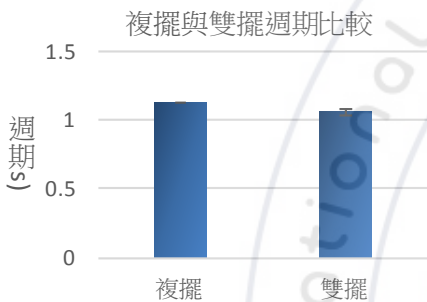


圖7 複擺與雙擺週期與振幅的比較

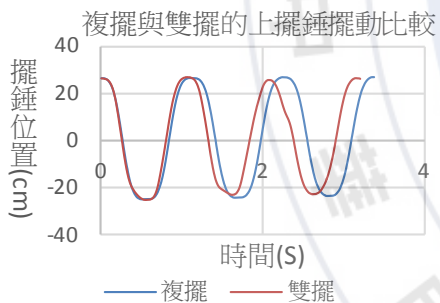
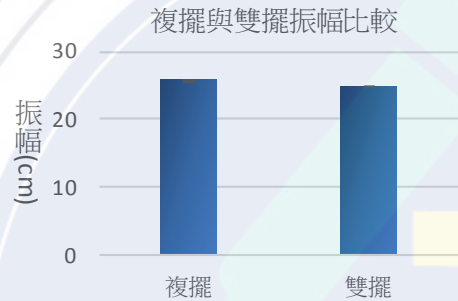


圖8 複擺與雙擺的上擺錘擺動比較圖

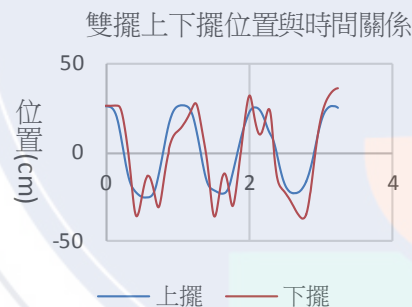


圖9 雙擺上下擺位置與時間關係圖



圖36 複擺與雙擺擺長比較

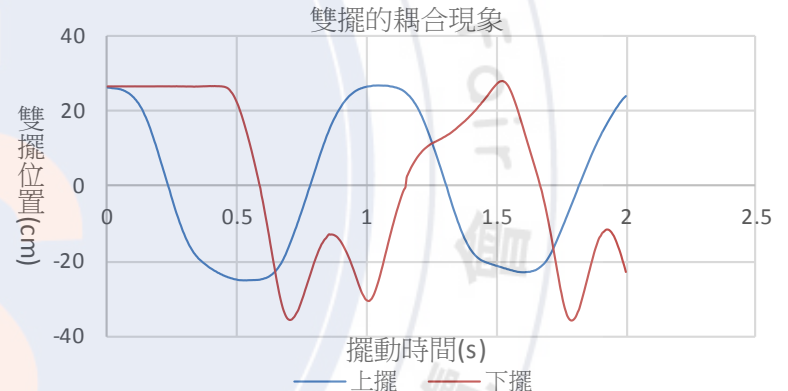


圖37 雙擺在擺動過程中上下擺的能量交換方式

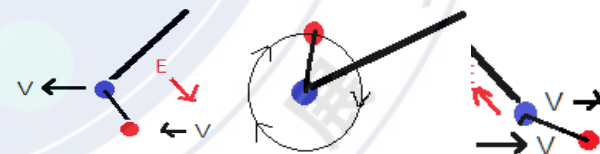


圖38 雙擺運動時上下擺能量交換原理

- 一、複擺的擺長較長而雙擺出現耦合作用(圖36)，所以複擺的上擺週期及振幅皆大於雙擺(圖7)。
- 二、雙擺在擺動過程中上擺呈現較規則的週期運動(圖8)，而下擺易在兩端處呈現不規則擺(轉)動。而下擺出現轉動時，也會影響上擺的擺動情形(圖9)。
- 三、因雙擺運動時，上下擺速度不同，影響能量傳遞方向，產生耦合現象(圖37、38)

二、探討不同擺重下雙擺的轉動現象(1/2)

分別利用下擺重0.92g、2.5g、3.85g、8.48g、16.3g找出100次實驗後，連續轉動圈數的圈數、順逆轉動圈數、上擺的週期與振幅的平均值(圖10-16)

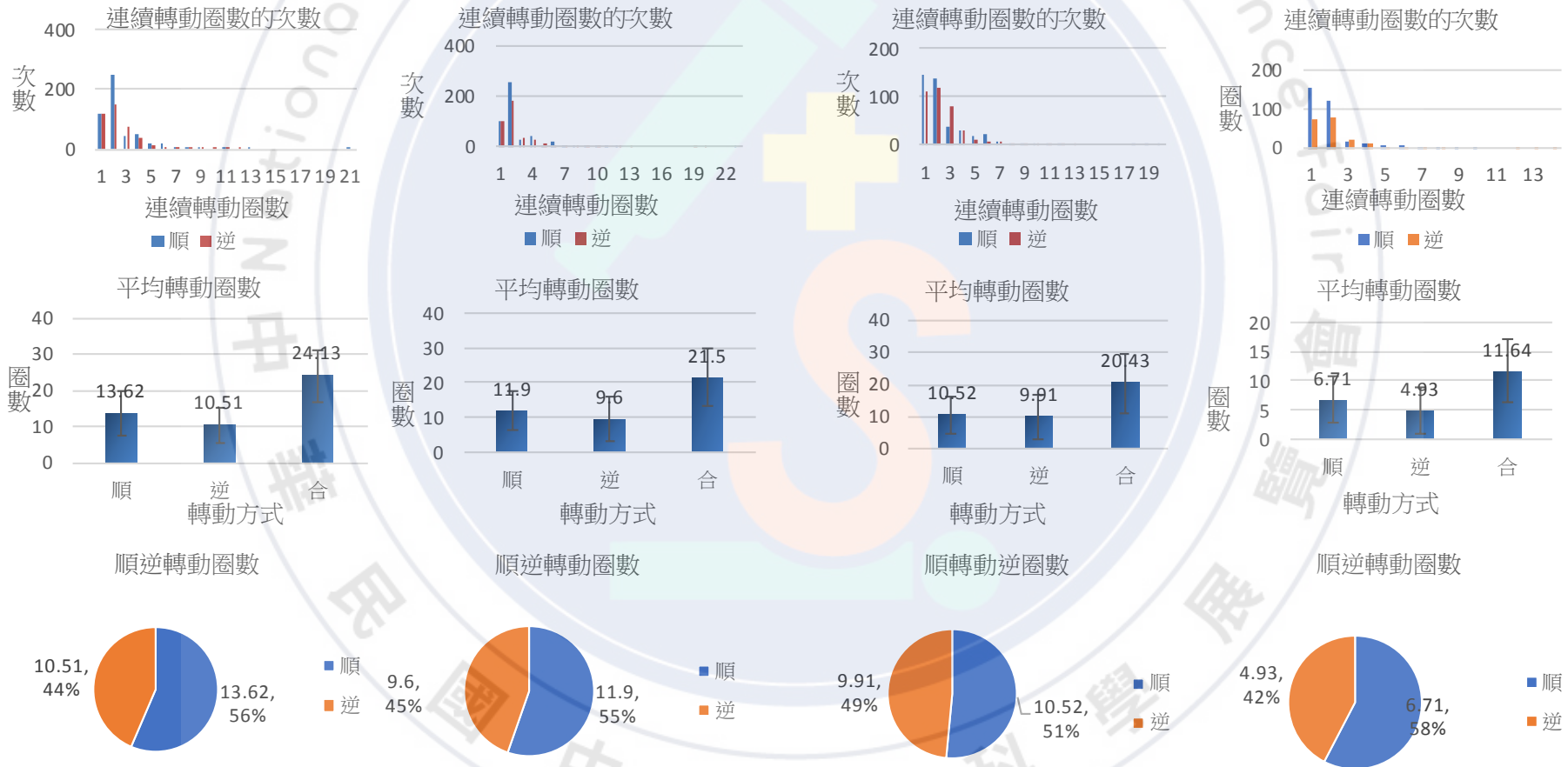


圖 10 下擺重為0.92g時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖 11 下擺重為2.5g時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖 12 下擺重為3.85g時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖 13 下擺重為8.48g時的順逆轉動次數及轉動圈數

二、探討不同擺重下雙擺的轉動現象(2/2)

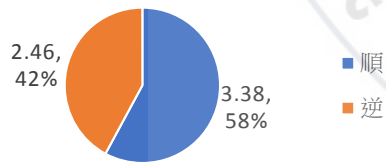
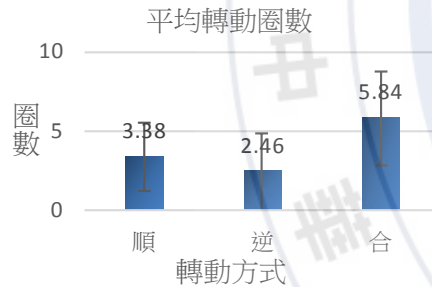
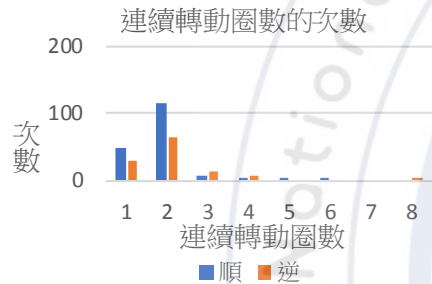


圖14 下擺重為16.3g時的順逆轉動次數及轉動圈數

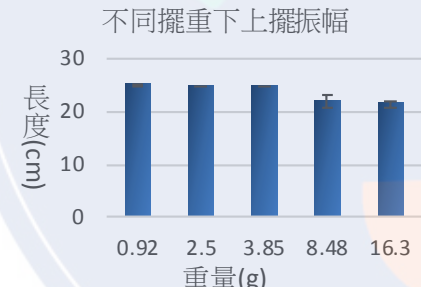
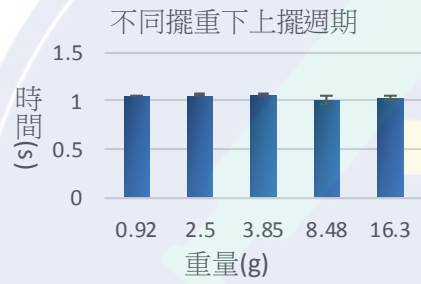


圖16 不同擺重下上擺的週期與振幅

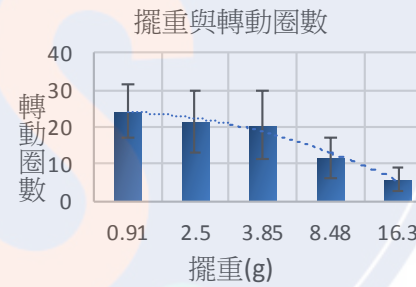
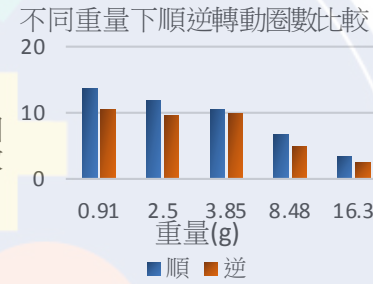
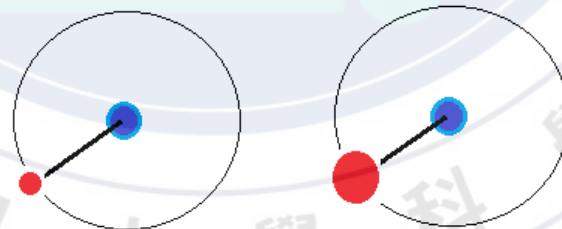


圖15 不同重量下轉動圈數的比較



- 一、不同擺重下，初始轉動方向次數較多(順大於逆)(圖15)。
- 二、連續轉動圈數多為1-3圈(圖10-14)。
- 三、擺重越大，所需臨界能量較大，轉動圈數越少(圖39)。
- 四、因耦合作用，週期沒有規則性(圖16)。
- 五、因擺重越大，下擺耦合作用越明顯，上擺振幅越小(圖15)。

三、探討不同擺長下雙擺的轉動現象(1/2)

分別利用下擺重7.13cm、10.2cm、13.11cm、15.92cm、19.04cm找出100次實驗後，連續轉動圈數的圈數、順逆轉動圈數、上擺的週期與振幅的平均值(圖18-23)

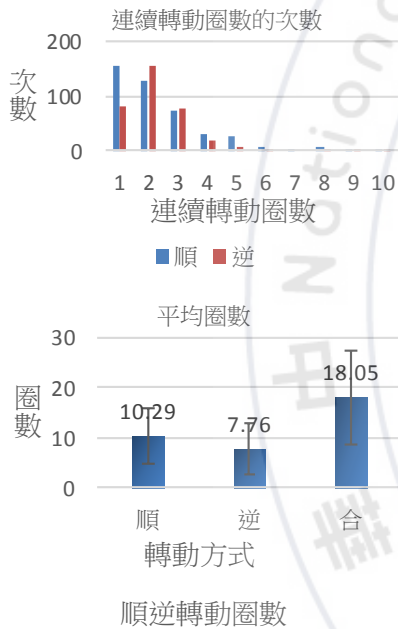


圖18 下擺長為7.13cm時的順逆轉動次數及轉動圈數

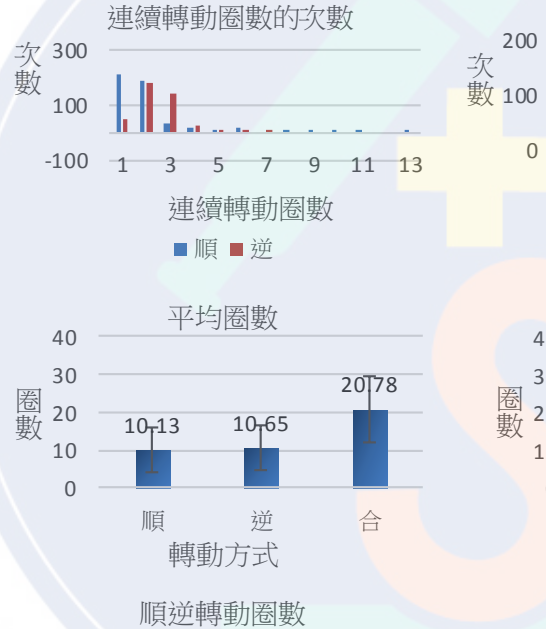


圖19 下擺長為10.2cm時的順逆轉動次數及轉動圈數

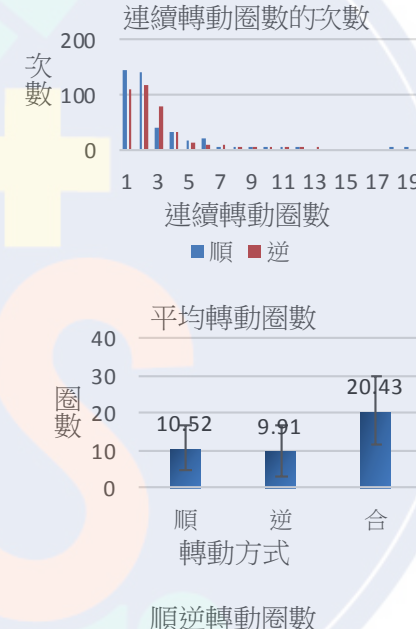


圖20 下擺長為13.11cm時的順逆轉動次數及轉動圈數

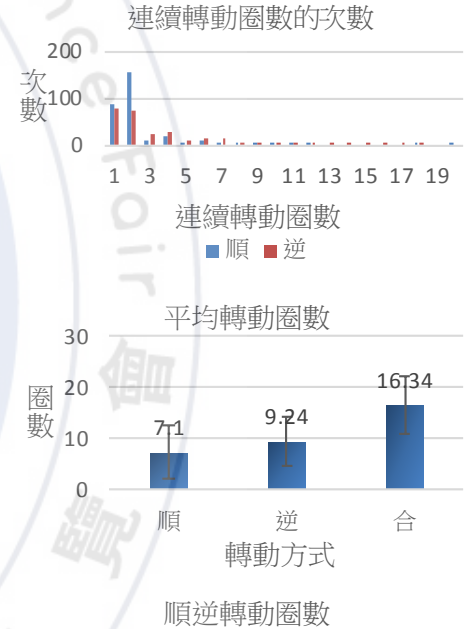


圖21 下擺長為15.92cm時的順逆轉動次數及轉動圈數

三、探討不同擺長下雙擺的轉動現象(2/2)

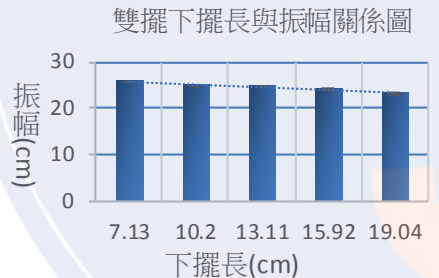
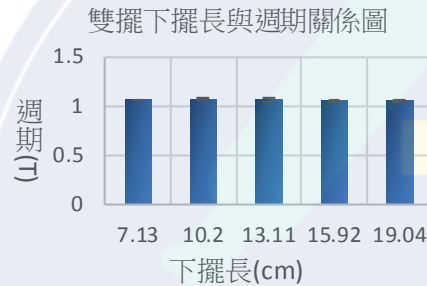
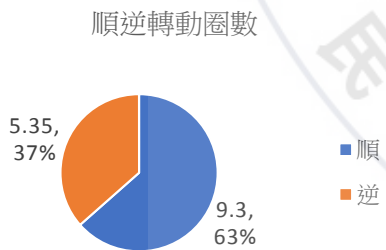
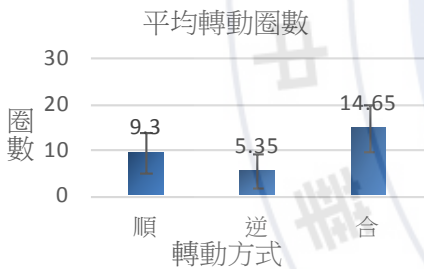
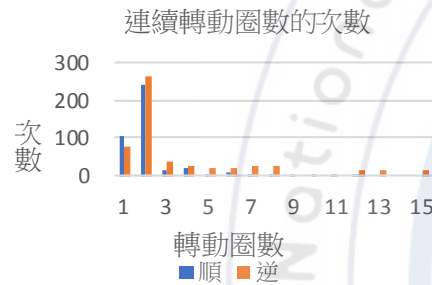


圖24 不同擺長下上擺的週期與振幅

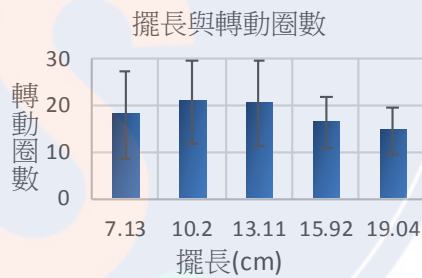
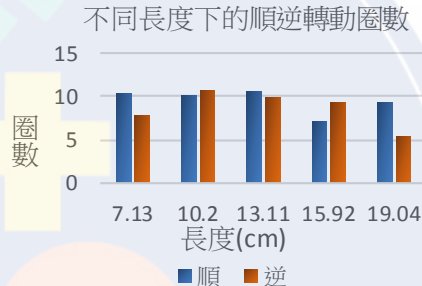


圖23 不同擺長下轉動圈數的比較

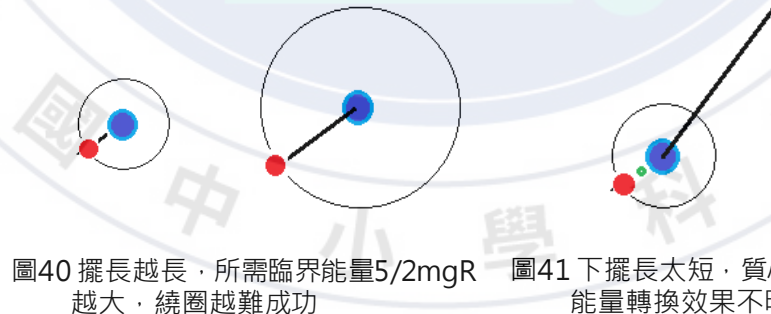


圖22 下擺長為19.04cm時的順逆轉動次數及轉動圈數

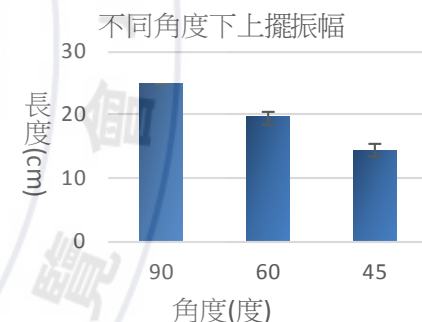
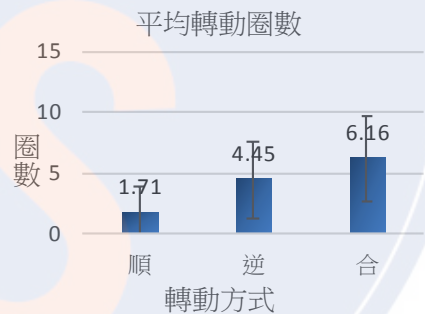
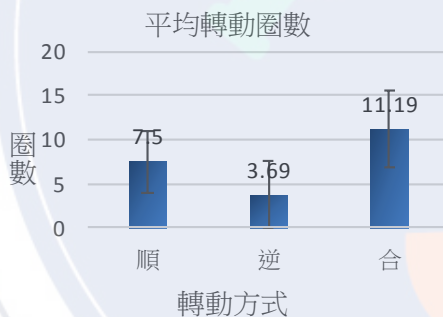
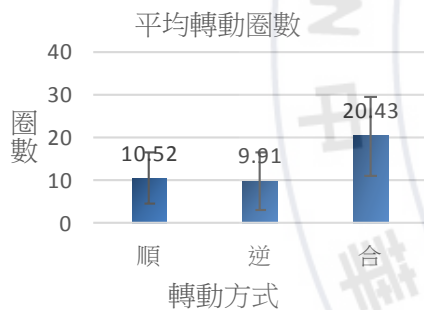
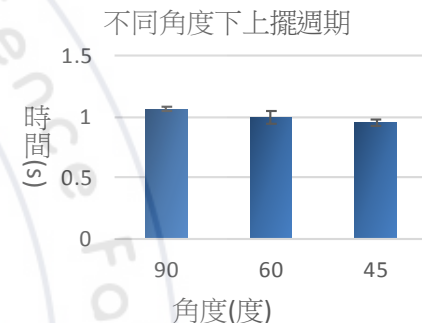
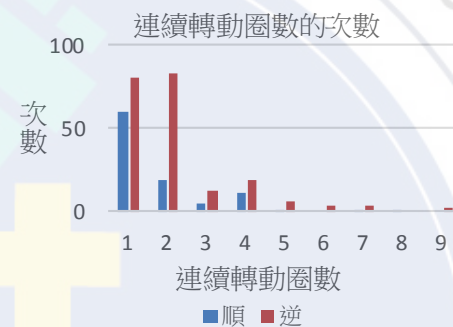
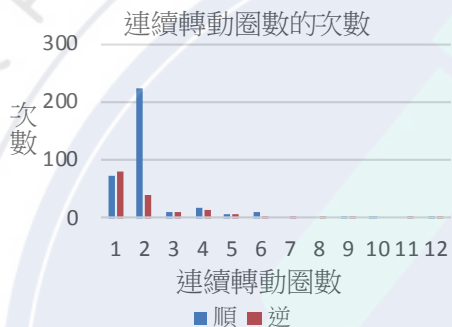
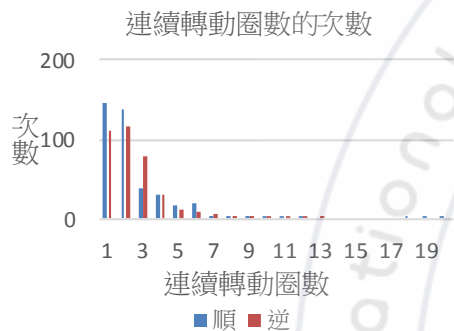
圖40 擺長越長，所需臨界能量 $5/2mgR$ 越大，繞圈越難成功

圖41 下擺長太短，質心接近，能量轉換效果不明顯

- 一、不同擺長下長度與轉動方向無相關性(圖23)。
- 二、連續轉動圈數多為1-3圈(圖18-22)。
- 三、擺長越長，所需臨界能量較大，轉動圈數越少(圖40)。
- 四、但當擺長過短時質心接近，耦合效果不佳，轉動圈數較少(圖41)。
- 五、因耦合作用週期沒有規則性(圖24)。
- 六、擺長越長，下擺耦合作用明顯，上擺振幅越小(圖24)。

四、探討不同擺角下雙擺的擺動現象(1/2)

分別利用下擺角90度、60度、45度找出100次實驗後，連續轉動圈數的圈數、順逆轉動圈數、上擺的週期與振幅的平均值(圖25-28)



順逆轉動圈數

順逆轉動圈數

順逆轉動圈數

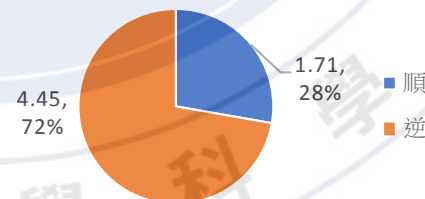
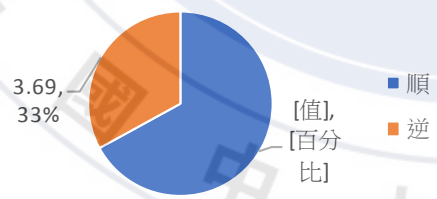
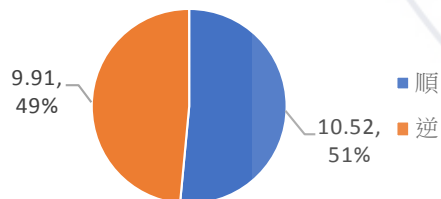


圖26 擺角為90°時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖27 擺角為60°時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖28 擺角為45°時的順逆轉動次數及轉動圈數

圖30不同擺角下上擺的週期與振幅

四、探討不同擺角下雙擺的擺動現象(2/2)

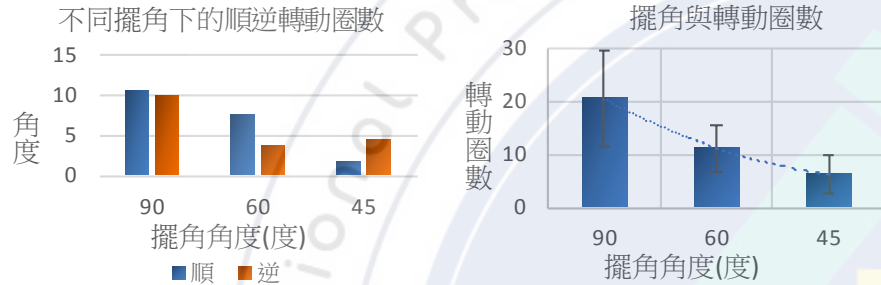


圖29 不同擺角下轉動圈數的比較

- 一、不同擺角下角度與轉動方向無相關性(圖29)。
- 二、連續轉動圈數多為1-3圈(圖26-28)。
- 三、擺角越大，產生臨界能量較大，轉動圈數越多。
- 四、擺角較小時，週期較小(圖30)。
- 五、擺角越小時，能量越小，使下擺不易超過臨界能量，轉動圈數較少(圖29)。

五、探討雙擺的轉動原理(1/2)

(一) 初始轉動

我們利用雙擺總能量公式

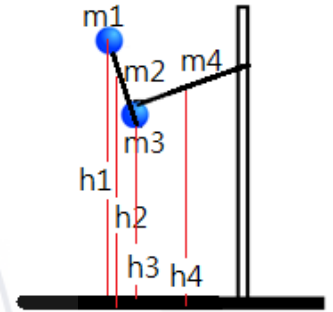
I 為下擺以質心為轉軸之轉動慣量

ω 為下擺轉動角速度

$$\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right]$$

$$m_1gh_1 + m_2gh_2 + m_3gh_3 + m_4gh_4$$

找出上擺半個週期後靜止時的總能量



不同擺重下上擺擺動半週期後總能量及轉動圈數

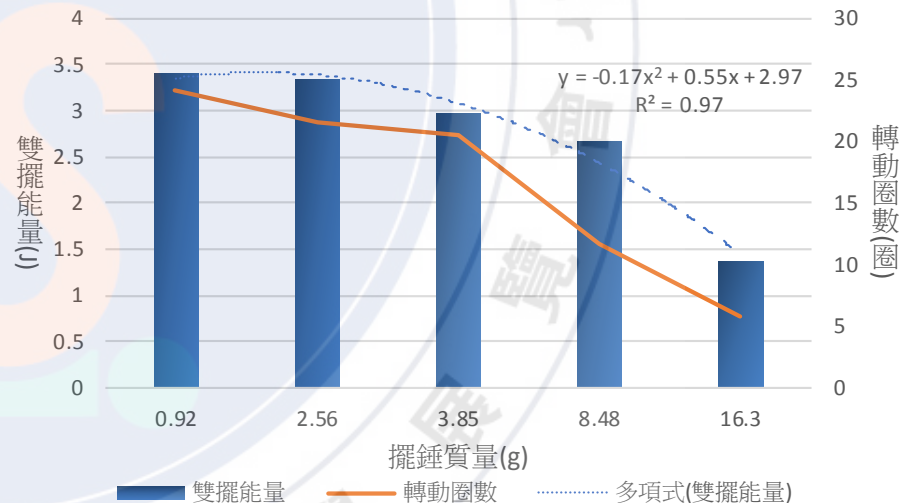


圖32 不同擺重下雙擺擺動半次後總能量及轉動圈數

當擺重越大，產生摩擦力越大，上擺擺動半個週期後的總能量越小，轉動次數也越少(圖32)。

五、探討雙擺的轉動原理(2/2)

(二)連續轉動

我們找到連續轉圈時(圖33)，下擺所具有的能量，探討是否高於臨界能量， $5/2mgR(0.012J)$

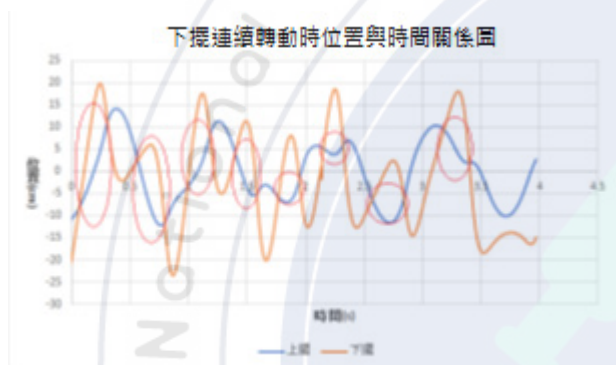


圖33 下擺連續轉動時的位置與時間關係圖

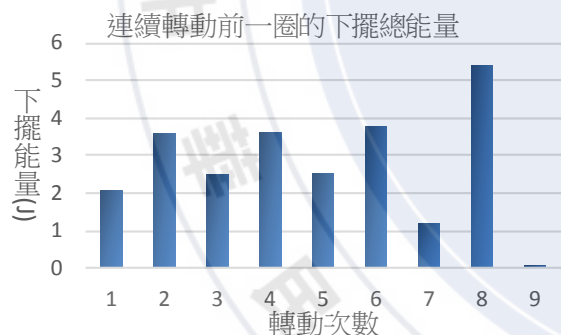
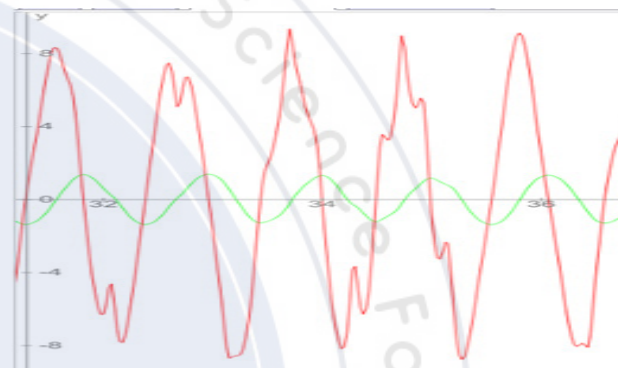


圖34 續轉動動前一圈的下擺總能量

- 一、當下擺的能量大於臨界能量，會產生繞圈現象。
- 二、因上下擺的耦合作用，所以連續繞圈中，下擺能量有大有小，不具有規則性(圖34)。

六、比較動畫模擬與真實雙擺擺動情形

我們將實驗參數放入程式模擬，比較差異性。



雙擺上下擺錘擺動時的y-t圖

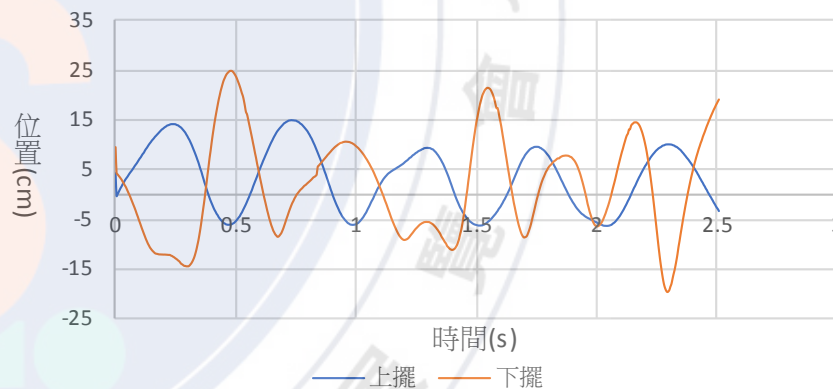


圖35 程式模擬雙擺及實作的y-t圖比較

因程式中的雙擺的擺棒質量皆為零，所以兩者圖形並不吻合(圖35)，但可顯示出雙擺運動的複雜性。

結論

- 一、雙擺擺動時，因上下擺之間產生耦合作用，導致週期與振幅皆小於複擺。
- 二、由於上下擺錘相對位置、摩擦力等變因產生耦合作用的不確定性，所以雙擺擺動前2圈模式較為固定，但通常第3圈後開始產生混沌現象。
- 三、雙擺擺動的過程中，下擺繞圈運動易出現在兩端點處，通常出現連續繞圈次數為1-3次，此時上擺動能最小，下擺動能最大，容易產生轉圈現象。
- 四、下擺重越大時，所需臨界能量變大，轉圈次數變少，初始方向轉圈數大於另一方向，振幅變小。
- 五、下擺長越長時，因所需臨界能量變大，轉圈次數變少，振幅變小，但擺長過小時會因雙擺錘質心接近影響轉圈效果。
- 六、下擺角越小時，因初始能量較小，轉圈臨界能量大小不變，所以轉圈次數變少，週期及振幅也變小。
- 七、當下擺重越大時，上擺擺動半個週期後總能量越小，轉動圈數也越少。
- 八、連續擺動時，當上擺位於端點，下擺的總能量雖不固定，但只要持續大於臨界能量($5/2mgR$)，就會產生成功的連續轉圈運動。
- 九、真實擺動與模擬程式中，因實驗中擺棒質量不為零，所以上擺擺動方式接近但下擺有差異。

參考資料及其他

- 一、James Gleick原著；林和譯(民80)。混沌-不測風雲的背後。台北：天下文化。
- 二、作者不詳(民101)。維基百科-雙擺，取自：<https://www.itread01.com/content/1546089795.html>
- 三、作者不詳(民98)。科技與科學，取自：
<https://blog.toright.com/posts/36/chaos-theory-%E6%B8%BE%E6%B2%8C%E7%90%86%E8%AB%96.html>
- 四、作者不詳。雙擺系統的動畫模擬，
取自：<https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>
- 五、王尊信(民102)。鉛直圓周運動，取自：<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=38833>