

# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

團隊合作獎

080411

「欲罷不能」桌遊機率之探討與延伸

學校名稱：嘉義市東區崇文國民小學

|        |       |
|--------|-------|
| 作者：    | 指導老師： |
| 小六 黃晟璋 | 蘇翰庭   |
| 小六 呂承穎 | 翁秀玉   |
| 小六 劉祐璋 |       |
| 小六 陳以芯 |       |
| 小六 蘇 瑱 |       |
| 小六 范裕紘 |       |

關鍵詞：桌遊、機率、scratch

## 摘要

欲罷不能是一款與機率性質相關的桌遊，結合骰子的進行來完成遊戲，我們藉由遊戲體驗去發現到欲罷不能的問題，並設計實驗來尋求問題的解答，一步一步發現欲罷不能的小秘密。

從研究一、二的探討中，找出原規則各式各樣的機率情形，發現到與 7 越有關係的機率越大，而與 2 或 12 越相近的機率越小。但也在研究三中發現雖然 7 的機率最高，但若加上遊戲本身設定的方格數來闖關，所有數字機率都差不多。我們也在研究四、五的部分，將遊戲做兩種延伸（加入乘除、骰子面數），增加遊戲樂趣，也調整遊戲的難易度。也在研究六時進行策略分析，依據情況擬出該前進該停手的策略。最後，運用上述研究資料，設計 Scratch 版的「欲罷不能」桌遊。

## 壹、研究動機

暑假時，我們幾個朋友到同學家開的桌遊店去玩，其中有一款名叫「欲罷不能」的桌遊令我印象特別深刻，在遊戲進行時，我選到的數字總是錯開我骰出來的數字，而有些朋友運氣很好，都可以剛好命中數字，我很納悶，後來請教老師之後才知道，這與數學的「機率」有關。因上述原因，我們向老師提出，希望可以做「欲罷不能」桌遊的科展，讓我們解開「欲罷不能」的秘密。

## 貳、研究目的

- 一、研究一：「欲罷不能」桌遊規則與其數學分析。
- 二、研究二：擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為某數的機率（原規則）。
- 三、研究三：「欲罷不能」中，數字  $n$  的達成率。
- 四、研究四：擲數顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數「差」或兩個點數「積」為某數的機率。
- 五、研究五：增加骰子數字大小，計算  $n$  面骰的機率。
- 六、研究六：原規則之勝算策略分析。
- 七、研究七：運用上述研究資料，設計 Scratch 版的「欲罷不能」桌遊。

## 參、 研究設備及器材

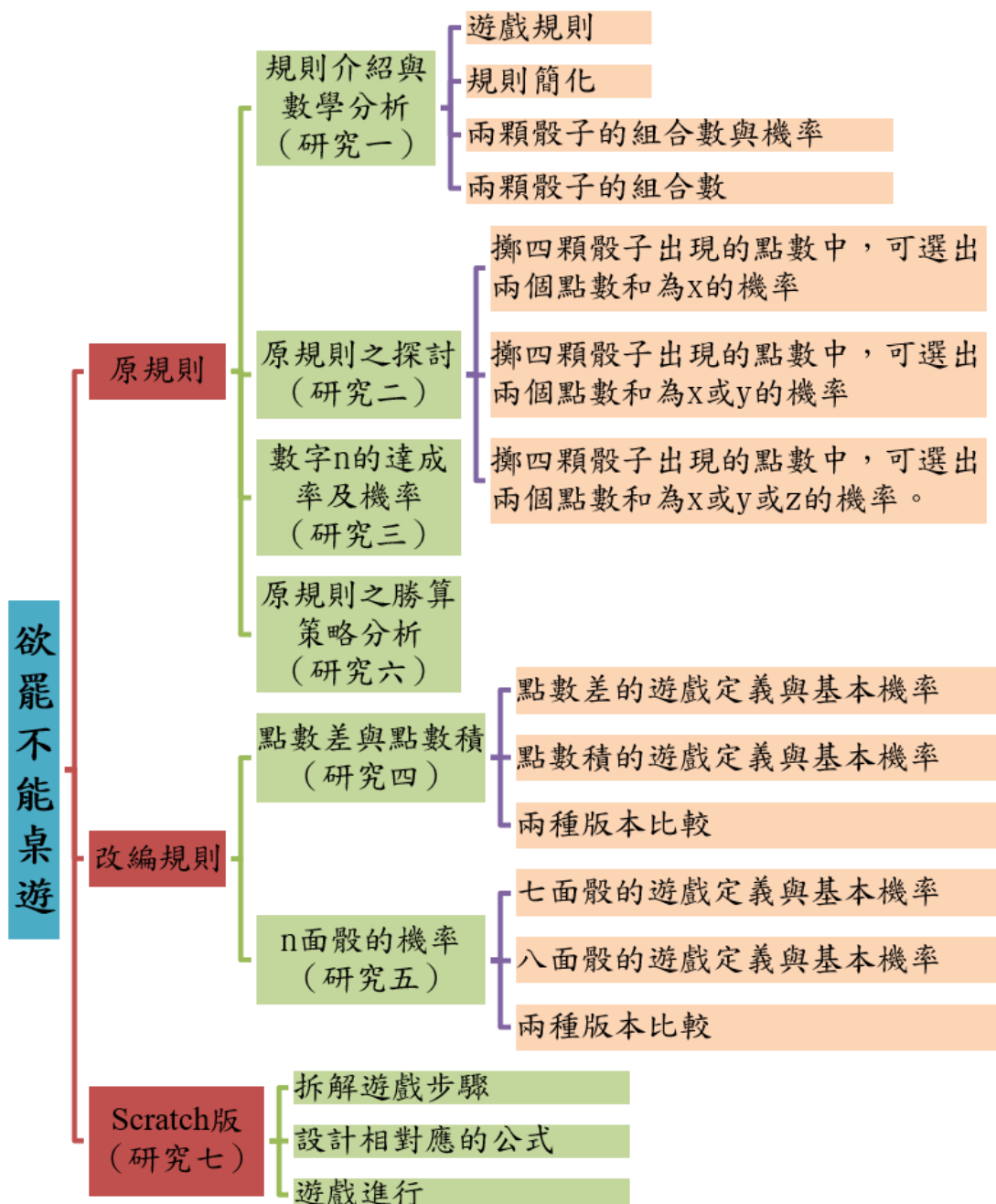
一、基本設備：欲罷不能桌遊、筆記本、計算紙、筆、黑板。

二、電腦相關：Excel(表格製作、簡易計算)、Word(整理資料、撰寫報告、表格製作)。

Scratch(桌遊製作與程式設計)

## 肆、 研究流程與架構

我們的研究分為原規則的分析探討、改編規則的改編與探討、Scratch 板的設計與探討，研究架構圖如下：



## 伍、 研究過程或方法

### 一、 研究一：「欲罷不能」桌遊規則與其數學分析。

#### (一) 「欲罷不能」遊戲規則

1. 遊戲介紹：這是一款與機率、統計相關的桌遊。

2. 遊戲配件：

此款桌遊共有 **4 個骰子**、**44 個交通錐**，分為 4 種顏色（紅黃綠藍），每種顏色各 11 個、**3 個白色暫時交通錐**、以及 **1 張遊戲底座**。

3. 遊戲設置：

(1) 每名玩家選擇一個顏色，拿取 11 個該色的交通錐，及 **3 個白色暫時交通錐**。

(2) 每名玩家擲 2 顆骰子，擲出數字總和最高的玩家成為起始玩家。

4. 遊戲流程與規則：

(1) 遊戲進行數輪，從起始玩家開始，輪到每個人的回合都依循下列規則行動。

(2) 擲 4 顆骰，然後將骰子分為兩兩一組，並相加。

(3) 如右圖，例如玩家骰出 2、3、4、5，會有

3 種分法，玩家可自由選擇其中一種分法。

第一種可以分成  $2+3=5$  和  $4+5=9$ 。

第二種可以分成  $2+4=6$  和  $3+5=8$ 。

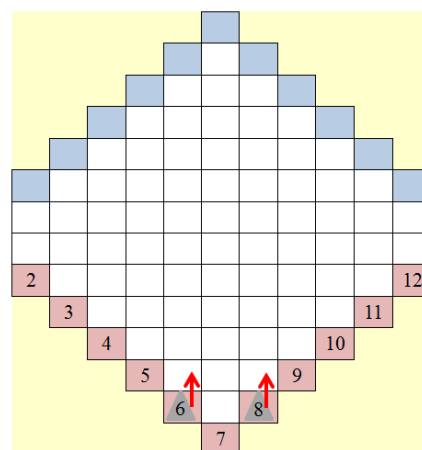
第三種可以分成  $2+5=7$  和  $3+4=7$ 。

(4) 呈上例子，若玩家選擇第二種分法，則要

將 **白色暫時交通錐** 放到數字 6 和數字 8 的位置。

(5) 完成以上流程後（擲骰及放交通錐），玩家可以決定是否進行下一次擲骰或結束這回合。

(6) 呈第(5)點，如果進行擲骰，並將四顆骰子分為兩兩一組，並相加，則會有以下三種情況：



- a. **情況一**：如果選擇的兩組數字和中，有已經選擇過的數字（即該數字那列中，有白色暫時交通錐），將該暫時交通錐向上移動 1 格。
- b. **情況二**：如果選擇的兩組數字和中，有你還沒選擇過的數字（即該數字上沒有白色暫時交通錐），而且你還有能放置的白色暫時交通錐，必須放置而不能保留。
- c. **情況三**：如果選擇的兩組數字和中，這兩個數字都沒有任何白色暫時交通錐，則本回合行動失敗，移除所有白色暫時交通錐，換下一位玩家。
- (7) 呈第(5)點，若玩家選擇不進行擲骰，則將**白色暫時交通錐**所佔領的位置，換成該玩家所代表的某色交通錐，換下一位玩家。
- (8) 獲勝條件為當有某位玩家，將 3 個某色交通錐抵達終點(藍底)，及為勝利。

## (二) 遊戲規則規則簡化

為了方便做研究，我們將遊戲規則簡化，簡化重點如下：

1. 遊戲改為個人版，因此只有暫時交通錐及單色交通錐。
2. 行動失敗（意即沒有辦法使任何暫時交通錐前進）則記錄一次。
3. 獲勝條件一樣為某色交通錐抵達終點為勝利，但會記錄行動幾次才成功。

## (三) 兩顆骰子點數和為 n 的組合數有幾種？

1. 我們想知道，2 顆骰子所投出的數字和有哪些組合，且各有幾種，首先，先將第一顆骰子可能的數字列出（1~6），再將第二顆骰子可能的數字列出（也是 1~6），進行組合，得出以下表格，**共 36 種組合**。

| 兩顆骰子<br>相加等於          |   | 第一顆骰子 |       |       |        |        |        |
|-----------------------|---|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
|                       |   | 1     | 2     | 3     | 4      | 5      | 6      |
| 第<br>二<br>顆<br>骰<br>子 | 1 | 1+1=2 | 2+1=3 | 3+1=4 | 4+1=5  | 5+1=6  | 6+1=7  |
|                       | 2 | 1+2=3 | 2+2=4 | 3+2=5 | 4+2=6  | 5+2=7  | 6+2=8  |
|                       | 3 | 1+3=4 | 2+3=5 | 3+3=6 | 4+3=7  | 5+3=8  | 6+3=9  |
|                       | 4 | 1+4=5 | 2+4=6 | 3+4=7 | 4+4=8  | 5+4=9  | 6+4=10 |
|                       | 5 | 1+5=6 | 2+5=7 | 3+5=8 | 4+5=9  | 5+5=10 | 6+5=11 |
|                       | 6 | 1+6=7 | 2+6=8 | 3+6=9 | 4+6=10 | 5+6=11 | 6+6=12 |

2. 再將以上組合的數字和做整理，最小為 2(1+1)，最大為 12(6+6)，得出以下表格。

3. 發現  $n$  為 **7** 的組合數最多，有 **6** 種； $n$  為 **2** 或 **12** 的組合數最少，只有 **1** 種。

| 相加等於 (n) | 2   | 3          | 4                 | 5                        | 6                               | 7                                      | 8                               | 9                        | 10                | 11         | 12  |
|----------|-----|------------|-------------------|--------------------------|---------------------------------|--|---------------------------------|--------------------------|-------------------|------------|-----|
| 類型       | 1+1 | 1+2<br>2+1 | 1+3<br>2+2<br>3+1 | 1+4<br>2+3<br>3+2<br>4+1 | 1+5<br>2+4<br>3+3<br>4+2<br>5+1 | 1+6<br>2+5<br>3+4<br>4+3<br>5+2<br>6+1 | 2+6<br>3+5<br>4+4<br>5+3<br>6+2 | 3+6<br>4+5<br>5+4<br>6+3 | 4+6<br>5+5<br>6+4 | 5+6<br>6+5 | 6+6 |
| 組合數      | 1   | 2          | 3                 | 4                        | 5                               | 6                                      | 5                               | 4                        | 3                 | 2          | 1   |

(四) 兩顆骰子點數和為  $n$  的機率有多少？

- $n$  所出現的次數不同，代表隨機擲出時，出現  $n$  的機率也不同，我們將上述組合數整理成表格，並將組合數相同的擺一起。(如下表)
- 再將每個組合數 $\div$ 36( 計算機率 )，並換算成百分率。
- 可發現  $n$  為 **7** 的機率約等於 **16.67%**，而  $n$  為 **2** 或 **12** 的機率僅有 **2.78%**。

| 骰子相加 (n) | 2 or 12           | 3 or 11           | 4 or 10           | 5 or 9             | 6 or 8             | 7                  |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 組合數      | 1                 | 2                 | 3                 | 4                  | 5                  | 6                  |
| 總組合數     | 36                | 36                | 36                | 36                 | 36                 | 36                 |
| 機率       | 0.0278<br>= 2.78% | 0.0556<br>= 5.56% | 0.0833<br>= 8.33% | 0.1111<br>= 11.11% | 0.1389<br>= 13.89% | 0.1667<br>= 16.67% |

(五) 同時擲四顆骰子，出現的點數有多少種可能性？

從研究一之(二)可看出，兩顆骰子有  $6 \times 6 = 36$  種組合，以此類推；三顆骰子有  $6 \times 6 \times 6 = 216$  種組合；**四顆骰子有  $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$  種組合。**

(遊戲規則使用 4 顆骰子進行遊戲)

(六) 四顆骰子中若有相同數字(不同組合)，組合數可以怎麼算？

- 因四顆骰子的組合數太多，不能像前面依樣一一列出來計算，我們發現，有些類型的是相同的組合，只是順序不同，因此我們將四顆骰子的數字類型做分類，方便以後研究做計算。以下分成 5 類，分別有四同、三同一異、兩同兩同、兩同兩異、四異，如下例。
- 假設是骰子數字是 1112，就有 4 種組合可能，如 1112、1121、1211、2111，這四種，此類型稱為三同一異。其餘類型如下表

| 組合分類 | 代表符號 | 組合數 | 組合數(內容)  |
|------|------|-----|--|
| 四同   | AAAA | 1   | AAAA   |
| 三同一異 | AAAB | 4   | AAAB、AABA、ABAA、BAAA  |
| 兩同兩同 | AABB | 6   | AABB、ABAB、ABBA、BBAA、BABA、BBAA  |
| 兩同兩異 | AABC | 12  | AABC、AACB、ABAC、ABCA、ACAB、ACBA、BAAC、BACA、BCAA、CAAB、CABA、CBAA  |
| 四異   | ABCD | 24  | ABCD、ABDC、ACBD、ACDB、ADBC、ADCB、BACD、BADC、BCAD、BCDA、BDAC、BDCA、CABD、CADB、CBAD、CBDA、CDAB、CDBA、DABC、DACB、DBAC、DBCA、DCAB、DCBA、 |

## 二、研究二：擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為某數的機率（原規則）。

欲罷不能遊戲是希望投出來的骰子可以使交通錐往前移動，因此想準確地知道，哪一個數字的出現的機率最大？機率為何？雖然遊戲中有3個暫時交通錐可以前進，但我們先降低其複雜性，從「擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為x的機率」開始計算，再慢慢延伸到「點數和為x或y的機率」以及「點數和為x或y或z的機率」。

### （一）擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為x的機率為何？

- x 可能的數字為 2~12。
- 如下表，我們先將 2 的可能組合 (1+1) 列出，如下圖紅字處，再配上兩個其他數字(1111、1112、1113...以此類推)，如下圖黑字處。
- 再利用研究一之(五)的結果，算出該組合的組合數(如 1122，還有 1212、1221、2112、2121、2211 等 6 組合)，最後將其加總。
- 表格如下，因篇幅關係以下以數字 2 及數字 6 做舉例。
- 數字 6 的部分，因為有重複計算(用灰底標示)，因此要扣除，例如 1524 的組合跟 2415 的組合完全相同，因此將 2415 扣除，其餘 1533 與 3315、2433 與 3324 也有相同問題，因此要扣除。

| x=2  |     |
|------|-----|
| 可能組合 | 組合數 |
| 1111 | 1   |
| 1112 | 4   |

| x=6 (灰底部分為重複計算，因此要扣除) |     |      |     |      |     |
|-----------------------|-----|------|-----|------|-----|
| 可能組合                  | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 |
| 1511                  | 4   | 2411 | 12  | 3311 | 6   |
| 1512                  | 12  | 2412 | 12  | 3312 | 12  |

|      |     |      |     |      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| 1113 | 4   | 1513 | 12  | 2413 | 24  | 3313 | 4   |
| 1114 | 4   | 1514 | 12  | 2414 | 12  | 3314 | 12  |
| 1115 | 4   | 1515 | 6   | 2415 | 24  | 3315 | 12  |
| 1116 | 4   | 1516 | 12  | 2416 | 24  | 3316 | 12  |
| 1122 | 6   | 1522 | 12  | 2422 | 4   | 3322 | 6   |
| 1123 | 12  | 1523 | 24  | 2423 | 12  | 3323 | 4   |
| 1124 | 12  | 1524 | 24  | 2424 | 6   | 3324 | 12  |
| 1125 | 12  | 1525 | 12  | 2425 | 12  | 3325 | 12  |
| 1126 | 12  | 1526 | 24  | 2426 | 12  | 3326 | 12  |
| 1133 | 6   | 1533 | 12  | 2433 | 12  | 3333 | 1   |
| 1134 | 12  | 1534 | 24  | 2434 | 12  | 3334 | 4   |
| 1135 | 12  | 1535 | 12  | 2435 | 24  | 3335 | 4   |
| 1136 | 12  | 1536 | 24  | 2436 | 24  | 3336 | 4   |
| 1144 | 6   | 1544 | 12  | 2444 | 4   | 3344 | 6   |
| 1145 | 12  | 1545 | 12  | 2445 | 12  | 3345 | 12  |
| 1146 | 12  | 1546 | 24  | 2446 | 12  | 3346 | 12  |
| 1155 | 6   | 1555 | 4   | 2455 | 12  | 3355 | 6   |
| 1156 | 12  | 1556 | 12  | 2456 | 24  | 3356 | 12  |
| 1166 | 6   | 1566 | 12  | 2466 | 12  | 3366 | 6   |
|      | 171 |      | 302 |      | 278 |      | 147 |

6. 計算各 x 的組合數，並列出 2~12 的結果，例如 6 的有 1+5、2+4、3+3 的組合類型，將 302+278+147 相加得出 727，意思是，擲出組合有 6 的種類有 727 種，如下表。

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x=  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| 組合數 | 171 | 302 | 461 | 580 | 727 | 834 | 727 | 580 | 461 | 302 | 171 |

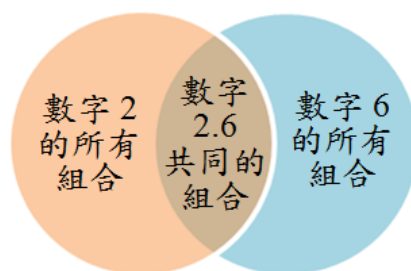
7. 我們發現，2 跟 12 相同、3 跟 11 相同...以此類推。
8. 再利用研究一之（三）的方法計算擲出組合有 x 數字的機率，如下表。
9. 從下表可得知，擲出相加有 2 或 12 的組合的機率僅有 13.19%，但擲出相加有 7 的機率的組合則高達 64.35%。

|                   |                    |                   |                    |                    |                   |                    |
|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| x                 | 2or12              | 3 or 11           | 4 or 10            | 5 or 9             | 6 or 8            | 7                  |
| 組合數               | 171                | 302               | 461                | 580                | 727               | 834                |
| 總組合數              | 1296               | 1296              | 1296               | 1296               | 1296              | 1296               |
| 機率(四捨五入到小數點第 4 位) | 0.1319<br>≐ 13.19% | 0.2330<br>≐ 23.3% | 0.3557<br>≐ 35.57% | 0.4475<br>≐ 44.75% | 0.5610<br>≐ 56.1% | 0.6435<br>≐ 64.35% |



(二) 擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為  $x$  或  $y$  的機率為何？

1. 因遊戲的白色暫時交通錐有 3 個（假設我們已經放到 2 和 6 和 8 這三個區域），我們擲 4 顆骰子之後，就必須要嘗試將 4 顆組成有 2 或 6 或 8 這三種數字的組合。若有，則可將白色暫時交通錐往前一步；若無，則拿掉所白色暫時交通錐，宣告本次任務失敗。因此，我們想知道投擲玩 4 顆骰子後，任選 2 顆相加為  $x$  或  $y$  的機率為何？（應該要算  $x$  或  $y$  或  $z$  三種的機率，但此部分先從  $x$  或  $y$  兩種的機率開始著手）
2. 可以選擇用研究二（一）的方法，繼續進行研究，試著嘗試找出任選兩顆相加為  $x$  或  $y$  的機率。
3. 我們發現有  $x$  或  $y$  的機率，不是直接相加就好，而是要扣掉重複組合，如下圖左，我們發現，數字 2 的組合會有數字 6 的組合重複到，如果沒有將重複的部分扣除，就會重複計算。我們採取的作法是，數字 2 的組合全部都算（當然以扣除數字 2 內部重複的組合，如研究二之（一）的內容），如同橘色圈圈，但是數字 6 的部分需扣除 2.6 共同的部分，如同藍色圈圈。



4. 以 2 或 6 的為例，如下圖，可得到，擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為 2 或 6 的機率為 **63.43%**。

| x=2  |     | x=6 （灰底部分為重複計算，因此要扣除） |     |      |     |      |     |
|------|-----|-----------------------|-----|------|-----|------|-----|
| 可能組合 | 組合數 | 可能組合                  | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 |
| 1111 | 1   | 1511                  | 4   | 2411 | 12  | 3311 | 6   |
| 1112 | 4   | 1512                  | 12  | 2412 | 12  | 3312 | 12  |
| 1113 | 4   | 1513                  | 12  | 2413 | 24  | 3313 | 4   |
| 1114 | 4   | 1514                  | 12  | 2414 | 12  | 3314 | 12  |
| 1115 | 4   | 1515                  | 6   | 2415 | 24  | 3315 | 12  |

|      |     |      |     |      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| 1116 | 4   | 1516 | 12  | 2416 | 24  | 3316 | 12  |
| 1122 | 6   | 1522 | 12  | 2422 | 4   | 3322 | 6   |
| 1123 | 12  | 1523 | 24  | 2423 | 12  | 3323 | 4   |
| 1124 | 12  | 1524 | 24  | 2424 | 6   | 3324 | 12  |
| 1125 | 12  | 1525 | 12  | 2425 | 12  | 3325 | 12  |
| 1126 | 12  | 1526 | 24  | 2426 | 12  | 3326 | 12  |
| 1133 | 6   | 1533 | 12  | 2433 | 12  | 3333 | 1   |
| 1134 | 12  | 1534 | 24  | 2434 | 12  | 3334 | 4   |
| 1135 | 12  | 1535 | 12  | 2435 | 24  | 3335 | 4   |
| 1136 | 12  | 1536 | 24  | 2436 | 24  | 3336 | 4   |
| 1144 | 6   | 1544 | 12  | 2444 | 4   | 3344 | 6   |
| 1145 | 12  | 1545 | 12  | 2445 | 12  | 3345 | 12  |
| 1146 | 12  | 1546 | 24  | 2446 | 12  | 3346 | 12  |
| 1155 | 6   | 1555 | 4   | 2455 | 12  | 3355 | 6   |
| 1156 | 12  | 1556 | 12  | 2456 | 24  | 3356 | 12  |
| 1166 | 6   | 1566 | 12  | 2466 | 12  | 3366 | 6   |
|      | 171 |      | 244 |      | 266 |      | 141 |

5. 數字種類有從 2.3、2.4、2.5、2.6...直到 11.12，共有 55 種組合，我們認為 2 或 3、11 或 12 再研究二之（一）時，個別的機率都一樣，合在一起會不會也相同，因此我們先排列 11 或 12 的，與 2 或 3 的做比較，發現結果是一樣的，機率都是 **32.01%**。

6. 所以，從 2 或 3 等於 11 或 12 去推論，2 可換成 12、3→11、4→10、5→9、6→8。可以省去許多研究的步驟，省略表如下（紅字為可以被省略的），從原本的 55 組，省略到只要計算 30 組。

|      |       |      |       |      |      |     |     |
|------|-------|------|-------|------|------|-----|-----|
| 2 3  | 11 12 | 2 11 | 3 12  | 3 10 | 4 11 | 5 6 | 8 9 |
| 2 4  | 10 12 | 2 12 | 2 12  | 3 11 | 3 11 | 5 7 | 7 9 |
| 2 5  | 9 12  | 3 4  | 10 11 | 4 5  | 9 10 | 5 8 | 6 9 |
| 2 6  | 8 12  | 3 5  | 9 11  | 4 6  | 8 10 | 5 9 | 5 9 |
| 2 7  | 7 12  | 3 6  | 8 11  | 4 7  | 7 10 | 6 7 | 7 8 |
| 2 8  | 6 12  | 3 7  | 7 11  | 4 8  | 6 10 | 6 8 | 6 8 |
| 2 9  | 5 12  | 3 8  | 6 11  | 4 9  | 5 10 |     |     |
| 2 10 | 4 12  | 3 9  | 5 11  | 4 10 | 4 10 |     |     |

7. 計算各個 x 或 y 的組合數，並列出省略後的結果，再利用研究一之（三）的方法計算擲出組合有 x 或 y 數字的機率，如下表。

| x 或 y       | 機率     | x 或 y       | 機率     | x 或 y      | 機率     |
|-------------|--------|-------------|--------|------------|--------|
| 2or3、11or12 | 32.02% | 3or4、10or11 | 46.99% | 4or7、7or10 | 76.93% |
| 2or4、10or12 | 43.83% | 3or5、9or11  | 53.24% | 4or8、6or10 | 76.54% |
| 2or5、9or12  | 52.55% | 3or6、8or11  | 63.66% | 4or9、5or10 | 68.29% |
| 2or6、8or12  | 63.43% | 3or7、7or11  | 70.99% | 4or10      | 66.98% |
| 2or7、7or12  | 71.22% | 3or8、6or11  | 68.29% | 5or6、8or9  | 75.08% |
| 2or8、6or12  | 66.98% | 3or9、5or11  | 64.35% | 5or7、7or9  | 77.62% |
| 2or9、5or12  | 56.10% | 3or10、4or11 | 56.10% | 5or8、6or9  | 76.93% |
| 2or10、4or12 | 47.38% | 3or11       | 44.75% | 5or9       | 69.14% |
| 2or11、3or12 | 35.57% | 4or5、9or10  | 61.03% | 6or7、7or8  | 85.42% |
| 2or12       | 25.93% | 4or6、8or10  | 72.07% | 6or8       | 83.33% |

(三) 擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為 x 或 y 或 z 的機率為何？

1. 本款遊戲即有 3 個白色暫時交通錐可使用，所以有 3 個數字是你可以選擇往前進的數字，因此，此部分的機率非常重要，我們一樣遵循研究二之（一）、研究二之（二）的方法進行研究。

2. **Excel 計算法**：使用公式及操作說明

- (1) 我們覺得太多的數據要做計算，非常耗時也容易出錯，希望找到能夠更快速、更便捷的方式，因此去請教老師，老師教我們使用 Excel 來做計算，可以用來將數字加總、計算機率（除法）、轉換成百分率...等功能，公式如下。

|    |   |  |
|----|---|--|
| 功能 | 數字加總 1                                      | 數字加總 2   |
| 公式 | =SUM(C10:C30)                               | =C66+E66+G66+I66   |
| 說明 | 從 <b>C 列 10 行</b> 到 <b>C 列 30 行</b> 間的數字相加。 | 將 <b>C 列 66 行</b> 、 <b>E 列 66 行</b> 、 <b>G 列 66 行</b> 、 <b>I 列 66 行</b> 等數字相加。 |
| 功能 | 除法(機率)                                      | 轉換成百分率   |
| 公式 | =C30/1296                                   | =TEXT(C30/1,"0.00%")   |
| 說明 | 將 <b>C 列 30 行</b> 的數字除以 1296，即計算機率。         | 將 <b>C 列 30 行</b> 的數字轉換成百分率，並取到小數點後第二位。  |

- (2) **綠底處**：如下圖，為重複組合，因此將數字刪掉。
- (3) **藍框處**：如下圖，使用整排「加總」功能。

(4) **紅框處**：如下圖，挑選部分結果使用「加總」功能。

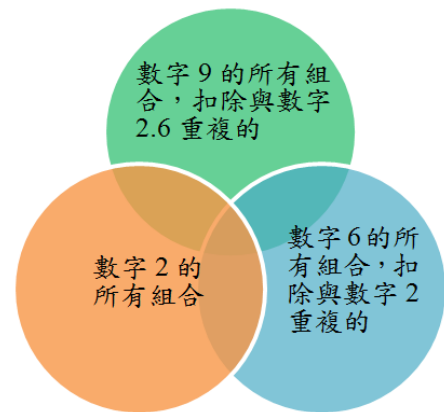
(5) **棕色底線處**：如下圖，除以 1296 計算機率，並換成百分率。

| 2     | 組合數 | 3     | 組合數 | 4         | 組合數 | 4    | 組合數 |
|-------|-----|-------|-----|-----------|-----|------|-----|
| 1111  | 1   | 1211  |     | 1311      |     | 2211 |     |
| 1112  | 4   | 1212  |     | 1312      |     | 2212 |     |
| 1113  | 4   | 1213  |     | 1313      |     | 2213 |     |
| 1114  | 4   | 1214  |     | 1314      |     | 2214 |     |
| 1115  | 4   | 1215  |     | 1315      |     | 2215 |     |
| 1116  | 4   | 1216  |     | 1316      |     | 2216 |     |
| 1122  | 6   | 1222  | 4   | 1322      |     | 2222 | 1   |
| 1123  | 12  | 1223  | 12  | 1323      |     | 2223 | 4   |
| 1124  | 12  | 1224  | 12  | 1324      |     | 2224 | 4   |
| 1125  | 12  | 1225  | 12  | 1325      |     | 2225 | 4   |
| 1126  | 12  | 1226  | 12  | 1326      |     | 2226 | 4   |
| 1133  | 6   | 1233  | 12  | 1333      | 4   | 2233 | 6   |
| 1134  | 12  | 1234  | 24  | 1334      | 12  | 2234 | 12  |
| 1135  | 12  | 1235  | 24  | 1335      | 12  | 2235 | 12  |
| 1136  | 12  | 1236  | 24  | 1336      | 12  | 2236 | 12  |
| 1144  | 6   | 1244  | 12  | 1344      | 12  | 2244 | 6   |
| 1145  | 12  | 1245  | 24  | 1345      | 24  | 2245 | 12  |
| 1146  | 12  | 1246  | 24  | 1346      | 24  | 2246 | 12  |
| 1155  | 6   | 1255  | 12  | 1355      | 12  | 2255 | 6   |
| 1156  | 12  | 1256  | 24  | 1356      | 24  | 2256 | 12  |
| 1166  | 6   | 1266  | 12  | 1366      | 12  | 2266 | 6   |
| 234總和 | 171 | 244   |     | 148       |     | 113  |     |
|       | 676 | 234機率 |     | 0.5216049 |     | 52%  |     |

3. 接著，進行 x 或 y 或 z 的做法，不能直接將機率相加，一樣要列出相關數據後，再扣掉重複組合，與研究二之(二)

的做法類似。以 2 或 6 或 9 的為例，如

右圖，數字 2 的組合全部都算，如同橘色圈圈，而數字 6 的部分需扣除與 2 重複的部分，如同藍色圈圈，最後，數字 9 的部分，需扣除與 2.6 重複的部分，如同綠色圈圈而已。



4. 計算內容如下表，可得到，擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為 2 或 6 或 9 的機率為 **83.33%**。

| x=2  |     | x=6  |     |      |     |      |     | x=9  |     |      |     |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 |
| 1111 | 1   | 1511 | 4   | 2411 | 12  | 3311 | 6   | 3611 | 12  | 4511 | 12  |
| 1112 | 4   | 1512 | 12  | 2412 | 12  | 3312 | 12  | 3612 | 24  | 4512 | 24  |
| 1113 | 4   | 1513 | 12  | 2413 | 24  | 3313 | 4   | 3613 | 12  | 4513 | 24  |

|      |     |      |               |                 |     |                 |               |                 |               |                 |               |
|------|-----|------|---------------|-----------------|-----|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| 1114 | 4   | 1514 | <del>12</del> | 2414            | 12  | 3314            | 12            | 3614            | 24            | 4514            | <del>12</del> |
| 1115 | 4   | 1515 | 6             | <del>2415</del> | 24  | <del>3315</del> | <del>12</del> | <del>3615</del> | 24            | 4515            | <del>12</del> |
| 1116 | 4   | 1516 | <del>12</del> | 2416            | 24  | 3316            | 12            | 3616            | 12            | 4516            | 24            |
| 1122 | 6   | 1522 | 12            | 2422            | 4   | 3322            | 6             | 3622            | 12            | 4522            | <del>12</del> |
| 1123 | 12  | 1523 | 24            | 2423            | 12  | 3323            | 4             | <del>3623</del> | <del>12</del> | 4523            | 24            |
| 1124 | 12  | 1524 | 24            | 2424            | 6   | <del>3324</del> | <del>12</del> | <del>3624</del> | 24            | 4524            | <del>12</del> |
| 1125 | 12  | 1525 | 12            | 2425            | 12  | 3325            | 12            | 3625            | 24            | <del>4525</del> | <del>12</del> |
| 1126 | 12  | 1526 | 24            | 2426            | 12  | 3326            | 12            | 3626            | 12            | 4526            | 24            |
| 1133 | 6   | 1533 | 12            | 2433            | 12  | 3333            | 1             | <del>3633</del> | 4             | 4533            | <del>12</del> |
| 1134 | 12  | 1534 | 24            | 2434            | 12  | 3334            | 4             | <del>3634</del> | <del>12</del> | 4534            | 12            |
| 1135 | 12  | 1535 | 12            | 2435            | 24  | 3335            | 4             | <del>3635</del> | <del>12</del> | 4535            | 12            |
| 1136 | 12  | 1536 | 24            | 2436            | 24  | 3336            | 4             | <del>3636</del> | 6             | <del>4536</del> | 24            |
| 1144 | 6   | 1544 | 12            | 2444            | 4   | 3344            | 6             | 3644            | 12            | 4544            | 4             |
| 1145 | 12  | 1545 | 12            | 2445            | 12  | 3345            | 12            | 3645            | 24            | 4545            | 6             |
| 1146 | 12  | 1546 | 24            | 2446            | 12  | 3346            | 12            | 3646            | 12            | 4546            | 12            |
| 1155 | 6   | 1555 | 4             | 2455            | 12  | 3355            | 6             | 3655            | 12            | 4555            | 4             |
| 1156 | 12  | 1556 | 12            | 2456            | 24  | 3356            | 12            | 3656            | 12            | 4556            | 12            |
| 1166 | 6   | 1566 | 12            | 2466            | 12  | 3366            | 6             | 3666            | 4             | 4566            | 12            |
|      | 171 |      | 244           |                 | 266 |                 | 141           |                 | 184           |                 | 74            |

5. 我們要驗證相反組合的機率是否會相同，因此排出 2 或 6 或 9 的相反組合 4 或 8 或 12，結果顯示，機率皆為 83.33%。我們一樣將重複的組合省略(紅字省略)，省略表如下：

|                |                |                |                |               |              |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|--------------|
| 2.3.4 10.11.12 | 2.4.11 3.10.12 | 2.7.8 6.7.12   | 3.4.9 5.10.11  | 3.7.9 5.7.11  | 4.7.8 6.7.10 |
| 2.3.5 9.11.12  | 2.4.12 2.10.12 | 2.7.9 5.7.12   | 3.4.10 4.10.11 | 3.7.10 4.7.11 | 4.7.9 5.7.10 |
| 2.3.6 8.11.12  | 2.5.6 8.9.12   | 2.7.10 4.7.12  | 3.4.11 3.10.11 | 3.7.11        | 4.7.10       |
| 2.3.7 7.11.12  | 2.5.7 7.9.12   | 2.7.11 3.7.12  | 3.5.6 8.9.11   | 3.8.9 5.6.11  | 4.8.9 5.6.10 |
| 2.3.8 6.11.12  | 2.5.8 6.9.12   | 2.7.12         | 3.5.7 7.9.11   | 3.8.10 4.6.11 | 5.6.7 7.8.9  |
| 2.3.9 5.11.12  | 2.5.9 5.9.12   | 2.8.9 5.6.12   | 3.5.8 6.9.11   | 3.9.10 4.5.11 | 5.6.8 6.8.9  |
| 2.3.10 4.11.12 | 2.5.10 4.9.12  | 2.8.10 4.6.12  | 3.5.9 5.9.11   | 4.5.6 8.9.10  | 5.6.9 5.8.9  |
| 2.3.11 3.11.12 | 2.5.11 3.9.12  | 2.8.11 3.6.12  | 3.5.10 4.9.11  | 4.5.7 7.9.10  | 5.7.8 6.7.9  |
| 2.3.12 2.11.12 | 2.5.12 2.9.12  | 2.9.10 4.5.12  | 3.5.11 3.9.11  | 4.5.8 6.9.10  | 5.7.9        |
| 2.4.5 9.10.12  | 2.6.7 7.8.12   | 2.9.11 3.5.12  | 3.6.7 7.8.11   | 4.5.9 5.9.10  | 6.7.8        |
| 2.4.6 8.10.12  | 2.6.8 6.8.12   | 2.10.11 3.4.12 | 3.6.8 6.8.11   | 4.5.10 4.9.10 |              |
| 2.4.7 7.10.12  | 2.6.9 5.8.12   | 3.4.5 9.10.11  | 3.6.9 5.8.11   | 4.6.7 7.8.10  |              |
| 2.4.8 6.10.12  | 2.6.10 4.8.12  | 3.4.6 8.10.11  | 3.6.10 4.8.11  | 4.6.8 6.8.10  |              |
| 2.4.9 5.10.12  | 2.6.11 3.8.12  | 3.4.7 7.10.11  | 3.6.11 3.8.11  | 4.6.9 5.8.10  |              |
| 2.4.10 4.10.12 | 2.6.12 2.8.12  | 3.4.8 6.10.11  | 3.7.8 6.7.11   | 4.6.10 4.8.10 |              |

6. 計算各個 x 或 y 或 z 的組合數，並列出省略後的結果，再利用研究一之(三)

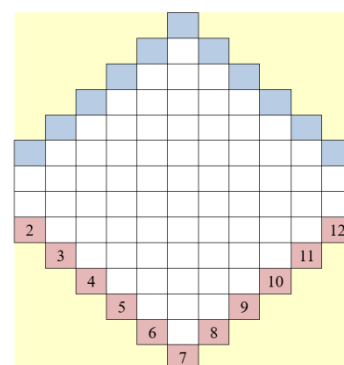
的方法計算擲出組合有 x 或 y 或 z 數字的機率，如下表。

| x 或 y 或 z | 機率     | x 或 y 或 z | 機率     | x 或 y 或 z | 機率     | x 或 y 或 z | 機率     |
|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|
| 2.3.4     | 52.16% | 2.5.11    | 72.15% | 3.4.8     | 79.63% | 4.5.6     | 79.63% |
| 2.3.5     | 58.41% | 2.5.12    | 63.43% | 3.4.9     | 77.85% | 4.5.7     | 84.80% |
| 2.3.6     | 68.36% | 2.6.7     | 86.42% | 3.4.10    | 75.62% | 4.5.8     | 84.57% |
| 2.3.7     | 75.23% | 2.6.8     | 88.35% | 3.4.11    | 65.66% | 4.5.9     | 79.86% |
| 2.3.8     | 72.07% | 2.6.9     | 83.33% | 3.5.6     | 77.08% | 4.5.10    | 82.25% |
| 2.3.9     | 71.22% | 2.6.10    | 83.10% | 3.5.7     | 78.70% | 4.6.7     | 88.58% |
| 2.3.10    | 63.43% | 2.6.11    | 75.62% | 3.5.8     | 80.79% | 4.6.8     | 91.13% |
| 2.3.11    | 52.55% | 2.6.12    | 73.84% | 3.5.9     | 77.62% | 4.6.9     | 86.42% |
| 2.3.12    | 43.83% | 2.7.8     | 90.90% | 3.5.10    | 75.85% | 4.6.10    | 88.35% |
| 2.4.5     | 73.46% | 2.7.9     | 83.56% | 3.5.11    | 70.99% | 4.7.8     | 90.28% |
| 2.4.6     | 75.85% | 2.7.10    | 83.33% | 3.6.7     | 86.50% | 4.7.9     | 89.27% |
| 2.4.7     | 80.71% | 2.7.11    | 77.85% | 3.6.8     | 85.34% | 4.7.10    | 87.65% |
| 2.4.8     | 81.56% | 2.7.12    | 78.09% | 3.6.9     | 82.64% | 4.8.9     | 86.27% |
| 2.4.9     | 75.62% | 2.8.9     | 84.10% | 3.6.10    | 82.25% | 5.6.7     | 88.66% |
| 2.4.10    | 79.24% | 2.8.10    | 81.56% | 3.6.11    | 75.85% | 5.6.8     | 89.51% |
| 2.4.11    | 63.43% | 2.8.11    | 73.61% | 3.7.8     | 89.27% | 5.6.9     | 86.65% |
| 2.4.12    | 55.17% | 2.9.10    | 69.14% | 3.7.9     | 86.11% | 5.7.8     | 91.44% |
| 2.5.6     | 77.01% | 2.9.11    | 61.81% | 3.7.10    | 83.56% | 5.7.9     | 85.34% |
| 2.5.7     | 80.94% | 2.10.11   | 57.87% | 3.7.11    | 77.62% | 6.7.8     | 91.98% |
| 2.5.8     | 82.87% | 3.4.5     | 66.90% | 3.8.9     | 83.56% |           |        |
| 2.5.9     | 76.00% | 3.4.6     | 74.23% | 3.8.10    | 83.33% |           |        |
| 2.5.10    | 75.62% | 3.4.7     | 79.09% | 3.9.10    | 77.85% |           |        |

7. 發現，機率約介在 43%~91%，可作為進行遊戲的參考。

### 三、 研究三：「欲罷不能」中，數字 n 的達成率及機率。

(一) 在欲罷不能的桌遊中，每個數字從起點（紅底）抵達終點（藍底）的格子數不同，如右圖，像是數字 2 只要 3 次，但數字 7 則需要 13 次，我們想知道，哪個數字達成率最高，最有可能抵達終點。



1. 首先，我們將每個數字的機率及抵達終點的格子數列

出來。以 2 為例，2 需要 3 次才可以抵達終點，且成功擲出數字和有 2 的組合，機率為 13.19%

- 若每次擲出數字和有 2 的組合的機率為 13.19%，則以機率來說，要投幾次才可以有 3 次成功的投擲？我們可以把 3 次成功的投擲，想成為機率 300%。
- 以 2 為例，相當於要擲骰子  $300 \div 13.19 \approx 22.7$ ，代表約投擲 22.7 次才會有 3 次成功的投擲，因此，約 22.7 次才可以抵達終點，其餘數字以此類推，如下表。

| n    | 2 or 12 | 3 or 11 | 4 or 10 | 5 or 9 | 6 or 8 | 7      |
|------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 機率   | 13.19%  | 23.3%   | 35.57%  | 44.75% | 56.1%  | 64.35% |
| 格子數  | 3       | 5       | 7       | 9      | 11     | 13     |
| 投擲次數 | 22.7    | 21.5    | 19.7    | 20.11  | 19.6   | 20.2   |

- 我們發現，達成任務大多需要投擲 20 次左右的骰子，但若依原規則，最容易達成任務的是數字 6、8，接著是數字 4、10，再來是數字 5、9，數字 7 的達成率只排在第七名，與我們原本認為的不太一樣。

#### 四、 研究四：擲數顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數「差」 或兩個點數「積」

我們將研究四分成兩部分進行，第一部分將原規則調整較多，骰子相加改成相「減」，並計算「3 顆骰子可選出兩個點數差為某數的機率」；第二部分則是將原規則調整較少，骰子相加改成相「乘」，並計算「4 顆骰子可選出兩個點數積為某數的機率」。

##### (一) 擲三顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數差為 x 或 y 的機率為何？

- 首先我們先定義遊戲規則，(1)因相減後的數較少，因此改為只有 3 顆骰子；(2)任選的兩顆一定要是大減小或者同數字相減，才不會變成負數；(3)原遊戲有 11 個數字，設置 3 個白色暫時交通錐，改變規則後僅有 6 個數字，因此改為 2 個白色暫時交通錐。
- 骰子相減組合表如下，共有 0、1、2、3、4、5 的數字，出現次數不太一樣。

| 兩顆骰子<br>相減等於 |   | 第一顆骰子 |       |       |       |       |       |
|--------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|              |   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
| 第            | 1 | 1-1=0 | 2-1=1 | 3-1=2 | 4-1=3 | 5-1=4 | 6-1=5 |
| 二            | 2 | 2-1=1 | 2-2=0 | 3-2=1 | 4-2=2 | 5-2=3 | 6-2=4 |



|             |   |       |       |       |       |       |       |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 類<br>骰<br>子 | 3 | 3-1=2 | 3-2=1 | 3-3=0 | 4-3=1 | 5-3=2 | 6-3=3 |
|             | 4 | 4-1=3 | 4-2=2 | 4-3=1 | 4-4=0 | 5-4=1 | 6-4=2 |
|             | 5 | 5-1=4 | 5-2=3 | 5-3=2 | 5-4=1 | 5-5=0 | 6-5=1 |
|             | 6 | 6-1=5 | 6-2=4 | 6-3=3 | 6-4=2 | 6-5=1 | 6-6=0 |

3. 以下為各數字出現的組合表，最多組合為相減等於1，最少組合為相減等於5。

| 相減<br>等於 | 組合類型                                    | 共有幾<br>種組合 |
|----------|---|------------|
| 0        | 1-1、2-2、3-3、4-4、5-5、6-6                 | 6          |
| 1        | 1-2、2-1、2-3、3-2、3-4、4-3、4-5、5-4、5-6、6-5 | 10         |
| 2        | 1-3、3-1、2-4、4-2、3-5、5-3、4-6、6-4         | 8          |
| 3        | 1-4、4-1、2-5、5-2、3-6、6-3                 | 6          |
| 4        | 1-5、5-1、2-6、6-2                         | 4          |
| 5        | 6-1、1-6                                 | 2          |

4. 首先我們依據研究一之(三)的方法計算擲出組合有x數字的機率，數字種類有從1-1開始，直到6-1，共有36種組合，但還是有重複組合，例如1-6跟6-1是相同的，因此省略計算，剩21組。(1-1、2-2、3-3、4-4、5-5、6-6、2-1、3-2、4-3、5-4、6-5、3-1、4-2、5-3、6-4、4-1、5-2、6-3、5-1、6-2、6-1)

5. 再進行機率的計算，我們以相減等於2為例，如下圖：

| 相減等於2 |          |      |                    |      |      |     |
|-------|----------|------|--------------------|------|------|-----|
| 3111  | 4        | 4211 | 12                 | 5311 | 6411 | 12  |
| 3112  | 12       | 4212 | 12                 | 5312 | 6412 |     |
| 3113  | 6        | 4213 |                    | 5313 | 6413 |     |
| 3114  | 12       | 4214 | 12                 | 5314 | 6414 | 12  |
| 3115  | 12       | 4215 | 24                 | 5315 | 6415 | 24  |
| 3116  | 12       | 4216 | 24                 | 5316 | 6416 | 12  |
| 3122  | 12       | 4222 | 4                  | 5322 | 6422 | 12  |
| 3123  | 12       | 4223 | 12                 | 5323 | 6423 | 12  |
| 3124  | 24       | 4224 | 6                  | 5324 | 6424 |     |
| 3125  | 24       | 4225 | 12                 | 5325 | 6425 | 12  |
| 3126  | 24       | 4226 | 12                 | 5326 | 6426 | 24  |
| 3133  | 4        | 4233 | 12                 | 5333 | 6433 | 12  |
| 3134  | 12       | 4234 | 12                 | 5334 | 6434 | 12  |
| 3135  | 12       | 4235 | 24                 | 5335 | 6435 | 6   |
| 3136  | 12       | 4236 | 24                 | 5336 | 6436 | 12  |
| 3144  | 12       | 4244 | 4                  | 5344 | 6444 | 4   |
| 3145  | 24       | 4245 | 12                 | 5345 | 6445 | 12  |
| 3146  | 24       | 4246 | 12                 | 5346 | 6446 | 6   |
| 3155  | 12       | 4255 | 12                 | 5355 | 6455 | 4   |
| 3156  | 24       | 4256 | 24                 | 5356 | 6456 | 12  |
| 3166  | 12       | 4266 | 12                 | 5366 | 6466 | 4   |
|       | 302      |      | 278                |      | 170  | 146 |
|       | 總組合數 896 |      | 機率 0.691358 69.14% |      |      |     |

6. 如上方式，將重複的扣掉，算出機率為69.14%，其餘機率如下表。

| x    | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5     |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 組合數  | 936    | 1006   | 896    | 834    | 580    | 302   |
| 總組合數 | 1296   | 1296   | 1296   | 1296   | 1296   | 1296  |
| 機率   | 77.22% | 77.62% | 69.14% | 64.35% | 44.75% | 23.3% |



7. 3 顆骰子的組合數比 4 顆骰子的簡單許多，三同、兩同一異、三異。如下表。

| 組合分類 | 代表符號 | 組合數 | 組合數(內容)                 |
|------|------|-----|-------------------------|
| 三同   | AAA  | 1   | AAA                     |
| 兩同一異 | AAB  | 4   | AAB、ABA、BAA             |
| 三異   | ABC  | 24  | ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA |

8. 計算各個 x 或 y 的組合數，利用研究二之(二)的方法，計算擲出組合有 x 或 y 數字的機率，如下表。

| x 或 y | 機率     | x 或 y | 機率     | x 或 y | 機率     |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 0or1  | 88.89% | 1or2  | 80.56% | 2or4  | 72.22% |
| 0or2  | 83.33% | 1or3  | 72.22% | 2or5  | 58.33% |
| 0or3  | 84.72% | 1or4  | 69.44% | 3or4  | 61.11% |
| 0or4  | 66.67% | 1or5  | 66.67% | 3or5  | 50.00% |
| 0or5  | 55.56% | 2or3  | 72.22% | 4or5  | 36.11% |

9. 因每個數字的機率不同，因此要大概估算，需要有幾個方格子，才可以使遊戲更公平的進行。我們從研究三可以判斷，若希望投 20 次左右可以獲勝，需要幾個格子，如下表：

| x     | 0       | 1       | 2       | 3      | 4      | 5     |
|-------|---------|---------|---------|--------|--------|-------|
| 機率    | 77.22%  | 77.62%  | 69.13%  | 64.35% | 44.75% | 23.3% |
| 乘以 20 | 1544.4% | 1552.4% | 1382.6% | 1287%  | 895%   | 466%  |
| 格子數   | 15      | 16      | 13      | 12     | 9      | 4     |

10. 做完上述計算，共有 6 個數字，且格子數界在 4~16 個，因此白色暫時交通錐我們建議只設 2 個。

(二) 擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數積為 x 或 y 的機率為何？

- 首先我們先定義遊戲規則，(1)維持 4 顆骰子；(2)維持設置 3 個白色暫時交通錐。
- 骰子相減組合表如下，共有 18 個數字，出現次數不太一樣。

| 兩顆骰子<br>相乘等於          |   | 第一顆骰子 |        |        |        |        |        |
|-----------------------|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       |   | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
| 第<br>二<br>顆<br>骰<br>子 | 1 | 1×1=1 | 2×1=2  | 3×1=3  | 4×1=4  | 5×1=5  | 6×1=6  |
|                       | 2 | 1×2=2 | 2×2=4  | 3×2=6  | 4×2=8  | 5×2=10 | 6×2=12 |
|                       | 3 | 1×3=3 | 2×3=6  | 3×3=9  | 4×3=12 | 5×3=15 | 6×3=18 |
|                       | 4 | 1×4=4 | 2×4=8  | 3×4=12 | 4×4=16 | 5×4=20 | 6×4=24 |
|                       | 5 | 1×5=5 | 2×5=10 | 3×5=15 | 4×5=20 | 5×5=25 | 6×5=30 |
|                       | 6 | 1×6=6 | 2×6=12 | 3×6=18 | 4×6=24 | 5×6=30 | 6×6=36 |

3. 以下為各數字出現的組合，最多組合的為相乘等於 6 跟 12，最少組合的剛好都是平方數 1、9、16、25、36。。

| 相乘等於 | 組合類型            | 共有幾種組合 | 相乘等於 | 組合類型            | 共有幾種組合 |
|------|-----------------|--------|------|-----------------|--------|
| 1    | 1x1             | 1      | 12   | 2x6、6x2、4x3、3x4 | 4      |
| 2    | 1x2、2x1         | 2      | 15   | 3x5、5x3         | 2      |
| 3    | 1x3、3x1         | 2      | 16   | 4x4             | 1      |
| 4    | 1x4、4x1、2x2     | 3      | 18   | 3x6、6x3         | 2      |
| 5    | 1x5、5x1         | 2      | 20   | 4x5、5x4         | 2      |
| 6    | 1x6、6x1、3x2、2x3 | 4      | 24   | 4x6、6x4         | 2      |
| 8    | 2x4、4x2         | 2      | 25   | 5x5             | 1      |
| 9    | 3x3             | 1      | 30   | 6x5、5x6         | 2      |
| 10   | 2x5、5x2         | 2      | 36   | 6x6             | 1      |

4. 首先我們依據研究一之（三）的方法計算擲出組合有 x 數字的機率，數字種類從 1x1 開始，直到 6x6，共有 36 種組合，但還是有重複組合，例如 1x6 跟 6x1 是相同的，因此省略計算，剩 21 組。

(1x1、1x2、1x3、1x4、2x2、1x5、1x6、2x3、2x4、3x3、2x5、2x6、3x4、3x5、4x4、3x6、4x5、4x6、5x5、5x6、6x6)

5. 再進行機率的計算，我們以相乘等於 6 為例，如右圖：

| 相乘等於6    |    |                     |    |
|----------|----|---------------------|----|
| 1611     | 4  | 2311                | 12 |
| 1612     | 12 | 2312                | 12 |
| 1613     | 12 | 2313                | 12 |
| 1614     | 12 | 2314                | 24 |
| 1615     | 12 | 2315                | 24 |
| 1616     | 6  | 2316                |    |
| 1622     | 12 | 2322                | 4  |
| 1623     | 24 | 2323                | 6  |
| 1624     | 24 | 2324                | 12 |
| 1625     | 24 | 2325                | 12 |
| 1626     | 12 | 2326                | 12 |
| 1633     | 12 | 2333                | 4  |
| 1634     | 24 | 2334                | 12 |
| 1635     | 24 | 2335                | 12 |
| 1636     | 12 | 2336                | 12 |
| 1644     | 12 | 2344                | 12 |
| 1645     | 24 | 2345                | 24 |
| 1646     | 12 | 2346                | 24 |
| 1655     | 12 | 2355                | 12 |
| 1656     | 12 | 2356                | 24 |
| 1666     | 4  | 2366                | 12 |
| 302      |    | 278                 |    |
| 總組合數 580 |    | 機率 0.4475309 44.75% |    |

6. 如上方式，將重複的扣掉，算出機率為 44.75%，其餘機率如下表。

| x    | 1      | 2     | 3     | 4      | 5     | 6      |
|------|--------|-------|-------|--------|-------|--------|
| 組合數  | 171    | 302   | 302   | 461    | 302   | 580    |
| 總組合數 | 1296   | 1296  | 1296  | 1296   | 1296  | 1296   |
| 機率   | 13.19% | 23.3% | 23.3% | 35.57% | 23.3% | 44.75% |

|      |       |        |       |        |       |        |
|------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| x    | 8     | 9      | 10    | 12     | 15    | 16     |
| 組合數  | 302   | 171    | 302   | 580    | 302   | 171    |
| 總組合數 | 1296  | 1296   | 1296  | 1296   | 1296  | 1296   |
| 機率   | 23.3% | 13.19% | 23.3% | 44.75% | 23.3% | 13.19% |
| x    | 18    | 20     | 24    | 25     | 30    | 36     |
| 組合數  | 302   | 302    | 302   | 171    | 302   | 171    |
| 總組合數 | 1296  | 1296   | 1296  | 1296   | 1296  | 1296   |
| 機率   | 23.3% | 23.3%  | 23.3% | 13.19% | 23.3% | 13.19% |

7. 因每個數字的機率不同，因此要大概估算，需要有幾個方格子，才可以使遊戲更公平的進行。我們從研究三可以判斷，若希望投 20 次左右可以獲勝，需要幾個格子，如下表（將機率相同的排一起）：

|       |              |                           |        |        |
|-------|--------------|---------------------------|--------|--------|
| x     | 1、9、16、25、36 | 2、3、5、8、10、15、18、20、24、30 | 4      | 6、12   |
| 機率    | 13.19%       | 23.3%                     | 35.57% | 44.75% |
| 乘以 20 | 263.8%       | 466%                      | 711.4% | 895%   |
| 格子數   | 3            | 5                         | 7      | 9      |

8. 做完上述計算，共有 18 個數字，且格子數界在 3~9 個，因數字類型較多，機率也偏小，因此我們建議白色暫時交通錐設定在 5 個。
9. 用研究二（一）的方法，進行研究，嘗試找出任選兩顆相加為 x 或 y 的機率。
10. 利用研究二之（二）的方法，計算擲出組合有 x 或 y 數字的機率，如下表。

| x 或 y   | 機率     | x 或 y   | 機率     | x 或 y   | 機率     | x 或 y    | 機率     |
|---------|--------|---------|--------|---------|--------|----------|--------|
| 1 or 2  | 32.02% | 3 or 12 | 57.87% | 6 or 12 | 63.36% | 12 or 15 | 57.87% |
| 1 or 3  | 32.02% | 3 or 15 | 38.27% | 6 or 15 | 65.28% | 12 or 16 | 52.55% |
| 1 or 4  | 43.83% | 3 or 16 | 35.57% | 6 or 16 | 56.10% | 12 or 18 | 53.24% |
| 1 or 5  | 32.02% | 3 or 18 | 38.27% | 6 or 18 | 53.24% | 12 or 20 | 57.87% |
| 1 or 6  | 52.55% | 3 or 20 | 44.75% | 6 or 20 | 64.35% | 12 or 24 | 58.80% |
| 1 or 8  | 35.57% | 3 or 24 | 44.75% | 6 or 24 | 57.87% | 12 or 25 | 56.10% |
| 1 or 9  | 25.93% | 3 or 25 | 35.57% | 6 or 25 | 56.10% | 12 or 30 | 57.87% |
| 1 or 10 | 35.57% | 3 or 30 | 44.75% | 6 or 30 | 57.87% | 12 or 36 | 52.85% |
| 1 or 12 | 56.10% | 3 or 36 | 35.57% | 6 or 36 | 52.55% | 15 or 16 | 35.57% |
| 1 or 15 | 35.57% | 4 or 5  | 49.61% | 8 or 9  | 35.57% | 15 or 18 | 39.20% |
| 1 or 16 | 25.93% | 4 or 6  | 64.74% | 8 or 10 | 38.27% | 15 or 20 | 38.27% |
| 1 or 18 | 35.57% | 4 or 8  | 53.47% | 8 or 12 | 53.24% | 15 or 24 | 44.75% |
| 1 or 20 | 35.57% | 4 or 9  | 47.38% | 8 or 15 | 44.75% | 15 or 25 | 32.02% |
| 1 or 24 | 35.57% | 4 or 10 | 52.55% | 8 or 16 | 32.02% | 15 or 30 | 38.27% |
| 1 or 25 | 25.93% | 4 or 12 | 64.74% | 8 or 18 | 44.75% | 15 or 36 | 35.57% |

|         |        |         |        |          |        |          |        |
|---------|--------|---------|--------|----------|--------|----------|--------|
| 1 or 30 | 35.57% | 4 or 15 | 56.10% | 8 or 20  | 38.27% | 16 or 18 | 35.57% |
| 1 or 36 | 25.93% | 4 or 16 | 43.83% | 8 or 24  | 38.27% | 16 or 20 | 32.02% |
| 2 or 3  | 38.27% | 4 or 18 | 56.10% | 8 or 25  | 35.57% | 16 or 24 | 32.02% |
| 2 or 4  | 46.99% | 4 or 20 | 49.61% | 8 or 30  | 44.75% | 16 or 25 | 25.93% |
| 2 or 5  | 38.27% | 4 or 24 | 49.61% | 8 or 36  | 35.57% | 16 or 30 | 35.57% |
| 2 or 6  | 53.24% | 4 or 25 | 47.84% | 9 or 10  | 35.57% | 16 or 36 | 25.93% |
| 2 or 8  | 38.27% | 4 or 30 | 56.10% | 9 or 12  | 52.55% | 18 or 20 | 44.75% |
| 2 or 9  | 35.57% | 4 or 36 | 47.38% | 9 or 15  | 32.02% | 18 or 24 | 38.27% |
| 2 or 10 | 38.27% | 5 or 6  | 57.87% | 9 or 16  | 29.53% | 18 or 25 | 35.57% |
| 2 or 12 | 57.87  | 5 or 8  | 44.75% | 9 or 18  | 32.48% | 18 or 30 | 38.27% |
| 2 or 15 | 44.75  | 5 or 9  | 35.57% | 9 or 20  | 35.57% | 18 or 36 | 32.02% |
| 2 or 16 | 35.57% | 5 or 10 | 38.27% | 9 or 24  | 35.57% | 20 or 24 | 38.27% |
| 2 or 18 | 44.75% | 5 or 12 | 64.35% | 9 or 25  | 29.53% | 20 or 25 | 32.02% |
| 2 or 20 | 44.75% | 5 or 15 | 38.27% | 9 or 30  | 35.57% | 20 or 30 | 38.27% |
| 2 or 24 | 44.75% | 5 or 16 | 35.57% | 9 or 36  | 29.53% | 20 or 36 | 35.57% |
| 2 or 25 | 35.57% | 5 or 18 | 44.75% | 10 or 12 | 57.87% | 24 or 25 | 35.57% |
| 2 or 30 | 44.75% | 5 or 20 | 38.27% | 10 or 15 | 38.27% | 24 or 30 | 38.27% |
| 2 or 36 | 35.57% | 5 or 24 | 44.75% | 10 or 16 | 35.57% | 24 or 36 | 32.02% |
| 3 or 4  | 49.61% | 5 or 25 | 32.02% | 10 or 18 | 44.75% | 25 or 30 | 32.02% |
| 3 or 5  | 38.27% | 5 or 30 | 38.27% | 10 or 20 | 38.27% | 25 or 36 | 25.93% |
| 3 or 6  | 58.8%  | 5 or 36 | 35.57% | 10 or 24 | 44.75% | 30 or 36 | 32.02% |
| 3 or 8  | 44.75% | 6 or 8  | 57.87% | 10 or 25 | 32.02% |          |        |
| 3 or 9  | 32.02  | 6 or 9  | 52.55% | 10 or 30 | 38.27% |          |        |
| 3 or 10 | 44.75% | 6 or 10 | 59.72% | 10 or 36 | 35.57% |          |        |

11. 以篇幅關係，以上只列出，計算擲出組合有 x 或 y 數字的機率，就沒有把第 3 數字 z 給列出來，若遊戲時需要參考，可以從 2 數的部份去考量。

(三) **研究四整理「3 顆骰子相減」版本與「4 顆骰子相乘」版本。**

1. 我們將兩版本的規則與內容作整理

| 版本       | 3 顆骰子相減 | 4 顆骰子相乘 |
|----------|---------|---------|
| 骰子顆數     | 3       | 4       |
| 骰子總組合數   | 216     | 1296    |
| 相減後的數字數  | 6       | X       |
| 相乘後的數字數  | X       | 18      |
| 格子數      | 4~16    | 3~9     |
| 白色暫時交通錐數 | 2       | 5       |
| 難度       | 易       | 難       |

## 五、 研究五：增加骰子數字大小，計算 n 面骰的機率。

原遊戲的骰子為六面骰，我們想要增加骰子的數字大小，因此我們先從增加一面跟兩面的骰子開始進行。研究五分成兩部分進行，第一部分為七面骰的機率及計算；第二部分為八面骰的機率及計算。

### (一) 七面骰的機率及計算。

1. 遊戲規則沒變，僅將骰子面數增加一面，變為 7 面

骰子相加組合表如下，共有 1、2、3、4、5、6、7 的數字，出現次數不太一樣。

| 兩顆骰子<br>相加等於          |   | 第一顆骰子 |       |        |        |        |        |        |
|-----------------------|---|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       |   | 1     | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| 第<br>二<br>顆<br>骰<br>子 | 1 | 1+1=2 | 2+1=3 | 3+1=4  | 4+1=5  | 5+1=6  | 6+1=7  | 7+1=8  |
|                       | 2 | 1+2=3 | 2+2=4 | 3+2=5  | 4+2=6  | 5+2=7  | 6+2=8  | 7+2=9  |
|                       | 3 | 1+3=4 | 3+2=5 | 3+3=6  | 4+3=7  | 5+3=8  | 6+3=9  | 7+3=10 |
|                       | 4 | 1+4=5 | 2+4=6 | 3+4=7  | 4+4=8  | 5+4=9  | 6+4=10 | 7+4=11 |
|                       | 5 | 1+5=6 | 2+5=7 | 3+5=8  | 4+5=9  | 5+5=10 | 6+5=11 | 7+5=12 |
|                       | 6 | 1+6=7 | 2+6=8 | 3+6=9  | 4+6=10 | 5+6=11 | 6+6=12 | 7+6=13 |
|                       | 7 | 1+7=8 | 2+7=9 | 3+7=10 | 4+7=11 | 5+7=12 | 6+7=13 | 7+7=14 |

2. 以下為各數字出現的組合表，最多組合為相加等於 8，有 7 種組合，最少組合為相加等於 2 跟 14，都只有 1 種組合。

| 相加等於 | 組合類型                        | 共有幾種組合 |
|------|-----------------------------|--------|
| 2    | 1+1                         | 1      |
| 3    | 1+2 2+1                     | 2      |
| 4    | 1+3 2+2 3+1                 | 3      |
| 5    | 1+4 4+1 2+3 3+2             | 4      |
| 6    | 3+3 2+4 4+2 5+1 1+5         | 5      |
| 7    | 2+5 5+2 3+4 4+3 6+1 1+6     | 6      |
| 8    | 1+7 7+1 3+5 5+3 4+4 6+2 2+6 | 7      |
| 9    | 2+7 7+2 3+6 6+3 4+5 5+4     | 6      |
| 10   | 3+7 7+3 4+6 6+4 5+5         | 5      |
| 11   | 4+7 7+4 5+6 6+5             | 4      |
| 12   | 5+7 7+5 6+6                 | 3      |
| 13   | 6+7 7+6                     | 2      |
| 14   | 7+7                         | 1      |

3. 首先我們依據研究一之（三）的方法計算擲出組合有 x 數字的機率，數字種類從 2~14 都有，有些數字的機率相同，我們將它們放在一起，機率如下表。

| x   | 2 or 14 | 3 or 13 | 4 or 12 | 5 or 11 | 6 or 10 | 7 or 9 | 8      |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 組合數 | 241     | 434     | 663     | 844     | 1061    | 1230   | 1435   |
| 機率  | 10.04%  | 18.08%  | 27.61%  | 35.15%  | 44.19%  | 51.23% | 59.77% |

4. 因每個數字的機率不同，因此要大概估算，需要有多少個方格子，才可以使遊戲更公平的進行。我們從研究三可以判斷，若希望投 20 次左右可以獲勝，需要幾個格子，如下表：

| x     | 2 or 14 | 3 or 13 | 4 or 12 | 5 or 11 | 6 or 10 | 7 or 9  | 8       |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 機率    | 10.04%  | 18.08%  | 27.61%  | 35.15%  | 44.19%  | 51.23%  | 59.77%  |
| 乘以 20 | 200.8%  | 361.6%  | 552.2%  | 703%    | 883.8%  | 1024.6% | 1195.4% |
| 格子數   | 2       | 4       | 6       | 7       | 8       | 10      | 12      |

## （二）八面骰的機率及計算。

1. 遊戲規則沒變，僅將骰子面數增加一面，變為 8 面。骰子相加組合表如下，共有 1、2、3、4、5、6、7、8 的數字，出現次數不太一樣。

| 兩顆骰子<br>相加等於          |   | 第一顆骰子 |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------------|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       |   | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
| 第<br>二<br>顆<br>骰<br>子 | 1 | 1+1=2 | 2+1=3  | 3+1=4  | 4+1=5  | 5+1=6  | 6+1=7  | 7+1=8  | 8+1=9  |
|                       | 2 | 1+2=3 | 2+2=4  | 3+2=5  | 4+2=6  | 5+2=7  | 6+2=8  | 7+2=9  | 8+2=10 |
|                       | 3 | 1+3=4 | 2+3=5  | 3+3=6  | 4+3=7  | 5+3=8  | 6+3=9  | 7+3=10 | 8+3=11 |
|                       | 4 | 1+4=5 | 2+4=6  | 3+4=7  | 4+4=8  | 5+4=9  | 6+4=10 | 7+4=11 | 8+4=12 |
|                       | 5 | 1+5=6 | 2+5=7  | 3+5=8  | 4+5=9  | 5+5=10 | 6+5=11 | 7+5=12 | 8+5=13 |
|                       | 6 | 1+6=7 | 2+6=8  | 3+6=9  | 4+6=10 | 5+6=11 | 6+6=12 | 7+6=13 | 8+6=14 |
|                       | 7 | 1+7=8 | 2+7=9  | 3+7=10 | 4+7=11 | 5+7=12 | 6+7=13 | 7+7=14 | 8+7=15 |
|                       | 8 | 1+8=9 | 2+8=10 | 3+7=11 | 4+8=12 | 5+8=13 | 6+8=14 | 7+8=15 | 8+7=16 |

2. 以下為各數字出現的組合表，最多組合為相加等於 9，有 8 種組合，最少組合為相加等於 2 跟 16，都只有 1 種組合。

| 相加等於 | 組合類型                    | 共有幾種組合 |
|------|-------------------------|--------|
| 2    | 1+1                     | 1      |
| 3    | 2+1 1+2                 | 2      |
| 4    | 1+3 3+1 2+2             | 3      |
| 5    | 2+3 3+2 1+4 4+1         | 4      |
| 6    | 1+5 5+1 3+3 2+4 4+2     | 5      |
| 7    | 1+6 6+1 2+5 5+2 3+4 4+3 | 6      |

|    |                                 |   |
|----|---------------------------------|---|
| 8  | 1+7 7+1 2+6 6+2 5+3 3+5 4+4     | 7 |
| 9  | 1+8 8+1 7+2 2+7 3+6 6+3 4+5 5+4 | 8 |
| 10 | 8+2 2+8 3+7 7+3 4+6 6+4 5+5     | 7 |
| 11 | 8+3 3+8 4+7 7+4 5+6 6+5         | 6 |
| 12 | 8+4 4+8 5+7 7+5 6+6             | 5 |
| 13 | 8+5 5+8 6+7 7+6                 | 4 |
| 14 | 7+7 8+6 6+8                     | 3 |
| 15 | 8+7 7+8                         | 2 |
| 16 | 8+8                             | 1 |

3. 首先我們依據研究一之(三)的方法計算擲出組合有 x 數字的機率，數字種類從 2~14 都有，有些數字的機率相同，我們將它們放在一起，機率如下表。

| x   | 2or16 | 3 or 15 | 4 or 14 | 5 or 13 | 6 or 12 | 7 or 11 | 8 or 10 | 9     |
|-----|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 組合數 | 323   | 590     | 901     | 1156    | 1467    | 1698    | 1985    | 2216  |
| 機率  | 7.89% | 14.4%   | 22%     | 28.22%  | 35.83%  | 41.46%  | 48.46%  | 54.1% |

4. 因每個數字的機率不同，因此要大概估算，需要有幾個方格子，才可以使遊戲更公平的進行。我們從研究三可以判斷，若希望投 20 次左右可以獲勝，需要幾個格子，如下表：

| x     | 2or16  | 3 or 15 | 4 or 14 | 5 or 13 | 6 or 12 | 7 or 11 | 8 or 10 | 9     |
|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 機率    | 7.89%  | 14.4%   | 22%     | 28.22%  | 35.83%  | 41.46%  | 48.46%  | 54.1% |
| 乘以 20 | 157.8% | 288%    | 440%    | 564.4%  | 716.6%  | 829.2%  | 969.2%  | 1082% |
| 格子數   | 2      | 3       | 4       | 6       | 7       | 8       | 10      | 11    |

### (三) 研究五整理「七面骰」版本與「八面骰」版本。

2. 我們將兩版本的規則與內容作整理

| 版本     | 七面骰  | 八面骰  |
|--------|------|------|
| 計算類型   | 相加   | 相加   |
| 骰子總組合數 | 2401 | 4096 |
| 格子數    | 2~12 | 2~11 |
| 暫時交通錐數 | 3    | 3    |
| 難度     | 中    | 中    |

## 六、 研究六：原規則之勝算策略分析

在進行遊戲的時候，雖然可以參考這些數據，但還是要依據當時情況來決定，因此我們進行了原規則的「策略分析」，因此我們擬定了以下四個策略，由這些策略進行遊戲時，較容易獲勝。

### (一) 策略一：擲出哪些數字的機率是屬於容易達成的？

1. 從研究二之(一)的機率表中可以知道擲出每個數字的機率為何，如下表。

| x  | 2or12  | 3 or 11 | 4 or 10 | 5 or 9 | 6 or 8 | 7      |
|----|--------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 機率 | 13.19% | 23.3%   | 35.57%  | 44.75% | 56.1%  | 64.35% |

2. 接著，我們可以再從研究二之(二)的機率表中發現，數字 x 或 y 的機率，其中 5~9 這些的組合，機率都會達成 70%，因此我們認為三個白色暫時交通錐中，應該至少要有**兩個是介於數字 5~9**。

### (二) 策略二：機率多少可以繼續往下進行？

1. 從研究二之(三)的機率表中可以知道，「x 或 y 或 z」哪三個數字有白色暫時交通錐，機率是介於 43%~91%。我們將機率做簡單的統計，再全部 165 組的資料當中，低於 50%的有 2 組、50%~60%的有 10 組、60%~70%的有 16 組、70%~80%的有 60 組、80%~90%的有 68 組、90%以上的有 9 組。

2. 大部分的過關機率都大於 50%，80%~90%的組數最多，其實機率都很高，我們認為，選擇 80%以上的組合會比較適合。

3. 因為根據研究二之(三)的機率表可看到，80%以上的「x 或 y 或 z」組合中，都會有 2 個容易達成的數字 (5~9)，因此我們建議**80%以上的組合**，更可以嘗試看看。



(三) **策略三**：那我們應該投擲幾次呢？成功幾次才收手？

1. 我們認為，若三個暫時交通錐都已定的時候，我們可以以「x 或 y 或 z」組合是否超過 80% 的來判斷。
2. **超過 80%**的： 機率相對大很多，且組合裡面都至少也兩個容易擲出來的數字，因此建議，超過 80 的組合，可以嘗試 4 次以上。  
原因是因為，我們將計算 $80\% \times 80\% \times 80\% \times 80\% = 40.96\%$ ，還是有約四成的機率可以達成。  
若是很幸運的，擲到 90% 以上的組合更可以嘗試 8 次以上， $(90\%)^8 = 43\%$ ，都還有將近四成多的機率。  
因此，**機率超過 80%，我們建議可以嘗試 4 次以上。**
3. **低於 80%**的： 機率較小，因此我們建議，參考你原本有色的交通錐是否跟暫時交通錐的數字有相同，若有，可以拚拚看往前 2~3 格，若沒有，可以拚到 2 格就收手。  
因此，**機率低於 80%，我們建議可以拚 2 次就好。**

(四) **策略四**：擲到 2 或 12 的時候，要不要選擇放暫時交通錐？

1. 因遊戲有三個白色暫時交通錐，我們認為，可以有一個是放在 2 或 12，原因如下：
2. 原因一：若幸運擲出 2 或 12 的選擇，可以選擇放放看，因為他們只要擲出 3 次，就可以通關，已經完成三分之一了，因此建議可以放一個。
3. 原因二：機率會不會很低？若三個數字當中，只有一個是 2 或 12，其他都是搭配策略一中較好擲出來的 5~9，整體機率都還是再 80% 以上，因此不會太低。
4. 因此我們認為可以放一個，但其他兩個數字要盡量搭配 5~9 的數字。

## 七、 研究七：運用上述研究資料，設計 Scratch 版的「欲罷不能」桌遊。

我們在進行遊戲的時候，雖然覺得遊戲很有趣刺激，但操作起來很耗費時間，同一個人可能要擲很多次骰子，還要移動很多次交通錐，每次都要等其他人操作完，才可以換下一人，因此我們希望，以這款桌遊的規則作為基本規則，開發用 scratch 的電腦版本，希望可以省去許多擲骰子、移動交通錐的時間。

### (一) 研究拆解遊戲步驟

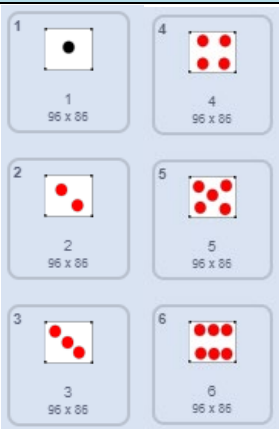
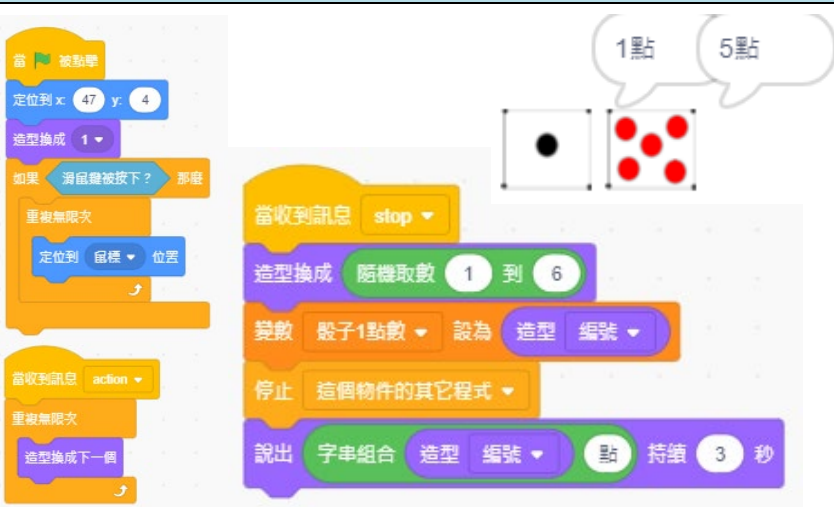
我們將桌遊的規則進行拆解，方便我們用 scratch 做設計，因此我們將桌遊分成主要分成三大部分，

1. 投擲骰子階段。
2. 將投擲後的骰子相加。
3. 旗幟依照相對應的數字往前進。

### (二) 設計出上述部分相對應的公式。

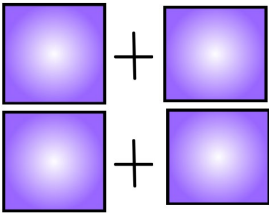



1. 「投擲骰子」的公式，我們又細分為兩個小部分來處理：

- (1) 設計「數字 1~6 骰子造型」。
- (2) 設計「隨機投擲 1~6 骰子的公式」。
- (3) 如下圖

|         | 數字 1~6 骰子造型   | 隨機投擲 1~6 骰子的公式   |
|---------|---|--|
| 遊戲畫面與公式 |  |  |

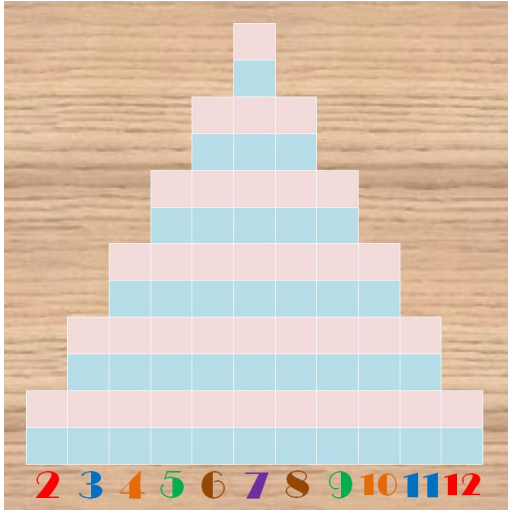
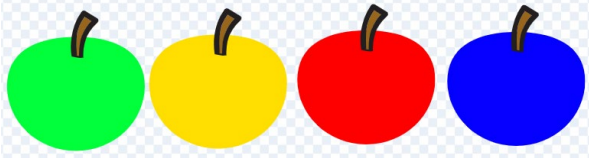

2. 「投擲後的骰子相加」的公式，我們又細分為兩個小部分來處理：

- (1) 設計「4 個框框」，4 個框框中，兩個兩個一組，並設定「骰子放進去則為相加」的公式。
- (2) 設計「2 個人物」，在這兩個人物中設定「說出相加之後的數字」的公式。
- (3) 如下圖

|         | 4 個框框   | 2 個人物   |
|---------|---|---|
| 遊戲畫面與公式 | <br> <p>以此類推到碰到 Sprite4。</p> | <br> |


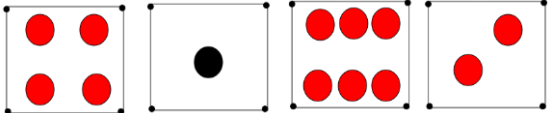
3. 「交通錐依照對應的數字往前進」的公式，我們又細分為 2 個小部分來處理：

- (1) 設計「底圖」，確認底圖的座標，讓交通錐可以走到正確的位置。
- (2) 設計「蘋果」，以可愛的蘋果代替交通錐，在蘋果中加入「出現數字後往前走的公式」的公式。
- (3) 如下圖

| 底圖      |   | 蘋果，現數字後往前走的公式  |  |
|---------|---|--|--|
| 遊戲畫面與公式 |  |                        |  |
|         |   |  <p>以此類推到相加等於 12。</p> |  |

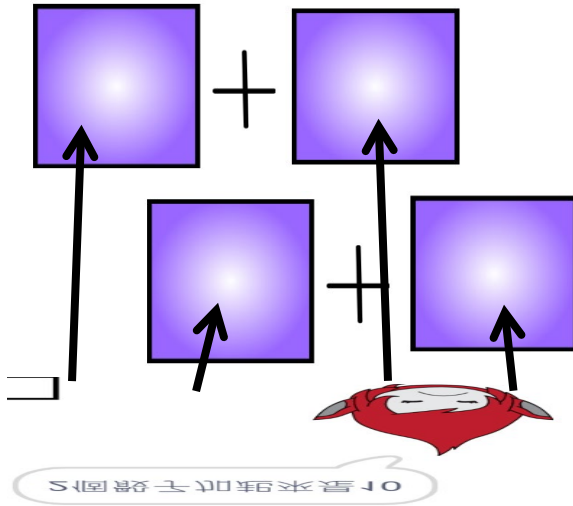
### (三) 遊戲進行

- 我們將上述部分串起，完成 scratch 版的欲罷不能桌遊，如下圖。

| 遊戲畫面與公式 |  |
|---------|--|
| 投擲骰子    | <p>按下 Start 鈕，骰子開始隨機轉動，再按下 End 鈕，骰子停止。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> |

骰子相加

將骰子兩兩移動到紫色框框中



系統會自動相加數字

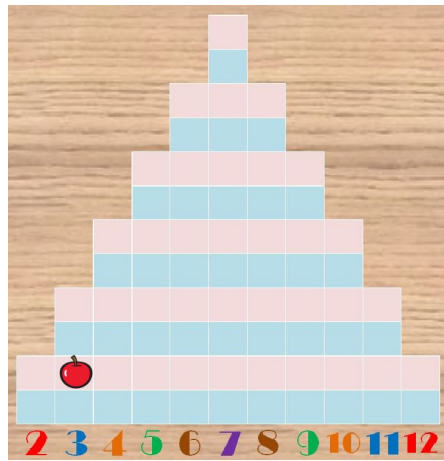
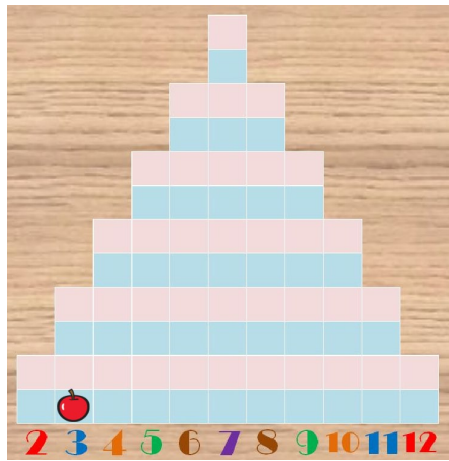
2個骰子加起來是10



2個骰子加起來是3



交通錐往前移動



(四) 目前版本為單人進行的遊戲，未來會在開發多人版本。



## 陸、 討論

在研究過程中，我們發現一些有趣的問題，並加以討論，如下。

### 一、 骰子的數量為何為 4 顆？

我們原先認為，若增加骰子的數量，難度會提升，因為越多數字可以參考，會大大增加他的組合數，而使排列更加困難，但直到我們嘗試做「增加骰子數」的研究後（這個研究沒有放到研究結果中，只放在討論中說明），很快地就發現，越多骰子的話遊戲根本不會輸，因為只要花一點時間就可以組合出你想要的數字，許多組合的機率甚至會超過 100%，因使骰子數 4 科最剛好，可見原遊戲的設定是非常精準的。

### 二、 暫時交通錐的數量為何為 3 個？

我們認為，有些數字的機率很多，像是投出 2 或 12 的機率，是不是可以增加 1~2 個暫時交通錐來讓遊戲變得更容易過關，但如同上述，我們嘗試的做「增加暫時交通錐」的研究（這個研究沒有放到研究結果中，只放在討論中說明），發現到暫時交通錐如果太多，無論投什麼樣的數字，都會有相對應的暫時交通錐可以前進，因此遊戲根本不會失敗，可見原遊戲的設定是計算得非常準確的。

### 三、 綜觀以上兩點討論

若要增加骰子數，就必須要減少暫時交通錐的數量；相反的若要增加暫時交通錐的數量，則必須要減少骰子數。（似乎可以做為未來的研究。）

### 四、 為什麼數字 2 只要 3 格就可以過關，數字 7 卻要 13 格？這樣公平嗎？

我們知道，數字 7 的機率較大，數字 2 的機率較少，所以數字 7 的格子數較多是合理的，但仔細一算，格子數竟然相加 10 個，這樣相對來說會不會數字 2 反而容易過關？經過一連串的研究之後，我們發現，這款遊戲的設計非常準確且神奇，提高「高機率投擲到的數字 7」的難度，並將降低「低機率投擲到的數字 2」的難度，使各個數字的過關率幾乎相同，達到遊戲的平衡，非常的奇妙。

但我們還是會盡量選擇 7，作為暫時交通錐放置處，因 7 容易直到，不容易失敗，若失敗的話，會造成全部暫時交通錐都不見的後果。

## 柒、 結論

- 一、研究欲罷不能桌遊的規則，發現兩顆骰子和為 N 的機率界在 2%~16%之間，以 7 的機率最高，2 或 12 的機率最低。
- 二、若以原規則的方式進行研究，任意投擲 4 顆骰子中，任選 2 顆相加為 x 或 y 或 z 的機率約介在 43%~91%，以 678 為最高，234 及 10.11.12 最低。
- 三、我們發現雖然 7 的機率最高，但若加上遊戲本身設定的方格數來闖關，所有的數字機率都差不多，約投擲 20 次骰子即可過關。
- 四、我們也將遊戲做三種延伸，增加遊戲樂趣，也調整遊戲的難易度，如下：
  1. 改成相乘或相加的方式，相關數計結果在研究四之（三）的整理表格。
  2. 增加七面骰與八面骰的研究，相關數計結果在研究五之（三）的整理表格。
- 五、進行策略分析，依據情況擬出該前進該停手的策略。
- 六、最後，運用上述研究資料，設計 Scratch 版的「欲罷不能」桌遊，用電腦軟體也可以進行遊戲。

## 捌、 未來展望

- 一、欲罷不能還有很多不同面向的發展，像是增加骰子數、增加骰子的面數、交通錐的數量、格子數的設定方式...等。我們希望未來可以將這些面向做整理，做出更有架構、系統性的研究。

## 玖、 參考資料

- 一、【新天鵝堡桌遊】欲罷不能 Can't Stop

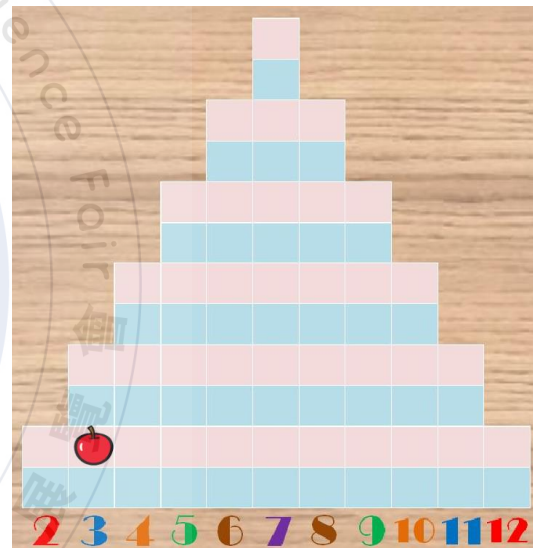
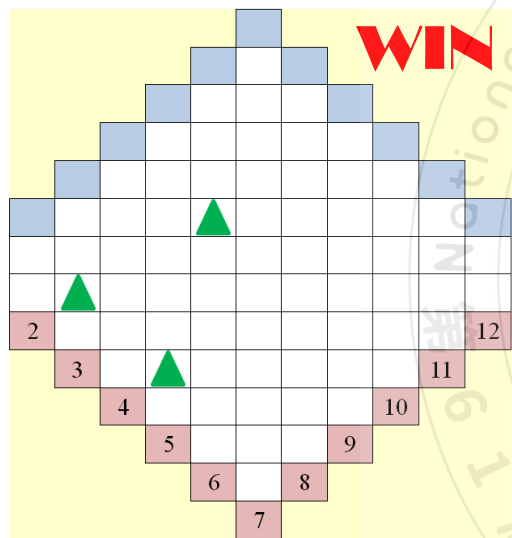
## 【評語】 080411

1. 本作品由一款與機率性質相關的桌遊「欲罷不能」出發，設計實驗來探尋遊戲致勝的關鍵，經由有系統地分析以及具體明確的展示作法，再透過小組通力合作，一步步揭開問題的解答；同時亦將遊戲進行延伸，把遊戲規則推廣到數字的差與積並增加骰子的面數設計出另一公平性桌遊，以增加遊戲的樂趣並調整遊戲的難度；最後還運用相關的研究資料，設計 Scratch 版的「欲罷不能」桌遊，提升了本研究的應用價值。
2. 研究架構圖的呈現具體清晰，同時也反映出研究的流程，可令讀者一目了然。



## 作品簡報

# 「欲罷不能」桌遊機率之探討與延伸



科別：數學科  
組別：國民小學組

# 研究動機

與同班同學到我家玩桌遊，發現這款與機率有關的欲罷不能，立即展開研究。

# 研究架構與目的

欲罷不能桌遊

原規則

研究一：規則介紹與數學分析

研究二：原規則之探討

研究三：數字n的達成率及機率

研究六：原規則之勝算策略分析

改編版

研究四：點數差與點數積

研究五：n面骰的機率

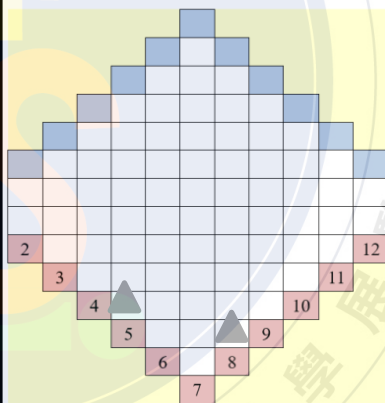
研究七：Scratch版

# 遊戲規則

1 投擲四顆骰子，兩兩配對。



2 將所相對應的交通錐往前進(5跟8)。



\*場上只能有3個臨時交通錐。

3 選擇

繼續擲骰

休息

擲出可往前的數字

擲出不能前進的數

將已前進的交通錐換成自己的顏色

成功

失敗

前進

移除暫時交通錐

結束

回到選擇

下一位玩家

## 研究一：「欲罷不能」桌遊規則與其數學分析。

兩顆骰子點數和為n的組合數有幾種？

| 相加等於 (n) | 2   | 3          | 4                 | 5                        | 6                               | 7                                      | 8                               | 9                        | 10                | 11         | 12  |
|----------|-----|------------|-------------------|--------------------------|---------------------------------|--|---------------------------------|--------------------------|-------------------|------------|-----|
| 類型       | 1+1 | 1+2<br>2+1 | 1+3<br>2+2<br>3+1 | 1+4<br>2+3<br>3+2<br>4+1 | 1+5<br>2+4<br>3+3<br>4+2<br>5+1 | 1+6<br>2+5<br>3+4<br>4+3<br>5+2<br>6+1 | 2+6<br>3+5<br>4+4<br>5+3<br>6+2 | 3+6<br>4+5<br>5+4<br>6+3 | 4+6<br>5+5<br>6+4 | 5+6<br>6+5 | 6+6 |
| 組合數      | 1   | 2          | 3                 | 4                        | 5                               | 6                                      | 5                               | 4                        | 3                 | 2          | 1   |

兩顆骰子點數和為n的機率有多少？

| 骰子相加 (n) | 2 or 12           | 3 or 11           | 4 or 10           | 5 or 9             | 6 or 8             | 7                  |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 組合數      | 1                 | 2                 | 3                 | 4                  | 5                  | 6                  |
| 總組合數     | 36                | 36                | 36                | 36                 | 36                 | 36                 |
| 機率       | 0.0278<br>= 2.78% | 0.0556<br>= 5.56% | 0.0833<br>= 8.33% | 0.1111<br>= 11.11% | 0.1389<br>= 13.89% | 0.1667<br>= 16.67% |

同時擲四顆骰子，出現的點數有多少種可能性？

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296 \text{ 種組合}$$

四顆骰子中若有相同數字(不同組合)，組合數可以怎麼算？

| 分類   | 符號   | 組合數 | 組合數(內容)  |
|------|------|-----|--|
| 四同   | AAAA | 1   | AAAA   |
| 三同一異 | AAAB | 4   | AAAB、AABA、ABAA、BAAA  |
| 兩同兩同 | AABB | 6   | AABB、ABAB、ABBA、BBAA、BABA、BBAA  |
| 兩同兩異 | AABC | 12  | AABC、AACB、ABAC、ABCA、ACAB、ACBA、BAAC、BACA、BCAA、CAAB、CABA、CBAA  |
| 四異   | ABCD | 24  | ABCD、ABDC、ACBD、ACDB、ADBC、ADCB、BACD、BADC、BCAD、BCDA、BDAC、BDCA、CABD、CADB、CBAD、CBDA、CDAB、CDBA、DABC、DACB、DBAC、DBCA、DCAB、DCBA、 |

## 研究二：擲四顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數和為某數的機率(原規則)。

我們使用Excel來計算，可以將數字加總、計算機率(除法)、轉換成百分率...等功能，公式如下。

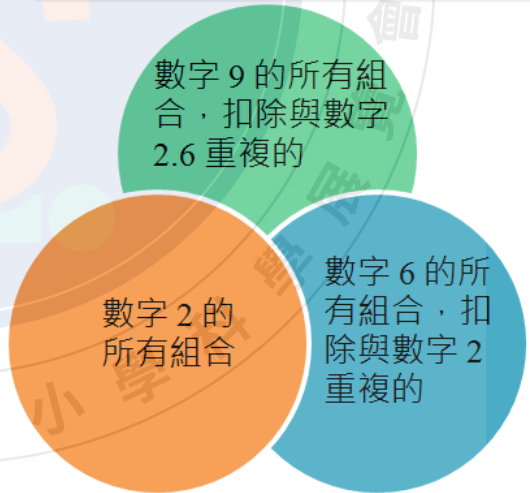
|    |   |  |
|----|---|--|
| 功能 | 數字加總 1                                      | 數字加總 2   |
| 公式 | =SUM(C10:C30)                               | =C66+E66+G66+I66   |
| 說明 | 從 <b>C 列 10 行</b> 到 <b>C 列 30 行</b> 間的數字相加。 | 將 <b>C 列 66 行</b> 、 <b>E 列 66 行</b> 、 <b>G 列 66 行</b> 、 <b>I 列 66 行</b> 等數字相加。 |
| 功能 | 除法(機率)                                      | 轉換成百分率   |
| 公式 | =C30/1296                                   | =TEXT(C30/1,"0.00%")   |
| 說明 | 將 <b>C 列 30 行</b> 的數字除以 1296，即計算機率。         | 將 <b>C 列 30 行</b> 的數字轉換成百分率，並取到小數點後第二位。  |

| 2     | 組合數 | 3    | 組合數 | 4         | 組合數 | 4    | 組合數 |
|-------|-----|------|-----|-----------|-----|------|-----|
| 1111  | 1   | 1211 |     | 1311      |     | 2211 |     |
| 1112  | 4   | 1212 |     | 1312      |     | 2212 |     |
| 1113  | 4   | 1213 |     | 1313      |     | 2213 |     |
| 1114  | 4   | 1214 |     | 1314      |     | 2214 |     |
| 1115  | 4   | 1215 |     | 1315      |     | 2215 |     |
| 1116  | 4   | 1216 |     | 1316      |     | 2216 |     |
| 1122  | 6   | 1222 | 4   | 1322      |     | 2222 | 1   |
| 1123  | 12  | 1223 | 12  | 1323      |     | 2223 | 4   |
| 1124  | 12  | 1224 | 12  | 1324      |     | 2224 | 4   |
| 1125  | 12  | 1225 | 12  | 1325      |     | 2225 | 4   |
| 1126  | 12  | 1226 | 12  | 1326      |     | 2226 | 4   |
| 1133  | 6   | 1233 | 12  | 1333      | 4   | 2233 | 6   |
| 1134  | 12  | 1234 | 24  | 1334      | 12  | 2234 | 12  |
| 1135  | 12  | 1235 | 24  | 1335      | 12  | 2235 | 12  |
| 1136  | 12  | 1236 | 24  | 1336      | 12  | 2236 | 12  |
| 1144  | 6   | 1244 | 12  | 1344      | 12  | 2244 | 6   |
| 1145  | 12  | 1245 | 24  | 1345      | 24  | 2245 | 12  |
| 1146  | 12  | 1246 | 24  | 1346      | 24  | 2246 | 12  |
| 1155  | 6   | 1255 | 12  | 1355      | 12  | 2255 | 6   |
| 1156  | 12  | 1256 | 24  | 1356      | 24  | 2256 | 12  |
| 1166  | 6   | 1266 | 12  | 1366      | 12  | 2266 | 6   |
| 234總和 | 171 |      | 244 |           | 148 |      | 113 |
|       | 676 |      |     | 0.5216049 | 52% |      |     |

# 任意投擲4顆骰子中，任選2顆相加為x或y或z的機率為何？

| x=2  |     | y=6  |     |      |     | z=9  |     |      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 | 可能組合 | 組合數 |
| 1111 | 1   | 1511 | 4   | 2411 | 12  | 3311 | 6   | 3611 | 12  | 4511 | 12  |
| 1112 | 4   | 1512 | 12  | 2412 | 12  | 3312 | 12  | 3612 | 24  | 4512 | 24  |
| 1113 | 4   | 1513 | 12  | 2413 | 24  | 3313 | 4   | 3613 | 12  | 4513 | 24  |
| 1114 | 4   | 1514 | 12  | 2414 | 12  | 3314 | 12  | 3614 | 24  | 4514 | 12  |
| 1115 | 4   | 1515 | 6   | 2415 | 24  | 3315 | 12  | 3615 | 24  | 4515 | 12  |
| 1116 | 4   | 1516 | 12  | 2416 | 24  | 3316 | 12  | 3616 | 12  | 4516 | 24  |
| 1122 | 6   | 1522 | 12  | 2422 | 4   | 3322 | 6   | 3622 | 12  | 4522 | 12  |
| 1123 | 12  | 1523 | 24  | 2423 | 12  | 3323 | 4   | 3623 | 12  | 4523 | 24  |
| 1124 | 12  | 1524 | 24  | 2424 | 6   | 3324 | 12  | 3624 | 24  | 4524 | 12  |
| 1125 | 12  | 1525 | 12  | 2425 | 12  | 3325 | 12  | 3625 | 24  | 4525 | 12  |
| 1126 | 12  | 1526 | 24  | 2426 | 12  | 3326 | 12  | 3626 | 12  | 4526 | 24  |
| 1133 | 6   | 1533 | 12  | 2433 | 12  | 3333 | 1   | 3633 | 4   | 4533 | 12  |
| 1134 | 12  | 1534 | 24  | 2434 | 12  | 3334 | 4   | 3634 | 12  | 4534 | 12  |
| 1135 | 12  | 1535 | 12  | 2435 | 24  | 3335 | 4   | 3635 | 12  | 4535 | 12  |
| 1136 | 12  | 1536 | 24  | 2436 | 24  | 3336 | 4   | 3636 | 6   | 4536 | 24  |
| 1144 | 6   | 1544 | 12  | 2444 | 4   | 3344 | 6   | 3644 | 12  | 4544 | 4   |
| 1145 | 12  | 1545 | 12  | 2445 | 12  | 3345 | 12  | 3645 | 24  | 4545 | 6   |
| 1146 | 12  | 1546 | 24  | 2446 | 12  | 3346 | 12  | 3646 | 12  | 4546 | 12  |
| 1155 | 6   | 1555 | 4   | 2455 | 12  | 3355 | 6   | 3655 | 12  | 4555 | 4   |
| 1156 | 12  | 1556 | 12  | 2456 | 24  | 3356 | 12  | 3656 | 12  | 4556 | 12  |
| 1166 | 6   | 1566 | 12  | 2466 | 12  | 3366 | 6   | 3666 | 4   | 4566 | 12  |
| 171  |     | 244  |     | 266  |     | 141  |     | 184  |     | 74   |     |

- ✓ 因篇幅關係，我們直接從x或y或z的機率開始說明。
- ✓ 以2或6或9的做舉例，如右表紅字處，表示相加為2或6或9，再配上兩個其他數字即可代表骰子擲出來的數字，並算出該組合的組合數。
- ✓ 最後算出2.6.9的機率。



- ✓ 2.6.9總和 1080組
- ✓ 2.6.9機率 83.33%

其他組合的機率也可以用此方法算出。



## 技巧 省略表

| $x$  | 2or12  | 3 or 11 | 4 or 10 | 5 or 9 | 6 or 8 | 7      |
|------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 組合數  | 171    | 302     | 461     | 580    | 727    | 834    |
| 總組合數 | 1296   | 1296    | 1296    | 1296   | 1296   | 1296   |
| 機率   | 13.19% | 23.3%   | 35.57%  | 44.75% | 56.1%  | 64.35% |

我們發現，有些數字的機率一樣，如上表。我們推論，2.6.9的機率會與5.8.12相同，驗證後證實，我們做了以下省略表，將重複的組合省略（紅字）。

|                |                |               |
|----------------|----------------|---------------|
| 2.3.4 10.11.12 | 2.4.7 7.10.12  | 2.5.11 3.9.12 |
| 2.3.5 9.11.12  | 2.4.8 6.10.12  | 2.5.12 2.9.12 |
| 2.3.6 8.11.12  | 2.4.9 5.10.12  | 2.6.7 7.8.12  |
| 2.3.7 7.11.12  | 2.4.10 4.10.12 | 2.6.8 6.8.12  |
| 2.3.8 6.11.12  | 2.4.11 3.10.12 | 2.6.9 5.8.12  |
| 2.3.9 5.11.12  | 2.4.12 2.10.12 | 2.6.10 4.8.12 |
| 2.3.10 4.11.12 | 2.5.6 8.9.12   | 2.6.11 3.8.12 |
| 2.3.11 3.11.12 | 2.5.7 7.9.12   | 2.6.12 2.8.12 |
| 2.3.12 2.11.12 | 2.5.8 6.9.12   | 2.7.8 6.7.12  |
| 2.4.5 9.10.12  | 2.5.9 5.9.12   | 2.7.9 5.7.12  |
| 2.4.6 8.10.12  | 2.5.10 4.9.12  | 2.7.10 4.7.12 |

結果 計算擲出組合有 $x$ 或 $y$ 或 $z$ 數字的機率，如下表。

| $x$ 或 $y$ 或 $z$ | 機率     | $x$ 或 $y$ 或 $z$ | 機率     |
|-----------------|--------|-----------------|--------|
| 2.3.4           | 52.16% | 2.4.10          | 79.24% |
| 2.3.5           | 58.41% | 2.4.11          | 63.43% |
| 2.3.6           | 68.36% | 2.4.12          | 55.17% |
| 2.3.7           | 75.23% | 2.5.6           | 77.01% |
| 2.3.8           | 72.07% | 2.5.7           | 80.94% |
| 2.3.9           | 71.22% | 2.5.8           | 82.87% |
| 2.3.10          | 63.43% | 2.5.9           | 76.00% |
| 2.3.11          | 52.55% | 2.5.10          | 75.62% |
| 2.3.12          | 43.83% | 2.5.11          | 72.15% |
| 2.4.5           | 73.46% | 2.5.12          | 63.43% |
| 2.4.6           | 75.85% | 2.6.7           | 86.42% |
| 2.4.7           | 80.71% | 2.6.8           | 88.35% |
| 2.4.8           | 81.56% | 2.6.9           | 83.33% |
| 2.4.9           | 75.62% | 2.6.10          | 83.10% |

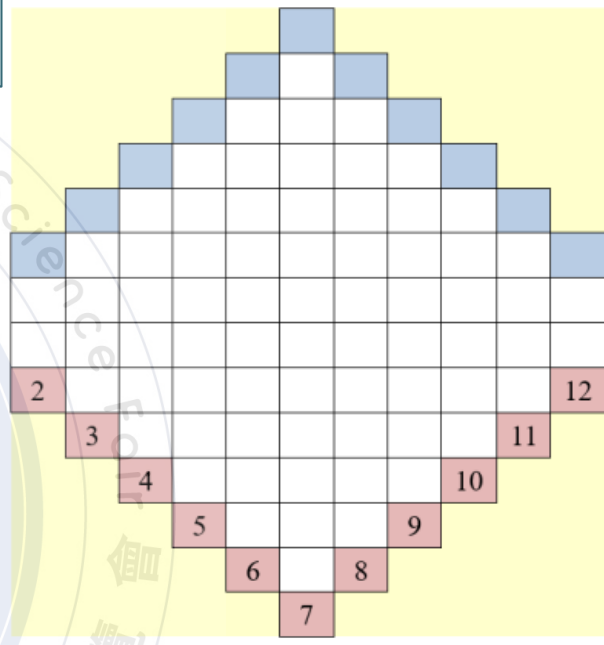
因篇幅關係，表格皆部分省略。

### 研究三：「欲罷不能」中，數字n的達成率及機率。

每個數字從起點到終點的格子數不同，如右圖，像是數字2只要3次，但數字7則需要13次，我們要計算投擲幾次可以過關。

以2為例，2需要3格才可以抵達終點，大約要擲骰子 $300/13.19 \div 22.7$ 次才可以到終點，其餘數字以此類推，如下表。

全部都在20次上下，差距不大。



| $n$  | 2 or 12 | 3 or 11 | 4 or 10 | 5 or 9 | 6 or 8 | 7      |
|------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 機率   | 13.19%  | 23.3%   | 35.57%  | 44.75% | 56.1%  | 64.35% |
| 格子數  | 3       | 5       | 7       | 9      | 11     | 13     |
| 投擲次數 | 22.7    | 21.5    | 19.7    | 20.11  | 19.6   | 20.2   |



## 研究四：擲數顆骰子出現的點數中，可選出兩個點數「差」或兩個點數「積」。

以點數差為例：

規則調整：

- (1) 只有3顆骰子
- (2) 要大減小
- (3) 只有2個暫時交通錐

| 點數差 | 組合類型                                       | 共有幾種組合 |
|-----|--|--------|
| 0   | 1-1、2-2、3-3、4-4、5-5、6-6                    | 6      |
| 1   | 1-2、2-1、2-3、3-2、3-4、4-3<br>4-5、5-4、5-6、6-5 | 10     |
| 2   | 1-3、3-1、2-4、4-2、<br>3-5、5-3、4-6、6-4        | 8      |
| 3   | 1-4、4-1、2-5、5-2、3-6、6-3                    | 6      |
| 4   | 1-5、5-1、2-6、6-2                            | 4      |
| 5   | 6-1、1-6                                    | 2      |

| 差等於2 |     |     |     |     |    |     |    |
|------|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|
| 131  | 3   | 241 | 6   | 351 |    | 461 | 6  |
| 132  | 6   | 242 | 3   | 352 | 6  | 462 |    |
| 133  | 3   | 243 | 6   | 353 | 3  | 463 | 6  |
| 134  | 6   | 244 | 3   | 354 | 6  | 464 | 3  |
| 135  | 6   | 245 | 6   | 355 | 3  | 465 | 6  |
| 136  | 6   | 246 | 6   | 356 | 6  | 466 | 3  |
|      | 30  |     | 30  |     | 24 |     | 24 |
| 組合數  | 108 | 機率  | 0.5 | 50% |    |     |    |

| x 或 y | 機率     | x 或 y | 機率     | x 或 y | 機率     |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 0or1  | 89.89% | 1or2  | 80.56% | 2or4  | 72.22% |
| 0or2  | 83.33% | 1or3  | 75.00% | 2or5  | 58.33% |
| 0or3  | 77.78% | 1or4  | 69.44% | 3or4  | 58.33% |
| 0or4  | 66.67% | 1or5  | 66.67% | 3or5  | 50.00% |
| 0or5  | 55.56% | 2or3  | 72.22% | 4or5  | 36.11% |

## 研究五：增加骰子數字大小，計算n面骰的機率。

八面骰為例

| $x$   | 2 or 16 | 3 or 15 | 4 or 14 | 5 or 13 | 6 or 12 | 7 or 11 | 8 or 10 | 9     |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 組合數   | 323     | 590     | 901     | 1156    | 1467    | 1698    | 1985    | 2216  |
| 機率    | 7.89%   | 14.4%   | 22%     | 28.22%  | 35.83%  | 41.46%  | 48.46%  | 54.1% |
| 乘以 20 | 157.8%  | 288%    | 440%    | 564.4%  | 716.6%  | 829.2%  | 969.2%  | 1082% |
| 格子數   | 2       | 3       | 4       | 6       | 7       | 8       | 10      | 11    |

三種版本整理

| 版本  | 計算類型 | 總組合數 | 格子數  | 暫時交通錐數 | 難度 |
|-----|------|------|------|--------|----|
| 六面骰 | 相加   | 1296 | 3~13 | 3      | 中  |
| 七面骰 | 相加   | 2401 | 2~12 | 3      | 中  |
| 八面骰 | 相加   | 4096 | 2~11 | 3      | 中  |

也可延伸至九面骰、十面骰子

## 研究六：原規則之勝算策略分析。

策略一：擲出哪些數字的機率是屬於容易達成的？

從機率表知道，其中兩個數字為5~9的這些的組合，機率都會達成70%，因此我們認為三個白色暫時交通錐中，應該至少要有**兩個是介於數字5~9**。

策略二：遇到機率多少組合，可以繼續往下投擲骰子？

- ✓ 80%~90%的組數最多
- ✓ 80%以上的「x或y或z」組合，都會有2個容易達成的數字(5~9)，因此建議**80%以上的組合**，更可以嘗試看看。

策略三：那我們應該投擲幾次呢？成功幾次才收手？

- ✓  $(90\%)^8 = 43\%$  可挑戰8次
- ✓  $(80\%)^4 = 40.96\%$  可挑戰4次
- ✓ 機率低於80%，機率較小，我們建議可以拚2次就好。

策略四：擲到2或12的時候，要不要選擇放暫時交通錐？

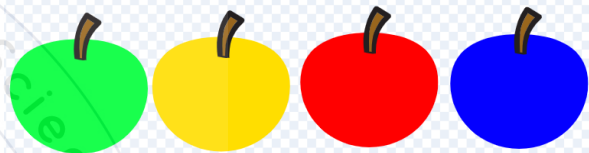
- ✓ 原因一：**可放**，因為擲出2或12的，就已完成三分之一了。
- ✓ 原因二：若一個2或12，搭配5~9，機率還是有80%以上。

# 研究七：運用上述研究資料，設計Scratch版的「欲罷不能」桌遊。

## 步驟拆解

1 投擲骰子階段。

設計「數字1~6骰子造型」。  
設計「隨機投擲1~6骰子的公式」。

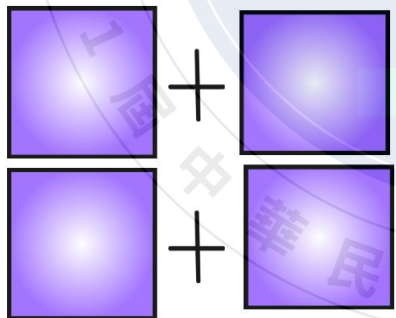
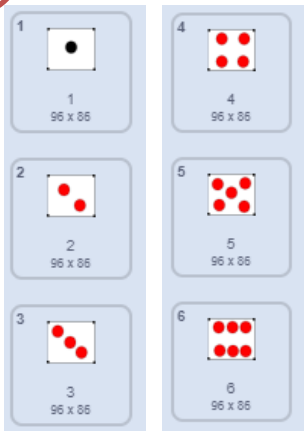


2 將投擲後的骰子相加。

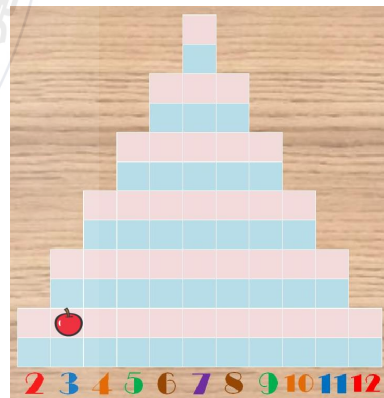
設計「4個框框」，設定「骰子放進去則相加」的公式。  
設計「2個人物」，設定「說出相加後的數字」的公式。

3 旗幟依照相對應的數字往前進。

設計「底圖」，設定「座標」，確認正確位置。  
設計「蘋果」，設定「依數字往前走」的公式。



2個骰子加起來是7



## 討論

- 一. 骰子的數量為何為4顆？
- 二. 暫時交通錐的數量為何為3個？
- 三. 綜觀以上兩點討論
- 四. 為什麼數字2只要3格就可以過關，數字7卻要13格？這樣公平嗎？

## 未來展望

欲罷不能還有很多不同面向的發展，像是增加骰子數、增加骰子的面數、交通錐的數量、格子數的設定方式...等。我們希望未來可以將這些面向做整理，做出更有架構、系統性的研究。

## 結論

- 一. 兩顆骰子和為 $n$ 的機率在2%~16%間，以7的機率最高，2或12的機率最低。
- 二. 原規則，任意投擲4顆骰子中，任選2顆相加為 $x$ 或 $y$ 或 $z$ 的機率約介在43%~91%，以6.7.8為最高，2.3.4及10.11.12最低。
- 三. 我們發現雖然7的機率最高，但若加上遊戲本身設定的方格數來闖關，所有的數字機率都差不多，約投擲20次骰子即可過關。
- 四. 我們也將遊戲做兩種延伸，增加遊戲樂趣，也調整遊戲的難易度，如下：
  1. 改成骰子差跟骰子積的方式，數據結果在研究四之（三）的整理表格。
  2. 增加七面骰與八面骰的研究，數計結果在研究五之（三）的整理表格。
- 五. 進行策略分析，依據情況擬出該前進該停手的策略。
- 六. 設計Scratch版的「欲罷不能」桌遊，用電腦軟體也可以進行遊戲。