中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080413

以不定方程探討正三角形衍生圖形之無縫密鋪關係

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
小五 陳泓嘉	歐志昌 施羿如

關鍵詞：不定方程式、衍生圖形、無縫密鋪

摘　　要

本研究探討正三角形衍生圖形與拼板個數的關係。

一、以 A 和 B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 正三角形組成水平衍生圖形，發現

(一) a 是奇數

條件：至少需 t 個 B 拼板

最大拼板數：A 拼板 $\dfrac{at^2-3t}{2}$ 個和 B 拼板 t 個(2▲1▼)

範圍：A 拼板 $\dfrac{at^2-3t}{2}-3k$ 個和 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼)、k 個(1▲2▼)

(二) a 是偶數

條件：需要偶數個 B 拼板且兩類型個數相等

最大拼板數：A 拼板 $\dfrac{at^2}{2}$ 個

範圍：A 拼板 $\dfrac{a}{2}t^2-3k$ 個和 B 拼板兩類型各 k 個

(三) 解的存在性

除 $a=1$,$t=1$ 與 $a=1$,$t=2$ 外，其餘必有解存在。

二、增加拼板種類

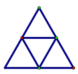
無縫密鋪邊長 t 正三角形衍生圖形，需 A,B,C,D 拼板 m,n,p,q 個，

則 $2m+3n+4p=at^2$ 或 $2m+3n+8q=at^2$

解的判斷法則

步驟 1：找最大拼板的個數範圍

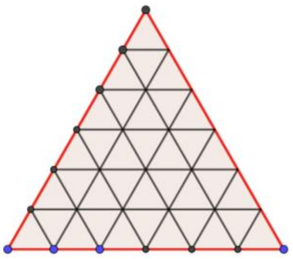
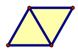
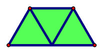
步驟 2：根據最大拼板個數切割圖形，將剩餘區域切成可無縫密鋪圖形，

最後剩餘不為  或 ，則可無縫密鋪

步驟 3：利用 n 的奇偶性，計算 A、B 拼板。

壹、研究動機

有個關於拼圖的問題：「將邊長 6 的正三角形分割成 36 個邊長 1 的小正三角形。若以 m 塊 A 拼板和 n 塊 B 拼板拼出此正三角形，且拼板間不可重複覆蓋或部分圖形留空間。請找出所有可能的 m 值？」拼圖問題通常有許多解，而這個問題著重於研究「圖形」與「拼板個數」之間的關係。

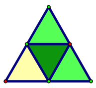
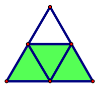
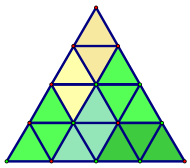
	A 拼板　　B 拼板 　 A 拼板是由 2 個單位正三角形所組成 B 拼板是由 3 個單位正三角形所組成

貳、研究目的與問題

一、探討以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪正三角形有解的條件與範圍。
二、探討以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪菱形有解的條件與範圍。
三、探討以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪等腰梯形有解的條件與範圍。
四、探討以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪平行四邊形有解的條件與範圍。

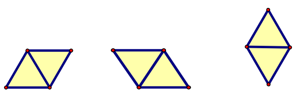
參、名詞與符號定義

一、無縫密鋪：若圖形可以由數個拼板覆蓋，且拼板間不可重複覆蓋或部分圖形留有空間，則稱拼板「無縫密鋪」此圖形。

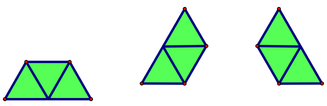
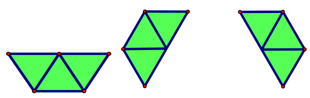
重複覆蓋	留空間未鋪滿	無縫密鋪
		

二、〔 x ， y 〕：若圖形或拼板由 x 個▲，有 y 個▼組成，記作〔 x ， y 〕表示。

例如：A 拼板是由 2 個單位正三角形所組成，依據擺放的方向不同，只有一種類型

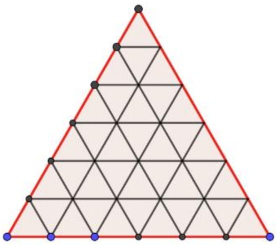
1▲1▼型：由 1 個▲，1 個▼組成，記作〔1，1〕 

例如：B 拼板是由 3 個單位正三角形所組成，依據擺放的方向不同，有兩種類型

2▲1▼型： 由 2 個▲，1 個▼組成，記作〔2，1〕 	1▲2▼型： 由 1 個▲，2 個▼組成，記作〔1，2〕 

肆、研究過程

一、以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪正三角形



設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 邊長 t 的正三角形是由 t^2 個單位正三角形所組成，

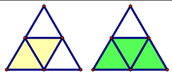
而 A 拼板、B 拼板分別由 2 個、3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。

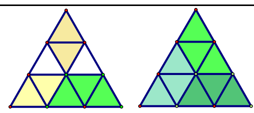
邊長 1 的正三角形

$2m+3n=1$　　無法由 A 拼板或 B 拼板拼出	

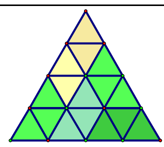
邊長 2 的正三角形

$2m+3n=4$ $\therefore (m,n)=(2,0)$　但無法由 2 個 A 拼板拼出　$\therefore$ 無解	

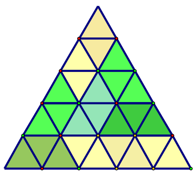
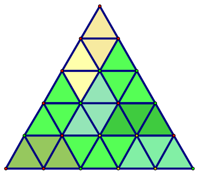
邊長 3 的正三角形

$2m+3n=9$　$\therefore (m,n)=(3,1)$,$(0,3)$ 當 $(m,n)=(3,1)$，無法拼出 當 $(m,n)=(0,3)$，可由 3 個 B 拼板(2▲1▼型)無縫密鋪	

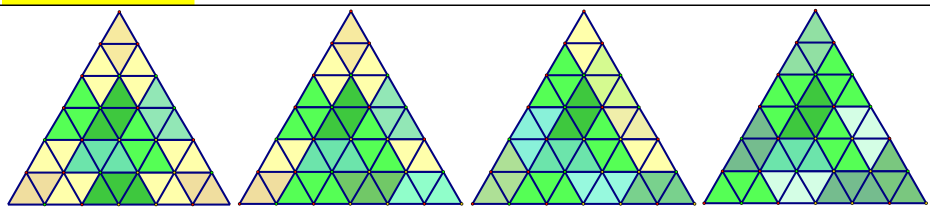
邊長 4 的正三角形，由 10 個▲，6 個▼組成

$2m+3n=16$　$\therefore (m,n)=(8,0)$,$(5,2)$,$(2,4)$ 當 $(m,n)=(8,0)$，8 個 A 拼板無法拼出 當 $(m,n)=(5,2)$，$5\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[9,7]$　無法拼出 當 $(m,n)=(2,4)$，$2\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[10,6]$　可以無縫密鋪	

邊長 5 的正三角形，由 15 個▲，10 個▼組成

$2m+3n=25$　$\therefore (m,n)=(11,1)$,$(8,3)$,$(5,5)$,$(2,7)$ 當 $(m,n)=(11,1)$，$11\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]=[13,12]$ 無法拼出 當 $(m,n)=(8,3)$，$8\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]=[14,11]$ 無法拼出 當 $(m,n)=(5,5)$，$5\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]=[15,10]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(2,7)$，$2[1,1]+6[2,1]+1[1,2]=[15,10]$ 可以密鋪	$(m,n)=(5,5)$　$(m,n)=(2,7)$  

邊長 6 的正三角形，由 21 個▲，15 個▼組成

$2m+3n=36$　$\therefore (m,n)=(18,0)$,$(15,2)$,$(12,4)$,$(9,6)$,$(6,8)$,$(3,10)$,$(0,12)$ 當 $(m,n)=(18,0)$，$18\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[18,18]$ 無法拼出 當 $(m,n)=(15,2)$，$15\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[19,17]$ 無法拼出 當 $(m,n)=(12,4)$，$12\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[20,16]$ 無法拼出 當 $(m,n)=(9,6)$，$9\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]=[21,15]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(6,8)$，$6\cdot[1,1]+7\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(3,10)$，$3\cdot[1,1]+8\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(0,12)$，$0\cdot[1,1]+9\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪


★無縫密鋪正三角形之解的條件

> 無縫密鋪邊長t的正三角形，至少需要t個 B 拼板，其中$t\geq 3$。

[證明] 設無縫密鋪邊長t的正三角形至多需要$t-1$個 B 拼板，

且 B 拼板皆為(2▲1▼型)，其餘使用 A 拼板(1▲1▼型)

又邊長t的正三角形，由$1+2+\cdots+t=\dfrac{t(t+1)}{2}$個▲，$1+2+\cdots+(t-1)=\dfrac{(t-1)t}{2}$個▼組成

$$\therefore\ 2m+3n\leq[1,1]m+[2,1](t-1)=[m+2(t-1),m+(t-1)]=\left[\frac{t(t+1)}{2},\frac{(t-1)t}{2}\right]$$

$$\therefore\begin{cases} m+2(t-1)=\dfrac{t(t+1)}{2} \\ m+(t-1)=\dfrac{(t-1)t}{2}\end{cases}\quad \text{兩式相減得}\quad t-1=t\quad \text{矛盾}$$

∴無縫密鋪邊長t的正三角形至少需要t個 B 拼板。

★無縫密鋪正三角形之拼板數的最大解

> 若使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}$個 (1▲1▼型)和 B 拼板t個 (2▲1▼型)，可以無縫密鋪邊長t的正三角形且恰為拼板數的最大解，其中$t\geq 3$。

[證明]∵邊長t的正三角形是由$\dfrac{t(t+1)}{2}$個▲，$\dfrac{(t-1)t}{2}$個▼組成，

且使用$\dfrac{t^2-3t}{2}$個 A 拼板(1▲1▼型)和t個 B 拼板(2▲1▼型)

$$\therefore\ 2m+3n=[1,1]\cdot\frac{t^2-3t}{2}+[2,1]\cdot t=\left[\frac{t^2-3t}{2}+2t,\frac{t^2-3t}{2}+t\right]=\left[\frac{t^2+t}{2},\frac{t^2-t}{2}\right]=\left[\frac{t(t+1)}{2},\frac{(t-1)t}{2}\right]$$

∴使用$\dfrac{t^2-3t}{2}$個 A 拼板(1▲1▼型)和t個 B 拼板(2▲1▼型)可無縫密鋪邊長t的正三角形。

★討論：使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的正三角形的所有解。

> ∵邊長t的正三角形是由$\dfrac{t(t+1)}{2}$個▲，$\dfrac{(t-1)t}{2}$個▼組成且至少需t個 B 拼板。
>
> 設使用m個 A 拼板和n個 B 拼板，分成n_1個(2▲1▼型)、n_2個(1▲2▼型)，即$n=n_1+n_2$
>
> 由$2m+3n=t^2$　$\therefore\ m[1,1]+n_1[2,1]+n_2[1,2]=[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2]=\left[\dfrac{t(t+1)}{2},\dfrac{(t-1)t}{2}\right]$
>
> 當$n=t$時，使用 B 拼板t個(2▲1▼型)、0 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}$個
>
> 當$n=t+2$時，使用 B 拼板$t+1$個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3$個
>
> 當$n=t+4$時，使用 B 拼板$t+2$個(2▲1▼型)、2 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-6$個
>
> ．．．．．．
>
> 當$n=t+2k$時，使用 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個

$\therefore$使用**拼板的總數**為$(t+2k)+\left(\dfrac{t^2-3t}{2}-3k\right)=\dfrac{t^2-t}{2}-k$，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-3t}{6}\right]$。

$\therefore$無縫密鋪正三角形之**拼板數**的**最大解**為$\dfrac{t^2-t}{2}$個，其中$t\ge 3$。

★無縫密鋪正三角形之解的範圍

> 使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的正三角形，有解的範圍為
> A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個(1▲1▼型)和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)，
> 其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-3t}{6}\right]$，$t\ge 3$。

[證明]$\because$邊長t的正三角形是由$1+2+\cdots+t=\dfrac{t(t+1)}{2}$個▲，$1+2+\cdots+(t-1)=\dfrac{(t-1)t}{2}$個▼組成

且使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個(1▲1▼型)和 B 拼板$t+k$個 (2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，

$$\therefore 2m+3n=\left(\frac{t^2-3t}{2}-3k\right)\cdot[1,1]+(t+k)\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]$$

$$=\left[\left(\frac{t^2-3t}{2}-3k\right)+2(t+k)+k,\left(\frac{t^2-3t}{2}-3k\right)+(t+k)+2k\right]=\left[\frac{t^2+t}{2},\frac{t^2-t}{2}\right]=\left[\frac{t(t+1)}{2},\frac{(t-1)t}{2}\right]$$

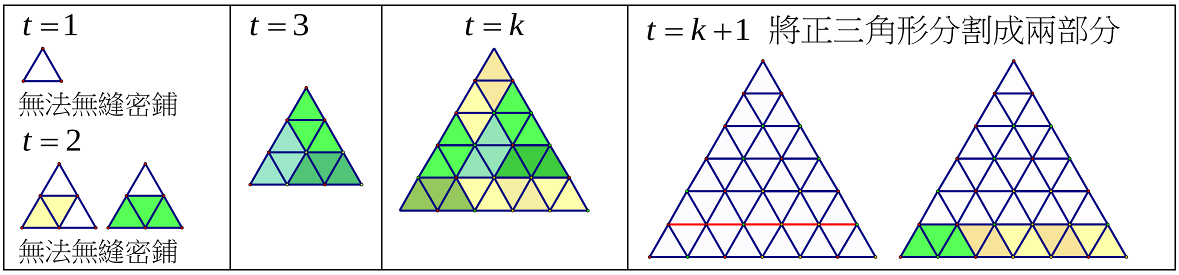
$\therefore$使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個(1▲1▼型)和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，

可以無縫密鋪邊長t的正三角形，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-3t}{6}\right]$，$t\ge 3$。

★無縫密鋪正三角形之解的存在性

> 使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的正三角形，若$t\ge 3$必定有解的存在。

[證明]



當$t=3$時，由上圖知，使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長 3 的正三角形。

設$t=k$時，使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長k的正三角形，

則$t=k+1$時，將邊長$k+1$的正三角形分割成「邊長k的正三角形」與「梯形」兩部分，

$\because$「梯形」可由 1 個 B 拼板和$k-1$個 A 拼板無縫密鋪，

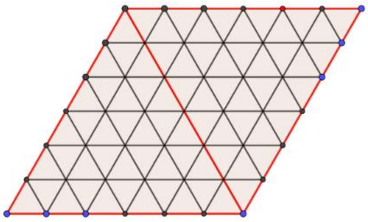
且「邊長k的正三角形」可以由 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪，

$\therefore$使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長$k+1$的正三角形。

由數學歸納法知，對所有的正整數t且$t\ge 3$，

使用 A、B 拼板可以無縫密鋪邊長t的正三角形。

二、以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪菱形

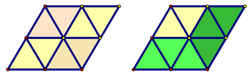


設無縫密鋪邊長 t 的菱形需 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板

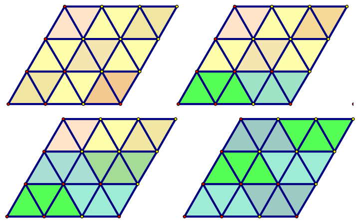
$\because$ 邊長 t 的菱形是由 $2t^2$ 個單位正三角形所組成，而
A 拼板、B 拼板分別由 2 個、3 個單位正三角形所組成

$\therefore 2m+3n=2t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。

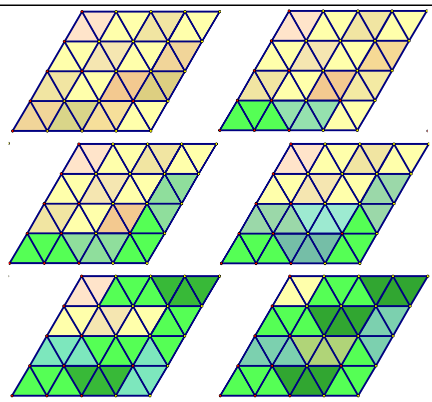
邊長 2 的菱形，由 4 個▲，4 個▼組成

$2m+3n=8 \quad \therefore (m,n)=(4,0),\ (1,2)$ 當 $(m,n)=(4,0)$ ，$4\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]+0\cdot[1,2]=[4,4]$ 可無縫密鋪 當 $(m,n)=(1,2)$ ，$1\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[4,4]$ 可以無縫密鋪	$(m,n)=(4,0) \quad (m,n)=(1,2)$ 

邊長 3 的菱形，由 9 個▲，9 個▼組成

$2m+3n=18 \quad \therefore (m,n)=(9,0),\ (6,2),\ (3,4),\ (0,6)$ 當 $(m,n)=(9,0)$ ，$9\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[9,9]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(6,2)$ ，$6\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪 當 $(m,n)=(3,4)$ ，$3\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪 當 $(m,n)=(0,6)$ ，$0\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪	

邊長 4 的菱形，由 16 個▲，16 個▼組成

$2m+3n=32$ $\therefore (m,n)=(16,0),(13,2),(10,4),(7,6),(4,8),(1,10)$ 當 $(m,n)=(16,0)$ ，$16\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[16,16]$ 可以無縫密鋪 當 $(m,n)=(13,2)$ ，$13\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[16,16]$ 可以密鋪 當 $(m,n)=(10,4)$ ，$10\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[16,16]$ 可密鋪 當 $(m,n)=(7,6)$ ，$7\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[16,16]$ 可以密鋪 當 $(m,n)=(4,8)$ ，$4\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+4\cdot[1,2]=[16,16]$ 可以密鋪 當 $(m,n)=(1,10)$ ，$1\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]+5\cdot[1,2]=[16,16]$ 可以密鋪	

★無縫密鋪菱形之解的條件

無縫密鋪邊長 t 的**菱形**，需要偶數個 B 拼板且兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型) 個數相等。

[證明](1) 設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 邊長 t 的菱形是由 $2t^2$ 個單位正三角形所組成，

而 A 拼板、B 拼板是由 2 個、3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=2t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。

$\therefore 3n=2t^2-2m=2(t^2-m) \qquad \therefore 2\mid 3n \qquad \therefore 2\mid n$

$\therefore$ 無縫密鋪邊長 t 的菱形，需要偶數(含 0)個 B 拼板。

(2) 設 n 個 B 拼板分成 n_1 個(2▲1▼型)、 n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

又邊長 t 的菱形是由 t^2 個▲， t^2 個▼所組成

$\therefore 2m+3n=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]=\left[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2\right]=\left[t^2,t^2\right]$

$\therefore \begin{cases} m+2n_1+n_2=t^2 \\ m+n_1+2n_2=t^2 \end{cases}$ 兩式相減得 $n_1-n_2=0 \quad \therefore n_1=n_2$

$\therefore$ 無縫密鋪邊長 t 的菱形需要偶數個 B 拼板且兩類型的個數相等。

★無縫密鋪菱形之拼板數最大解

若只使用 A 拼板t^2個 (1▲1▼型)可以無縫密鋪邊長t的**菱形**且恰為拼板數的最大解。

[證明] ∵邊長t的**菱形**是由t^2個▲，t^2個▼所組成，且只使用 A 拼板t^2個(1▲1▼型)

$\therefore 2m+3n=t^2\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=\left[t^2,t^2\right]$

∴使用 A 拼板t^2個 (1▲1▼型)和 B 拼板 0 個可以無縫密鋪邊長t的**菱形**。

★討論：使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的**菱形**的所有解。

∵邊長t的菱形是由t^2個▲，t^2個▼所組成，
又無縫密鋪邊長t的菱形，需要偶數個 B 拼板且兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型)的個數相等
設使用m個 A 拼板和n個 B 拼板，其中分成k個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，即$n=2k$
由$2m+3n=2t^2$ $\quad\therefore 2m+3n=m\cdot[1,1]+k\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]=\left[m+3k,m+3k\right]=\left[t^2,t^2\right]$
當$n=0$時，使用 B 拼板 0 個(2▲1▼型)，和 A 拼板t^2個
當$n=2$時，使用 B 拼板 1 個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板t^2-3個
．．．．．．
當$n=2k$時，使用 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，和 A 拼板t^2-3k個

∴使用**拼板總數**為$(2k)+\left(t^2-3k\right)=t^2-k$，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2}{3}\right]$，**拼板數**的最大解為$t^2$個。

★無縫密鋪菱形之解的範圍

使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的菱形，有解的範圍為 A 拼板t^2-3k個(1▲1▼型)和 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2}{3}\right]$。

[證明]∵邊長t的菱形是由t^2個▲，t^2個▼所組成

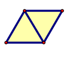
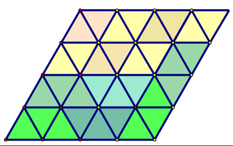
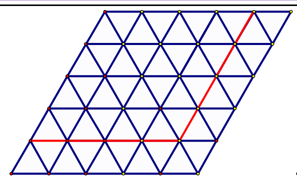
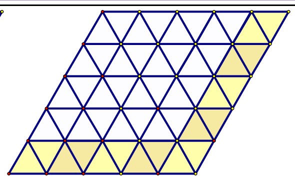
且使用t^2-3k個 A 拼板(1▲1▼型)和k個 B 拼板(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)

$\therefore 2m+3n=(t^2-3k)\cdot[1,1]+k\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]=\left[(t^2-3k)+2k+k,(t^2-3k)+k+2k\right]=\left[t^2,t^2\right]$

∴使用 A 拼板t^2-3k個和 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)可以無縫密鋪菱形。

★無縫密鋪菱形之解的存在性

使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪邊長t的菱形，必定有解的存在。

[證明]	$t=1$	$t=k$	$t=k+1$ 將菱形分割成兩部分
			 

當$t=1$時，由上圖知，使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長 1 的菱形。

設$t=k$時，使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長k的菱形，

則$t=k+1$時，將邊長$k+1$的菱形分割成「邊長k的菱形」與「剩餘區域」兩部分，

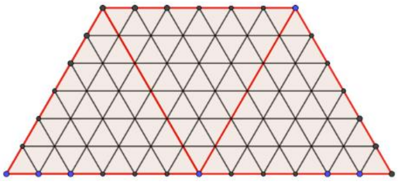
∵「剩餘區域」可由$2k$+1個 A 拼板無縫密鋪，

且「邊長k的菱形」可以由 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪，

∴使用 A 拼板和 B 拼板可以無縫密鋪邊長$k+1$的菱形。

由數學歸納法知，對所有的正整數t，使用 A、B 拼板可以無縫密鋪邊長t的菱形。

三、以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪等腰梯形



設無縫密鋪上底、兩腰長為 t ，下底長為 $2t$ 的**等腰梯形**需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 上底、兩腰長為 t ，下底長 $2t$ 為的**等腰梯形**是由 $3t^2$ 個單位正三角形所組成，

而 A 拼板、B 拼板分別由 2 個、3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=3t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。

上底和兩腰長為 2，下底長為 4 的**等腰梯形**，由 7 個▲，5 個▼組成

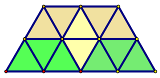
$2m+3n=12$　　$\therefore (m,n)=(6,0),\ (3,2),\ (0,4)$

當 $(m,n)=(6,0)$ ，$6\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[6,6]$　無法拼出

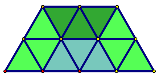
當 $(m,n)=(3,2)$ ，$3\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[7,5]$　　可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,4)$ ，$0\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[7,5]$ 可以無縫密鋪

$(m,n)=(3,2)$



$(m,n)=(0,4)$



上底和兩腰長為 3，下底長為 6 的**等腰梯形**，由 15 個▲，12 個▼組成

$2m+3n=27$　　$\therefore (m,n)=(12,1),\ (9,3),\ (6,5),\ (3,7),\ (0,9)$

當 $(m,n)=(12,1)$ ，$12\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[12,12]$　無法拼出

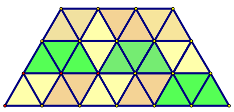
當 $(m,n)=(9,3)$ ，$9\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]=[15,12]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(6,5)$ ，$6\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[15,12]$ 可無縫密鋪

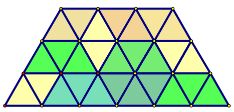
當 $(m,n)=(3,7)$ ，$3\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[15,12]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,9)$ ，$0\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[15,12]$ 可無縫密鋪

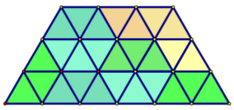
$(m,n)=(9,3)$



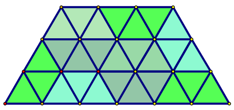
$(m,n)=(6,5)$



$(m,n)=(3,7)$



$(m,n)=(0,9)$



上底和兩腰長為 4，下底長為 8 的**等腰梯形**，由 26 個▲，22 個▼組成

$2m+3n=48$　　$\therefore (m,n)=(24,0),(21,2),(18,4),(15,6),(12,8),(9,10),(6,12),(3,14),(0,16)$

當 $(m,n)=(24,0)$ ，$24\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[24,24]$　無法拼出

當 $(m,n)=(21,2)$ ，$21\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[25,23]$　無法拼出

當 $(m,n)=(18,4)$ ，$18\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[26,22]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(15,6)$ ，$15\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

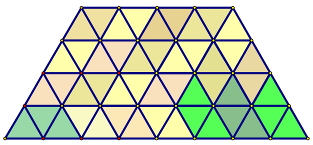
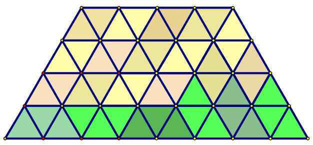
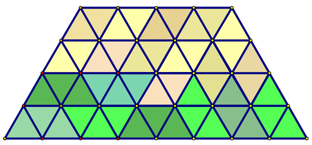
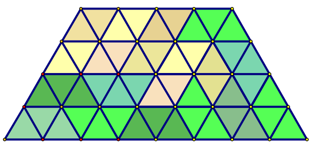
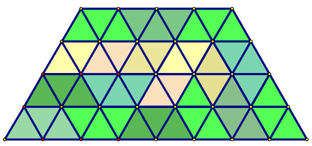
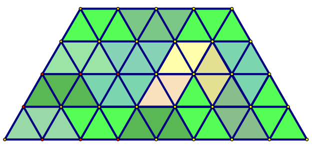
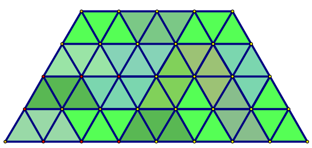
當 $(m,n)=(12,8)$ ，$12\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(9,10)$ ，$9\cdot[1,1]+7\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(6,12)$ ，$6\cdot[1,1]+8\cdot[2,1]+4\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(3,14)$ ，$3\cdot[1,1]+9\cdot[2,1]+5\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,16)$ ，$0\cdot[1,1]+10\cdot[2,1]+6\cdot[1,2]=[26,22]$ 可無縫密鋪

★無縫密鋪等腰梯形之解的條件

> 無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**，至少需要t個 B 拼板。

[證明]設無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**至多需要$t-1$個 B 拼板，

則 B 拼板皆為(2▲1▼型)，其餘使用 A 拼板(1▲1▼型)，

又上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**是由

$2(1+2+\cdots+t)+(1+2+\cdots+(t-1))=\dfrac{3t^2+t}{2}$個▲，$(1+\cdots+t)+2(1+\cdots+(t-1))=\dfrac{3t^2-t}{2}$個▼組成

$$\therefore 2m+3n\le[1,1]m+[2,1](t-1)=[m+2(t-1),m+(t-1)]=\left[\frac{3t^2+t}{2},\frac{3t^2-t}{2}\right]$$

$$\therefore\begin{cases} m+2(t-1)=\dfrac{3t^2+t}{2}\\ m+(t-1)=\dfrac{3t^2-t}{2}\end{cases}\quad \text{兩式相減得}\quad t-1=t\quad\text{矛盾}$$

∴無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**，至少需要t個 B 拼板。

★無縫密鋪等腰梯形之拼板數最大解

> 若使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}$個和 B 拼板t個 (2▲1▼型)，可以無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**且恰為拼板數的最大解。

[證明] ∵上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**是由$\dfrac{3t^2+t}{2}$個▲，$\dfrac{3t^2-t}{2}$個▼所組成，

且使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}$個 (1▲1▼型)和t個 B 拼板(2▲1▼型)，

$$\therefore 2m+3n=\frac{3t^2-3t}{2}\cdot[1,1]+t\cdot[2,1]=\left[\frac{3t^2-3t}{2}+2t,\frac{3t^2-3t}{2}+t\right]=\left[\frac{3t^2+t}{2},\frac{3t^2-t}{2}\right]$$

∴使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}$個 (1▲1▼型)和 B 拼板t個 (2▲1▼型)可以無縫密鋪**等腰梯形**。

★討論：使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$之**等腰梯形**的所有解

> 設使用m個 A 拼板和n個 B 拼板，分成n_1個(2▲1▼型)、n_2個 (1▲2▼型)，即$n=n_1+n_2$
>
> 由$2m+3n=3t^2$ $\therefore m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]=[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2]=\left[\dfrac{3t^2+t}{2},\dfrac{3t^2-t}{2}\right]$
>
> 當$n=t$時，使用 B 拼板t個(2▲1▼型) 和 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}$個
>
> 當$n=t+2$時，使用 B 拼板$t+1$個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3$個
>
> 當$n=t+4$時，使用 B 拼板$t+2$個(2▲1▼型)、2 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-6$個
>
> ．．．．．．
>
> 當$n=t+2k$時，使用 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，和 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k$個

$\therefore$使用**拼板的總數**為$(t+2k)+\left(\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k\right)=\dfrac{3t^2-t}{2}-k$，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-t}{2}\right]$。

$\therefore$無縫密鋪**等腰梯形**之**拼板數**的最大解為$\dfrac{3t^2-t}{2}$個。

★無縫密鋪等腰梯形之解的範圍

使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**，

有解的範圍為 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k$個和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)，

其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-t}{2}\right]$。

[證明]

$\because$上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**是由$\dfrac{3t^2+t}{2}$個▲，$\dfrac{3t^2-t}{2}$個▼所組成，

且使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k$個(1▲1▼型)和 B 拼板$t+k$個 (2▲1▼型) 、k個 (1▲2▼型)

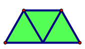
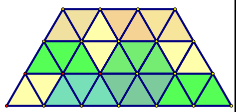
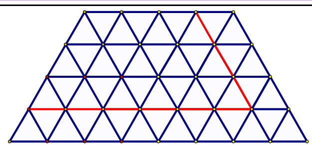
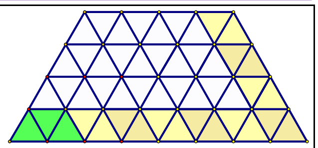
$\therefore 2m+3n=\left(\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k\right)\cdot[1,1]+(t+k)\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]=\left[\dfrac{3t^2+t}{2},\dfrac{3t^2-t}{2}\right]$

$\therefore$使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k$個(1▲1▼型)和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，

可以無縫密鋪上底和兩腰長為t，下底長為$2t$的**等腰梯形**，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-t}{2}\right]$。

★無縫密鋪等腰梯形之解的存在性

使用 A、B 拼板無縫密鋪上底、兩腰為t，下底為$2t$的等腰梯形，必定有解的存在。

[證明]	$t=1$	$t=k$	$t=k+1$ 將等腰梯形分割成兩部分	
				

當$t=1$時，由上圖知，使用 A、B 拼板可以無縫密鋪上底兩腰為 1，下底為 2 的等腰梯形。

設$t=k$時，使用 A、B 拼板可以無縫密鋪上底兩腰為k，下底為$2k$的等腰梯形，

則$t=k+1$時，將上底兩腰為$k+1$，下底為$2(k+1)$的等腰梯形分割成

「上底兩腰為k，下底為$2k$的等腰梯形」與「剩餘區域」兩部分，

$\because$「剩餘區域」可由 1 個 B 拼板和$3k$個 A 拼板無縫密鋪，

且「上底兩腰為k，下底為$2k$的等腰梯形」可以由 A、B 拼板無縫密鋪，

$\therefore$使用 A、B 拼板可以無縫密鋪上底兩腰為$k+1$，下底為$2(k+1)$的等腰梯形。

由數學歸納法知，對所有的正整數t，

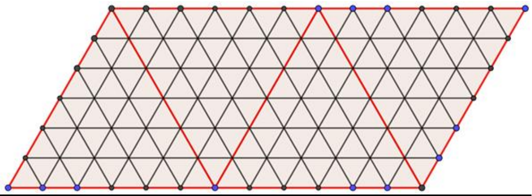
使用 A、B 拼板可以無縫密鋪上底兩腰為t，下底為$2t$的等腰梯形。

四、以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪平行四邊形

設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**是由 $4t^2$ 個正三角形組成，而 A、B 拼板由 2 個、3 個正三角形組成，

$\therefore 2m+3n=4t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。



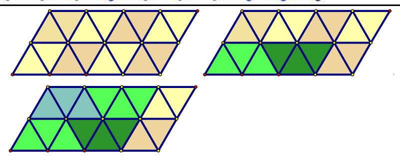
邊長 2 和 4 的平行四邊形，由 8 個▲，8 個▼組成

$2m+3n=16 \quad \therefore (m,n)=(8,0),\ (5,2),\ (2,4)$

當 $(m,n)=(8,0)$ ，$8\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]+0\cdot[1,2]=[8,8]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(5,2)$ ，$5\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[8,8]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(2,4)$ ，$2\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[8,8]$ 可無縫密鋪



邊長 3 和 6 的平行四邊形，由 18 個▲，18 個▼組成

$2m+3n=36 \therefore (m,n)=(18,0),(15,2),(12,4),(9,6),(6,8),(3,10),(0,12)$

當 $(m,n)=(18,0)$ ，$18\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(15,2)$ ，$15\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

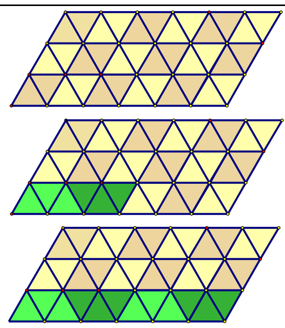
當 $(m,n)=(12,4)$ ，$12\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

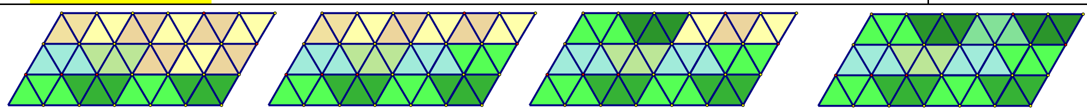
當 $(m,n)=(9,6)$ ，$9\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(6,8)$ ，$6\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+4\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(3,10)$ ，$3\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]+5\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,12)$ ，$0\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+6\cdot[1,2]=[18,18]$ 可以無縫密鋪





★無縫密鋪平行四邊形之解的條件

無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，需要偶數個 B 拼板且兩類型的個數相等。

[證明](1) 設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ **平行四邊形**是由 $4t^2$ 個正三角形組成，而 A、B 拼板是由 2 個、3 個正三角形組成

$\therefore 2m+3n=4t^2$ ，其中 m,n 為非負整數。

$\therefore 3n=4t^2-2m=2(2t^2-m) \qquad \therefore 2|3n \qquad \therefore 2|n \qquad \therefore$ 需要偶數個 B 拼板。

(2) 設 n 個 B 拼板分成 n_1 個(2▲1▼型)、n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

又兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，由 $2t^2$ 個▲， $2t^2$ 個▼組成

$\therefore 2m+3n=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]=\left[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2\right]=\left[2t^2,2t^2\right]$

$\therefore \begin{cases} m+2n_1+n_2=2t^2 \\ m+n_1+2n_2=2t^2 \end{cases}$ 兩式相減得 $n_1-n_2=0 \quad \therefore n_1=n_2 \quad \therefore$ B 拼板兩類型個數相等。

★無縫密鋪平行四邊形之拼板數最大解

只使用 A 拼板 $2t^2$ 個可以無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**且恰為拼板數的最大解。

[證明] $\because$ 兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**是由 $2t^2$ 個▲， $2t^2$ 個▼組成且只使用 A 拼板 $2t^2$ 個

$\therefore 2m+3n=2t^2\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=\left[2t^2,2t^2\right]$

$\therefore$ 只使用 A 拼板 $2t^2$ 個可以無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**。

★討論：使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**的所有解。

∵兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，由 $2t^2$ 個▲，$2t^2$ 個▼組成，
且無縫密鋪需要偶數個 B 拼板，B 拼板的兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型)個數相等。
設使用 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板分成 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，即 $n=2k$
由 $2m+3n=4t^2$ $\therefore 2m+3n=[1,1]\cdot m+[2,1]\cdot k+[1,2]\cdot k=\left[m+3k,m+3k\right]=\left[2t^2,2t^2\right]$
當 $n=0$ 時，使用 B 拼板 0 個(2▲1▼型)，和 A 拼板 $2t^2$ 個
當 $n=2$ 時，使用 B 拼板 1 個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $2t^2-3$ 個
．．．．．．
當 $n=2k$ 時，使用 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $2t^2-3k$ 個

∴使用**拼板的總數**為 $(2k)+\left(2t^2-3k\right)=2t^2-k$，其中 $0\le k\le\left[\frac{2t^2}{3}\right]$。

∴無縫密鋪**平行四邊形**之**拼板數**的最大解為 $2t^2$ 個。

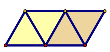
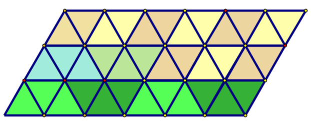
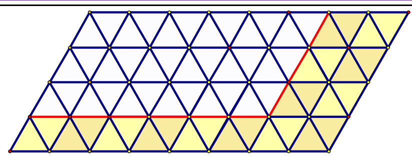
★無縫密鋪平行四邊形之解的範圍

使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，有解的範圍為
A 拼板 $2t^2-3k$ 個和 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)，其中 $0\le k\le\left[\frac{2t^2}{3}\right]$。

[證明]∵兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，由 $2t^2$ 個▲，$2t^2$ 個▼組成
且 $2t^2-3k$ 個 A 拼板(1▲1▼型)使用 k 個 B 拼板(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)
$\therefore 2m+3n=(2t^2-3k)\cdot[1,1]+k\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]=\left[(2t^2-3k)+2k+k,(2t^2-3k)+k+2k\right]=\left[2t^2,2t^2\right]$
∴使用 A 拼板 $2t^2-3k$ 個(1▲1▼型)和 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，
可以無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，其中 $0\le k\le\left[\frac{2t^2}{3}\right]$。

★無縫密鋪平行四邊形之解的存在性

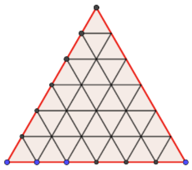
使用 A、B 拼板無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的平行四邊形，必定有解的存在。

[證明]	$t=1$	$t=k$	$t=k+1$ 將平行四邊形分割成兩部分	
				

當 $t=1$ 時，由上圖知，使用 A、B 拼板可以無縫密鋪兩邊長為 1 和 2 的平行四邊形。
設 $t=k$ 時，使用 A、B 拼板可以無縫密鋪兩邊長為 k 和 $2k$ 的平行四邊形，
則 $t=k+1$ 時，將兩邊長為 $k+1$ 和 $2(k+1)$ 的平行四邊形分割成
「兩邊長為 k 和 $2k$ 的平行四邊形」與「剩餘區域」兩部分，
∵「剩餘區域」可由 $4k+2$ 個 A 拼板無縫密鋪，
且「兩邊長為 k 和 $2k$ 的平行四邊形」可以由 A、B 拼板無縫密鋪，
∴使用 A、B 拼板可以無縫密鋪兩邊長為 $k+1$ 和 $2(k+1)$ 的平行四邊形。
由數學歸納法知，對所有的正整數 t，
使用 A、B 拼板可以無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的平行四邊形。

伍、研究結果

一、無縫密鋪邊長t的正三角形 (其中$t \geq 3$)



(一)正三角形是由t^2個單位正三角形組成，分成$\dfrac{t(t+1)}{2}$個▲，$\dfrac{(t-1)t}{2}$個▼。

(二)有解的條件：至少需要t個 B 拼板。

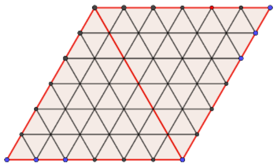
(三)拼板數的最大解：使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}$個和 B 拼板t個(2▲1▼型)。

(四)有解的範圍：使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，

其中$0 \leq k \leq \left[\dfrac{t^2-3t}{6}\right]$。

(五)解的存在性：使用 A、B 拼板無縫密鋪，若$t \geq 3$必定有解的存在。

二、無縫密鋪邊長t的菱形



(一)菱形是由$2t^2$個單位正三角形組成，分成t^2個▲，t^2個▼。

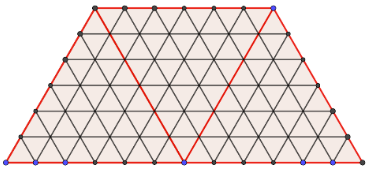
(二)有解的條件：需要偶數個 B 拼板且兩類型的個數相等。

(三)拼板數的最大解：只使用 A 拼板t^2個。

(四)有解的範圍：A 拼板t^2-3k個和 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)，$0 \leq k \leq \left[\dfrac{t^2}{3}\right]$。

(五)解的存在性：使用 A、B 拼板無縫密鋪必定有解的存在。

三、無縫密鋪上底、兩腰長為t，下底長為$2t$的等腰梯形



(一)等腰梯形是由$3t^2$個單位的正三角形組成，

分成$\dfrac{3t^2+t}{2}$個▲，$\dfrac{3t^2-t}{2}$個▼。

(二)有解的條件：至少需要t個 B 拼板。

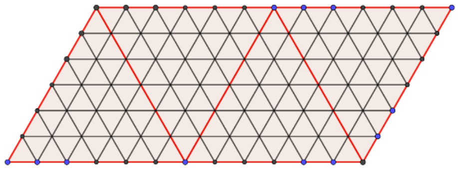
(三)拼板數的最大解：使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}$個和 B 拼板t個(2▲1▼型)。

(四)有解的範圍：使用 A 拼板$\dfrac{3t^2-3t}{2}-3k$個和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)，

其中$0 \leq k \leq \left[\dfrac{t^2-t}{2}\right]$。

(五)解的存在性：使用 A、B 拼板無縫密鋪必定有解的存在。

四、無縫密鋪兩邊長為t和$2t$的平行四邊形



(一)平行四邊形是由$4t^2$個單位正三角形組成，

分成$2t^2$個▲，$2t^2$個▼。

(二)有解的條件：需偶數個 B 拼板且兩類型個數相等。

(三)拼板數的最大解：只使用 A 拼板$2t^2$個。

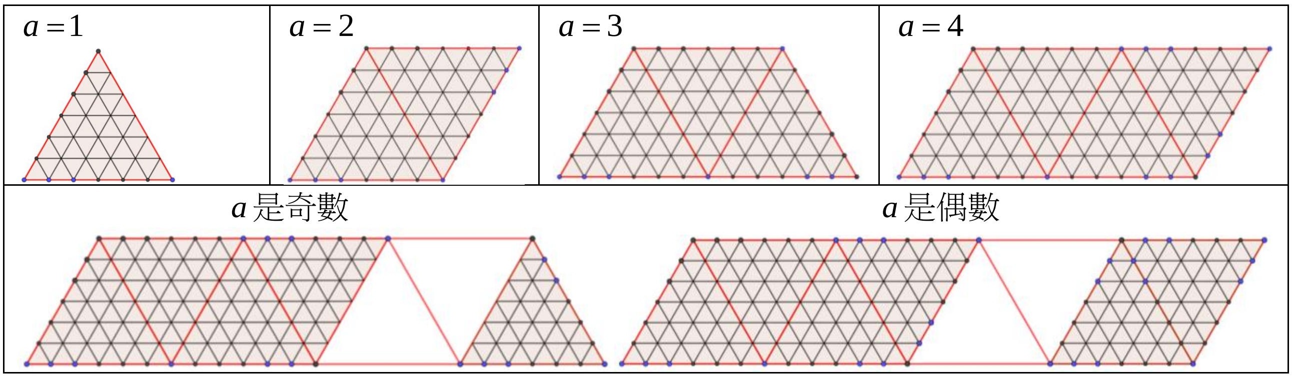
(四)有解的範圍：使用 A 拼板$2t^2-3k$個和 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個(1▲2▼型)

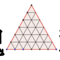
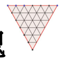
，其中$0 \leq k \leq \left[\dfrac{2t^2}{3}\right]$。

(五)解的存在性：使用 A、B 拼板無縫密鋪必定有解的存在。

陸、討論

一、無縫密鋪由 a 塊邊長 t 正三角形所組成水平衍生圖形，解的條件與範圍與 a 值有關。



(一)當 a 是奇數，由 a 塊邊長 t 的正三角形組成衍生圖形，切割成 $\frac{a+1}{2}$ 塊  和 $\frac{a-1}{2}$ 塊  。

$$\therefore \text{共有} \frac{a+1}{2}\cdot\left(1+2+\cdots+t\right)+\frac{a-1}{2}\cdot\left(1+2+\cdots+(t-1)\right)=\frac{at^2+t}{2}\text{個▲，}$$

$$\text{和} \frac{a-1}{2}\cdot\left(1+2+\cdots+t\right)+\frac{a+1}{2}\cdot\left(1+2+\cdots+(t-1)\right)=\frac{at^2-t}{2}\text{個▼。}$$

★無縫密鋪圖形之解的條件

> 當 a 為奇數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形至少需要 t 個 B 拼板

[證明]設無縫密鋪圖形至多需要 $t-1$ 個 B 拼板，則 B 拼板皆(2▲1▼型)，其餘使用 A 拼板，

又當 a 為奇數，圖形是由 $\frac{at^2+t}{2}$ 個▲，$\frac{at^2-t}{2}$ 個▼所組成

$$\therefore 2m+3n\le[1,1]m+[2,1](t-1)=[m+2(t-1),m+(t-1)]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right]$$

$\therefore m+2(t-1)=\frac{at^2+t}{2}$ 且 $m+(t-1)=\frac{at^2-t}{2}$　兩式相減得 $t-1=t$ 矛盾

$\therefore$ 當 a 為奇數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形至少需要 t 個 B 拼板。

★無縫密鋪圖形之拼板數最大解

> 當 a 為奇數，使用 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}$ 個和 B 拼板 t 個 (2▲1▼型)，可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，且恰為拼板數的最大解。

[證明]$\because$ 當 a 為奇數，圖形是由 $\frac{at^2+t}{2}$ 個▲，$\frac{at^2-t}{2}$ 個▼所組成，

且使用 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}$ 個和 t 個 B 拼板(2▲1▼型)，

$$\therefore 2m+3n=\frac{at^2-3t}{2}\cdot[1,1]+t\cdot[2,1]=\left[\frac{at^2-3t}{2}+2t,\frac{at^2-3t}{2}+t\right]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right]$$

$\therefore$ 當 a 為奇數，使用 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}$ 個和 B 拼板 t 個 (2▲1▼型)，

可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形。

★討論：當 a 為奇數，使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形的所有解

∵圖形是由 $\frac{at^2+t}{2}$ 個▲，$\frac{at^2-t}{2}$ 個▼所組成，且無縫密鋪圖形至少需要 t 個 B 拼板

設使用 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，分成 n_1 個(2▲1▼型)、n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

由 $2m+3n=at^2$

$\therefore 2m+3n=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]=[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right]$

當 $n=t$ 時，使用 B 拼板 t 個(2▲1▼型) 和 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}$ 個

當 $n=t+2$ 時，使用 B 拼板 $t+1$ 個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3$ 個

當 $n=t+4$ 時，使用 B 拼板 $t+2$ 個(2▲1▼型)、2 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-6$ 個

．．．．．．

當 $n=t+2k$ 時，使用 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3k$ 個

∴使用**拼板的總數**為 $(t+2k)+\left(\frac{at^2-3t}{2}-3k\right)=\frac{at^2-t}{2}-k$，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2-3t}{6}\right]$。

∴當 a 為奇數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形之**拼板數**的**最大解**為 $\frac{at^2-t}{2}$ 個。

★無縫密鋪圖形之解的範圍

當 a 為奇數，使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，有解的範圍為 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3k$ 個和 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2-3t}{6}\right]$。

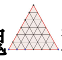
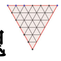
[證明]∵當 a 為奇數，圖形是由 $\frac{at^2+t}{2}$ 個▲，$\frac{at^2-t}{2}$ 個▼所組成，

且使用 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3k$ 個(1▲1▼型)和 B 拼板 $t+k$ 個 (2▲1▼型) 、k 個 (1▲2▼型)

$\therefore 2m+3n=\left(\frac{at^2-3t}{2}-3k\right)\cdot[1,1]+(t+k)\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right]$

∴使用 A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3k$ 個(1▲1▼型)和 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，

可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2-3t}{6}\right]$。

(二)當 a 是偶數，由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成衍生圖形，切割成 $\frac{a}{2}$ 塊和 $\frac{a}{2}$ 塊。

$\therefore$ 共有 $\frac{at^2}{2}$ 個▲和 $\frac{at^2}{2}$ 個▼。

★無縫密鋪圖形之解的條件

> 當 a 為偶數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，需要偶數個 B 拼板，且 B 拼板兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型) 的個數相等。

[證明](1) 設無縫密鋪圖形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 當 a 為偶數，圖形是由 at^2 個單位正三角形所組成，

而 A 拼板是由 2 個單位正三角形所組成， B 拼板是由 3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=at^2$ ，其中 m,n 為非負整數， a 是偶數。

$\therefore 3n=at^2-2m=2\left(\frac{a}{2}t^2-m\right)$，其中 $\frac{a}{2}$ 為正整數

$\therefore 2|3n \qquad \therefore 2|n$

$\therefore$ 當 a 為偶數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，需要偶數個 B 拼板。

(2) 設無縫密鋪圖形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

分成 n_1 個(2▲1▼型)、 n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

又圖形是由 $\frac{at^2}{2}$ 個▲， $\frac{at^2}{2}$ 個▼組成

$\therefore 2m+3n=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]=\left[m+2n_1+n_2,m+n_1+2n_2\right]=\left[\frac{a}{2}t^2,\frac{a}{2}t^2\right]$

$\therefore m+2n_1+n_2=\frac{a}{2}t^2$ 且 $m+n_1+2n_2=\frac{a}{2}t^2$ 兩式相減得 $n_1-n_2=0 \qquad \therefore n_1=n_2$

$\therefore$ 當 a 為偶數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形需要偶數個 B 拼板且兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型)的個數相等。

★無縫密鋪圖形之拼板數最大解

> 當 a 為偶數，只使用 A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個 (1▲1▼型)可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，且恰為拼板數的最大解。

[證明] $\because$ 當 a 為偶數，圖形是由 $\frac{at^2}{2}$ 個▲， $\frac{at^2}{2}$ 個▼所組成，

且使用 A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個(1▲1▼型)和 B 拼板 0 個

$\therefore 2m+3n=\left(\frac{a}{2}t^2\right)\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=\left[\frac{a}{2}t^2,\frac{a}{2}t^2\right]$

$\therefore$ 當 a 為偶數，只使用 A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個(1▲1▼型)可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形。

★討論：當 a 為偶數，使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成

水平衍生圖形的所有解。

∵當 a 為偶數，圖形是由 $\frac{at^2}{2}$ 個▲，$\frac{at^2}{2}$ 個▼組成，

且無縫密鋪圖形需要偶數個 B 拼板，且兩類型(2▲1▼型、1▲2▼型)個數相等。
設使用 m 個 A 拼板 n 個 B 拼板，分成 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，即 $n=2k$

由 $2m+3n=at^2$ $\therefore 2m+3n=[1,1]\cdot m+[2,1]\cdot k+[1,2]\cdot k=[m+3k,m+3k]=\left[\frac{a}{2}t^2,\frac{a}{2}t^2\right]$

當 $n=0$ 時，使用 B 拼板 0 個(2▲1▼型)，和 A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個

當 $n=2$ 時，使用 B 拼板 1 個(2▲1▼型)、1 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{a}{2}t^2-3$ 個

當 $n=4$ 時，使用 B 拼板 2 個(2▲1▼型)、2 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{a}{2}t^2-6$ 個

．．．．．．

當 $n=2k$ 時，使用 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，和 A 拼板 $\frac{a}{2}t^2-3k$ 個

∴使用**拼板的總數**為 $(2k)+\left(\frac{a}{2}t^2-3k\right)=\frac{a}{2}t^2-k$，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2}{6}\right]$。

∴當 a 為偶數，無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形的**拼板數**的最大解為 $\frac{at^2}{2}$ 個。

★無縫密鋪圖形之解的範圍

當 a 為偶數，使用 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，有解的範圍為 A 拼板 $\frac{a}{2}t^2-3k$ 個和 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2}{6}\right]$。

[證明]∵當 a 為偶數，圖形是由 $\frac{at^2}{2}$ 個▲，$\frac{at^2}{2}$ 個▼組成

且 $\frac{a}{2}t^2-3k$ 個 A 拼板(1▲1▼型)使用 k 個 B 拼板(2▲1▼型) 、k 個(1▲2▼型)

$$\therefore 2m+3n=\left(\frac{a}{2}t^2-3k\right)\cdot[1,1]+k\cdot[2,1]+k\cdot[1,2]$$
$$=\left[(\frac{a}{2}t^2-3k)+2k+k,(\frac{a}{2}t^2-3k)+k+2k\right]=\left[\frac{a}{2}t^2,\frac{a}{2}t^2\right]$$

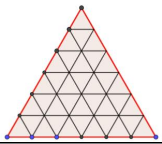
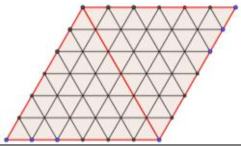
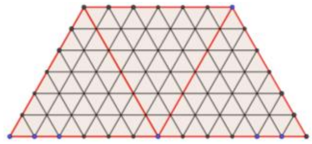
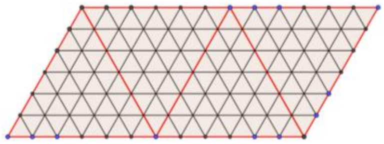
∴使用 A 拼板 $\frac{a}{2}t^2-3k$ 個(1▲1▼型) 和 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個 (1▲2▼型)，

可以無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，其中 $0\le k\le\left[\frac{at^2}{6}\right]$。

★無縫密鋪正三角形所組成水平衍生圖形之解的存在性

使用 A、B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，除了 $a=1$, $t=1$ 與 $a=1$, $t=2$ 外，其餘必定有解的存在。

[證明]

$a=1$ 正三角形	$a=2$ 菱形	$a=3$ 等腰梯形	$a=4$ 平行四邊形
			

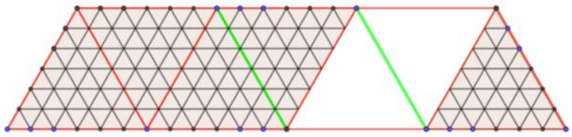
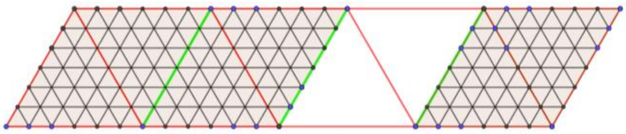
由先前的討論得知

當 $a=1$ 時，使用 A、B 拼板無縫密鋪邊長 t 的正三角形，若 $t\geq 3$ 必定有解的存在。

當 $a=2$ 時，使用 A、B 拼板無縫密鋪邊長 t 的菱形，必定有解的存在。

當 $a=3$ 時，使用 A、B 拼板無縫密鋪上底兩腰為 t ，下底 $2t$ 的等腰梯形，必定有解的存在。

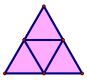
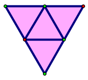
∴將 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形做切割，分成「等腰梯形」和「菱形」，

當 a 是奇數且 $a\neq 1$ 時，	當 a 是偶數時，
	
分成 1 個「等腰梯形」、$\dfrac{a-3}{2}$ 個「菱形」	圖形分成 $\dfrac{a}{2}$ 個「菱形」

∵使用 A、B 拼板無縫密鋪「等腰梯形」和「菱形」必定有解的存在

∴使用 A、B 拼板無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形所組成水平衍生圖形，
　除了 $a=1$, $t=1$ 與 $a=1$, $t=2$ 外，其餘必定有解的存在。

二、以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪正三角形衍生圖形

C 拼板 (3▲1▼型)，記作〔3，1〕	C 拼板 (1▲3▼型)，記作〔1，3〕
	

(一)使用 A、B、C 拼板無縫密鋪正三角形

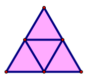
設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

∵邊長 t 的正三角形是由 t^2 個單位正三角形所組成，

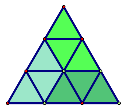
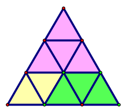
而 A 拼板、B 拼板和 C 拼板分別由 2 個、3 個和 4 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n+4p=t^2$ ，其中 m,n,p 為非負整數。

邊長 2 的正三角形

$2m+3n+4p=4$ 　$\therefore (m,n,p)=(2,0,0),(0,0,1)$ 當 $(m,n,p)=(2,0,0)$ ，無法由 2 個 A 拼板拼出 當 $(m,n,p)=(0,0,1)$ ，可由 1 個 C 拼板(3▲1▼型)無縫密鋪	$(m,n,p)=(0,0,1)$ 

邊長 3 的正三角形

$2m+3n+4p=9$ 　$\therefore (m,n,p)=(3,1,0),(0,3,0),(1,1,1)$ 當 $(m,n,p)=(3,1,0)$ ，無法拼出 當 $(m,n,p)=(0,3,0)$ ，可以無縫密鋪 當 $(m,n,p)=(1,1,1)$ ，可以無縫密鋪	$(m,n,p)=(0,3,0)$ 	$(m,n,p)=(1,1,1)$ 

邊長 4 的正三角形，由 10 個▲，6 個▼組成

$2m+3n+4p=16$

m	8	5	2	6	3	0	4	1	2	0
n	0	2	4	0	2	4	0	2	0	0
p	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4

當 $(m,n,p)=(8,0,0)$，無法拼出

當 $(m,n,p)=(5,2,0)$，$5\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[9,7]$ 無法拼

當 $(m,n,p)=(2,4,0)$，$2\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[10,6]$ 可拼出

當 $(m,n,p)=(6,0,1)$，$6\cdot[1,1]+1\cdot[3,1]=[9,7]$ 無法拼出

當 $(m,n,p)=(3,2,1)$，$3[1,1]+2[2,1]+[3,1]=[10,6]$ 可拼

當 $(m,n,p)=(0,4,1)$，$3[2,1]+[1,2]+[3,1]=[10,6]$ 可拼

當 $(m,n,p)=(4,0,2)$，$4\cdot[1,1]+2\cdot[3,1]=[10,6]$ 可拼出

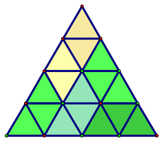
當 $(m,n,p)=(1,2,2)$，

$[1,1]+[2,1]+[1,2]+2[3,1]=[10,6]$ 可無縫密鋪

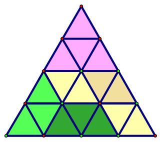
當 $(m,n,p)=(2,0,3)$，$2[1,1]+2[3,1]+[1,3]=[9,7]$ 無法

當 $(m,n,p)=(0,0,4)$，$3\cdot[3,1]+1\cdot[1,3]=[10,6]$ 可拼出

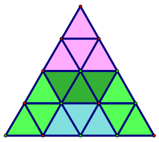
$(m,n,p)=(2,4,0)$



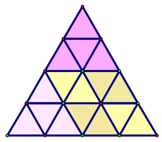
$(m,n,p)=(3,2,1)$



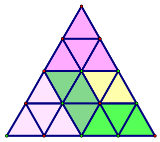
$(m,n,p)=(0,4,1)$



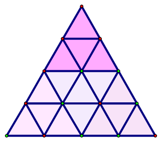
$(m,n,p)=(4,0,2)$



$(m,n,p)=(1,2,2)$



$(m,n,p)=(0,0,4)$



★無縫密鋪正三角形之 C 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=t^2$ 且 $0\le p\le\left[\frac{t}{2}\right]^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明]∵邊長 t 的正三角形，每邊最多只能放入 $\left[\frac{t}{2}\right]$ 個 C 拼板，

∴無縫密鋪正三角形內部區域，最多只能放入 $\left[\frac{t}{2}\right]^2$ 個 C 拼板。∴ $0\le p\le\left[\frac{t}{2}\right]^2$。

★無縫密鋪正三角形之 B 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=t^2$ 且 n 值與 t 值的奇偶性相同，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明]設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

若 n 個 B 拼板分成 n_1 個(2▲1▼型)、n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

和 p 個 C 拼板分成 p_1 個(3▲1▼型)、p_2 個 (1▲3▼型)，即 $p=p_1+p_2$

$$\therefore 2m+3n+4p=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]+p_1\cdot[3,1]+p_2\cdot[1,3]$$

$$=[m+2n_1+n_2+3p_1+p_2,m+n_1+2n_2+p_1+3p_2]=\left[\frac{t(t+1)}{2},\frac{(t-1)t}{2}\right]$$

$$\therefore\begin{cases}m+2n_1+n_2+3p_1+p_2=\dfrac{t(t+1)}{2}\\ m+n_1+2n_2+p_1+3p_2=\dfrac{(t-1)t}{2}\end{cases}\quad 兩式相減\ \therefore (n_1-n_2)+2(p_1-p_2)=t$$

若 t 為奇數，則 n_1-n_2 為奇數，n_1,n_2 為一偶一奇，∴ $n=n_1+n_2$ 為奇數；

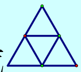
若 t 為偶數，則 n_1-n_2 為偶數，n_1,n_2 為同時為偶或同時為奇，∴ $n=n_1+n_2$ 為偶數。

★以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪正三角形之解的判斷法則

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
則需滿足方程式 $2m+3n+4p=t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

<u>步驟 1</u>：找出 C 拼板個數的範圍限制，$0\le p\le\left[\dfrac{t}{2}\right]^2$。

<u>步驟 2</u>：根據 C 拼板個數 p，切割邊長 t 的正三角形，
再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形
或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪正三角形。

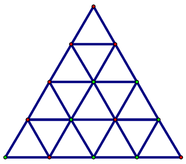
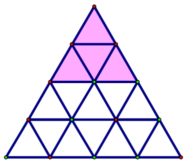
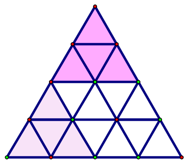
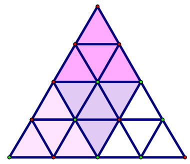
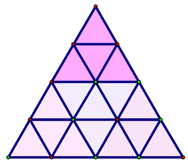
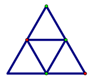
<u>步驟 3</u>：利用 B 拼板 n 值與 t 值的奇偶性相同，討論 A、B 拼板個數，並計算拼板個數。

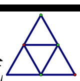
例如：以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪邊長 4 的正三角形，由 10 個▲，6 個▼組成

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
$2m+3n+4p=16$，其中 m,n,p 為非負整數。

<u>步驟 1</u>：找出 C 拼板個數的範圍限制，$0\le p\le\left[\dfrac{4}{2}\right]^2=4$

<u>步驟 2</u>：根據 C 拼板個數 p，切割邊長 4 的正三角形。

當 $p=0$	當 $p=1$	當 $p=2$	當 $p=3$	當 $p=4$
				
剩餘區域為邊長 4 的正三角形，可以無縫密鋪	剩餘區域為上底兩腰為 2，下底 4 的等腰梯形，可以無縫密鋪	剩餘區域為邊長 2 的平行四邊形，可以無縫密鋪	剩餘區域為無法拼出	無剩餘區域

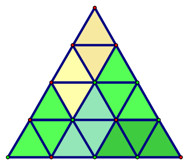
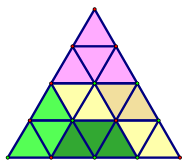
最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪正三角形。

<u>步驟 3</u>：利用 B 拼板 n 值與 t 值的奇偶性相同，
討論 A、B 拼板個數。

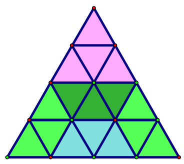
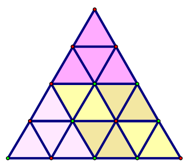
m	8	5	2	6	3	0	4	1	2	0
n	0	2	4	0	2	4	0	2	0	0
p	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4

當 $(m,n,p)=(8,0,0)$，無法拼出
當 $(m,n,p)=(5,2,0)$，$5\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[9,7]$ 無法拼
當 $(m,n,p)=(2,4,0)$，$2\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[10,6]$ 可拼出
當 $(m,n,p)=(6,0,1)$，$6\cdot[1,1]+1\cdot[3,1]=[9,7]$ 無法拼出
當 $(m,n,p)=(3,2,1)$，$3[1,1]+2[2,1]+[3,1]=[10,6]$ 可拼
當 $(m,n,p)=(0,4,1)$，$3[2,1]+[1,2]+[3,1]=[10,6]$ 可拼
當 $(m,n,p)=(4,0,2)$，$4\cdot[1,1]+2\cdot[3,1]=[10,6]$ 可拼出
當 $(m,n,p)=(1,2,2)$，$[1,1]+[2,1]+[1,2]+2[3,1]=[10,6]$
當 $(m,n,p)=(0,0,4)$，$3\cdot[3,1]+1\cdot[1,3]=[10,6]$ 可拼出

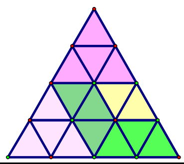
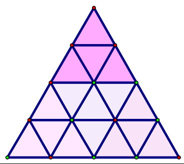
$(m,n,p)=(2,4,0)$ $(m,n,p)=(3,2,1)$

$(m,n,p)=(0,4,1)$ $(m,n,p)=(4,0,2)$

$(m,n,p)=(1,2,2)$ $(m,n,p)=(0,0,4)$

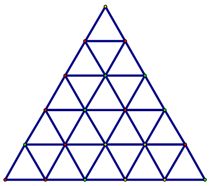
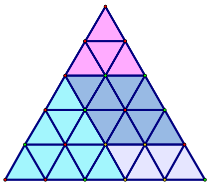
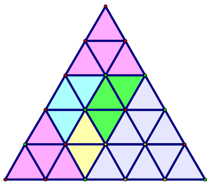
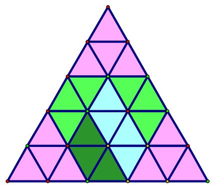
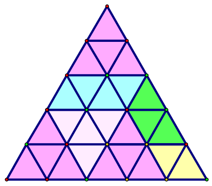
 

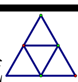
例如：以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪邊長 5 的正三角形，由 15 個▲，10 個▼組成

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
$2m+3n+4p=25$，其中 m,n,p 為非負整數。

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制，$0\le p\le\left[\frac{5}{2}\right]^2=4$

步驟 2：根據 C 拼板個數 p，切割邊長 5 的正三角形。
再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形
或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

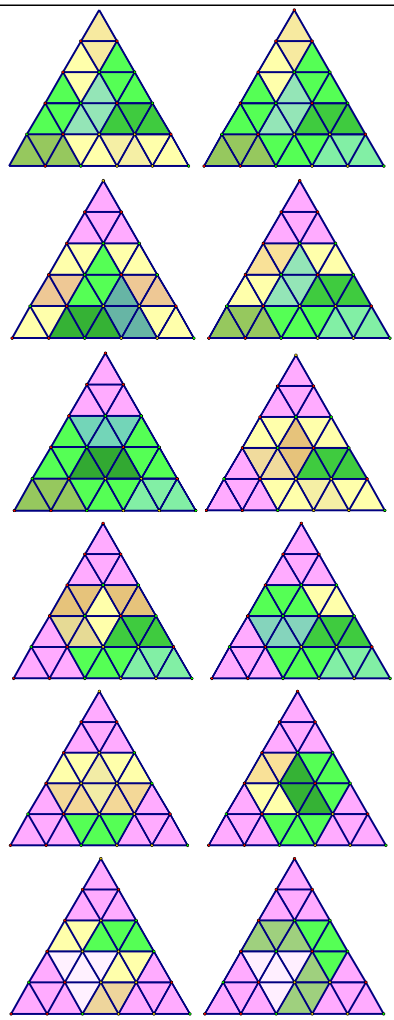
當 $p=0$	當 $p=1$	當 $p=2$	當 $p=3$	當 $p=4$
				
剩餘區域 可以無縫密鋪	剩餘區域 可以無縫密鋪	剩餘區域 可以無縫密鋪	剩餘區域 可以無縫密鋪	剩餘區域 可以無縫密鋪

最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪正三角形。

步驟 3：利用 B 拼板 n 值與 t 值的奇偶性相同，
討論 A、B 拼板個數。

m	11	8	5	2	9	6	3	0	7	4	1	5	2	3	0
n	1	3	5	7	1	3	5	7	1	3	5	1	3	1	3
p	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4

當 $(m,n,p)=(11,1,0)$，$11\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]=[13,12]$ 無法拼出
當 $(m,n,p)=(8,3,0)$，$8\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]=[14,11]$ 無法拼出
當 $(m,n,p)=(5,5,0)$，$5\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]=[15,10]$ 可無縫密鋪
當 $(m,n,p)=(2,7,0)$，$2\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[15,10]$ 可以
當 $(m,n,p)=(9,1,1)$，$9\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[3,1]=[14,11]$ 無法拼
當 $(m,n,p)=(6,3,1)$，$6\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+1\cdot[3,1]=[15,10]$ 可以
當 $(m,n,p)=(3,5,1)$，
$3\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]+1\cdot[3,1]=[15,10]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,p)=(0,7,1)$，$5\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]+[3,1]=[15,10]$ 可以
當 $(m,n,p)=(7,1,2)$，$7\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+2\cdot[3,1]=[15,10]$ 可以
當 $(m,n,p)=(4,3,2)$，$4[1,1]+2[2,1]+[1,2]+2[3,1]=[15,10]$ 可
當 $(m,n,p)=(1,5,2)$，$[1,1]+3[2,1]+2[1,2]+2[3,1]=[15,10]$ 可
當 $(m,n,p)=(5,1,3)$，$5[1,1]+[1,2]+3[3,1]=[15,10]$ 可無縫密鋪
當 $(m,n,p)=(2,3,3)$，$2[1,1]+[2,1]+2[1,2]+3[3,1]=[15,10]$ 可
當 $(m,n,p)=(3,1,4)$，$3\cdot[1,1]+[2,1]+3\cdot[3,1]+[1,3]=[15,10]$ 可
當 $(m,n,p)=(0,3,4)$，$2[2,1]+[1,2]+3[3,1]+[1,3]=[15,10]$ 可



(二)使用 A、B、C 拼板無縫密鋪菱形

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

$\because$ 邊長 t 的菱形是由 $2t^2$ 個單位正三角形所組成，

而 A、B、C 拼板分別由 2 個、3 個和 4 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n+4p=2t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

邊長 2 的菱形，由 4 個▲，4 個▼組成

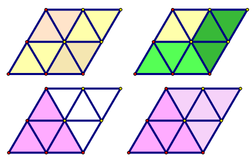
$2m+3n+4p=8 \quad \therefore (m,n,p)=(4,0,0),\ (1,2,0),\ (2,0,1),\ (0,0,2)$

當 $(m,n,p)=(4,0,0)$，$4\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[4,4]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n,p)=(1,2,0)$，$1\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[4,4]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n,p)=(2,0,1)$，$2\cdot[1,1]+1\cdot[3,1]=[5,3]$ 無法拼出

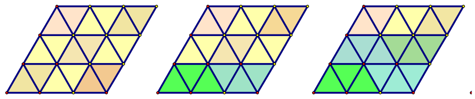
當 $(m,n,p)=(0,0,2)$，$1\cdot[3,1]+1\cdot[1,3]=[4,4]$ 可以無縫密鋪

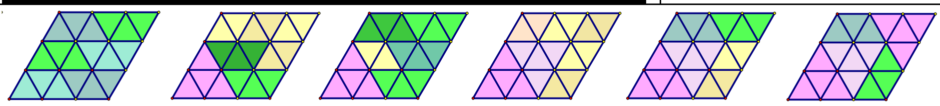


邊長 3 的菱形，由 9 個▲，9 個▼組成

$2m+3n+4p=18$

m	9	6	3	0	7	4	1	5	2	3	0	1
n	0	2	4	6	0	2	4	0	2	0	2	0
p	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	4



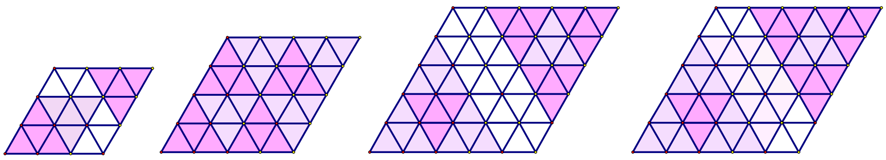


★無縫密鋪菱形之 C 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=2t^2$ 且 $\begin{cases} 0\le p\le \dfrac{t^2}{2}, \text{當}t\text{為偶數} \\ 0\le p\le \dfrac{t^2-3}{2}, \text{當}t\text{為奇數} \end{cases}$，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明] $\because$ 無縫密鋪邊長 t 的菱形，每邊最多只能放入 $\left[\dfrac{t}{2}\right]$ 個 C 拼板，



當 t 為偶數，菱形區域恰可完全分割，最多能放 $\dfrac{2t^2}{4}=\dfrac{t^2}{2}$ 個 C 拼板。

當 t 為奇數，菱形區域分割後剩 6 個小三角形，最多能放 $\dfrac{2t^2-6}{4}=\dfrac{t^2-3}{2}$ 個 C 拼板。

★無縫密鋪菱形之 B 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=2t^2$ 且 n 為偶數，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明] 設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=2t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

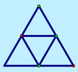
$\therefore 3n = 2t^2 - 2m - 4p = 2(t^2 - m - 2p)$　　$\therefore n$ **為偶數**

★以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪菱形之解的判斷法則

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
則需滿足方程式 $2m + 3n + 4p = 2t^2$ ，其中 m, n, p 為非負整數。

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制，$\begin{cases} 0 \le p \le \dfrac{t^2}{2}, 當 t 為偶數 \\ 0 \le p \le \dfrac{t^2 - 3}{2}, 當 t 為奇數 \end{cases}$

步驟 2：根據 C 拼板個數 p 切割**菱形**。再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪**菱形**。

步驟 3：利用 B 拼板 n 值**為偶數**，討論 A、B 拼板個數，並計算拼板個數。

(三)使用 A、B、C 拼板無縫密鋪等腰梯形

設無縫密鋪上底、兩腰長為 t ，下底長為 $2t$ 的**等腰梯形**
需要 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
$\because$ 上底、兩腰長為 t ，下底長為 $2t$ 的**等腰梯形**是由 $3t^2$ 個單位正三角形所組成，
而 A 拼板、B 拼板和 C 拼板分別由 2 個、3 個和 4 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m + 3n + 4p = 3t^2$ ，其中 m, n, p 為非負整數。

上底和兩腰長為 2，下底長為 4 的**等腰梯形**，由 7 個▲，5 個▼組成

$2m + 3n + 4p = 12$

$(m, n, p) = (6,0,0), (3,2,0), (0,4,0), (4,0,1), (1,2,1), (2,0,2), (0,0,3)$

當 $(m, n, p) = (6,0,0)$ ，$6 \cdot [1,1] + 0 \cdot [2,1] = [6,6]$　無法拼出

當 $(m, n, p) = (3,2,0)$ ，$3 \cdot [1,1] + 2 \cdot [2,1] = [7,5]$ 可以無縫密鋪

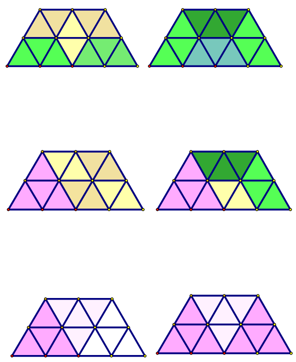
當 $(m, n, p) = (0,4,0)$ ，$3 \cdot [2,1] + 1 \cdot [1,2] = [7,5]$ 可無縫密鋪

當 $(m, n, p) = (4,0,1)$ ，$4 \cdot [1,1] + [3,1] = [7,5]$ 可以無縫密鋪

當 $(m, n, p) = (1,2,1)$ ，$[1,1] + [2,1] + [1,2] + [3,1] = [7,5]$ 可無縫密鋪

當 $(m, n, p) = (2,0,2)$ ，$2 \cdot [1,1] + 2[3,1] = [8,5]$　無法拼出

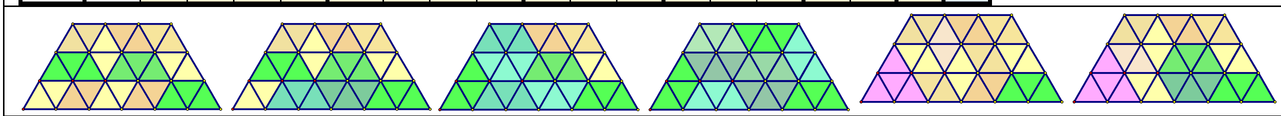
當 $(m, n, p) = (0,0,3)$ ，$2 \cdot [3,1] + 1 \cdot [1,3] = [7,5]$ 可以無縫密鋪

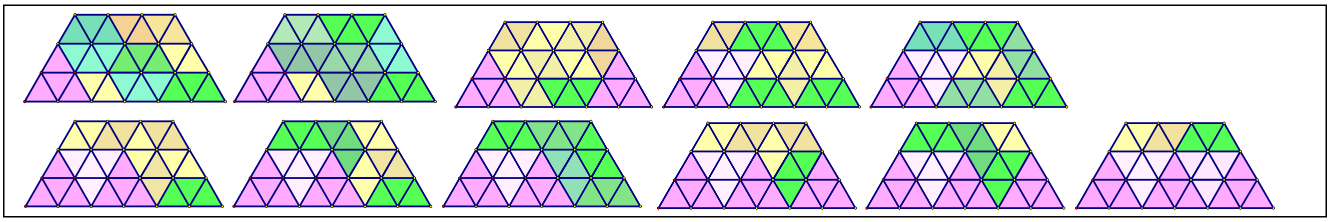


上底和兩腰長為 3，下底長為 6 的**等腰梯形**，由 15 個▲，12 個▼組成

$2m + 3n + 4p = 27$

m	12	9	6	3	0	10	7	4	1	8	5	2	6	3	0	4	1	2	0
n	1	3	5	7	9	1	3	5	7	1	3	5	1	3	5	1	3	1	1
p	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6

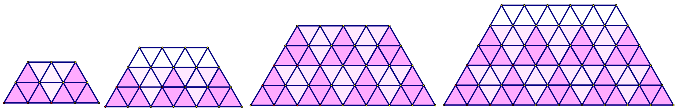




★無縫密鋪等腰梯形之 C 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪上底、兩腰為 t，下底為 $2t$ 的**等腰梯形**需 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，則滿足方程式 $2m+3n+4p=3t^2$ 且 $\begin{cases} 0\le p\le \dfrac{3t^2}{4}, 當t為偶數 \\ 0\le p\le \dfrac{3t^2-2t-1}{4}, 當t為奇數 \end{cases}$，$m,n,p$ 非負整數。

[證明]上底、兩腰長為 t，下底長為 $2t$ 的**等腰梯形**，



當 t 為偶數，**等腰梯形**區域恰可完全分割，最多能放 $\dfrac{3t^2}{4}$ 個 C 拼板。

當 t 為奇數，**等腰梯形**區域分割後剩 $t+(t+1)$ 個小三角形，最多能放 $\dfrac{3t^2-2t-1}{4}$ 個 C 拼板。

★無縫密鋪等腰梯形之 B 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪上底、兩腰為 t，下底為 $2t$ 的**等腰梯形**需 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C

拼板，則滿足方程式 $2m+3n+4p=3t^2$ 且 n 值與 t 值的奇偶性相同，m,n,p 為非負整數

[證明] 設無縫密鋪上底、兩腰為 t，下底 $2t$ 的**等腰梯形**需 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，則需滿足方程式 $2m+3n+4p=3t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

若 n 個 B 拼板分成 n_1 個(2▲1▼型)、n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

和 p 個 C 拼板分成 p_1 個(3▲1▼型)、p_2 個 (1▲3▼型)，即 $p=p_1+p_2$

$$\therefore m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]+p_1\cdot[3,1]+p_2\cdot[1,3]=\left[\frac{3t^2+t}{2},\frac{3t^2-t}{2}\right]$$

$$\therefore m+2n_1+n_2+3p_1+p_2=\frac{3t^2+t}{2} 且 m+n_1+2n_2+p_1+3p_2=\frac{3t^2-t}{2}$$

兩式相減 $\therefore (n_1-n_2)+2(p_1-p_2)=t$

若 t 為奇數，則 n_1-n_2 為奇數，n_1,n_2 為一偶一奇，$\therefore n=n_1+n_2$ 為奇數；

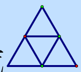
若 t 為偶數，則 n_1-n_2 為偶數，n_1,n_2 為同時為偶或同時為奇，$\therefore n=n_1+n_2$ 為偶數。

★以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪等腰梯形之解的判斷法則

設無縫密鋪上底、兩腰長為 t，下底長為 $2t$ 的**等腰梯形**需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，則需滿足方程式 $2m+3n+4p=3t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

<u>步驟 1</u>：找出 C 拼板個數的範圍限制，$\begin{cases} 0\le p\le \dfrac{3t^2}{4}, 當t為偶數 \\ 0\le p\le \dfrac{3t^2-2t-1}{4}, 當t為奇數 \end{cases}$

<u>步驟 2</u>：根據 C 拼板個數 p 切割**等腰梯形**。再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

最後剩餘區域，若不為  或 ，則可以無縫密鋪**等腰梯形**。

(四)使用 A、B、C 拼板無縫密鋪平行四邊形

設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

$\because$ 兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**是由 $4t^2$ 個單位正三角形所組成，

而 A 拼板、B 拼板和 C 拼板分別由 2 個、3 個和 4 個單位正三角形所組成，

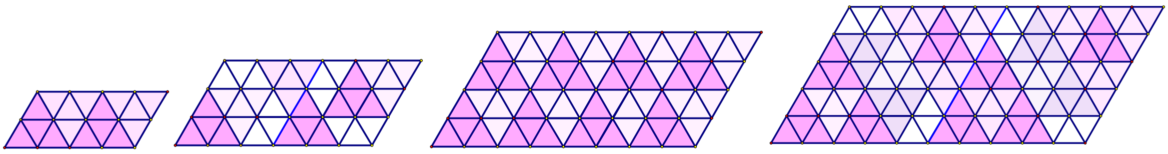
$\therefore 2m+3n+4p=4t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

★無縫密鋪平行四邊形之 C 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=4t^2$ 且 $\begin{cases}0\le p\le t^2, 當t為偶數\\ 0\le p\le t^2-3, 當t為奇數\end{cases}$，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明]無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**，



當 t 為偶數，**平行四邊形**區域恰可完全分割，最多能放 $\dfrac{4t^2}{4}=t^2$ 個 C 拼板。

當 t 為奇數，**平行四邊形**區域分割後剩 12 個小三角形，最多能放 $\dfrac{4t^2-12}{4}=t^2-3$ 個 C 拼板。

★無縫密鋪平行四邊形之 B 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=4t^2$ 且 n **為偶數**，其中 m,n,p 為非負整數。

[證明]設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+4p=4t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

$\therefore 3n=4t^2-2m-4p=2(2t^2-m-2p)$　　$\therefore n$ **為偶數**

★以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪平行四邊形之解的判斷法則

設無縫密鋪兩邊長為 t 和 $2t$ 的**平行四邊形**需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，

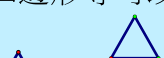
則需滿足方程式 $2m+3n+4p=4t^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

<u>步驟 1</u>：找出 C 拼板個數的範圍限制，$\begin{cases}0\le p\le t^2, 當t為偶數\\ 0\le p\le t^2-3, 當t為奇數\end{cases}$

<u>步驟 2</u>：根據 C 拼板個數 p，切割**平行四邊形**。

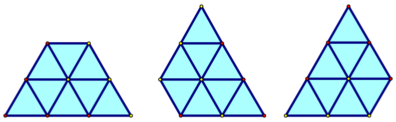
再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或

菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

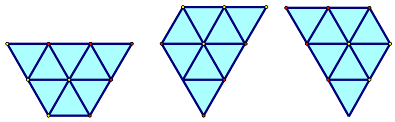


三、以 A、B 和 D 拼板無縫密鋪正三角形

D 拼板 (5▲3▼型)，記作〔5，3〕



D 拼板 (3▲5▼型)，記作〔3，5〕



設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 q 個 D 拼板，

∵邊長 t 的正三角形是由 t^2 個單位正三角形所組成，

而 A 拼板、B 拼板和 D 拼板分別由 2 個、3 個和 8 個單位正三角形所組成，

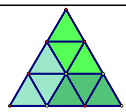
$\therefore 2m+3n+8q=t^2$ ，其中 m,n,q 為非負整數。

邊長 3 的正三角形

$2m+3n+8q=9 \quad \therefore (m,n,q)=(3,1,0),(0,3,0)$

當 $(m,n,q)=(3,1,0)$ ，無法拼出

當 $(m,n,q)=(0,3,0)$，可以無縫密鋪



邊長 4 的正三角形，由 10 個▲，6 個▼組成

$2m+3n+8q=16$

m	8	5	2	4	1	0
n	0	2	4	0	2	0
q	0	0	0	1	1	2

當 $(m,n,q)=(8,0,0)$ ，無法拼出

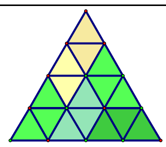
當 $(m,n,q)=(5,2,0)$ ，$5\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[9,7]$ 無法拼

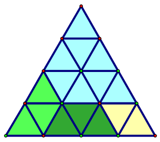
當 $(m,n,q)=(2,4,0)$ ，$2\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[10,6]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n,q)=(4,0,1)$ ，$4\cdot[1,1]+1\cdot[5,3]=[9,7]$ 無法拼出

當 $(m,n,q)=(1,2,1)$，$1\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+1\cdot[5,3]=[10,6]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n,q)=(0,0,2)$，$2\cdot[5,3]=[10,6]$ 但是無法拼出





邊長 5 的正三角形，由 15 個▲，10 個▼組成

$2m+3n+8q=25$

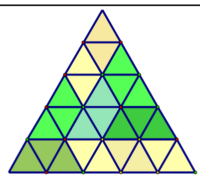
m	11	8	5	2	7	4	1	3	0
n	1	3	5	7	1	3	5	1	3
q	0	0	0	0	1	1	1	2	2

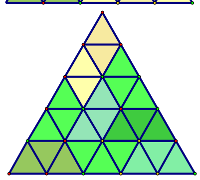
當 $(m,n,q)=(11,1,0)$ ，$11\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]=[13,12]$ 無法拼出

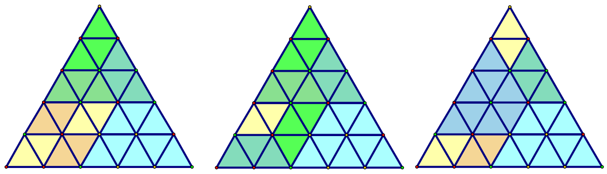
當 $(m,n,q)=(8,3,0)$ ，$8\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]=[14,11]$ 無法拼出

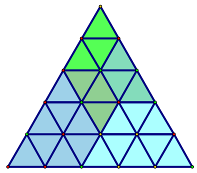
當 $(m,n,q)=(5,5,0)$ ，$5\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]=[15,10]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n,q)=(2,7,0)$ ，$2\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[15,10]$ 可無縫密鋪









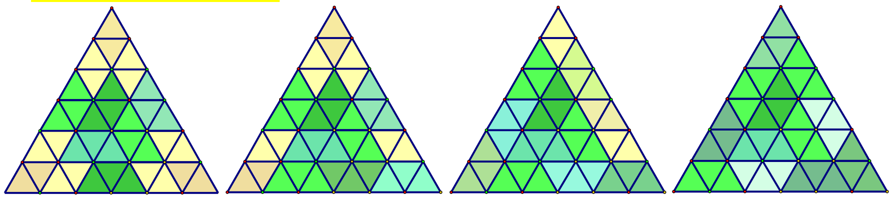
當 $(m,n,q)=(7,1,1)$，$7\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[5,3]=[14,11]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(4,3,1)$，$4\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+1\cdot[5,3]=[15,10]$ 可無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(1,5,1)$，$1\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+[1,2]+[5,3]=[15,10]$ 可無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(3,1,2)$，$3\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+2\cdot[5,3]=[15,10]$ 可無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(0,3,2)$，$2\cdot[2,1]+[1,2]+2\cdot[5,3]=[15,10]$ 可無縫密鋪

邊長 6 的正三角形，由 21 個▲，15 個▼組成

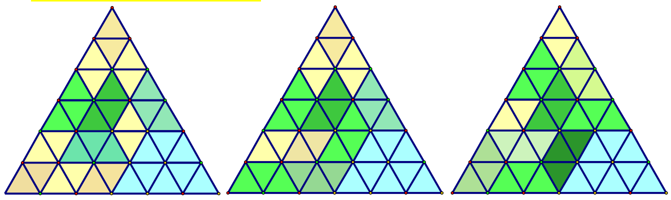
$2m+3n+8q=36$

m	18	15	12	9	6	3	0	14	11	8	5	2	10	7	4	1	6	3	0	2
n	0	2	4	6	8	10	12	0	2	4	6	8	0	2	4	6	0	2	4	0
q	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4

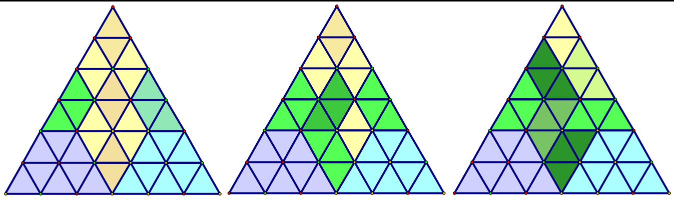
當 $(m,n,q)=(18,0,0)$，$18\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[18,18]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(15,2,0)$，$15\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[19,17]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(12,4,0)$，$12\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[20,16]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(9,6,0)$，$9\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(6,8,0)$，$6\cdot[1,1]+7\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(3,10,0)$，$3\cdot[1,1]+8\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(0,12,0)$，$0\cdot[1,1]+9\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪



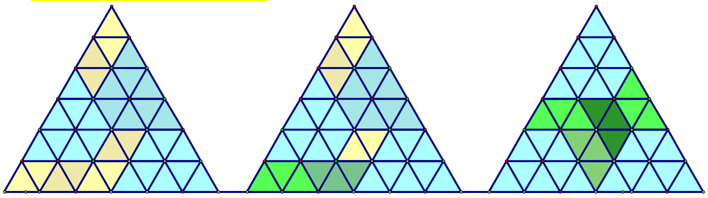
當 $(m,n,q)=(14,0,1)$，$14\cdot[1,1]+1\cdot[5,3]=[19,17]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(11,2,1)$，$11\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+[5,3]=[20,16]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(8,4,1)$，$8\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(5,6,1)$，$5\cdot[1,1]+5\cdot[2,1]+[1,2]+[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(2,8,1)$，$2\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]+[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪



當 $(m,n,q)=(10,0,2)$，$10\cdot[1,1]+2[5,3]=[20,16]$ 無法拼出
當 $(m,n,q)=(7,2,2)$，$7\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(4,4,2)$，$4\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+[1,2]+2\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(1,6,2)$，$1\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]+2\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪



當 $(m,n,q)=(6,0,3)$，$6\cdot[1,1]+3\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(3,2,3)$，$3\cdot[1,1]+[2,1]+[1,2]+3\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪
當 $(m,n,q)=(0,4,3)$，$2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]+3\cdot[5,3]=[21,15]$ 可以無縫密鋪



當 $(m,n,q)=(2,0,4)$，$2\cdot[1,1]+4\cdot[5,3]=[22,14]$ 無法拼出

★無縫密鋪正三角形之 D 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 q 個 D 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+8q=t^2$ 且 $0\le q\le\left\lfloor\dfrac{t^2-8}{8}\right\rfloor$，其中 m,n,q 為非負整數。

[證明]∵無法完全使用 D 拼板無縫密鋪正三角形。

∴無縫密鋪正三角形內部區域，最多只能放入 $\left\lfloor\dfrac{t^2-8}{8}\right\rfloor$ 個 D 拼板。

★無縫密鋪正三角形之 B 拼板個數的範圍限制

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 q 個 D 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+8q=t^2$ 且 n 值與 t 值的奇偶性相同，其中 m,n,q 為非負整數。

[證明]設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板、n 個 B 拼板和 q 個 D 拼板，

則需滿足方程式 $2m+3n+8q=t^2$，其中 m,n,q 為非負整數。

若 n 個 B 拼板分成 n_1 個(2▲1▼型)、n_2 個 (1▲2▼型)，即 $n=n_1+n_2$

和 q 個 D 拼板分成 q_1 個(5▲3▼型)、q_2 個 (3▲5▼型)，即 $q=q_1+q_2$

$\therefore 2m+3n+8q=m\cdot[1,1]+n_1\cdot[2,1]+n_2\cdot[1,2]+q_1\cdot[5,3]+q_2\cdot[3,5]$

$$=[m+2n_1+n_2+5q_1+3q_2,m+n_1+2n_2+3q_1+5q_2]=\left[\frac{t(t+1)}{2},\frac{(t-1)t}{2}\right]$$

$$\therefore\begin{cases}m+2n_1+n_2+5q_1+3q_2=\dfrac{t(t+1)}{2}\\[2ex] m+n_1+2n_2+3q_1+5q_2=\dfrac{(t-1)t}{2}\end{cases}\quad 兩式相減\quad\therefore(n_1-n_2)+2(q_1-q_2)=t$$

若 t 為奇數，則 n_1-n_2 為奇數，n_1,n_2 為一偶一奇，$\therefore n=n_1+n_2$ 為奇數；

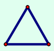
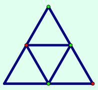
若 t 為偶數，則 n_1-n_2 為偶數，n_1,n_2 為同時為偶或同時為奇，$\therefore n=n_1+n_2$ 為偶數。

★以 A、B 和 D 拼板無縫密鋪正三角形之解的判斷法則

設無縫密鋪邊長t的正三角形需要m個 A 拼板、n個 B 拼板和q個 D 拼板，
則需滿足方程式$2m+3n+8q=t^2$，其中m,n,q為非負整數。

<u>步驟 1</u>：找出 D 拼板個數的範圍限制，$0\le q\le\left[\dfrac{t^2-8}{8}\right]$

<u>步驟 2</u>：根據 D 拼板個數q，切割邊長t的正三角形。
再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或
菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

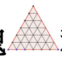
最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪正三角形。

<u>步驟 3</u>：利用 B 拼板n值與t值的奇偶性相同，討論 A、B 拼板個數，並計算拼板個數。

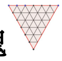
柒、結論

一、使用 A、B 拼板無縫密鋪由a塊邊長t的正三角形所組成水平衍生圖形

(一)當a為奇數，圖形切割成$\dfrac{a+1}{2}$塊



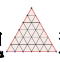
和$\dfrac{a-1}{2}$塊



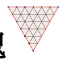
，

1. 圖形是由at^2個單位正三角形所組成，分成$\dfrac{at^2+t}{2}$個▲和$\dfrac{at^2-t}{2}$個▼。
2. 有解的條件：至少需要t個 B 拼板。
3. 拼板數的最大解：使用 A 拼板$\dfrac{at^2-3t}{2}$個和 B 拼板t個(2▲1▼型)。
4. 有解的範圍：使用 A 拼板$\dfrac{at^2-3t}{2}-3k$個和 B 拼板$t+k$個(2▲1▼型)、
   k個(1▲2▼型)，其中$0\le k\le\left[\dfrac{at^2-3t}{6}\right]$。

(二)當a是偶數，圖形切割成$\dfrac{a}{2}$塊



和$\dfrac{a}{2}$塊



。

1. 圖形是由at^2個單位正三角形所組成，分成$\dfrac{at^2}{2}$個▲和$\dfrac{at^2}{2}$個▼。
2. 有解的條件：需要偶數個 B 拼板，且 B 拼板兩類型的個數相等。
3. 拼板數的最大解：只使用 A 拼板$\dfrac{at^2}{2}$個。
4. 有解的範圍：使用 A 拼板$\dfrac{a}{2}t^2-3k$個和 B 拼板k個(2▲1▼型)、k個 (1▲2▼型)，其中

$0\le k\le\left[\dfrac{at^2}{6}\right]$。

(三)解的存在性：除了$a=1$,$t=1$與$a=1$,$t=2$外，其餘必定有解的存在。

二、以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪正三角形衍生圖形

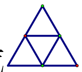
設無縫密鋪由 a 塊邊長 t 正三角形所組成水平衍生圖形，
需要 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 p 個 C 拼板，
則需滿足方程式 $2m+3n+4p=at^2$ ，其中 m,n,p 為非負整數。

$\boxed{\text{解的判斷法則}}$：

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制。

正三角形 $0\le p\le\left[\frac{t}{2}\right]^2$	菱形 $\begin{cases}0\le p\le\frac{t^2}{2},\text{當}t\text{為偶數}\\0\le p\le\frac{t^2-3}{2},\text{當}t\text{為奇數}\end{cases}$
等腰梯形 $\begin{cases}0\le p\le\frac{3t^2}{4},\text{當}t\text{為偶數}\\0\le p\le\frac{3t^2-2t-1}{4},\text{當}t\text{為奇數}\end{cases}$	平行四邊形 $\begin{cases}0\le p\le t^2,\text{當}t\text{為偶數}\\0\le p\le t^2-3,\text{當}t\text{為奇數}\end{cases}$

步驟 2：根據 C 拼板個數 p 切割圖形。再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪圖形。

步驟 3：利用 B 拼板 n 值特性，討論 A、B 拼板個數，並檢驗之。

正三角形、等腰梯形： n 值與 t 值的奇偶性相同。菱形、平行四邊形： n 為偶數。

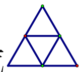
三、以 A、B 和 D 拼板無縫密鋪正三角形

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需 m 個 A 拼板、 n 個 B 拼板和 q 個 D 拼板，
則需滿足方程式 $2m+3n+8q=t^2$ ，其中 m,n,q 為非負整數。

$\boxed{\text{解的判斷法則}}$：

步驟 1：找出 D 拼板個數的範圍限制， $0\le q\le\left[\frac{t^2-8}{8}\right]$ 。

步驟 2：根據 D 拼板個數 q ，切割圖形。再將剩餘區域切割成數個邊長大於 2 的正三角形或菱形、等腰梯形、平行四邊形等可以無縫密鋪圖形。

最後剩餘區域，若不為或，則可以無縫密鋪圖形。

步驟 3：利用 B 拼板 n 值與 t 值的奇偶性相同，討論 A、B 拼板個數，並檢驗之。

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 37:No7, November/Novembre2011(245．OC50. 2.)

二、國小數學第十二冊。怎樣解題。南一出版社。

【評語】080413

從一個拼圖問題出發，將圖形利用符號表徵，轉化成代數問題，更利於推理、檢驗、與證明；研究過程中，逐步探討無縫密鋪正三角形、菱形、等腰梯形、以及平行四邊形等有解的條件與範圍，循序漸進的探尋過程，條理分明，研究結果堪稱豐富，值得肯定。

作品簡報

以不定方程探討正三角形衍生圖形之無縫密鋪關係

科別：數學科

組別：國小組

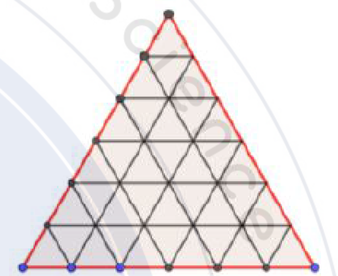
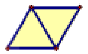
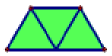
編號：080413

前言

• 研究動機

有個拼圖問題：「將邊長 6 的正三角形分割成 36 個邊長 1 的小正三角形。若以 m 塊 A 拼板和 n 塊 B 拼板拼出此正三角形且拼板間不可重複覆蓋或部分圖形留空間。請找出所有可能m 值？」

拼圖問題通常有許多解，而我著重研究**圖形**與**拼板個數**間的關係。

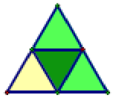
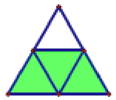
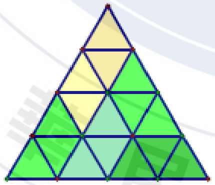
	A 拼板  由 2 個單位正三角形所組成	B 拼板  由 3 個單位正三角形所組成

• 研究目的與問題

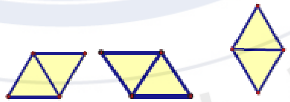
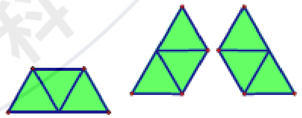
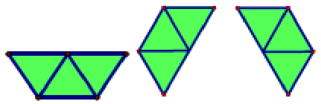
探討以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪**正三角形、菱形、等腰梯形、平行四邊形**之有解的條件與範圍。

• 名詞與符號定義

無縫密鋪：若圖形可以由數個拼板覆蓋，且不可重複覆蓋或部分留有空間，則稱拼板「無縫密鋪」此圖形。

重複覆蓋 	留空間未鋪滿 	無縫密鋪 

$[x, y]$：表示圖形或拼板由 x 個▲，y 個▼所組成。

A 拼板：1▲1▼型 記作〔1，1〕 	B 拼板：2▲1▼型 記作〔2，1〕 	B 拼板：1▲2▼型 記作〔1，2〕 

研究過程

- **以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪正三角形**

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 邊長 t 的正三角形是由 t^2 個單位正三角形所組成，而A、B拼板分別由 2 個、3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=t^2$，其中 m ,n 為非負整數。

例如：邊長 6 的正三角形，由 21 個▲，15 個▼組成

$2m+3n=36 \quad \therefore (m,n)=(18,0),(15,2),(12,4),(9,6),(6,8),(3,10),(0,12)$

當 $(m,n)=(18,0)$，$18\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[18,18]$ 無法拼出

當 $(m,n)=(15,2)$，$15\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]=[19,17]$ 無法拼出

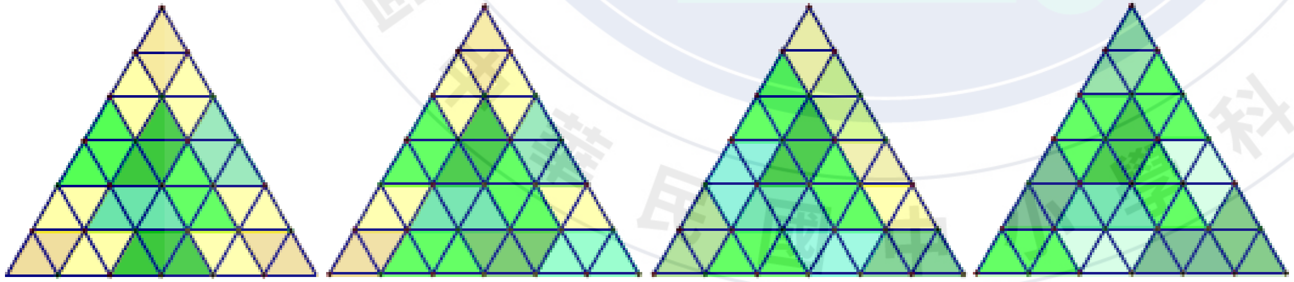
當 $(m,n)=(12,4)$，$12\cdot[1,1]+4\cdot[2,1]=[20,16]$ 無法拼出

當 $(m,n)=(9,6)$，$9\cdot[1,1]+6\cdot[2,1]=[21,15]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(6,8)$，$6\cdot[1,1]+7\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(3,10)$，$3\cdot[1,1]+8\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,12)$，$0\cdot[1,1]+9\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[21,15]$ 可以無縫密鋪



☆解的條件

至少需要 t 個 B 拼板，$t\geq 3$

☆拼板數的最大解

使用 A 拼板 $\dfrac{t^2-3t}{2}$ 個

及 B 拼板 t 個(2▲1▼型)

☆ 以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪正三角形的所有解

$\because$ 邊長 t 的正三角形是由 $\dfrac{t(t+1)}{2}$ 個▲，$\dfrac{t(t-1)}{2}$ 個▼所組成，

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

且至少需要 t 個B拼板，分成 n_1 個(2▲1▼型)與 n_2 個(1▲2▼型)

$\therefore m[1,1]+n_1[2,1]+n_2[1,2]=\left[\dfrac{t(t+1)}{2},\dfrac{t(t-1)}{2}\right]$，

即$[m+2n_1+n_2, m+n_1+2n_2]=\left[\dfrac{t(t+1)}{2},\dfrac{t(t-1)}{2}\right]$

當$n=t$ 時，$n_1=t$ (2▲1▼型)與 $n_2=0$ (1▲2▼型)和$m=\dfrac{t^2-3t}{2}$

當$n=t+2k$ 時，$n_1=t+k$ (2▲1▼型)與 $n_2=k$ (1▲2▼型)和$m=\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$

$\therefore$ 使用拼板總數為$(t+2k)+\left(\dfrac{t^2-3t}{2}-3k\right)=\dfrac{t^2-t}{2}-k$個，其中$0\le k\le\left[\dfrac{t^2-3t}{6}\right]$

☆有解的範圍：使用 A 拼板$\dfrac{t^2-3t}{2}-3k$個

與 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)

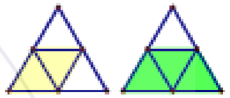
☆解的存在性：若 $t\ge3$ 必定有解的存在

[證明]

當 $t=1$ 時，

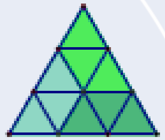
無法無縫密鋪

當 $t=2$ 時，



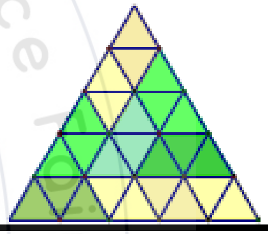
無法無縫密鋪

當 $t=3$ 時，



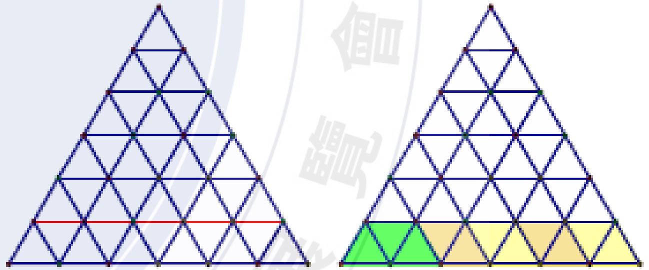
可以無縫密鋪

設 $t=k$ 時，



使用 A、B 拼板可以無縫密鋪邊長 k 的正三角形，

則 $t=k+1$，將正三角形分割成兩部分



$\because$ 梯形可由 1 個 B 拼板和 $k-1$ 個 A 拼板無縫密鋪

且邊長 k 的正三角形可由 A、B 拼板無縫密鋪，

$\therefore t=k+1$ 亦成立

由數學歸納法知，對所有的正整數 t 且 $t\ge3$，

使用 A、B 拼板可以無縫密鋪邊長 t 的正三角形。

• 以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪菱形

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板，

$\because$ 邊長 t 的菱形是由 $2t^2$個單位正三角形所組成，

而A、B拼板分別由 2 個、3 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n=2t^2$，其中 m , n 為非負整數。例：

邊長 3 的菱形，由 9 個▲，9 個▼組成

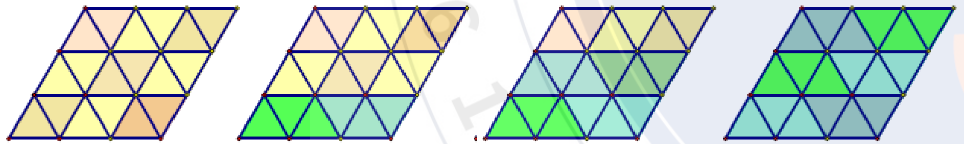
$2m+3n=18 \quad \therefore (m,n)=(9,0),\ (6,2),\ (3,4),\ (0,6)$

當 $(m,n)=(9,0)$，$9\cdot[1,1]+0\cdot[2,1]=[9,9]$ 可以無縫密鋪

當 $(m,n)=(6,2)$，$6\cdot[1,1]+1\cdot[2,1]+1\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(3,4)$，$3\cdot[1,1]+2\cdot[2,1]+2\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪

當 $(m,n)=(0,6)$，$0\cdot[1,1]+3\cdot[2,1]+3\cdot[1,2]=[9,9]$ 可無縫密鋪



☆解的條件：需要偶數個 B 拼板且兩類型個數相等

☆拼板數的最大解：使用 A 拼板 t^2 個

☆有解的範圍：使用 A 拼板t^2-3k個

與 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)

☆ 以 A 拼板和 B 拼板無縫密鋪菱形的所有解

$\because$ 邊長 t 的菱形是由 t^2 個▲，t^2 個▼所組成，

設無縫密鋪邊長 t 的菱形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板且兩類型個數相等皆 k 個

$\therefore m[1,1]+k[2,1]+k[1,2]=\left[t^2,t^2\right]$，

即$[m+3k,m+3k]=\left[t^2,t^2\right]$

當$n=0$ 時，B 拼板(2▲1▼型)與(1▲2▼型)皆 0 個和 A 拼板t^2 個

當$n=2k$ 時，B 拼板(2▲1▼型)與(1▲2▼型)皆 k 個和 A 拼板t^2-3k 個

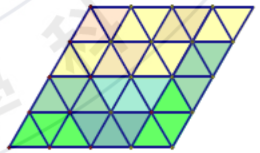
$\therefore$ 使用拼板總數為$(2k)+\left(t^2-3k\right)=t^2-k$個

☆解的存在性：必定有解的存在

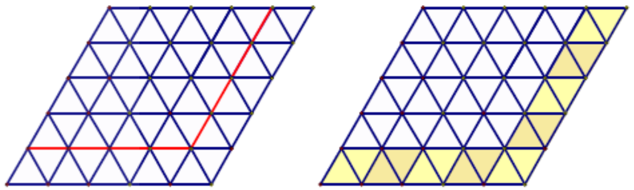
當 $t=1$

可以無縫密鋪

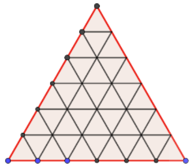
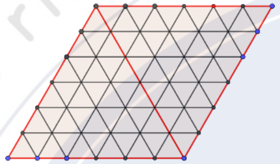
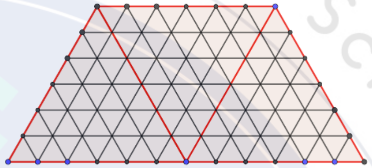
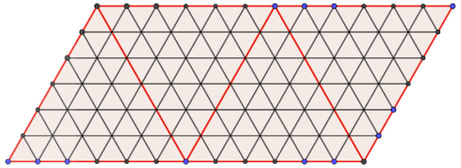
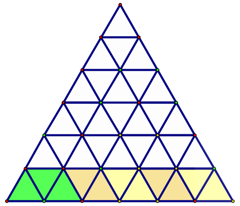
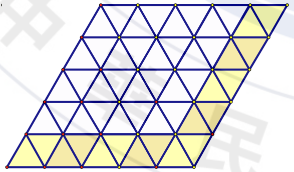
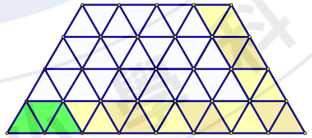
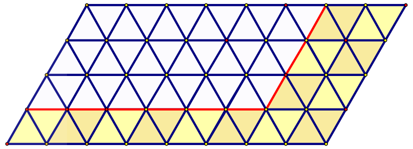
設 $t=k$ 時，可以無縫密鋪



則$t=k+1$時，將菱形分割成兩部分

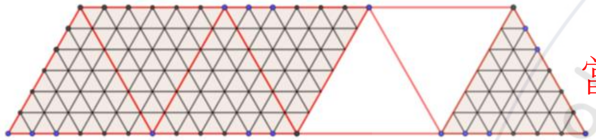


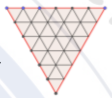
研究結果

無縫密鋪圖形	邊長 t 的正三角形 	邊長 t 的菱形 	上底兩腰 t，下底 $2t$ 的等腰梯形 	兩邊為 t、$2t$ 的平行四邊形 
有解條件	至少需要 t 個 B 拼板	需偶數個 B 拼板且兩類型個數相等	至少需要 t 個 B 拼板	需偶數個B拼板且兩類型個數相等
拼板數最大解	A 拼板 $\frac{t^2-3t}{2}$ 個 B 拼板 t 個(2▲1▼型)	A 拼板 t^2 個	A 拼板 $\frac{3t^2-3t}{2}$ 個 B 拼板 t 個(2▲1▼型)	A 拼板 $2t^2$ 個
有解範圍	A 拼板 $\frac{t^2-3t}{2}-3k$ 個 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型) k 個(1▲2▼型)	A 拼板 t^2-3k 個 B 拼板 k 個(2▲1▼型) k 個(1▲2▼型)	A 拼板 $\frac{3t^2-3t}{2}-3k$ 個 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型) k 個(1▲2▼型)	A 拼板 $2t^2-3k$ 個 B 拼板 k 個(2▲1▼型) k 個(1▲2▼型)
解的存在性	若 $t\geq3$ 必定有解的存在 	必定有解的存在 	必定有解的存在 	必定有解的存在 

討論

一、無縫密鋪由 *a* 塊邊長 *t* 正三角形所組成水平衍生圖形，解的條件與範圍與 *a* 值有關。



當 a 是奇數，切割成 $\dfrac{a+1}{2}$ 塊  和 $\dfrac{a-1}{2}$ 塊  $\therefore$ 共 $\dfrac{at^2+t}{2}$ 個▲，$\dfrac{at^2-t}{2}$ 個▼組成

☆解的條件：至少需要 t 個 B 拼板

[證]

設至多需要 $t+1$ 個 B 拼板，

則 B 拼板皆(2▲1▼型)，其餘 A 拼板

$$\therefore m[1,1]+(t+1)[2,1]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right]$$

$$\therefore \begin{cases} m+2(t-1)=\dfrac{at^2+t}{2} \\ m+(t-1)=\dfrac{at^2-t}{2} \end{cases}$$

兩式相減得 $t-1=t$ 矛盾

$\therefore$ 至少需要 t 個 B 拼板

設無縫密鋪 a 塊邊長 t 的正三角形組成水平衍生圖形需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板且至少 t 個 B 拼板，分成 n_1 個(2▲1▼型)與 n_2 個(1▲2▼型)

$$\therefore m[1,1]+n_1[2,1]+n_2[1,2]=\left[\frac{at^2+t}{2},\frac{at^2-t}{2}\right],$$

即 $[m+2n_1+n_2,\ m+n_1+2n_2]=\left[\dfrac{at^2+t}{2},\dfrac{at^2-t}{2}\right]$

當 $n=t$ 時，$n_1=t$ 與 $n_2=0$ 和 $m=\dfrac{at^2-3t}{2}$

當 $n=t+2k$，$n_1=t+k$ 與 $n_2=k$ 和 $m=\dfrac{at^2-3t}{2}-3k$

$\therefore$ 拼板總數為 $(t+2k)+\left(\dfrac{at^2-3t}{2}-3k\right)=\dfrac{at^2-t}{2}-k$ 個

☆拼板數的最大解

A 拼板 $\dfrac{at^2-3t}{2}$ 個及

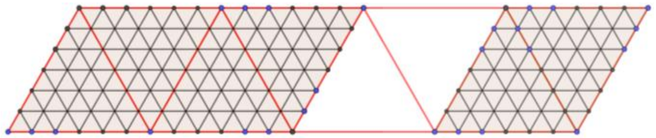
B 拼板 t 個(2▲1▼型)

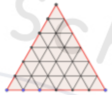
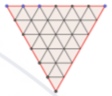
☆有解的範圍：

A 拼板 $\dfrac{at^2-3t}{2}-3k$ 個與

B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)

k 個(1▲2▼型)



當 a 是偶數，切割成 $\frac{a}{2}$ 塊  和 $\frac{a}{2}$ 塊  $\therefore$ 共 $\frac{at^2}{2}$ 個▲，$\frac{at^2}{2}$ 個▼組成

☆解的條件：偶數個 B 拼板且兩類型個數相等

[證](1)設需要 m 個 A 拼板和 n 個 B 拼板

$$由 2m+3n=at^2 \therefore 3n=at^2-2m=2\left(\frac{at^2}{2}-m\right)$$

$$\because a 是偶數 \therefore \frac{a}{2} 是整數 \therefore 3n 是偶數 \therefore n 是偶數$$

(2)設 B 拼板分成 n_1個(2▲1▼型), n_2個(1▲2▼)

$$\therefore m[1,1]+n_1[2,1]+n_2[1,2]=\left[\frac{at^2}{2},\frac{at^2}{2}\right]$$

$$m+2n_1+n_2=\frac{at^2}{2} 且 m+n_1+2n_2=\frac{at^2}{2} 相減 n_1=n_2$$

設無縫密鋪 a 塊邊長 t 正三角形組成水平衍生圖形

需要 m 個 A 拼板和 B 拼板兩類型個數相等皆 k 個

$$\therefore m[1,1]+k[2,1]+k[1,2]=[m+3k,m+3k]=\left[\frac{at^2}{2},\frac{at^2}{2}\right]$$

當 $n=0$ 時，B 拼板兩類型皆 0 個和 A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個

當 $n=2k$，B 拼板兩類型皆 k 個和 A 拼板 $\frac{at^2}{2}-3k$ 個

$\therefore$ 使用拼板總數為$(2k)+\left(\frac{at^2}{2}-3k\right)=\frac{at^2}{2}-k$個

☆拼板數最大解：

A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個

☆有解的範圍：

A 拼板 $\frac{at^2}{2}-3k$ 個與

B 拼板 k 個(2▲1▼型)

k 個(1▲2▼型)

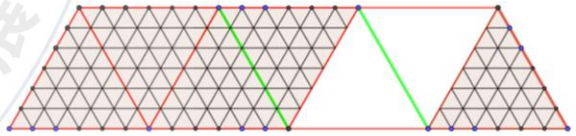
☆解的存在性：除了 $a=1,\ t=1$ 與 $a=1,\ t=2$ 外，其餘必定有解的存在

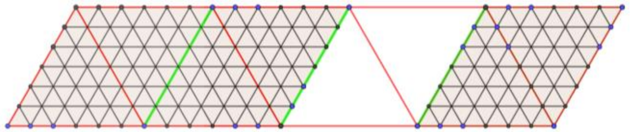
[證]當 $a=1$ 時，使用 A,B 拼板無縫密鋪邊長 t 的正三角形，若 $t\geq 3$ 必定有解的存在

當 $a=2$ 時，使用 A,B 拼板無縫密鋪邊長 t 的菱形，必定有解的存在

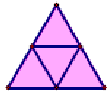
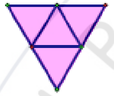
當 $a=3$ 時，使用 A,B 拼板無縫密鋪上底兩腰 t，下底 $2t$ 的等腰梯形，必有解存在

$\therefore$ 將 a 塊邊長 t 的正三角形組成水平衍生圖形切割成等腰梯形和菱形必有解的存在





二、以A、B 、 C拼板無縫密鋪正三角形水平衍生圖形

C拼板：3▲1▼型 記作〔3，1〕	C拼板：1▲3▼型 記作〔1，3〕
	

設無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形組成水平衍生圖形

需要A、B、C拼板分別 m、n、p 個

∵圖形是由 at^2 個單位正三角形所組成，

而A、B、C拼板分別由 2、3、4 個單位正三角形所組成，

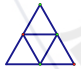
∴ $2m+3n+4p=at^2$，其中 m ,n , p 為非負整數。

☆解的判斷法則

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制

步驟 2：根據 C 拼板個數 p 切割圖形，

再將剩餘區域切割成數個可無縫密鋪的圖形

最後若不為 △ 或  ，則可無縫密鋪圖形

步驟 3：利用 B 拼板 n 值與 t 值奇偶性，

討論A、B拼板個數，並計算檢驗之。

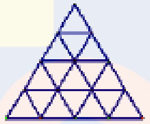
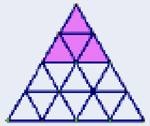
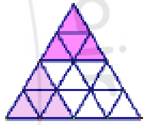
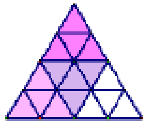
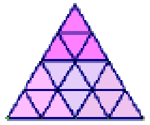
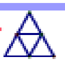
例如：以 A、B 和 C 拼板無縫密鋪邊長 4 的正三角形，

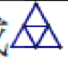
設無縫密鋪邊長 t 的正三角形需要 A、B、C 拼板各 m、n、p 個，

$\therefore 2m+3n+4p=16$，其中 m,n,p 為非負整數。

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制，$0 \le p \le \left[\frac{4}{2}\right]^2 = 4$

步驟 2：根據 C 拼板個數 p ，切割邊長 4 的正三角形。

$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
				
剩邊長 4 的正三角形	剩上底腰 2 下底 4 梯形	剩邊長 2 菱形	剩  無法拼	無剩餘區域

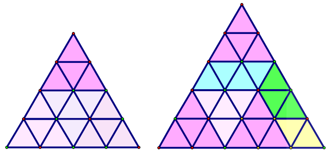
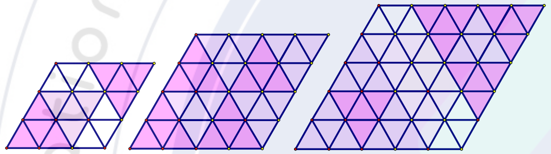
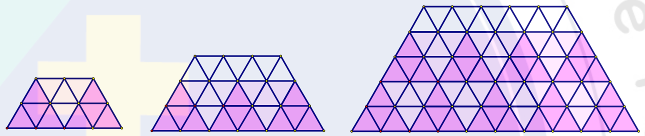
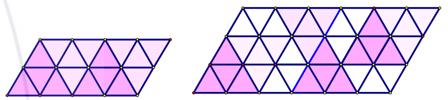
最後剩餘區域，若不為△或  ，則可無縫密鋪。

步驟 3：利用 n 與 t 值的奇偶性相同，討論 A、B 拼板個數

m	8	5	2	6	3	0	4	1	2	0
n	0	2	4	0	2	4	0	2	0	0
p	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4

例：當 $(m,n,p)=(1,2,2)$，$[1,1]+[2,1]+[1,2]+2[3,1]=[10,6]$ 可以

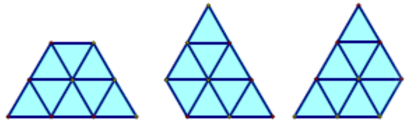
☆C拼板個數的範圍限制

	正三角形	菱形	等腰梯形	平行四邊形
範圍限制	$0 \le p \le \left[\frac{t}{2}\right]^2$	$\begin{cases} 0 \le p \le \frac{t^2}{2}, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le \frac{t^2-3}{2}, 當t為奇數 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \le p \le \frac{3t^2}{4}, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le \frac{3t^2-2t-1}{4}, 當t為奇數 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \le p \le t^2, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le t^2-3, 當t為奇數 \end{cases}$
				

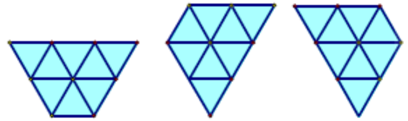
☆B 拼板 n 值與 t 值奇偶性：正三角形、等腰梯形：n 與 t 奇偶性相同。菱形、平行四邊形：n 為偶數。

三、以A、B、 D拼板無縫密鋪正三角形

D 拼板：5▲3▼型
記作〔5，3〕



D 拼板：3▲5▼型
記作〔3，5〕



設無縫密鋪邊長 t 的正三角形

需要A、B、D拼板分別 m、n、q 個

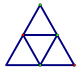
∵圖形是由 t^2個單位正三角形所組成，

而A、B、D拼板由 2、3、8 個正三角形組成，

∴ $2m+3n+8q=t^2$，其中 m, n, q 為非負整數。

☆解的判斷法則

步驟 1：找出 D 拼板個數的範圍限制，$0 \le q \le \left[\frac{t^2-8}{8}\right]$

步驟 2：根據 D 拼板個數 q 切割圖形，
再將剩餘區域切割成數個可無縫密鋪的圖形
最後若不為  或  ，則可無縫密鋪圖形

步驟 3：利用 B 拼板 n 值與 t 值奇偶性相同，
討論A、B拼板個數，並計算檢驗之。

結論

一、使用A、B拼板無縫密鋪由 *a* 塊邊長 *t* 正三角形所組成水平衍生圖形

	當 a 是奇數，切成 $\frac{a+1}{2}$ 塊 和 $\frac{a-1}{2}$ 塊	當 a 是偶數，切割成 $\frac{a}{2}$ 塊 和 $\frac{a}{2}$ 塊
解的條件	至少需要 t 個 B 拼板	需要偶數個 B 拼板且兩類型個數相等
拼板數最大解	A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}$ 個及 B 拼板 t 個(2▲1▼型)	A 拼板 $\frac{at^2}{2}$ 個
有解範圍	A 拼板 $\frac{at^2-3t}{2}-3k$ 個與 B 拼板 $t+k$ 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)	A 拼板 $\frac{at^2}{2}-3k$ 個與 B 拼板 k 個(2▲1▼型)、k 個(1▲2▼型)
解的存在性	除了 $a=1,\ t=1$ 與 $a=2,\ t=2$ 外，其餘必定有解的存在	

二、以A、B 、 C拼板無縫密鋪正三角形水平衍生圖形

設無縫密鋪由 a 塊邊長 t 的正三角形組成水平衍生圖形

需要A、B、C拼板分別 m、n、p 個

$\because$ 圖形是由 at^2 個單位正三角形所組成，

而A、B、C拼板分別由 2、3、4 個單位正三角形所組成，

$\therefore 2m+3n+4p=at^2$，其中 m,n,p 為非負整數。

☆解的判斷法則

步驟 1：找出 C 拼板個數的範圍限制

步驟 2：根據 C 拼板個數 p 切割圖形，
再將剩餘區域切割成數個可無縫密鋪的圖形
最後若不為 △ 或 ，則可無縫密鋪圖形

步驟 3：利用 B 拼板 n 值特性，討論A、B拼板個數，
並計算檢驗之。

☆ C 拼板個數的範圍限制

正三角形$0 \le p \le \left[\frac{t}{2}\right]^2$，菱形$\begin{cases} 0 \le p \le \frac{t^2}{2}, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le \frac{t^2-3}{2}, 當t為奇數 \end{cases}$，等腰梯形$\begin{cases} 0 \le p \le \frac{3t^2}{4}, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le \frac{3t^2-2t-1}{4}, 當t為奇數 \end{cases}$，平行四邊形$\begin{cases} 0 \le p \le t^2, 當t為偶數 \\ 0 \le p \le t^2-3, 當t為奇數 \end{cases}$

☆ B 拼板 n 值特性 ：正三角形、等腰梯形：n 與 t 奇偶性相同。菱形、平行四邊形：n 為偶數。

三、以A、B 、 D拼板無縫密鋪正三角形

設無縫密鋪邊長 t 的正三角形

需要A、B、D拼板分別 m、n、q 個

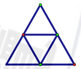
$\because$ 圖形是由 t^2個單位正三角形所組成，

而A、B、D拼板由 2、3、8 個正三角形組成，

$\therefore 2m+3n+8q=t^2$，其中 m ,n ,q 為非負整數。

☆解的判斷法則

步驟 1：找出 D 拼板個數的範圍限制，$0 \le q \le \left[\frac{t^2-8}{8}\right]$

步驟 2：根據 D 拼板個數 q 切割圖形，
再將剩餘區域切割成數個可無縫密鋪的圖形
最後若不為 △ 或  ，則可無縫密鋪圖形

步驟 3：利用 B 拼板 n 值與 t 值奇偶性相同，
討論A、B拼板個數，並計算檢驗之。

參考資料

- Crux Mathematicorum, Vol. 37:No7, November/Novembre2011(245 · OC50. 2.)