

# 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組 物理科

第二名

030106

誰是大老千—骰子重心與機率的探討

學校名稱：臺中市立爽文國民中學

作者：  國二 林湘穎  國二 歐家安  國二 張祐鉸	指導老師：  徐世賢  曾明騰
---	-----------------------------

關鍵詞：骰子、機率、重心

## 摘要

本次實驗成功製作了二十顆不同重心的骰子以進行不同因素的探討，其中實驗最成功的地方在於我們於 2cm\*2cm\*2cm 的骰子投擲結果中取得了兩條 R<sup>2</sup> 值很高之線性公式，其中一條公式可以讓我們任意製作出「某個點數機率偏高的骰子」；另一條公式可以讓我們任意製作出現大的機率或是出現小的機率偏高的骰子，且其中一條公式經過「偏移比例」的方式換算能成功的預測出在不同尺寸骰子的重心的偏移對機率的影響。

另外本實驗也嘗試由「控制力量」、「控制角度」和「控制投擲面的方向」三方面來進行研究，不過在本實驗中所得到的數據只能觀察到「控制投擲面的方向」確實會對機率有所影響，但無法觀察到任何線性與規律的存在。

## 壹、前言

### 一、研究動機

平時在看電視或看電影時，都會看到賭場裡會有骰子的賭具，電影中的一些大老千就會用很多手法如：「在骰子裡灌鉛」這種物理性改變的手法，來提升自己賭贏機率，例如在骰子裡灌鉛這種物理性改變的手法，更有一些技術派的賭徒會去練習一些投擲技巧來讓自己能控制投擲骰子的結果。但這些影片中的知識都是真的嗎？我們心理產生了疑問，因此在跟老師討論後，決定以「更改重心探討機率」作為我們這次的題目。

### 二、文獻探討

在骰子的相關研究中，大部分的研究都在於骰子的疊高、Sicherman Dice 的探討或是魔術骰的研究，其相關科展報告如下所示：

- (一) 中華民國第 45 屆中小學科學展覽會--耍「薛骰」— Sicherman Dice 的探討
- (二) 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會--疊疊高升-骰子爬升的因素探討
- (三) 臺灣二〇〇四年國際科學展覽會—由 6 面 Sicherman 骰子來分析 n 面的 Sicherman 骰子
- (四) 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會--驚爆骰子樂之吹牛大王--研究骰子「一點」出現的組合並找出規律性
- (五) 中華民國第 50 屆中小學科學展覽會--十八啦!擲骰子，求組合數—在研究點數的排列組合機率

而本實驗的主題在於重心對機率的影響，目前在網路搜尋上並沒有找到類似的作品，因此以「重心對機率的影響」作為本次科展的主題，並不會有重複性問題。

### 三、研究目的

利用壓克力與磁鐵製作數個不同重心的 2cm\*2cm\*2cm 與 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子，設定以三種方式進行重心的偏移—重心往點數三的面偏移、往點數面一、二、三交界點偏移以及往點數面一三交線中點偏移，預期能從其中觀察到『點數四』的機率以及『點數大』的機率會有顯著的差異出現，將製作出來的骰子利用不同的方式進行投擲進行不同目的的研究，其研究目的如下所示：

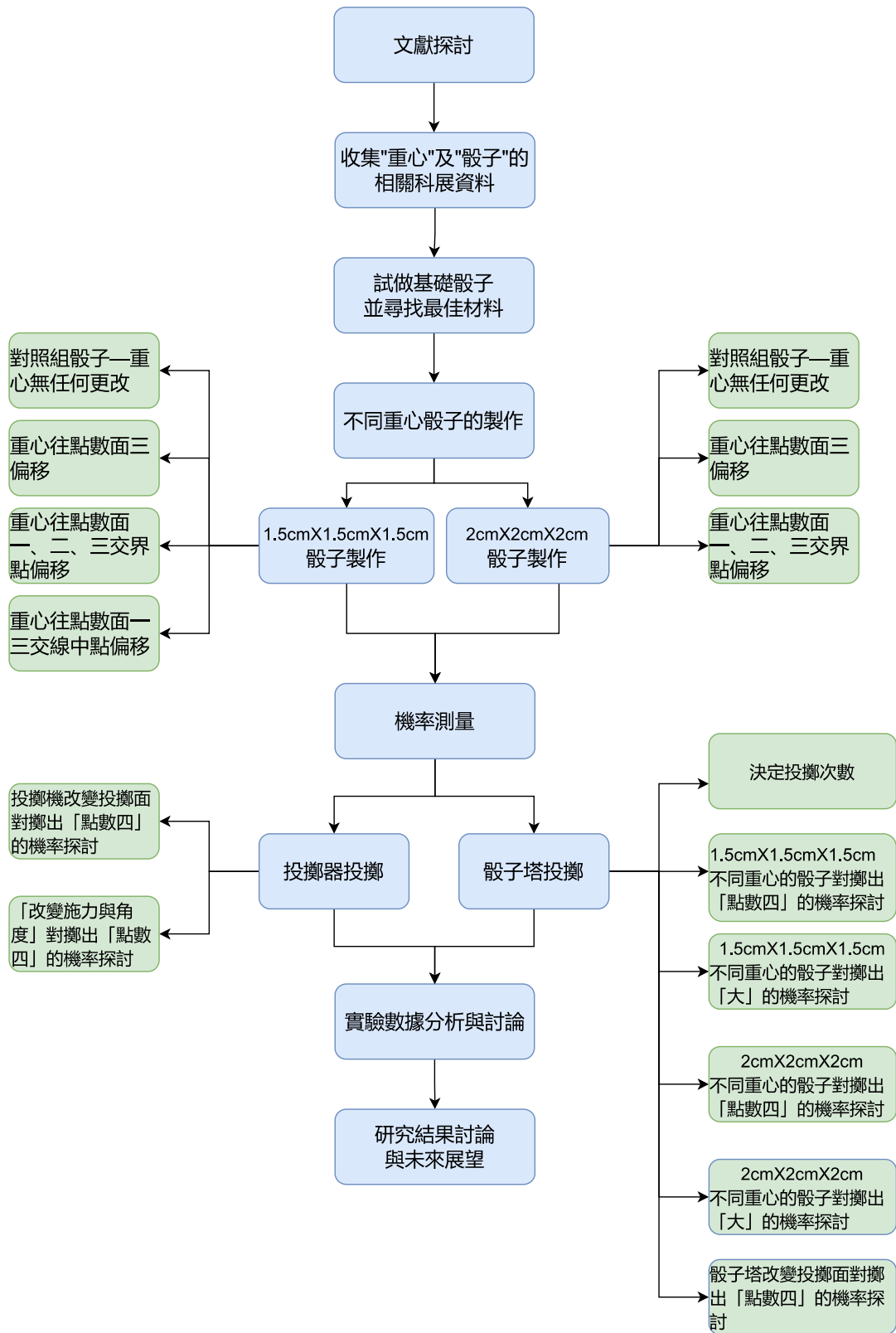
- (一) 將骰子以隨機投擲（骰子塔投擲），研究重心偏移對機率的影響。
- (二) 以自製投擲器進行投擲，投擲過程中控制投擲面並固定角度與施力，對不同重心的骰子進行投擲，研究投擲面與重心偏移對機率的影響。
- (三) 固定骰子，利用自製投擲器改變投擲角度進行投擲，研究投擲角度對機率的影響。
- (四) 固定骰子，利用自製投擲器改變施力進行投擲，研究施力對機率的影響。
- (五) 固定骰子，利用自製投擲器與骰子塔進行投擲，投擲過程中控制投擲面，研究投擲面對機率的影響。

### 貳、 研究設備及器材

		
電子天平 (最小刻度 0.01g、最大秤重 500g)	壓克力專用膠水	骰子塔
		
自製骰子投擲發射器	壓克力 (5mmX5mmX5mm)	磁鐵 (5mmX5mmX5mm)
		
自製不同重心的骰子		

### 參、研究過程或方法

#### 一、實驗流程



## 二、骰子的製作

為了改變重心，本實驗在製作時思考了許多方法，如果依照電影中的作法將骰子挖空，接著再灌入不同重量的物質來改變重心，其實不好控制重心的位置且製作上難度很高。經過多方考慮後，本實驗決定採用分割的方法，先找可進行雷射切割的壓克力廠商製作每邊為 5mm 的正立方體，然後再去尋找磁鐵廠商購買每邊為 5mm 的正立方體磁鐵，最後依想得到的重心位置來進行替換磁鐵或是進行挖空的動作來達到重心的改變。

### (一) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子編號說明

1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子是由 27 顆立方體所組成，每一面的編號順序如圖 1 所示，正立方體的編號原則為：「層-各層號碼」，例如：骰子正中心的正立方體為第二層編號為 5 的正立方體，在接續的實驗中將以 2-5 表示。

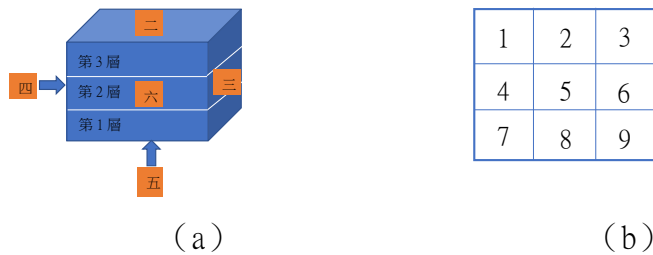


圖 1 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子各立方體編碼說明圖 (a) 骰子點數面與各層的關係圖。(b)各層每顆骰子的編碼 (由點數面二上方往下觀看的俯視圖)

除此之外，我們將骰子的中心點 (0,0,0) 定在骰子的正中央，並以此點畫出三維的 X、Y、Z 軸，X 軸為點數三跟四的面，其中靠近 3、6、9 的面為骰子的點數三，靠近 1、4、7 的面為骰子的點數四；Y 軸為點數一跟六的面，其中靠近 7、8、9 的面為骰子的點數六；靠近 1、2、3 的面為骰子的點數一；Z 軸為點數二跟五的面，其中第三層上面為骰子點數二，第一層的底面為點數五。

### (二) 2cm\*2cm\*2cm 骰子編號說明

2cm\*2cm\*2cm 的骰子是由 64 顆立方體所組成，每一面的編號順序如圖 2 所示，正立方體的編號原則與點數的命名情形皆與 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子相同，其示意圖，如圖 2 所示。

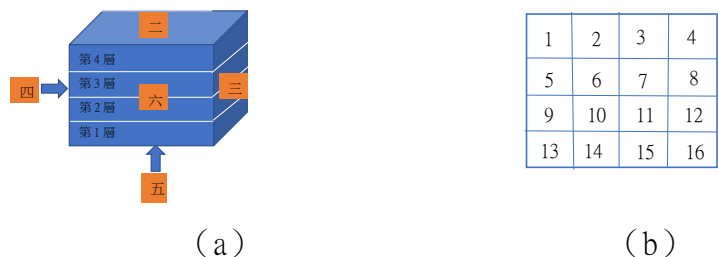


圖 2 2cm\*2cm\*2cm 的骰子各立方體編碼說明圖 (a) 骰子點數面與各層的關係圖。(b)各層每顆骰子的編碼。

### (三) 不同重心的骰子設計與製作

本實驗製作了兩種不同尺寸的骰子，其中 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子做了五種重心的變化，2cm\*2cm\*2cm 的骰子做了十一種重心的變化，依據骰子尺寸、實驗目的與重心偏移程度來對各個骰子進行命名，其命名原則如下所示：

#### 骰子尺寸-偏移方式-偏移程度

骰子尺寸：1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 命名為 3；2cm\*2cm\*2cm 命名為 4。

偏移方式：A：重心往點數三的面偏移。

B：重心往點數一、二、三的交界點偏移。

C：重心偏向點數一跟三面的交界邊的骰子。

偏移程度：1,2……數字越小表示偏移程度越小。

除此之外，考慮總重量的一致性，本實驗還製作了四顆重心都在原點處的對照組骰子，其編號分別為 3-normal（1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子無任何磁鐵更換），4-normal（2cm\*2cm\*2cm 骰子無任何磁鐵更換），4A-normal（2cm\*2cm\*2cm 骰子更換八顆磁鐵），4B-normal（2cm\*2cm\*2cm 骰子更換四顆磁鐵），以上所完成的骰子其重量數據，如下表 1 與表 2 所示：

表 1 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子各立方體重量測量數據

骰子編號	編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3-normal	第三層	0.14	0.13	0.14	0.13	0.12	0.12	0.13	0.13	0.13
	第二層	0.13	0.13	0.13	0.12	0.14	0.13	0.14	0.13	0.14
	第一層	0.13	0.12	0.12	0.13	0.15	0.13	0.15	0.14	0.15
3A-1	第三層	0.12	0.14	0.16	0.15	0.12	0.13	0.13	0.13	0.12
	第二層	0.14	0.16	0.14	0.14	0.8	0.8	0.15	0.14	0.13
	第一層	0.14	0.12	0.15	0.13	0.13	0.12	0.11	0.15	0.13
3A-2	第三層	0.13	0.13	0.13	0.14	0.13	0.1	0.12	0.12	0.11
	第二層	0.13	0.13	0.14	0.13	0.13	0.82	0.14	0.13	0.13
	第一層	0.13	0.13	0.14	0.13	0.15	0.13	0.14	0.15	0.12
3B	第三層	0.13	0.14	0.81	0.13	0.13	0.14	0.14	0.14	0.13
	第二層	0.14	0.13	0.11	0.14	0.14	0.13	0.13	0.12	0.13
	第一層	0.13	0.13	0.13	0.14	0.13	0.13	0.14	0.11	0.14
3C	第三層	0.14	0.15	0.13	0.12	0.13	0.13	0.13	0.14	0.15
	第二層	0.13	0.15	0.80	0.14	0.12	0.14	0.14	0.13	0.13
	第一層	0.13	0.14	0.14	0.12	0.12	0.11	0.13	0.13	0.13

說明：表格重量數據皆為公克。

表 2 2cm\*2cm\*2cm 骰子各立方體重量測量數據

骰子編號	編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
4-normal	第四層	0.14	0.13	0.12	0.15	0.13	0.14	0.14	0.14	0.14	0.13	0.1	0.14	0.12	0.12	0.12	0.12	
	第三層	0.14	0.13	0.14	0.13	0.15	0.13	0.13	0.13	0.13	0.15	0.13	0.14	0.15	0.13	0.14	0.14	
	第二層	0.13	0.13	0.11	0.13	0.12	0.12	0.14	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.12	0.12	0.15	0.14	0.14
	第一層	0.14	0.14	0.14	0.15	0.14	0.14	0.15	0.15	0.12	0.13	0.13	0.14	0.12	0.15	0.14	0.13	
4A-normal	第四層	0.13	0.14	0.14	0.13	0.12	0.12	0.13	0.13	0.14	0.15	0.12	0.12	0.14	0.13	0.13	0.13	
	第三層	0.13	0.11	0.14	0.13	0.11	0.79	0.81	0.16	0.13	0.8	0.78	0.12	0.15	0.12	0.12	0.14	
	第二層	0.12	0.14	0.13	0.13	0.12	0.79	0.82	0.15	0.15	0.82	0.81	0.15	0.13	0.14	0.15	0.13	
	第一層	0.13	0.15	0.13	0.14	0.12	0.14	0.15	0.14	0.14	0.13	0.15	0.13	0.14	0.14	0.13	0.14	
4A-1	第四層	0.13	0.11	0.13	0.12	0.11	0.14	0.12	0.11	0.1	0.13	0.13	0.14	0.13	0.13	0.13	0.13	
	第三層	0.14	0.13	0.13	0.14	0.12	0	0.13	0.14	0.13	0	0.12	0.12	0.11	0.14	0.15	0.15	
	第二層	0.14	0.16	0.13	0.14	0.15	0	0.13	0.14	0.13	0	0.13	0.13	0.14	0.13	0.14	0.12	
	第一層	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.14	0.15	
4A-2	第四層	0.14	0.14	0.15	0.12	0.12	0.1	0.11	0.12	0.12	0.11	0.16	0.14	0.13	0.14	0.14	0.12	
	第三層	0.14	0.14	0.12	0.13	0.14	0.14	0.8	0.14	0.12	0.13	0.79	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13	
	第二層	0.13	0.14	0.14	0.13	0.15	0.14	0.76	0.13	0.15	0.15	0.8	0.13	0.13	0.13	0.13	0.12	
	第一層	0.13	0.12	0.11	0.12	0.13	0.14	0.12	0.11	0.12	0.16	0.15	0.14	0.12	0.13	0.13	0.15	
4A-3	第四層	0.13	0.14	0.12	0.15	0.12	0.1	0.16	0.15	0.11	0.13	0.13	0.13	0.12	0.14	0.12	0.15	
	第三層	0.15	0.15	0.13	0.14	0.13	0.81	0.13	0.79	0.15	0.79	0.12	0.83	0.15	0.14	0.14	0.15	
	第二層	0.16	0.15	0.13	0.12	0.12	0.79	0.12	0.82	0.14	0.77	0.12	0.8	0.11	0.12	0.13	0.1	
	第一層	0.14	0.13	0.14	0.14	0.11	0.12	0.13	0.13	0.14	0.12	0.14	0.12	0.16	0.15	0.13	0.12	
4A-4	第四層	0.13	0.14	0.13	0.12	0.13	0.14	0.12	0.15	0.13	0.14	0.13	0.13	0.13	0.13	0.12	0.13	
	第三層	0.14	0.13	0.13	0.14	0.14	0.13	0.12	0.79	0.13	0.15	0.14	0.8	0.12	0.12	0.12	0.13	
	第二層	0.15	0.13	0.15	0.13	0.13	0.14	0.14	0.8	0.11	0.12	0.13	0.79	0.12	0.12	0.15	0.13	
	第一層	0.16	0.14	0.16	0.15	0.13	0.14	0.11	0.14	0.13	0.14	0.11	0.14	0.13	0.14	0.13	0.12	
4A-5	第四層	0.12	0.15	0.15	0.16	0.15	0.14	0.16	0.12	0.12	0.13	0.13	0.12	0.12	0.13	0.14	0.13	
	第三層	0.14	0.12	0.14	0.12	0.12	0.12	0.8	0.81	0.12	0.12	0.81	0.79	0.11	0.14	0.13	0.15	
	第二層	0.11	0.14	0.11	0.1	0.11	0.14	0.8	0.8	0.12	0.12	0.8	0.8	0.14	0.13	0.13	0.13	
	第一層	0.13	0.13	0.11	0.13	0.11	0.12	0.11	0.13	0.12	0.12	0.1	0.13	0.11	0.15	0.13	0.13	
4B-normal	第四層	0.12	0.11	0.12	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.11	0.13	0.13	0.12	0.12	0.12	0.11	0.13	
	第三層	0.13	0.13	0.12	0.12	0.12	0.84	0.13	0.12	0.13	0.14	0.81	0.11	0.12	0.1	0.13	0.13	
	第二層	0.14	0.13	0.14	0.15	0.15	0.81	0.14	0.13	0.12	0.13	0.81	0.13	0.15	0.13	0.13	0.12	
	第一層	0.13	0.11	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.13	0.12	0.14	0.14	0.13	0.14	0.13	
4B-1	第四層	0.12	0.11	0.12	0.11	0.14	0.12	0.12	0.11	0.11	0.12	0.13	0.11	0.15	0.12	0.12	0.13	
	第三層	0.14	0.14	0.12	0.14	0.13	0.81	0.82	0.13	0.14	0.12	0.82	0.13	0.14	0.12	0.13	0.17	
	第二層	0.12	0.11	0.14	0.13	0.14	0.17	0.78	0.14	0.11	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.14	0.14	

說明：表格重量數據皆為公克。

	第一層	0.15	0.14	0.15	0.12	0.14	0.11	0.14	0.11	0.16	0.13	0.15	0.12	0.14	0.14	0.13	0.13
4B-2	第四層	0.14	0.14	0.83	0.8	0.16	0.14	0.14	0.8	0.11	0.11	0.12	0.1	0.12	0.11	0.11	0.13
	第三層	0.13	0.13	0.16	0.13	0.13	0.13	0.14	0.15	0.15	0.18	0.14	0.15	0.15	0.13	0.13	0.13
	第二層	0.12	0.12	0.14	0.11	0.12	0.12	0.16	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.14	0.13	0.13	0.13
	第一層	0.13	0.14	0.14	0.14	0.12	0.12	0.12	0.16	0.13	0.13	0.13	0.12	0.8	0.11	0.12	0.1
4B-3	第四層	0.15	0.11	0.83	0.79	0.12	0.13	0.11	0.77	0.12	0.16	0.14	0.14	0.12	0.13	0.13	0.11
	第三層	0.16	0.15	0.16	0.13	0.12	0.16	0.14	0.15	0.15	0.13	0.13	0.13	0.14	0.13	0.14	0.15
	第二層	0.17	0.16	0.14	0.16	0.15	0.15	0.16	0.16	0.16	0.81	0.14	0.16	0.15	0.18	0.14	0.14
	第一層	0.13	0.18	0.15	0.15	0.16	0.15	0.16	0.16	0.18	0.16	0.16	0.17	0.14	0.14	0.19	0.16
4B-4	第四層	0.13	0.14	0.81	0.84	0.16	0.14	0.15	0.79	0.14	0.13	0.14	0.15	0.13	0.11	0.12	0.14
	第三層	0.17	0.12	0.13	0.16	0.14	0.13	0.81	0.1	0.14	0.12	0.11	0.13	0.14	0.15	0.16	0.11
	第二層	0.14	0.13	0.14	0.11	0.12	0.14	0.14	0.11	0.13	0.16	0.12	0.15	0.1	0.14	0.13	0.13
	第一層	0.17	0.18	0.16	0.16	0.13	0.11	0.1	0.13	0.15	0.17	0.14	0.13	0.17	0.15	0.15	0.17
4B-5	第四層	0.1	0.12	0.87	0.79	0.12	0.1	0.14	0.88	0.14	0.11	0.12	0.14	0.16	0.15	0.15	0.15
	第三層	0.12	0.14	0.11	0.85	0.11	0.13	0.13	0.13	0.12	0.13	0.13	0.14	0.15	0.16	0.11	0.14
	第二層	0.12	0.12	0.12	0.16	0.15	0.14	0.12	0.13	0.15	0.12	0.15	0.14	0.14	0.13	0.11	0.13
	第一層	0.18	0.12	0.13	0.13	0.12	0.11	0.13	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.12	0.13	0.12	0.12
4B-6	第四層	0.13	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.12	0.11	0.13	0.12	0.15	0.15	0.13	0.12	0.12	0.11
	第三層	0.13	0.15	0.12	0.11	0.11	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0.12	0.11	0.11	0.12	0.13	0.12
	第二層	0.13	0.14	0.14	0.12	0.13	0	0.1	0.12	0.13	0	0	0.14	0.13	0.13	0.11	0.15
	第一層	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13	0.14	0.12	0.12	0.14	0.13	0.13	0.13	0.15

說明：表格重量數據皆為公克。

### 三、投擲方法

#### (一) 骰子塔投擲方法：

##### 1. 決定投擲次數：

本實驗在投擲方法上，採用桌遊遊戲中的骰子塔來作為隨機的且公平的投擲器材，在投擲時，每次都將骰子放在骰子塔最上層使其自由的滾落，而第二次投擲時就以上一次的點數面朝上，再依同一個方法使其自由的落下，並紀錄其實驗數據，如表 3 所示。

理想上骰子每面擲出的機率應為  $1/6$  (16.67%)，但根據大數法則，該機率所需的測量樣本數需要很大才有辦法達到，因此本實驗先由投擲 1000 次中，觀察每一百次的累計機率來找尋機率達到  $1/6$  所需的最少投擲次數。



表 3 骰子塔投擲 1000 次點數分布情形

骰子名稱	總次數	100 次	200 次	300 次	400 次	500 次	600 次	700 次	800 次	900 次	1000 次
3-normal	一	18	34	52	72	90	107	127	144	162	181
	二	18	35	52	66	86	104	116	135	152	167
	三	17	37	55	74	90	107	123	138	155	170
	四	17	32	51	65	78	93	108	124	139	156
	五	16	36	49	66	83	100	122	137	152	171
	六	14	26	41	57	73	89	104	122	140	155
4-normal	一	18	34	52	65	84	102	117	132	146	166
	二	19	40	55	75	93	111	133	146	161	178
	三	17	33	50	65	81	95	108	126	141	156
	四	15	32	44	65	81	99	116	134	152	168
	五	16	31	46	62	77	95	111	129	144	163
	六	15	30	53	68	84	98	115	133	156	169

說明：表格中所紀錄的數據，皆為累積次數。

2. 不同重心骰子的機率測量：

投擲方法與上述「決定投擲次數」相同，每個不同重心的骰子皆投擲 1000 次，依序完成 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 與 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子投擲 1000 次機率表格，如表 4 與表 5 所示。

表 4 與表 5 將於研究結果中，依四個面向來探討，其分別為：

- (1) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討
- (2) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數大」的機率探討
- (3) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討
- (4) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「點數大」的機率探討

表 4 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子投擲 1000 次機率表格

骰子編號	一	二	三	四	五	六
3-normal	18.1%	16.7%	17.0%	15.6%	17.1%	15.5%
3A-1	17.7%	14.5%	11.8%	25.3%	15.0%	15.7%
3A-2	10.6%	14.5%	14.1%	31.5%	15.2%	14.1%
3B	13.0%	12.8%	12.7%	22.9%	18.2%	20.4%
3C	24.8%	10.3%	11.2%	23.4%	17.1%	13.2%

表 5 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子投擲 1000 次機率表格

骰子編號	一	二	三	四	五	六
4A-normal	17.0%	16.5%	16.8%	16.4%	16.5%	16.8%
4A-1	16.0%	16.7%	17.0%	16.0%	16.0%	18.3%
4A-2	17.5%	18.7%	12.0%	22.3%	11.8%	17.7%
4A-3	12.5%	18.8%	13.5%	22.2%	15.7%	17.3%
4A-4	14.7%	14.8%	6.2%	33.5%	16.8%	14.0%
4A-5	13.5%	15.0%	4.5%	32.7%	16.8%	17.5%
4B-normal	16.6%	16.7%	16.7%	16.7%	17.0%	16.3%
4B-1	13.5%	15.9%	16.8%	17.0%	18.2%	18.6%
4B-2	13.5%	10.9%	11.6%	19.2%	24.8%	20.0%
4B-3	11.4%	10.7%	10.1%	19.6%	25.6%	22.6%
4B-4	5.8%	7.0%	7.2%	25.5%	30.0%	24.5%
4B-5	7.50%	9.00%	10.00%	22.00%	23.00%	28.50%

### 3. 固定投擲面對擲出「點數四」的機率探討

將 4-normal 與 4A-4 這兩顆骰子進行投擲，投擲時改以固定點數面一向上、三向後的方式投擲 600 次，並紀錄其實驗數據，如表 6 所示。

表 6 固定投擲面對擲出「點數四」的機率探討

骰子編號	一	二	三	四	五	六	總次數
4-normal	111 次	96 次	103 次	104 次	84 次	102 次	600 次
4A-4	85 次	81 次	41 次	202 次	93 次	98 次	600 次

#### (二) 投擲器投擲方法：

##### 1. 發射器製作：

想測量施力大小與角度，就必須要有一個能夠固定力道且固定角度的機器，我們利用了木板以及冰棒棍製作了一個發射器，其裝置如下圖 3 所示，此發射器利用橡皮筋的彈力來控制力大的大小，其中利用虎克定律彈力與伸長量會成正比先測出橡皮筋拉長的長度與與力量大小的關係，定位出 150 公克、200 公克、250 公克三種力量的位置，如圖 3 所示，並且在每次更換骰子的時候，更換一個新的橡皮筋並重新校正定位點排除彈性疲乏的可能性，以求達到施力的穩定性。



圖 3 投擲器橡皮筋力量大小定位說明圖

除此之外，發射器利用擋板的位置與高低來進行角度的調整，經過測量定位出 10 度、15 度、20 度、30 度四種角度，如圖 4 所示。

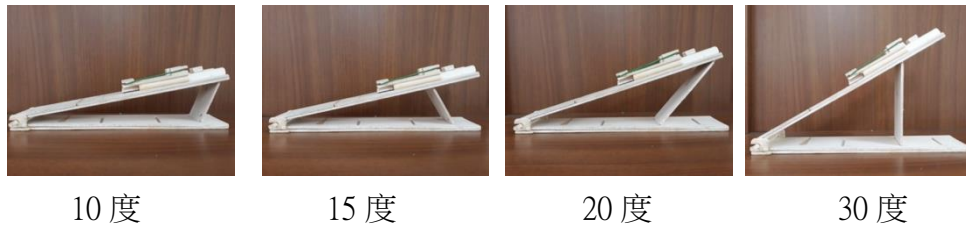


圖 4 投擲器角度大小說明圖

## 2. 投擲器的機率測量

### (1) 不同重心的骰子改變投擲面的機率測量

本實驗設計是希望能觀察到在不同面向上時，結果為點數四的機率或是出現大的機率會有明顯的不同，並且具有規律性的現象，因此在投擲時我們將骰子依點數面「一向上三向後」(1up)、「二向上三向後」(2up)、「三向上一向後」(3up)、「四向上一向後」(4up)、「五向上三向後」(5up)、「六向上三向後」(6up)的方式分別進行 100 次的投擲，我們分別用 4-normal、4A-1、4A-2、4A-4、4A-5、4B-5、4B-6 這七顆骰子依照上面的方式投擲，並紀錄其實驗數據結果，如表 7 所示。

表 7 改變不同骰子投擲面之期待結果機率表

骰子編號	1up 機率	2up 機率	3up 機率	4up 機率	5up 機率	6up 機率	總機率
4-normal	19.0%	10.0%	16.0%	20.0%	23.0%	10.0%	16.3%
4A-1	21.0%	25.0%	21.0%	17.0%	16.0%	11.0%	18.5%
4A-2	12.0%	13.0%	20.0%	11.0%	23.0%	16.0%	15.8%
4A-4	29.0%	23.0%	26.0%	27.0%	34.0%	20.0%	26.5%
4A-5	20.0%	28.0%	26.0%	27.0%	34.0%	35.0%	28.3%
4B-5	67.0%	62.0%	69.0%	67.0%	68.0%	61.0%	65.7%
4B-6	45.0%	51.0%	46.0%	42.0%	36.0%	40.0%	43.3%

說明：4B-5、4B-6 數據為出現點數大的機率，其餘數據皆為出現點數四的機率。

### (2) 固定骰子，改變「角度」、「施力」與「投擲面」的機率測量

我們根據骰子塔投擲的結果，取其中一個機率改變較大的骰子 4A-4 來作為投擲機的實驗骰子，投擲方式與上述相同，並依照下列三個實驗條件進行投擲並紀錄其實驗數據，如表 8 所示：

- 固定施力 150 克、發射角度分別為 10 度、15 度、20 度與 30 度的實驗
- 固定施力 200 克、發射角度分別為 10 度、15 度、20 度與 30 度的實驗
- 固定施力 250 克、發射角度分別為 10 度、15 度、20 度與 30 度的實驗

表 8 將於研究結果中，依三個面向來探討，其分別為：

- 「投擲面」對擲出「點數四」的機率探討
- 固定力量，「改變角度」對擲出「點數四」的機率探討
- 固定角度，「改變施力」對擲出「點數四」的機率探討

表 8 投擲機改變施力、改變角度與改變投擲面的數據表格

角度	施力	150g						200g						250g					
		點數	1up	2up	3up	4up	5up	6up	1up	2up	3up	4up	5up	6up	1up	2up	3up	4up	5up
10°	一	25	9	9	11	13	12	15	15	18	18	12	12	19	16	9	18	13	11
	二	17	15	8	14	19	15	17	18	17	21	12	21	14	26	15	18	15	12
	三	7	7	15	8	7	6	6	9	8	10	13	6	14	8	7	7	10	4
	四	26	29	36	34	36	40	29	23	26	27	34	20	24	28	34	32	32	37
	五	11	19	18	19	12	10	18	21	19	15	17	25	13	14	15	12	19	21
	六	14	21	14	14	13	17	15	14	12	9	12	16	16	8	20	13	11	15
15°	一	14	14	14	11	12	17	11	16	18	13	11	23	15	10	13	12	13	16
	二	13	14	20	19	13	10	18	15	10	19	19	14	11	21	14	9	17	12
	三	6	4	11	7	8	9	6	4	8	9	10	4	10	7	6	5	8	5
	四	35	38	33	34	38	36	33	35	36	29	32	30	37	35	31	37	39	35
	五	14	16	11	14	11	12	18	12	15	12	18	17	16	12	25	22	11	17
	六	18	14	11	15	18	16	14	18	13	18	10	12	11	15	11	15	12	15
20°	一	15	14	12	14	14	21	19	17	20	11	8	12	12	12	16	14	16	17
	二	18	15	10	12	11	16	13	15	15	11	14	16	18	19	18	17	15	19
	三	9	7	6	10	7	5	6	7	8	8	3	7	7	8	4	6	6	9
	四	26	28	44	33	38	32	30	34	27	40	38	43	31	29	34	32	29	26
	五	16	13	14	15	10	7	20	15	12	13	16	10	20	21	22	15	18	13
	六	16	23	14	16	20	19	12	12	18	17	21	12	12	11	6	16	16	16
30°	一							17	20	15	10	11	14						
	二							12	15	17	16	14	9						
	三							7	4	4	6	4	8						
	四							38	33	32	44	34	31						
	五							14	10	13	13	18	23						
	六							12	18	19	11	19	15						

說明：表格中所紀錄的數據單位皆為「次」。

## 肆、研究結果

### 一、重心計算

根據高中重心的計算公式：

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$x_G$  : X 的重心座標、 $m_a$ :小立方體的重量、 $x_b$ :小立方體的 X 座標；Y、Z 座標作法相同

本實驗定骰子正中央座標為 (0,0,0)，再依相對位置利用 Excel 寫出程式，將表 1 與表 4 的重量數據轉換為每顆骰子的重心位置，其重心如表 9、表 10-1 與表 10-2 所示，並利用 geogebra-3d 來進行三維座標繪圖方便觀看其重心偏移情形，如圖 5、圖 6-1 與圖 6-2 所示：

表 9 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子重心座標

座標名稱	骰子名稱	重心座標
A	3-normal	(-0.02, -0.15, -0.1)
B	3A-1	(1.01, 0.12, 0.03)
C	3A-2	(1.12, 0.05, -0.2)
D	3B	(1.11, 1.19, 1.26)
E	3C	(1.20, -1.16, 0.12)

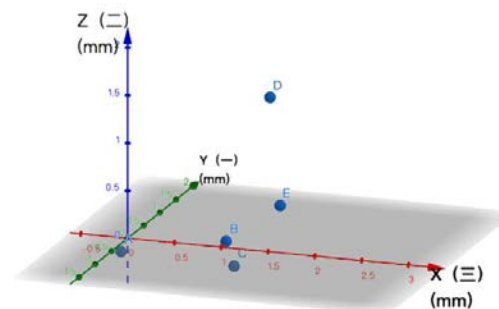


圖 5 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 骰子重心座標圖

表 10-1 2cm\*2cm\*2cm 骰子的重心座標

座標名稱	骰子名稱	重心座標
A	4A-normal	(0.04, -0.03, -0.08)
B	4A-1	(0.24, -0.06, -0.11)
C	4A-2	(0.57, -0.04, -0.01)
D	4A-3	(0.98, 0.05, 0.03)
E	4A-4	(1.79, 0.13, -0.05)
F	4A-5	(2.04, -0.01, 0.13)

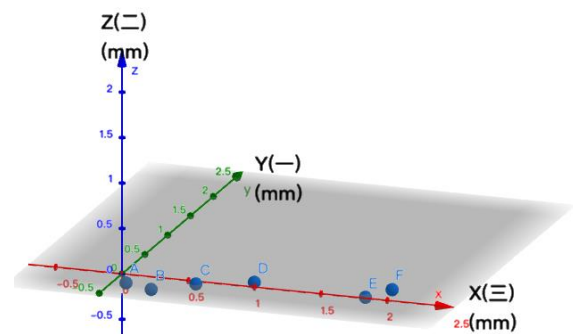


圖 6-1 2cm\*2cm\*2cm 骰子重心座標圖

表 10-2 2cm\*2cm\*2cm 骰子重心座標

座標名稱	骰子名稱	重心座標
A	4B-normal	(-0.02, 0.02, -0.14)
B	4B-1	(0.08, 0.11, -0.07)
C	4B-2	(0.60, 0.75, 0.98)
D	4B-3	(0.82, 0.88, 0.77)
E	4B-4	(1.10, 1.23, 1.37)
F	4B-5	(1.60, 1.49, 1.60)

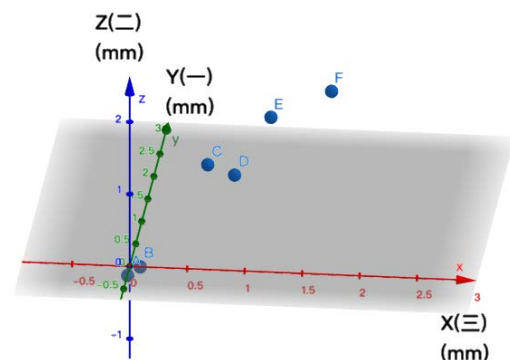


圖 6-2 2cm\*2cm\*2cm 骰子重心座標圖

## 二、投擲次數的探討

將表 3 中 3-normal 與 4-normal 骰子的點數機率，以 100 次為間距累計其次數並計算其機率，同時對其每累計 100 次的機率作標準差 (STDEV)，如表 11 所示：

表 11 3-normal 與 4-normal 隨機 1000 次投擲機率

骰子名稱	點數	100 次	200 次	300 次	400 次	500 次	600 次	700 次	800 次	900 次	1000 次
3-normal	一	18.0%	17.0%	17.3%	18.0%	18.0%	17.8%	18.1%	18.0%	18.0%	18.1%
	二	18.0%	17.5%	17.3%	16.5%	17.2%	17.3%	16.6%	16.9%	16.9%	16.7%
	三	17.0%	18.5%	18.3%	18.5%	18.0%	17.8%	17.6%	17.3%	17.2%	17.0%
	四	17.0%	16.0%	17.0%	16.3%	15.6%	15.5%	15.4%	15.5%	15.4%	15.6%
	五	16.0%	18.0%	16.3%	16.5%	16.6%	16.7%	17.4%	17.1%	16.9%	17.1%
	六	14.0%	13.0%	13.7%	14.3%	14.6%	14.8%	14.9%	15.3%	15.6%	15.5%
	STDEV	1.5%	2.0%	1.6%	1.5%	1.4%	1.3%	1.3%	1.1%	1.0%	1.0%
4-normal	一	18.0%	17.0%	17.3%	16.3%	16.8%	17.0%	16.7%	16.5%	16.2%	16.6%
	二	19.0%	20.0%	18.3%	18.8%	18.6%	18.5%	19.0%	18.3%	17.9%	17.8%
	三	17.0%	16.5%	16.7%	16.3%	16.2%	15.8%	15.4%	15.8%	15.7%	15.6%
	四	15.0%	16.0%	14.7%	16.3%	16.2%	16.5%	16.6%	16.8%	16.9%	16.8%
	五	16.0%	15.5%	15.3%	15.5%	15.4%	15.8%	15.9%	16.1%	16.0%	16.3%
	六	15.0%	15.0%	17.7%	17.0%	16.8%	16.3%	16.4%	16.6%	17.3%	16.9%
	STDEV	1.6%	1.8%	1.4%	1.1%	1.1%	1.0%	1.2%	0.9%	0.9%	0.7%

若每面點數的機率皆達 1/6 時，則其標準差將會為 0，因此可以用標準差的大小來表示其機率是否為理想的 1/6。由表 11 數據可以得到在次數少的時候機率的誤差會比較大，不過只要次數達到 1000 次兩顆骰子標準差都會降低至 1% 以下，因此在骰子塔隨機投擲的實驗中，實驗的次數採用 1000 次做為探討依據。

而其後續投擲機的實驗中，因為只投擲 2cm\*2cm\*2cm 骰子且投擲方向共六面，除此之外，當投擲次數達到 600 次以上時，其誤差即達到 1% 左右，因此本實驗選擇以 600 次作為投擲機的投擲次數。

## 三、骰子塔不同重心骰子的機率測量

### (一) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討

此實驗目的在於探討重心沿著 X 軸方向往點數面三移動的機率變化，因此我們從表 9 中取出 3-normal、3A-1 與 3A-2 這三顆骰子的 X 軸座標與表 4 中各點數的機率來討論其變化，如表 12 所示：

表 12 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討

骰子編號	X 軸作標	一	二	三	四	五	六
3-normal	-0.02mm	18.1%	16.7%	17.0%	15.6%	17.1%	15.5%
3A-1	1.01mm	17.7%	14.5%	11.8%	25.3%	15.0%	15.7%
3A-2	1.12mm	10.6%	14.5%	14.1%	31.5%	15.2%	14.1%

由表 12 可以觀察到當 X 軸上的重心逐漸的往點數三的面移動，其出現點數四的機率亦由 15.6% 上升到 31.5%，機率提升至兩倍，表示重心的偏移對點數四出現的機率有顯著的變化。不過由於 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子可變動性太少，無法看出其是否有任何線性，因此將以此現象作為基礎，並將骰子大小更改為 2cm\*2cm\*2cm，再利用挖空與替換磁鐵的方式來進行骰子的製作，以利研究其重心的偏移與點數四的機率是否有線性關係。

### (二) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率探討

3B 與 3C 這兩顆骰子的重心偏移方向，3B 是將重心控制使其偏向點數一、二、三面的交界點；3C 是將重心控制使其偏向點數一、三面的交界線的中點，兩顆骰子的目的皆是預期能在賭大小時可以使出現大的機率可大幅提升，因此我們將表 4 中 3B 與 3C 的機率整理如表 13 所示，由表中可以得到只有 3B (61.50%) 的機率有明顯的增加，3C 卻差異不大，相同的亦將以此現象作為基礎，並將骰子大小更改為 2cm\*2cm\*2cm，在利用挖空與替換磁鐵的方式來進行骰子的製作，以利研究其重心的偏移與出現大的機率是否會有線性關係。

表 13 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率一覽表

骰子編號	點數一	點數二	點數三	點數四	點數五	點數六
3B	13.00%	12.80%	12.70%	22.90%	18.20%	20.40%
	38.50%			61.50%		
3C	24.80%	10.30%	11.20%	23.40%	17.10%	13.20%
	46.30%			53.70%		

### (三) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討

從表 10-1 中取出 4A-normal、4A-1、4A-2、4A-3、4A-4 與 4A-5 這六顆骰子的 X 軸座標與表 5 中各點數的機率來討論其變化，如表 14 所示：

表 14 2cm\*2cm\*2cm 骰子重心的偏移對機率的影響一覽表

骰子編號	X 軸座標	偏移比例	點數一	點數二	點數三	點數四	點數五	點數六
4A-normal	0.04mm	0.4%	17.0%	16.5%	16.8%	16.4%	16.5%	16.8%
4-A-1	0.24mm	2.4%	16.0%	16.7%	17.0%	16.0%	16.0%	18.3%
4-A-2	0.57mm	5.7%	17.5%	18.7%	12.0%	22.3%	11.8%	17.7%
4-A-3	0.98mm	9.8%	12.5%	18.8%	13.5%	22.2%	15.7%	17.3%
4-A-4	1.79mm	17.9%	14.7%	14.8%	6.2%	33.5%	16.8%	14.0%
4-A-5	2.04mm	20.4%	13.5%	15.0%	4.5%	32.7%	16.8%	17.5%



接著再利用偏移比例與各點數面的出現機率作為兩軸進行作圖得到圖 7，圖中可以明顯觀察到點數四跟點數三出現的機率才有明顯的變化，將點數四的出現機率加上趨勢線可以得到  $R^2=0.9477$ 、線性公式： $Y = 0.9082X + 0.1528$ ，表示當重心的偏移量介於 0~20% 內時，其『重心的偏移』對『出現點數四的機率』具有很高的線性關係，且由此公式就可以控制骰子想出現的勝率，例如當你重心偏移 20% ( $X=0.2$ 、 $Y=33.4$ ) 時可使得其出現機率由  $1/6(15.3\%)$  提升至  $1/3(33.4\%)$ 。

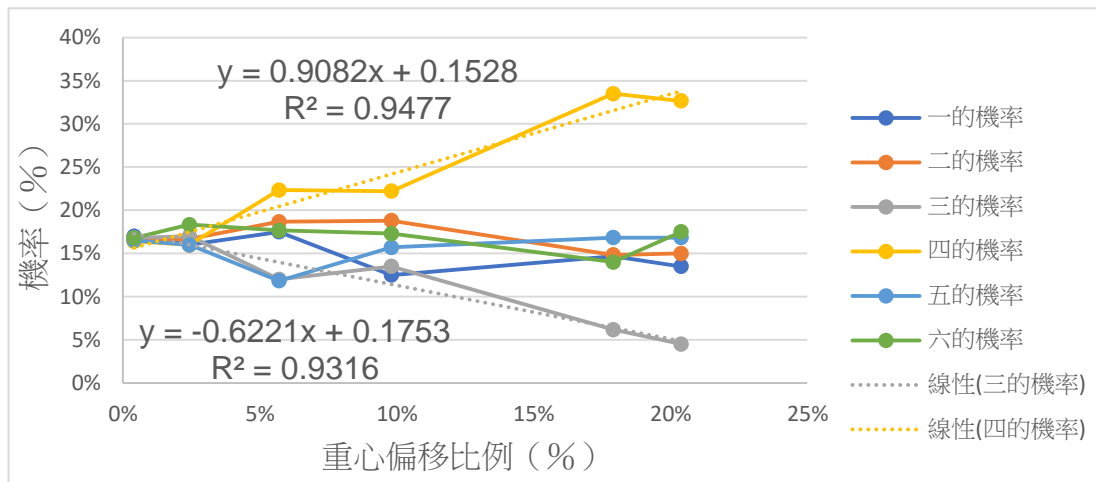


圖 7 2cm\*2cm\*2cm 骰子骰子塔隨機投擲機率圖

接著利用「**偏移比例**」的轉換方式來探討其他不同尺寸的骰子是否可利用此線性公式來推得其機率，其中「**偏移比例**」計算方式如下所示：

$$\text{偏移比例 (\%)} = \frac{\text{重心在 X 軸的座標值}}{\text{點數三的面與原點的距離}}$$

表 15 不同尺寸點數四出現機率換算表

骰子名稱	1.5cm*1.5cm*1.5cm 重心	偏移比例	公式預測機率	實際機率	誤差
3A-1	1.02mm	13.6%	27.6%	25.3%	2.3%
3A-2	1.12mm	14.9%	28.8%	31.5%	2.7%

依據偏移比例換算上述兩顆骰子，換算結果如表 15 所示，其中 3A-1 ( $X=1.02\text{mm}$ ) 與 3A-2 ( $X=1.12\text{mm}$ ) 的偏移比例分別為 3A-1 偏移比例= $1.02/7.5=13.6\%$ 、3A-2 偏移比例= $1.12/7.5=14.9\%$ ，將此比例代入上述公式進行換算，其預測機率分別為 3A-1= $27.6\%$ 與 3A-2= $28.8\%$ ，由此可以發現預測機率與真的機率的誤差都在 3% 以內，差異不大，表示當骰子的偏移量在 0~20% 內時，這條線性公式可以推導至其他不同大小的骰子。

#### (四) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率探討

4B-normal、4B-1、4B-2、4B-3、4B-4 與 4B-5 這組骰子的設計主要是以原點與點數一、二、三面的交界點連線為主軸，使其重心在該連線上逐漸往交



界點偏移，以利觀察其點數出現大的機率是否會改變，甚至是否會有線性關係，我們將表 10-2 的座標轉換為與原點的距離，利用其距離與表 5 中各點數的機率來討論其變化，如表 16 所示：

表 16 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率探討

骰子編號	與原點的距離	偏移比例	小的機率	大的機率
4B-normal	0.14	0.8%	50.0%	50.0%
4B-1	0.39	2.3%	46.2%	53.8%
4B-2	1.37	7.9%	36.0%	64.0%
4B-3	1.42	8.2%	32.2%	67.8%
4B-4	2.14	12.4%	20.0%	80.0%
4B-5	2.71	15.6%	26.5%	73.5%

接著再以「偏移比例」為 X 軸、「機率」為 Y 軸來進行作圖探討，當我們把六顆骰子的資料對其作圖，可得到圖 8-1，圖中可以觀察到其線性關係 ( $R^2$ ) 很差僅有 0.8641，但將 4B-5 的資料捨棄掉後，圖中可以觀察到不管是出現大的機率或是出現小的機率就會變成明顯的線性關係，其中出現大的機率的線性關係 ( $R^2$ ) 高達 0.9747，其線性公式為： $Y = 2.4835X + 0.4744$ ，因此我們推測若想要讓重心的偏移呈現線性關係，其偏移比例必須在 0~12% 這個範圍之中。

在利用「**偏移比例**」的轉換方式來探討其他不同尺寸的骰子是否可利用此線性公式來推得其機率這方面的探討中，雖然我們認為這條線性公式亦可用於預測不同尺寸骰子的機率，但礙於 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 的骰子中只能製作出一顆 3B 的骰子，而該數據的偏移比例為 15.7% 已經超過該線性公式的最大值，因此無法有足夠的數據可證明該公式亦可用於預測各種不同尺寸骰子的機率，尚待後續努力持續探究。

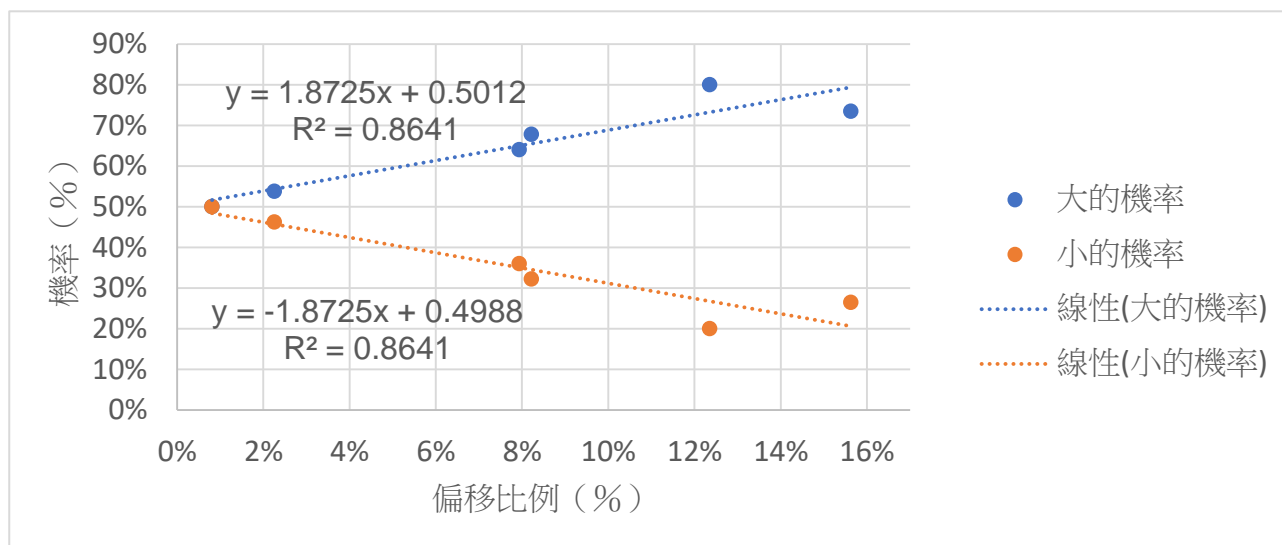


圖 8-1 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率探討(六顆全取)

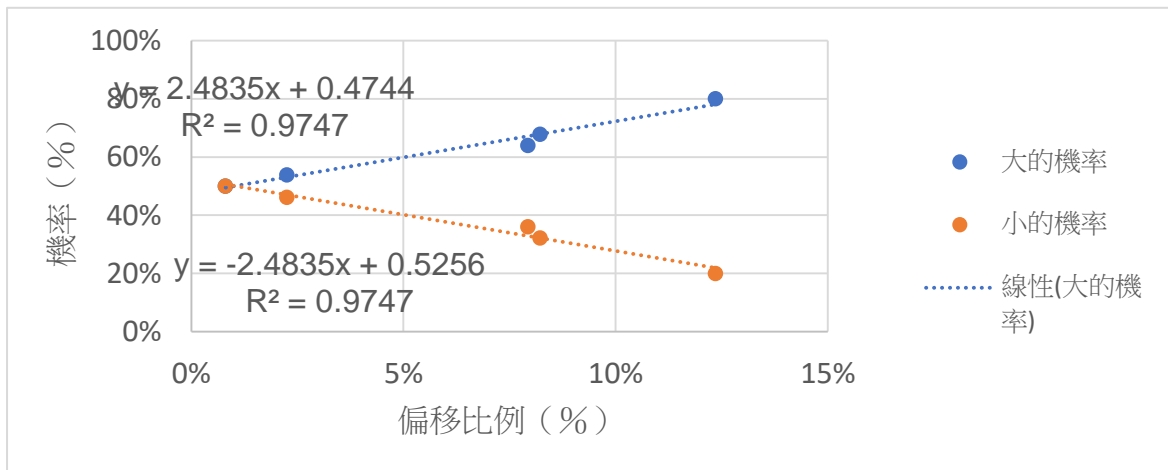


圖 8-2 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「大」的機率探討 (捨棄 4B-5)

(五) 改變投擲面對擲出「點數四」的機率探討

在骰子塔以「一向上、三向後」的模式測量得到的數據中，可以看到 4-normal 的數據與隨機投擲的數據並無顯著的差異，相同的 4A-4 出現點數四的機率 33.7%跟隨機投擲的機率 33.5%一樣並無顯著差異，表示點數面不管朝哪個方法骰動都不會影響到其機率，如表 17 所示。

表 17 改變投擲面對擲出「點數四」的機率探討

骰子編號	一	二	三	四	五	六
4-normal	18.5%	16.0%	17.2%	17.3%	14.0%	17.0%
4-normal(隨機)	17.0%	18.5%	15.8%	16.5%	15.8%	16.3%
4A-4	14.2%	13.5%	6.8%	33.7%	15.5%	16.3%
4A-4(隨機)	14.7%	14.8%	6.2%	33.5%	16.8%	14.0%

四、投擲機投擲機率的探討

(一) 投擲機改變投擲面對機率的探討

本實驗設計是希望能觀察到在不同面向上時可以造成點數四的機率或是出現大的機率會有明顯的不同且具有規律性的現象。

首先先將表 7 數據與其重心座標放在一起討論，如表 18 所示：

表 18 投擲機改變「投擲面」對擲出「點數四」的機率探討

骰子名稱	偏移比例	1up	2up	3up	4up	5up	6up	總機率	骰子塔機率
4-normal	0.4%	19.0%	10.0%	16.0%	20.0%	23.0%	10.0%	16.3%	16.5%
4A-1	2.4%	21.0%	25.0%	21.0%	17.0%	16.0%	11.0%	18.5%	16.0%
4A-2	5.7%	12.0%	13.0%	20.0%	11.0%	23.0%	16.0%	15.8%	22.2%
4A-4	17.9%	29.0%	23.0%	26.0%	27.0%	34.0%	20.0%	26.5%	33.5%
4A-5	20.4%	20.0%	28.0%	26.0%	27.0%	34.0%	35.0%	28.3%	32.7%

由表 18 可觀察到只有在「點數面五向上」時，投擲結果才會出現不管哪種骰子出現四的機率都比骰子塔出現四的機率高，且我們利用重心位置與機率繪製線性圖形，可得結果如圖 9 所示：

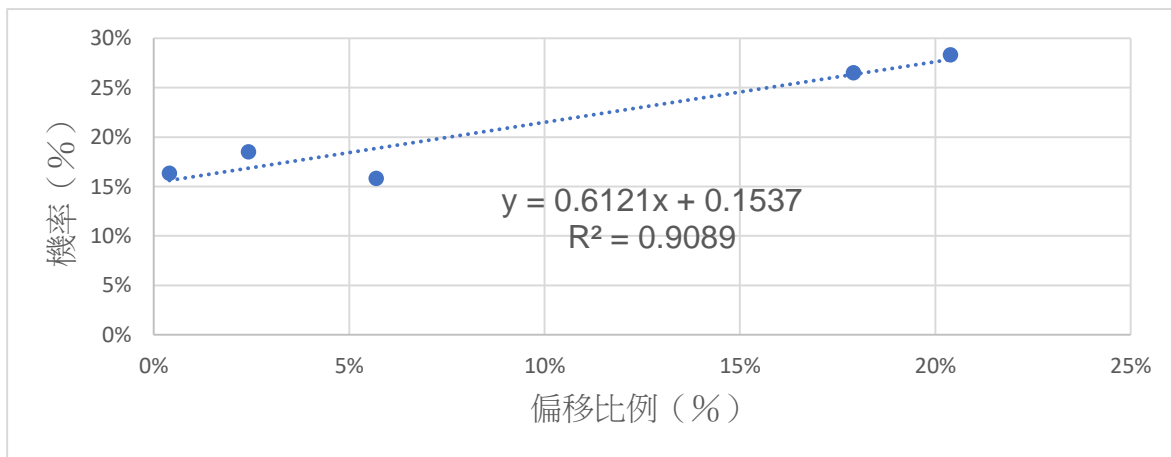


圖 9 投擲機改變「投擲面」對擲出「點數四」的機率探討

圖 9 中可觀察到原有的線性現象降低至 0.9088，表示投擲的力道與角度確實會對機率有影響，但「不同點數面向上時，可以造成點數四出現機率或是出現大的機率會有明顯的不同且具有規律性的現象」很可惜卻無法看到，我們推測也許是每個面所投擲的的測量次數太少，無法觀察到任何特殊現象所致。

在大小機率的探討上，首先將表 7 數據中點數四、五、六的機率加總做為大的機率，如表 19 所示：

表 19 投擲機改變「投擲面」對擲出「點數大」的機率探討

骰子編號	1up	2up	3up	4up	5up	6up	總機率	骰子塔機率
4B-5	67.0%	62.0%	69.0%	67.0%	68.0%	61.0%	65.7%	73.5%
4B-6	45.0%	51.0%	46.0%	42.0%	36.0%	40.0%	43.3%	51.5%

表 19 觀察到當用投擲器以 5up 與 6up 面投擲時，原先出現大的機率兩者皆明顯降低，其最大的降幅為 4B-5 的 6up 差異達 12.5%以及 4B-6 的 6up 差異達 11.5%，表示出現大的機率確實會受到改變投擲面影響，因此後續實驗將會以施力與角度兩者來探討其是否會有其規律性，不過依然無法觀察到有何線性或是規律性的存在。

## (二) 「改變施力與改變角度」對擲出「點數四」的機率探討

將表 8 實驗數據「出現點數四」的數據整理為表 20，表 20 可觀察到施力 150 克與施力 250 克中，因為機率和骰子塔機率比較，其差值範圍落在-3.3%~2.2%，而施力 200 克的數據中，唯有角度 10 度的數據差值在 7.0%，另外三個角度差值都在-3.0%~0.3%，若考慮整體數據，比較推測傾向於是固定 10 度的機率測量可能有問題才會造成這種特殊現象，因為整體數據並無顯著的變化，表示改變施力或是改變角度都對點數四的機率並不會造成顯著的影響。

表 20 「不同施力與不同角度」的機率探討

施力	角度 10 度	角度 15 度	角度 20 度	角度 30 度	骰子塔機率
150g	33.5%	35.7%	33.5%		33.5%
200g	26.5%	32.5%	35.3%	35.3%	
250g	31.2%	35.7%	30.2%		

## 伍、討論

本實驗最令人驚喜的實驗發現為：當重心往點數三移動與往點數一、二、三交界點移動時，其偏移比例與機率作圖兩者皆會呈現高度線性關係（偏移比例必需分別小於 20% 與 10%），且這條線性公式除了適用於 2cm\*2cm\*2cm 的骰子外，亦可利用偏移比例的方式來進行不同尺寸骰子的機率預測。然而為何會有如此高的線性關係呢？在此我們就利用『重心往點數三移動』的實驗數據來作以下一系列的探討，為何重心偏移與機率會有線性關係。

我們假設重心偏移時，會有一個不穩定狀態，而此不穩定狀態會與原先的狀態產生一個角度，而這個偏移夾角角度越大時其產生的力矩就會越大，因而造成點數面三朝下落地的機率就會越高，若我們可以證明該角度與機率也是一個高度線性關係，就可間接證明為何重心的偏移也是一個高度線性關係。

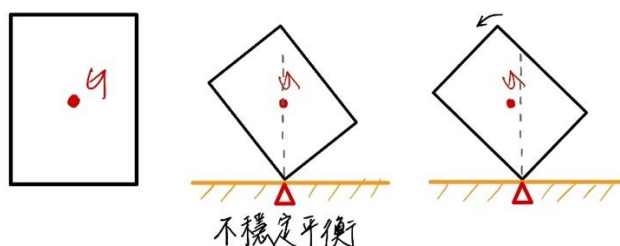


圖 10 不穩定狀態示意圖

由於骰子在投擲時會有任意移動，我們將以著地前的最後一個狀態來進行討論，而該狀態可能會有兩種情形，就是著地前一瞬間為『邊』著地以及著地前一瞬間為『點』著地，因此我們接下來就兩種情形分別進行討論。

### 一、『邊』著地

若一均勻立方體(重心位於正中心)以任一邊落地，可由圖 11 看出可移動角度為 90°。當處於不穩定平衡狀態下，落地邊相接的兩鄰面與地面夾角皆為 45°。

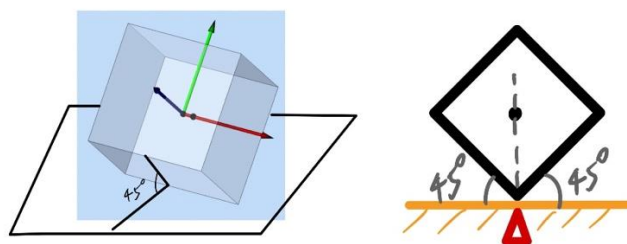
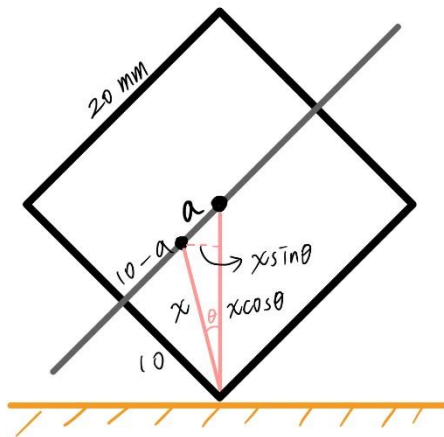


圖 11 落地邊相接的兩鄰面與地面夾角示意圖

若重心位置改變，可推算出新重心處於不穩定平衡與均衡狀況下角度的差異(theta)，其推算結果如下所示：

a :



重心偏移量

$$x^2 = (10 - a)^2 + 10^2$$

$$\sqrt{a^2 - (x \sin \theta)^2} + x \cos \theta = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^2 - (x \sin \theta)^2 = (10\sqrt{2} - x \cos \theta)^2$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}x \cos \theta = 200 - a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}a^2 - 40a + 400 \cos \theta = 400 - 20a$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{20 - a}{\sqrt{2a^2 - 40a + 400}}$$

接下來利用上述 $\cos \theta$ 的公式與重心的偏移量進行換算可以得到表 21。

表 21  $\theta$  值換算表格

骰子編號	重心偏移(mm)	$\cos \theta$	$\theta$	實際機率
4A-normal	0.04	0.999998	0.11482	16.4%
4A-1	0.24	0.9999262	0.69587	16.0%
4A-2	0.57	0.99957	1.68035	22.3%
4A-3	0.98	0.9986752	2.94954	22.2%
4A-4	1.79	0.9952035	5.61401	33.5%
4A-5	2.04	0.99361	6.48067	32.7%

接著我們以『 $\theta$ 』與『機率』為兩軸進行作圖，如圖 12-1 所示。除此之外，亦將『 $\theta$ 』與『重心偏移量』進行作圖，如圖 12-2 所示。

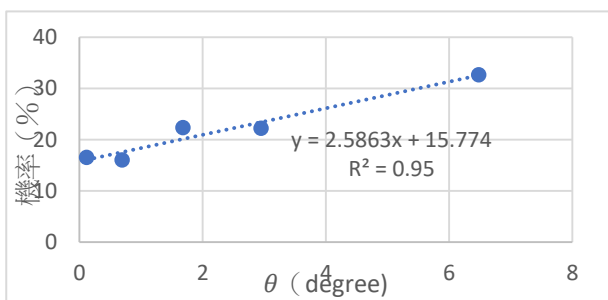


圖 12-1 『 $\theta$ 』與『機率』關係圖

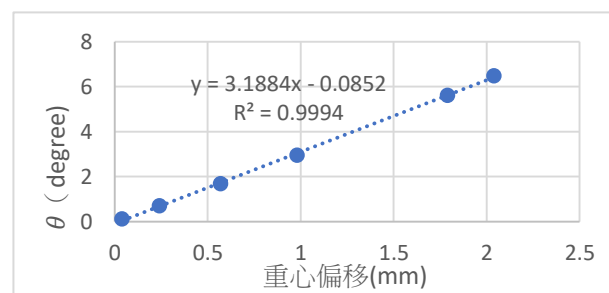
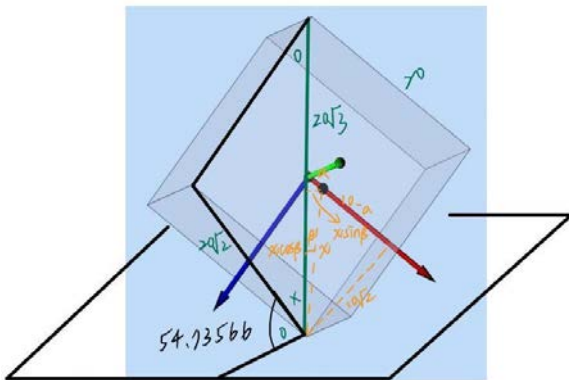


圖 12-2 『 $\theta$ 』與『重心偏移量』關係圖

由圖 12-1 與 12-2 可看出重心偏移與偏移夾角(theta)存在高度線性關係，且偏移夾角(theta)與點數四出現機率(實驗值)亦存在高度線性關係，因此我們可推論重心偏移與點數四出現機率亦存在高度線性關係。

## 二、『點』著地

以相同的方式進行點著地的討論，若一均勻立方體(重心位於正中心)以任一頂點落地，透過幾何運算可得知當處於不穩定平衡狀態下，落地頂點相接的三鄰面與地面夾角皆為  $35.2644^\circ$ ，其偏移夾角 (Beta) 計算方式如下所示：



$$\begin{aligned}
 & a : \text{重心偏移量} \\
 & x^2 = (10 - a)^2 + 200 \\
 & \sqrt{a^2 - (x \sin \beta)^2} + x \cos \beta = 10\sqrt{3} \\
 & \Rightarrow a^2 - (x \sin \beta)^2 = (10\sqrt{3} - x \cos \beta)^2 \\
 & \Rightarrow 20\sqrt{3}x \cos \beta = 300 - a^2 + x^2 \\
 & \Rightarrow 20\sqrt{3}a^2 - 60a + 900 \cos \beta = 600 - 20a \\
 & \Rightarrow \cos \beta = \frac{30 - a}{\sqrt{3a^2 - 60a + 900}}
 \end{aligned}$$

接下來利用上述  $\cos \beta$  的公式與重心的偏移量進行換算可以得到表 22。

表 22  $\beta$  值換算表格

骰子編號	重心偏移(mm)	$\cos \beta$	$\beta$	實際機率
4A-normal	0.04	0.999998217	0.108182	16.4%
4A-1	0.24	0.99993497	0.653428	16.0%
4A-2	0.57	0.999625092	1.568968	22.3%
4A-3	0.98	0.998861547	2.734241	22.2%
4A-4	1.79	0.995997912	5.127743	33.5%
4A-5	2.04	0.994718772	5.891105	32.7%

接著我們以『 $\beta$ 』與『機率』為兩軸進行作圖，如圖 13-1 所示。除此之外，亦將『 $\beta$ 』與『重心偏移量』進行作圖，如圖 13-2 所示。

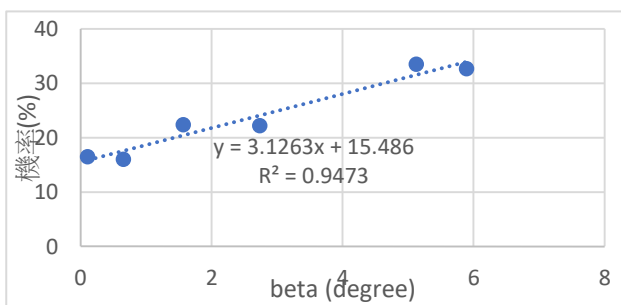


圖 13-1 『 $\beta$ 』與『機率』關係圖

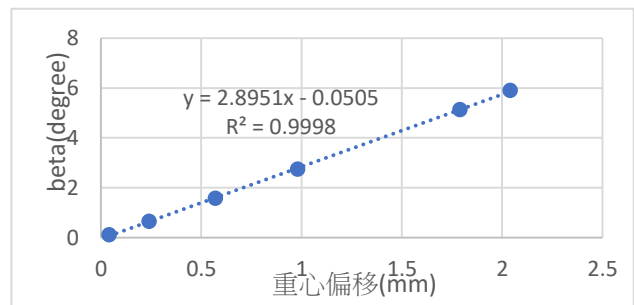


圖 13-2 『 $\beta$ 』與『重心偏移量』關係圖

由圖 13-1 與 13-2 可看出重心偏移與偏移夾角(Beta)存在高度線性關係，且偏移夾角(Beta)與點數四出現機率(實驗值)亦存在高度線性關係，因此我們可推論重心偏移與點數四出現機率亦存在高度線性關係。

因此不管是利用點著點討論或是利用邊著地討論，兩者皆可證明重心的偏移量與機率會具有高度的線性關係，而此也驗證了本實驗結果的正確性。



## 陸、結論

本實驗中我們成功的製作了二十顆不同重心的骰子，並以七個面向來進行試驗並觀察其機率的變化，在試驗後本實驗的到了以下七個結論：

- (1) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討

當 X 軸上的重心逐漸的往點數三的面移動，其點數四的機率會有顯著的增加，表示重心的偏移對點數四出現的機率有顯著的變化。

- (2) 1.5cm\*1.5cm\*1.5cm 不同重心的骰子對擲出「點數大」的機率探討

由於 3B 在出現大的機率有明顯的增加，而 3C 卻差異不大，因此在擲出大的機率上，重心必須要偏向於點數一、二、三面的交界點才会有顯著的變化。

- (3) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討

重心在 X 軸上往點數面三偏移的數據中，可以觀察到重心往點數面三移動時，其點數四的機率會有顯著的提升，且當重心偏移比例小於 20%時，其機率與 X 軸重心偏移比例會有很高的線性關係，其  $R^2=0.9477$ 、線性公式： $Y = 0.9082X + 0.1528$ ，此線性公式經由「偏移比例」換算顯示此線性公式適用於任何尺寸的骰子。

- (4) 2cm\*2cm\*2cm 不同重心的骰子對擲出「點數大」的機率探討

重心在往點數面一、二、三交界點偏移的數據中，可以觀察到重心往點數面交界點移動時，其出現大的機率會有顯著的提升，且當重心偏移比例小於 12%時，其機率與重心偏移比例會有很高的線性關係，其  $R^2=0.9747$ ，線性公式為： $Y = 2.4835X + 0.4744$ 。

- (5) 骰子塔改變投擲面對擲出「點數四」的機率探討

在骰子塔以「一向上、三向後」的模式測量得到的數據中，不管 4-normal 或是 4A-4 其點數四的機率都無顯著差異，表示點數面不管朝哪個方法骰動都不會影響到其機率。

- (6) 投擲機改變投擲面對機率的探討

在不同面的投擲中，點數五與點數六的面向上時，不管是其點數四的機率或是出現大的機率，皆會有 10%以上的差異出現，表示投擲的力道與角度確實會對機率有影響，但「不同面向上時可以造成點數四出現機率或是出現大的機率會有明顯的不同且具有規律性的現象」很可惜卻無法看到。

- (7) 「改變施力與角度」對擲出「點數四」的機率探討

由於整體數據和骰子塔所得到的機率並無顯著的變化，表示改變施力或是改變角度都對點數四的機率並不會造成顯著的影響。

- (8) 由於骰子轉動時的力矩會與重心偏移時產生的一個偏移夾角會有關係，因此我們利用該偏移夾角在邊著地與點著地兩種狀態下，證明出偏移夾角與機率成高度線性關係，而偏移夾角與重心偏離量亦成高度線性關係，因而間接證明了重心偏移量與機率亦為高度線性關係，而此也驗證了本實驗結果的正確性。

上述結論中，結論 (3)、(4) 所得到的兩條線性公式，是本實驗所到的最重要的實驗結果，有了這兩條線性公式就可以隨著我們自己的需求製作出任何不同機率的骰子，

雖然我們不會真的在社會上運用此公式製作骰子，但這兩條線性公式也可以警惕世人賭博真的是十賭九騙。

### 柒、參考文獻資料

- 一、陳鎮宇 (2012)。疊疊高升-骰子爬升的因素探討。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 二、陳皓嫻 (2008)。耍「薛骰」— Sicherman Dice 的探討。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 三、劉曉樺、林芳仔 (2004)。由 6 面 Sicherman 骰子來分析 n 面的 Sicherman 骰子。臺灣二〇〇四年國際科學展覽會作品說明書。
- 四、何承蓉、盧俊憲…等 (2009)。驚爆骰子樂之吹牛大王--研究骰子「一點」出現的組合並找出規律性。中華民國第 46 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 五、黃舒欣、蔡宜芳 (2013)。十八啦!擲骰子，求組合數—在研究點數的排列組合機率。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書。



## 【評語】 030106

1. 研究主題：非新穎議題，但本研究成功製作了二十顆不同重心的骰子，得以進行不同因素的系統化探討。
2. 創意、學術或實用價值：本研究系統化討論如何製作一個"不公平"骰子的方法，設計多種重心變化，呈現機率變化整理，並具體的提出其可能的物理模型與"控制"特定的面有高機率出現的方法。是一個相當好的科學研究作品。
3. 科學方法之適切性：繳交之實驗日誌略可呈現由 110 年 10 月至 111 年 3 月的工作進程。實在是探究實作的好題材，對重心與運動的相關理論分析也能由所學基礎出發，與實驗結果呼應。
4. 展示及表達能力良好

## 作品簡報

# 誰是大老千

## — 骰子重心與機率的探討

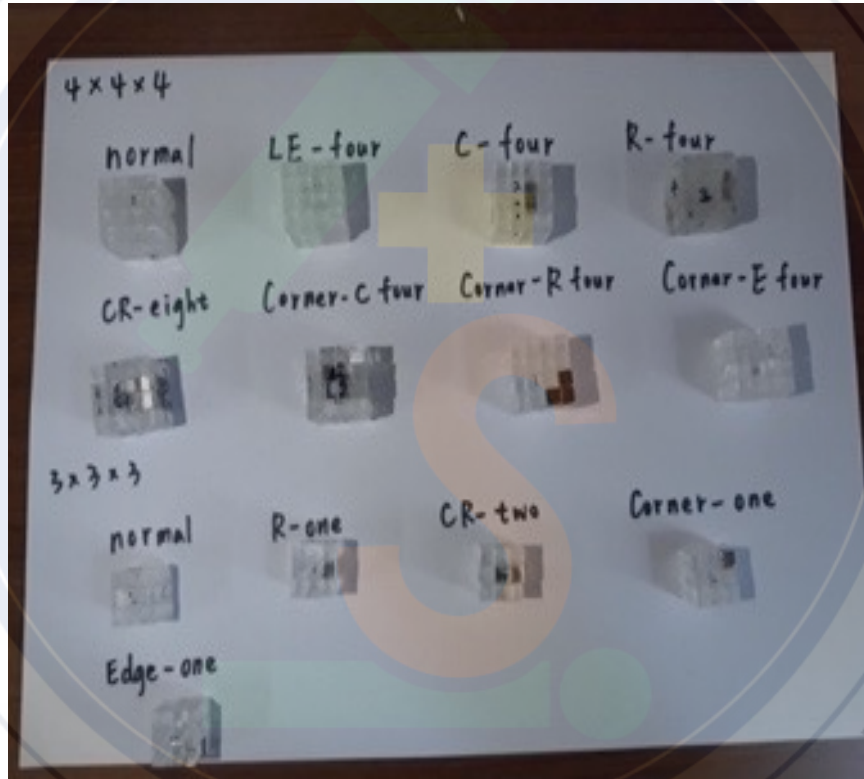
組別：國中  
科別：物理



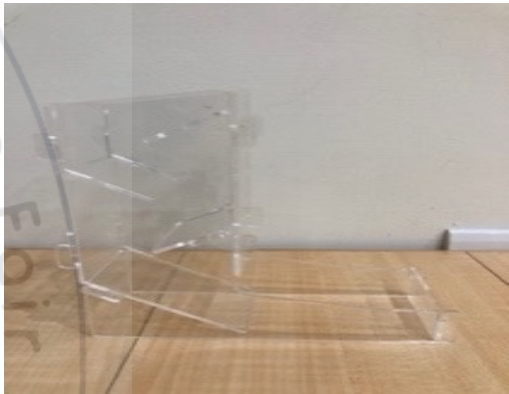
# 實驗器材



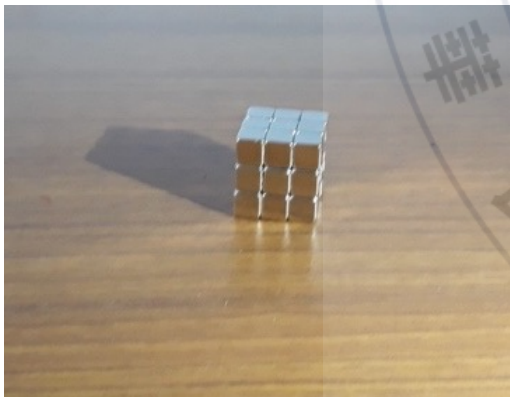
壓克力塊



不同重心的骰子



骰子塔



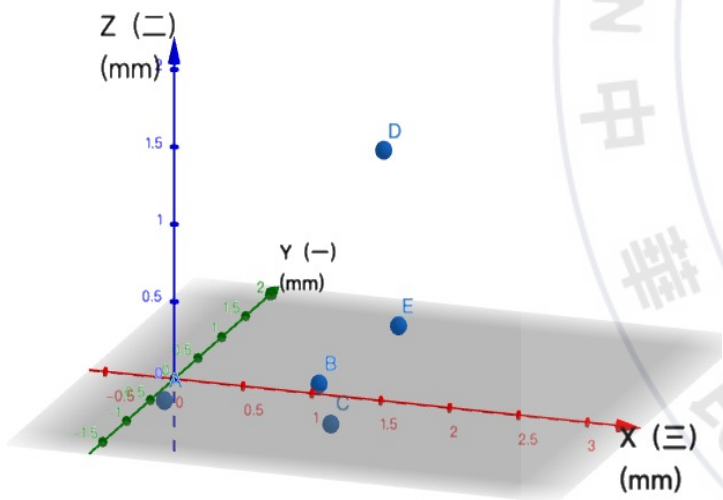
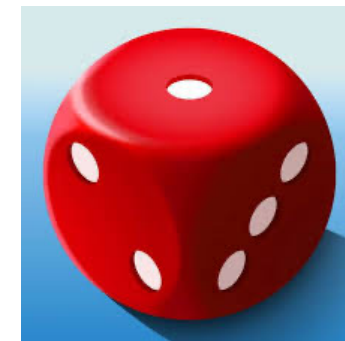
磁鐵



投擲機

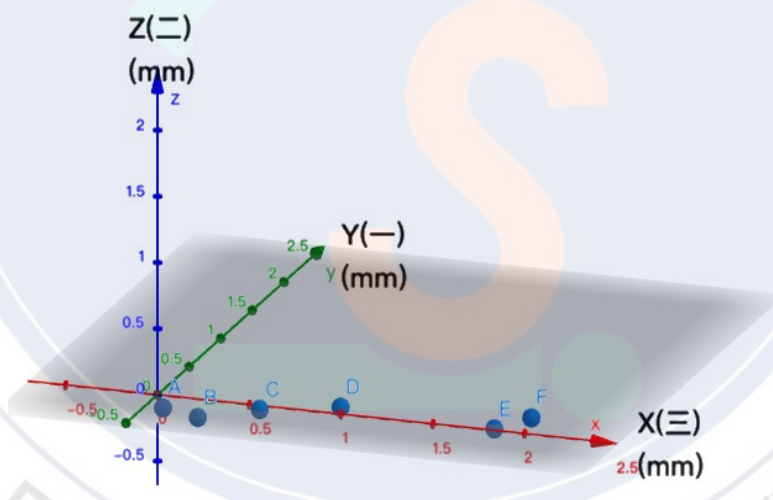
# 重心三維座標圖

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$



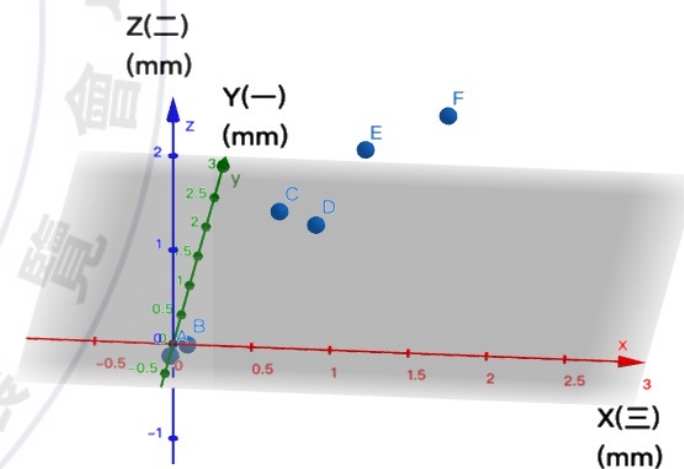
1.5cm×1.5cm×1.5cm 骰子重心座標圖

圖 A



2cm×2cm×2cm 骰子重心座標圖 ( 四 )

圖 B



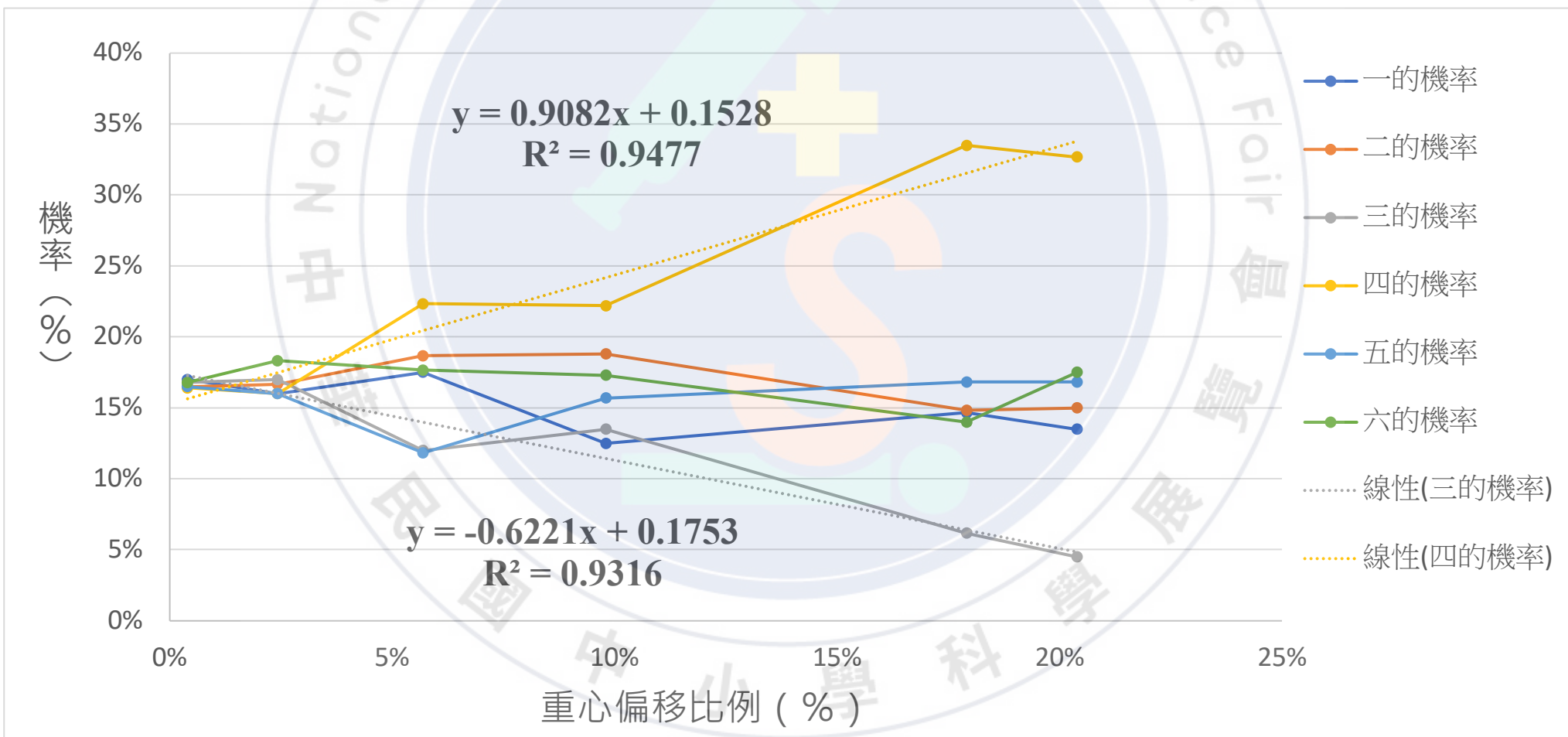
2cm×2cm×2cm 骰子重心座標圖 ( 大 )

圖 C



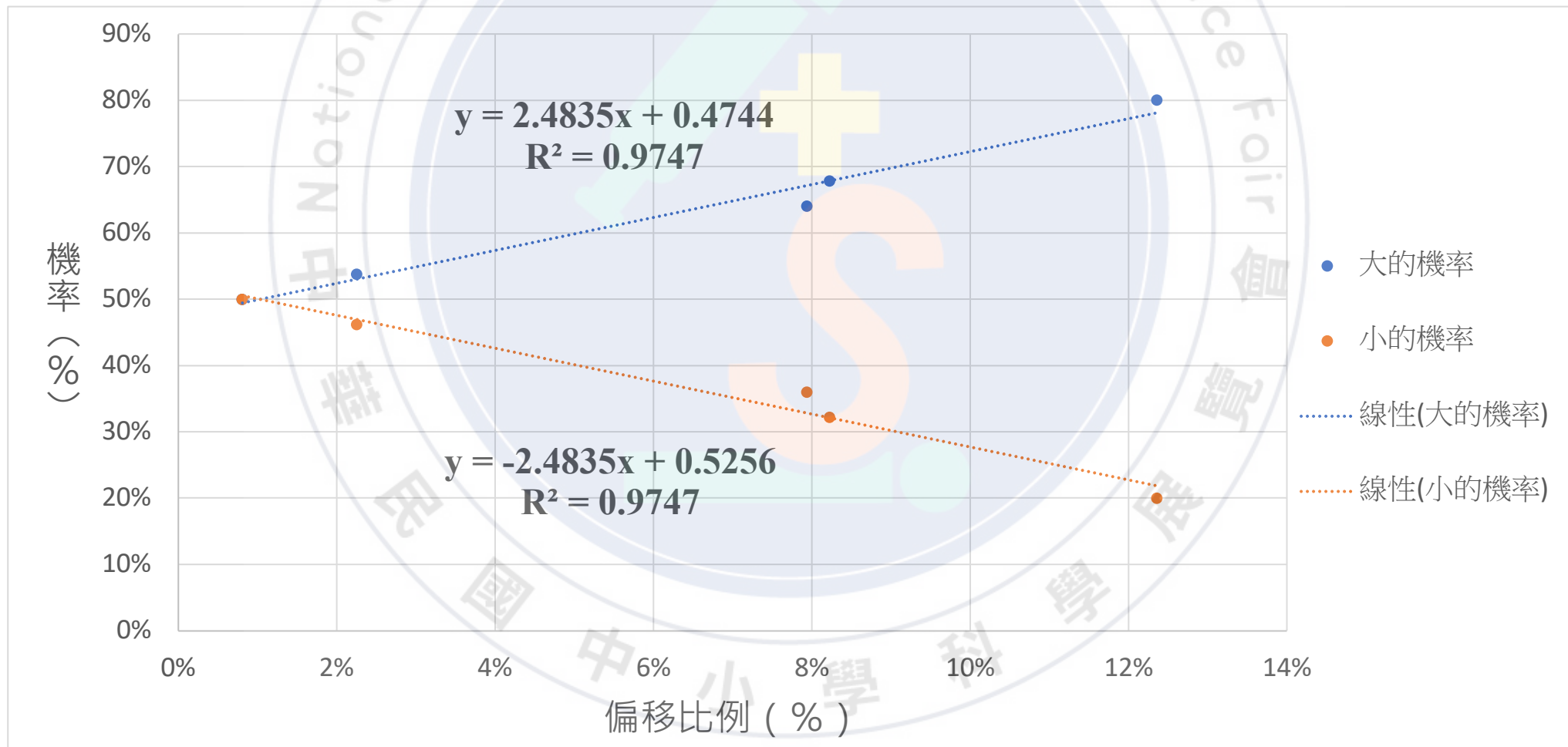
# 2cm×2cm×2cm 骰子塔隨機投擲

## → 出現『四』的機率圖

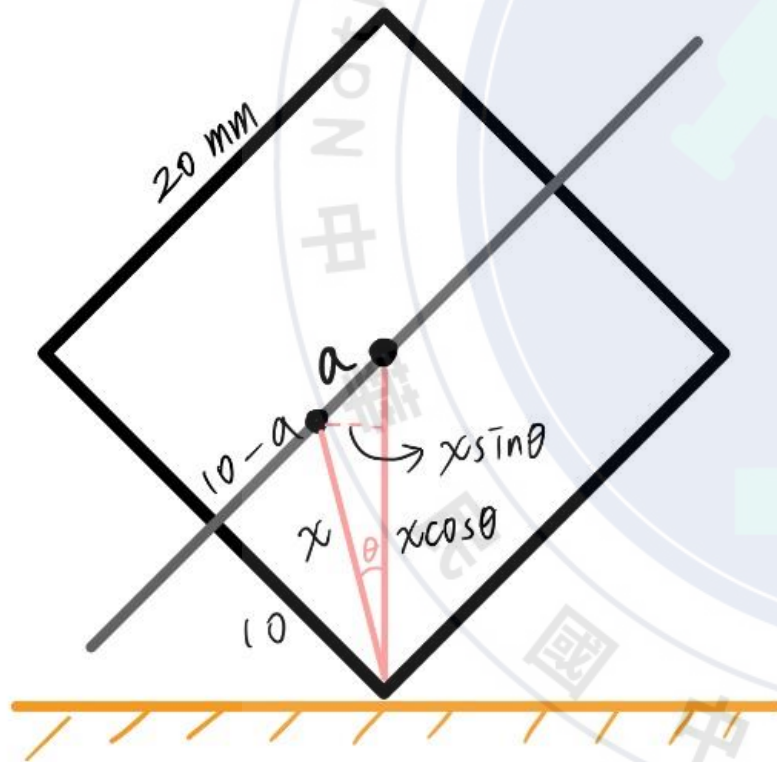


# 2cm×2cm×2cm 骰子塔隨機投擲

→ 出現『大』的機率圖



# 重心偏移與機率關係的探討 → 邊著地



a : 重心偏移量

$$x^2 = (10 - a)^2 + 10^2$$

$$\sqrt{a^2 - (x \sin \theta)^2} + x \cos \theta = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^2 - (x \sin \theta)^2 = (10\sqrt{2} - x \cos \theta)^2$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2}x \cos \theta = 200 - a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{2a^2 - 40a + 400} \cos \theta = 400 - 20a$$

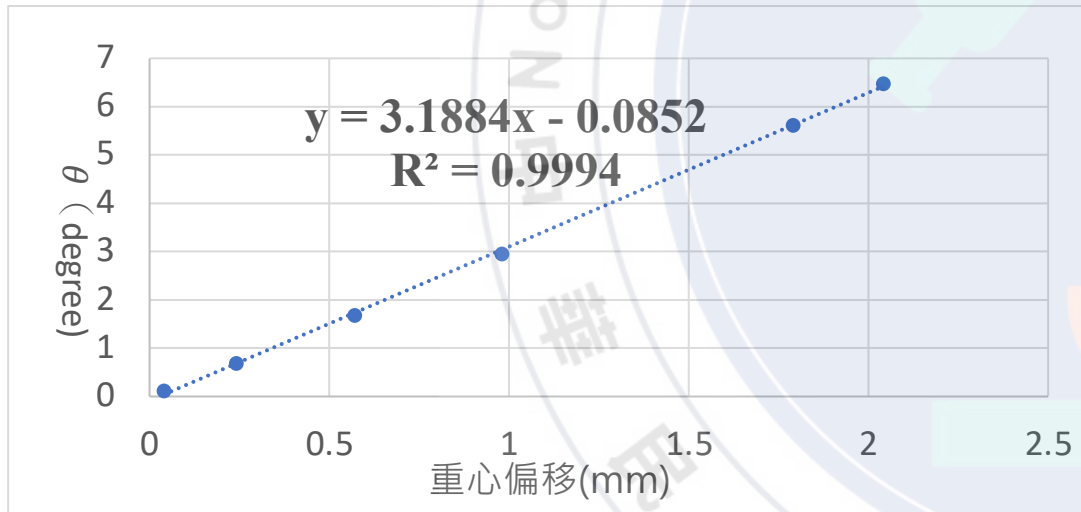
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{20 - a}{\sqrt{2a^2 - 40a + 400}}$$

代入重心偏移距離(a)算出 $\theta$

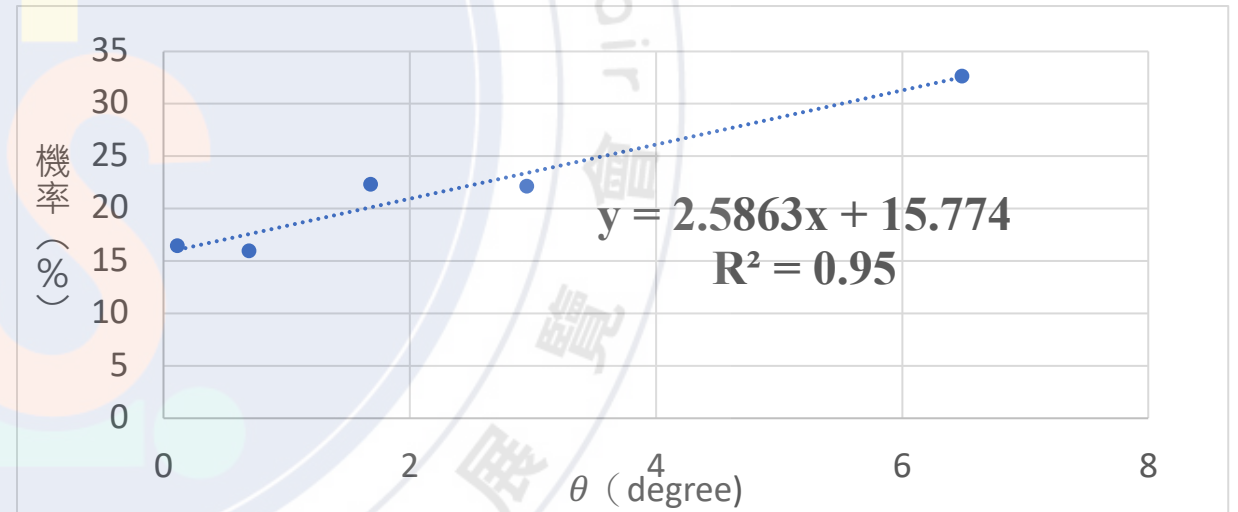


# 重心偏移與機率關係的探討→邊著地

(重心偏移) 與 (偏移夾角) 有高度線性關係

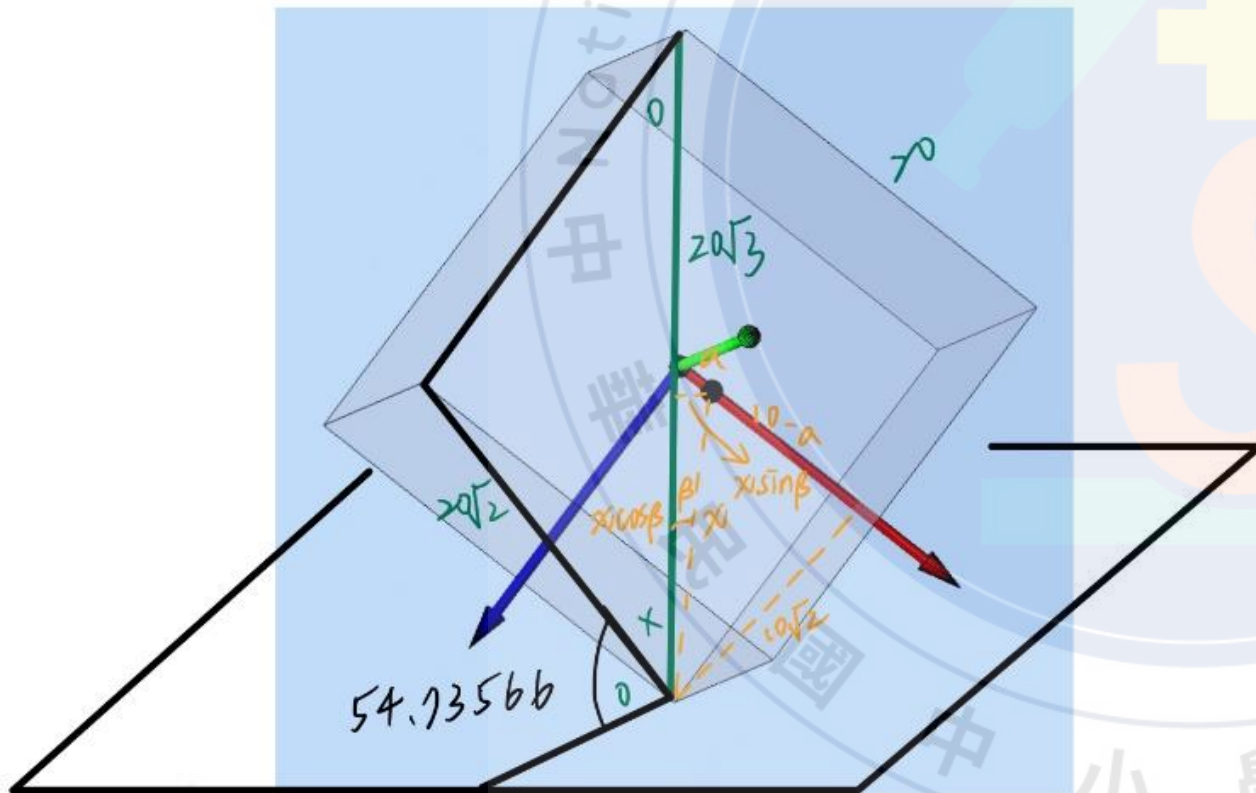


(偏移夾角) 與 (點數四出現機率) 有高度線性關係



(重心偏移) 與 (點數四出現機率) 有高度線性關係

# 重心偏移與機率關係的探討 → 點著地



$a$  : 重心偏移量

$$x^2 = (10 - a)^2 + 200$$

$$\sqrt{a^2 - (x \sin \beta)^2} + x \cos \beta = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 - (x \sin \beta)^2 = (10\sqrt{3} - x \cos \beta)^2$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3}x \cos \beta = 300 - a^2 + x^2$$

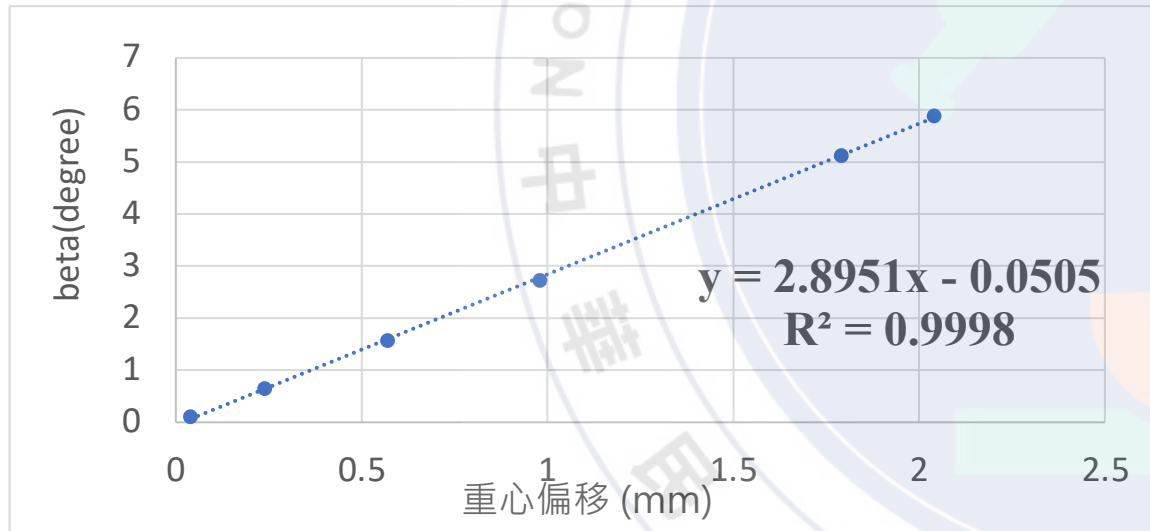
$$\Rightarrow 20\sqrt{3}a^2 - 60a + 900 \cos \beta = 600 - 20a$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{30 - a}{\sqrt{3a^2 - 60a + 900}}$$

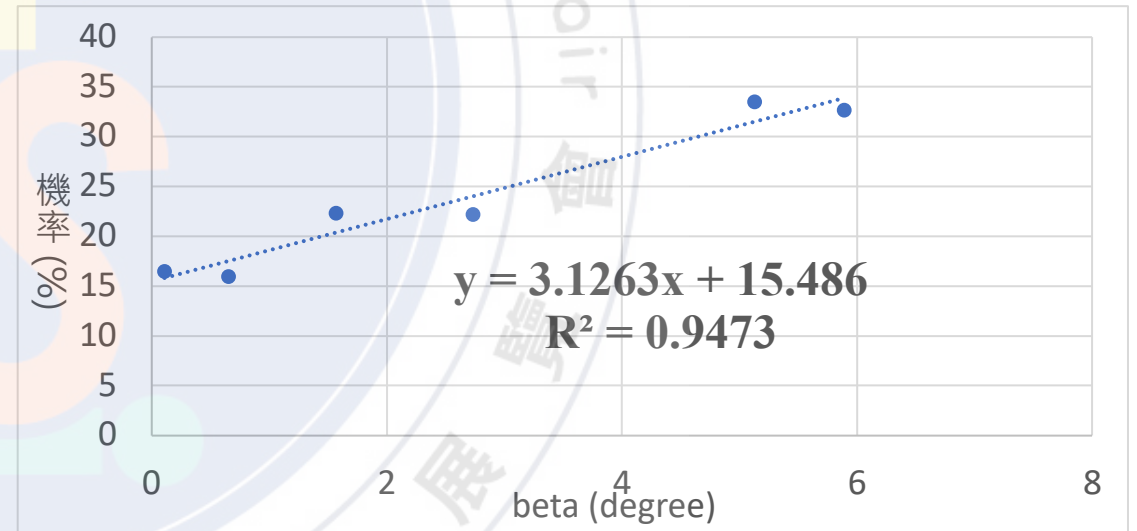
代入重心偏移距離( $a$ )算出 $\beta$

# 重心偏移與機率關係的探討 → 點著地

( 重心偏移 ) 與 ( 偏移夾角 ) 有高度線性關係



( 偏移夾角 ) 與 ( 點數四出現機率 ) 有高度線性關係



( 重心偏移 ) 與 ( 點數四出現機率 ) 有高度線性關係

# 不同尺寸骰子機率的預測

重心往點數面三偏移 ( 3A-1, 3A-2 )

$$\text{偏移比例 (\%)} = \frac{\text{重心在 X 軸的座標值}}{\text{點數三的面與原點的距離}}$$

公式：  $Y = 0.9082X + 0.1528$

重心往點數面一、二、三偏移 ( 3B-2 )

$$\text{偏移比例 (\%)} = \frac{\text{重心與原點的距離}}{\text{點數一二三交界點與原點的距離}}$$

公式：  $Y = 2.4835X + 0.4744$

骰子名稱	1.5cm 骰子重心	偏移比例	公式預測機率	實際機率	誤差
3A-1	1.02mm	13.6%	27.6%	25.3%	2.3%
3A-2	1.12mm	14.9%	28.8%	31.5%	2.7%
3B-2	0.56mm	4.2%	57.9%	56.2%	1.7%

注：3B-2報名後製作完成，並以此骰子進行預測實驗。

**點數出現四的偏移比例 < 20%、點數出現大的偏移比例 < 12%**

# 投擲機投擲機率的探討

## 一、投擲機改變投擲面，對擲出「點數四」的機率探討

觀察到只有在以「點數面五向上」投擲時，才會出現任何骰子出現「點數四」的機率都比骰子塔出現「點數四」的機率高

## 二、改變施力與改變角度，對擲出「點數四」的機率探討

整體數據並無顯著的變化，表示改變施力或是改變角度都對「點數四」的機率並不會造成顯著的影響



# 結論

一、重心的改變對投擲機率有顯著的影響

二、 $2\text{cm} \times 2\text{cm} \times 2\text{cm}$  不同重心的骰子對擲出「點數四」的機率探討：

當重心偏移比例小於**20%**時，其機率與X軸重心偏移比例會有很高的線性關係，其 $R^2=0.9477$ 、線性公式： $Y = 0.9082X + 0.1528$ ，此線性公式經由「偏移比例」換算顯示適用於本實驗兩種骰子。

三、 $2\text{cm} \times 2\text{cm} \times 2\text{cm}$  不同重心的骰子對擲出「點數大」的機率探討：

當重心偏移比例小於**12%**時，其機率與重心偏移比例會有很高的線性關係，其 $R^2=0.9747$ 、線性公式為： $Y = 2.4835X + 0.4744$ ，此線性公式經由「偏移比例」換算顯示適用於本實驗兩種骰子。

四、探討重心偏移距離與點數出現四的機率呈高線性關係：

將最後一次的落地分為**邊點著地**與**點著地**兩種情形探討，兩種情形都可以證明出**重心的偏移與點數四的出現機率會是一個高度線性關係**，從而證明本實驗的正確性。

五、「改變施力與角度」以及「改變投擲面」的機率探討：**對機率並無顯著的影響**。