中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080407

從巧拼問題探究 L 型與 I 型、田型的覆蓋填滿之解析

學校名稱：桃園市桃園區北門國民小學

作者：	指導老師：
小六 魏伯沅	林樂酈
小六 葉晨熹	陳麗珠

關鍵詞：L 型(虧格)、二元一次方程式、數學歸納法

摘　　要

此作品研究是「將問題先轉換成二元一次方程式的解(其中二元一次式為 3x+4y)，再者，透過推導過程研發找到『間隔標記點數模式』方法，能快速且無遺漏的畫出，判斷能否將圖形覆蓋填滿；更進一步延伸到 N×N 方陣或$M' \times N'$矩形，只有總格數為 3 的倍數，可完全被 L 型填滿，若一定都要用到 I 型或田型，則分別最少需 3 塊；當總格數為非 3 的倍數，則 I 型或田型分別最少為 1 塊或 2 塊，需視總格數推知。對 I 型與田型拼片數同但結構不同，部分巧拼是無法填滿，經總格數切割成小方陣或小矩形的組合，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。最後，以程式 C#寫出執行操作的友善介面，進行驗證其規律與異同點。

壹、研究動機

學期初時，在數學研究社團的時間，老師們鼓勵我們多做數學方面的課外閱讀，其中「奇數和偶數」(九)與「看圖學數理」(十)兩本數學叢書有一些耐人尋味的數學題目，尤其對 L 型(虧格)覆蓋填滿問題，開始有興趣去探討，接著引發我們搜尋相關問題，而在科學研習月刊上，我們看到游森棚教授提出的巧拼問題。

題目的敘述為：「小誼手上有兩種拼片，一種是由三個 1×1 的單位正方形所形成的 L 型拼片，另外一種是 2×2 的正方形拼片，兩種拼片的數量都很多，他想用這兩種拼片去拼一個 7×9 的長方形，能不能只用 L 型拼片拼成功？如果一定要用到 2×2 的拼片，則 2×2 的拼片需要用到幾塊？如果想拼的大矩形換成是 9×9，則結果會是如何呢？」

我們試著推導題目的問題，找出問題的答案，發現果然最後與相關的 L 型(虧格)問題有關。更進一步開始讓我們思考，為何只用到 L 型拼片就能成功？是否在任意邊長組合的長方形或任意邊長的正方形，都只需用到 L 型拼片就能成功？如果一定要用到 2×2 的 4 個拼片所組合的田型，則需要什麼條件下，才可以覆蓋填滿圖形？若由同樣四個拼片組合為 1×4 的 I 型，則需要什麼條件下，才可以覆蓋填滿圖形？針對 L 型(虧格)問題覆蓋填圖的規則相同，但是在進行推導驗證時，雖然都是四個拼片所組合，但 I 型與田型結構不同，而使我們對 L 型與 I 型、L 型與田型這兩類組合的益智巧拼問題，其規律與異同點感到好奇，為了能尋求這些問題的解決，我們著手了這一次的探究。

貳、研究目的

一種由三個 1x1 的單位正方形所形成的 L 型拼片，而另外分別有一種是 1x4 的長方形拼片(I 型)及 2x2 的正方形拼片(田型)，三種拼片的數量都很多，我們想用這三種拼片分別去拼 L 型與 I 型、L 型與田型這兩類組合的巧拼問題，試著將 $M^{'} \times N^{'}$ 及 N×N 的格子覆蓋填滿。

一、$M^{'} \times N^{'}$ 的長方形(矩形)格子覆蓋情形：

1. 能否只用 L 型拼片拼成功？當長方形的格子被覆蓋填滿時，需滿足在什麼條件下？
2. 如果一定要用到 1x4 的拼片(I 型)，則 1x4 的拼片需要用到幾塊？如果一定要用到 2x2 的拼片(田型)，則 2x2 的拼片需要用到幾塊？
3. 如果想拼的大矩形換成是 7x9，甚至延伸到 $M^{'} \times N^{'}$ ，則結果會是如何呢？

二、N×N 的正方形(方陣)格子覆蓋情形：

1. 能否只用 L 型拼片拼成功？當正方形的格子被覆蓋填滿時，需滿足在什麼條件下？
2. 如果一定要用到 1x4 的拼片(I 型)，則 1x4 的拼片需要用到幾塊？如果一定要用到 2x2 的拼片(田型)，則 2x2 的拼片需要用到幾塊？
3. 如果想拼的大矩形換成是 9x9，甚至延伸到 N×N，則結果會是如何呢？

三、試著將 L 型與 I 型、L 型與田型這兩類組合的巧拼問題，轉換成二元一次方程式求解，並找到一個方法【間隔標記點數模式】，能快速且無遺漏的畫出能否將圖形覆蓋填滿。

四、對 I 型與田型，雖然都是四個拼片所組合，但兩者結構不同，透過「間隔標記點數模式」，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。

五、利用程式 C#動態語言寫出執行，並以圖形使用者介面（Graphical User Interface，簡稱 GUI）予以呈現，進行驗證其規律與異同點。

參、研究設備及器材

一、方格紙、科學筆記本、鉛筆、彩虹色筆、直尺

二、彩色塑膠拼片、塑膠格子拼盤

三、電腦、自備隨身碟

四、Unity 合法免費授權軟體

肆、文獻探討

做本研究之前，我們曾就先前閱讀討論過 L 型(虧格)相關問題的參考文獻，將一些別人

不同文獻資料的比較整理如下：

參賽名稱	屆數	組別	作品名稱	數學研究方法	得獎情形
全國科展	28	國中組	虧格	奇數和偶數、3 的倍數、數學歸納法	第三名
全國科展	39	國小組	擋不住的誘惑-L 形	奇數和偶數、3 的倍數、8 的倍數	第一名
全國科展	50	國中組	虧格與方陣的對話	奇數和偶數、m×m-1 $(m\epsilon n, m>1)$方陣	
全國科展	52	國中組	任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	塗色法、3 的倍數、數學歸納法、對稱性	第三名
旺宏科學獎	14	高中組	鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	奇數和偶數、質數與合數、同餘式(mod)	金獎
全國科展	57	國中組	虧格與方陣的最後一塊拼圖	奇數和偶數、6 的倍數、枚舉法、對稱性	

L 型(虧格)是指四個正方形格子少一格，呈現其虧格狀態。由它來覆蓋填滿長方形(矩形)或正方形，在歷屆科展已經有一些相關作品，我們再分成以下幾個類型來說明：

作品名稱	分類	圖形邊長
虧格	虧格填滿正方形劃掉一格或長方形劃掉一格	$(3k+1)(3t+1), k$、$t \geq 1$ 或$(3k+2)(3t+2), k$、$t \geq 2$，以上 k、t 皆為正整數
擋不住的誘惑-L 形	虧格剛好填滿正方形或長方形	(3m)×n，m、$n \geq 1$ ，m、n 皆為正整數
虧格與方陣的對話	虧格填滿正方形劃掉一格	n×n $-$ 1，n≥ 2的正整數
任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	以 L-形三階多米諾骨牌(tromino)填任意矩形及矩形中任意移除一格或兩格小正方形	任意矩形R(m, n), m、$n \geq 0$
鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	方陣邊長和長條之間的關係，和其虧格位置的問題。	在 M×M 方陣邊長中，找出對 1×N 長條或N'×N長方形的實際虧格位置(x,y)
虧格與方陣的最後一塊拼圖	虧格填滿長方形劃掉一格及劃掉二格。	$(3k+1)(3t+1), k$、$t \geq 1$ 或$(3k+2)(3t+2), k$、$t \geq 2$，及$(3k+1)(3t+2), k$、$t \geq 1$，以上 k、t 皆為正整數。

上述五件全國科展參考文獻主要都是著墨在探討 L 型(虧格)問題，包含在正方形或長方形的覆蓋填滿，還有在正方形任意處缺一格或長方形任意處缺一格或缺兩格的覆蓋填滿，與其邊長之關係，討論各種不能被填滿的情況並全部列出；而旺宏科學獎參考文獻，則討論當填入長條時，是否會出現虧格及其虧格位置(x,y)的問題，進而探討方陣邊長和長條之間關係。

因此，在第 61 屆我們的作品主要在探究 L 型與 I 型、L 型與田型的覆蓋填滿之解析，其中有許多令人好奇的點，透過不同思維想法與方式，我們將長方形(矩形)方格及正方形(方陣)方格分別延伸到邊長為 $M' \times N'$ 及邊長為 N×N，將這兩類組合的巧拼問題，轉換成二元一次方程式求解，雖然 I 型與田型都是四個拼片所組合，但兩者結構不同，透過**我們所研發找到的「間隔標記點數模式」方法，能快速且無遺漏的畫出是否可將圖形覆蓋填滿，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。最後，利用程式 C#動態語言寫出執行，並以圖形使用者介面予以呈現，進行驗證其規律與異同點。作品焦點放在判斷能不能拼出覆蓋填滿圖形，並歸納出一般的規律，可以直接判斷是否可被填滿，就我們所研究的作品與上述參考文獻有著極大不同的探討方向，也是歷屆作品所沒有做過的。**故我們以此作為主題，做更為深入且一般性的探究，期盼研究性價值在題材創新度及作品內容能有提升的空間，讓結果更加廣義且完備，做以下一系列的探討及研究。

伍、研究過程及方法

研究期間，分成了不少階段，也有不同的突破，下表是我們研究進度概要：

時間	進　　展
109.09	1. 閱讀「奇數和偶數」(九)與「看圖學數理」(十)兩本數學叢書，並討論分享其內容。 2. 老師們帶領我們實作「七巧板大拼排」(十一)的活動。
109.10	1. 探討在各種矩形方格上，用 L 形方格填滿之情形，開始研究「擋不住的誘惑-L 形」(五) 2. 探究從正方形及長方形，其中任意處缺一格，可用 L 形方格填滿的情形，著手研究「虧格」(六)
109.11	1. 嘗試方陣劃掉一格，可被 L 形填滿的情形，開始研究「虧格與方陣的對話」(四) 2. 嘗試長方形劃掉一格，可被 L 形填滿的情形，著手研究「虧格與方陣的最後一塊拼圖」(二)
109.12 110.01	1. 發現科學研習月刊中的「森棚教官的數學題-巧拼」(一)，進而著手探究相關問題。 2. 發掘 L 形與2×2的正方形(田型)間的關係及 L 形與1×4的長方形(I 型)間的關係，並開始研究「鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係」(八)
110.02 110.03	1. 試驗從拼 4×5的長方形(矩形)到 7×9的矩形再推廣到拼$M' \times N'$的矩形，與拼 4×4的正方形(方陣)到 9×9的方陣再推廣到拼$N \times N$的方陣，並觀察其中的規律，我們先導出可將方陣圖形覆蓋填滿的一般式並驗證之。 2. 發掘以 L-形三階多米諾骨牌(tromino)填任意矩形及矩形中任意移除一格或兩格小正方形間的關係，並開始研究「任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題」(三)
110.04 110.05	1.請老師指導我們，學習寫出程式 C#動態語言並執行，進而能以使用者操作的友善介面呈現。 2. 驗證各組數據所產生的整數解，是否都符合可以覆蓋填滿圖形。
110.05 110.06	1. 再次試驗從拼小矩形再推廣到拼$M' \times N'$的矩形，並觀察其中的規律，同時亦導出可將矩形圖形覆蓋填滿的一般式並驗證之。 2. 以數學歸納法推導證明任意方陣圖形切割的一般式與任意矩形圖形切割的一般式都是成立的。

一、名詞定義：

1. **L 字型方塊的定義：**是指由三個邊長 1×1 的單位正方形，亦即**四個正方形格子少一格**，所形成的 L 型拼片，又稱**虧格**。
2. **I 字型方塊的定義：**是指由**邊長 1×4 的單位**組成長方形拼片。
3. **田字型方塊的定義：**是指由**邊長 2×2 的單位**組成正方形拼片。

   上述三種字型方塊，所使用的拼片可任意旋轉使用，但彼此不重疊。

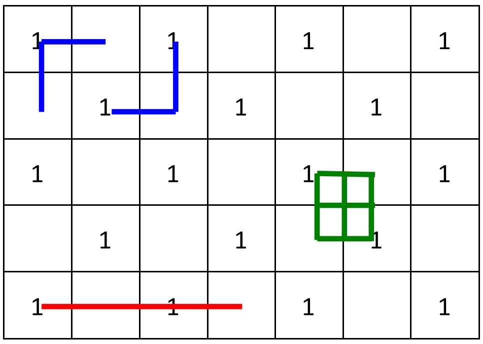
4. **矩形格子：**邊長為 $M' \times N'$ 的單位組成**長方形格子**。
5. **方陣格子：**邊長為 N×N 的單位組成**正方形格子**。
6. **間隔標記點數模式：**對於任何字型方塊，將其任意旋轉擺放使用，但彼此不重疊，**累計所有可能蓋到的數字相加總合**。(如下圖範例)

(1) **L 字型方塊：**對於**每個 L 字型**所有可能蓋到的數字相加總合，

可分成佔 1 點及佔 2 點的。

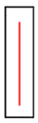
(2) **I 字型方塊：**對於**每個 I 字型**所有可能蓋到的數字相加總合皆是佔 2 點的。

(3) **田字型方塊：**對於**每個田字型**所有可能蓋到的數字相加總合皆是佔 2 點的。



二、從小長方形方格表延伸到邊長為 $M' \times N'$ 單位所組成的長方形(矩形)格子覆蓋填滿情形：

用 3 方格構成的「L 字型方塊」搭配用 4 方格構成的「I 字型方塊」或搭配用 4 方格構成的「田字型方塊」去覆蓋填滿圖形，方塊可任意旋轉使用，但彼此不重疊。若用了 x 個「L 字型方塊」和 y 個「I 字型方塊」，與另一種情況用了 x 個「L 字型方塊」和 y 個「田字型方塊」，恰可將矩形方格表覆蓋填滿(沒有隙縫)，試求所有滿足的數對 (x,y)。

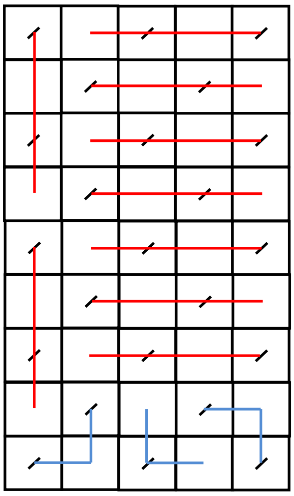
(一) *L* 型與 *I* 型的巧拼:　*L* 型：表示有 *x* 個 ()　　*I* 型：表示有 *y* 個 ()

1. $3x+4y=45\ (=9\times 5)$

x	1	3	5	7	11	15
y	╳	9	╳	6	3	0

共 4 組

(1)(3，9) V 合理



$23-2\times 9=23-18=5$

L 型可能蓋到為

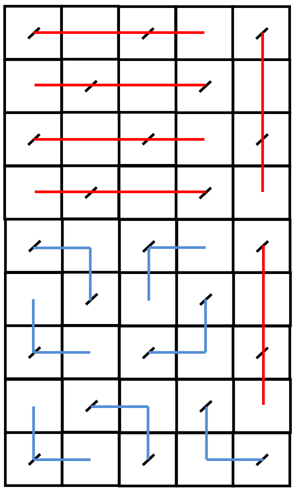
佔點數　　個數

1　×　1　=　1

>5

2　×　2　=　4

(2)(7，6) V 合理



$23-2\times 6=23-12=11$

L 型可能蓋到為

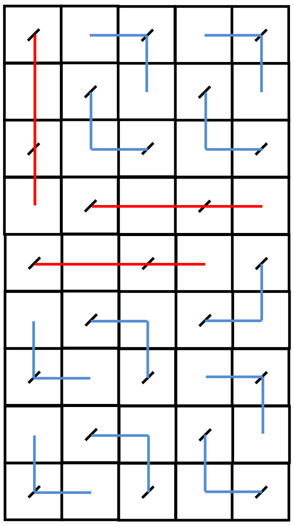
佔點數　　個數

1　×　3　=　3

>11

2　×　4　=　8

(3)(11，3) V 合理



$23-2\times 3=23-6=17$

L 型可能蓋到為

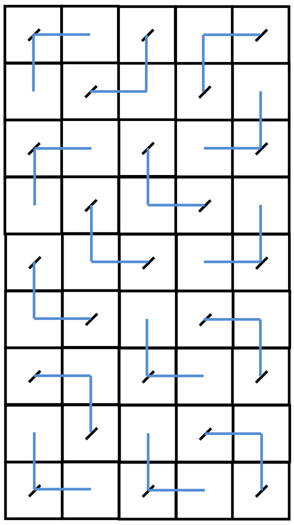
佔點數　　個數

1　×　5　=　5

>17

2　×　6　=　12

(4)(15，0) V 合理



$23-2\times 0=23-0=23$

L 型可能蓋到為

佔點數　　個數

1　×　7　=　7

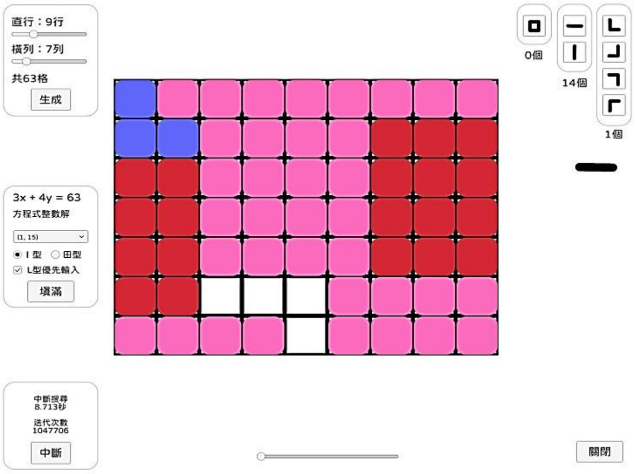
>23

2　×　8　=　16

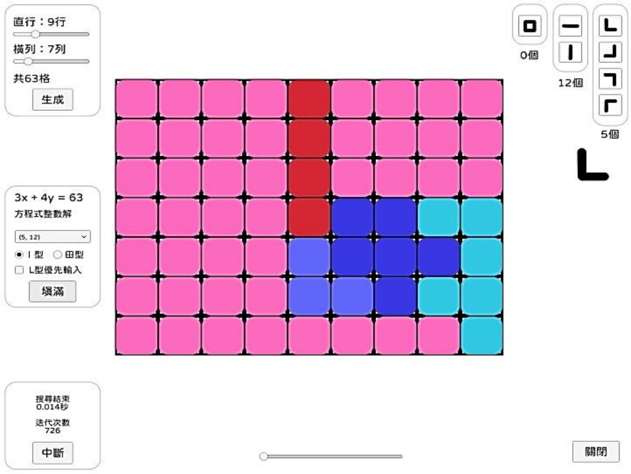
2. $3x+4y=63\ (=7\times 9)$

x	1	5	9	13	17	21
y	15	12	9	6	3	0

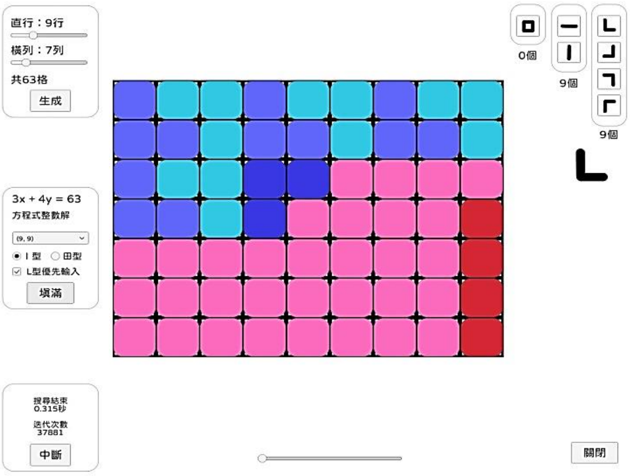
共 6 組



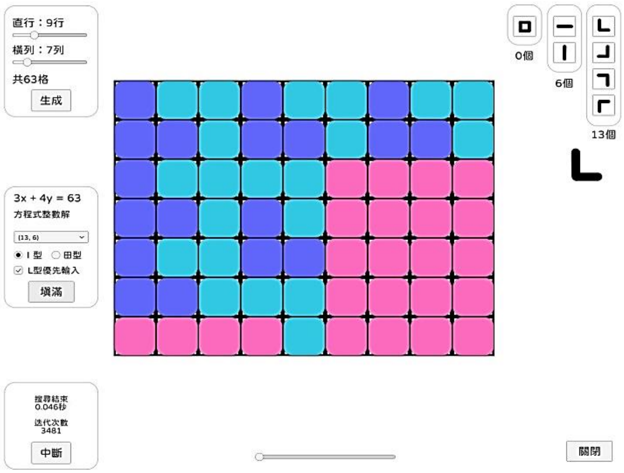
(1，15)_無解



(5，12)



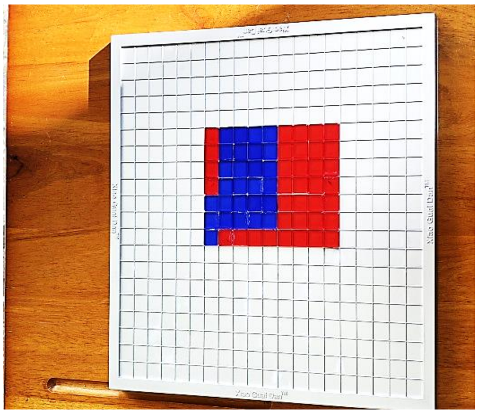
(9，9)



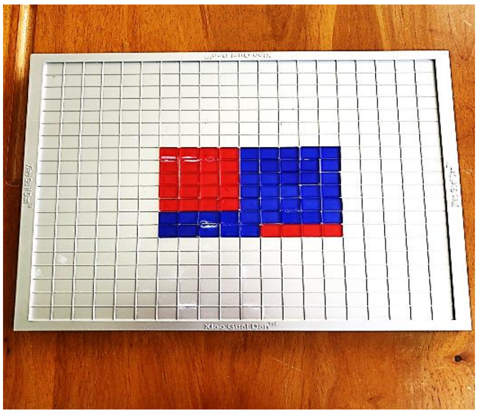
(13，6)

上面四張圖片是由程式執行的結果，除了(1,15)是無解之外，其餘的因為可以被 L 型與 I 型組合覆蓋填滿 7x9 格子，故**有(5,12),(9,9),(13,6),(17,3),(21,0)這 5 組合理。**

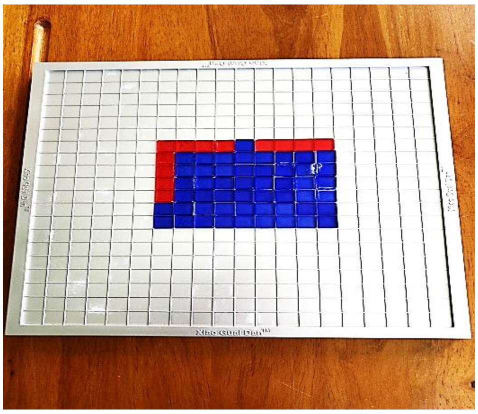
而下面三張圖片，則是在塑膠格子拼盤上，實際拼排出 $3x+4y=63\ (=7\times 9)$ 解的圖示：



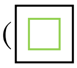
(9，9)



(13，6)



(17，3)

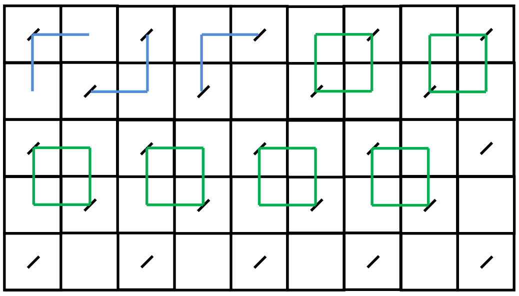
(二) L 型與田型的巧拼： L 型：表示有 x 個 ()　　田型：表示有 y 個 ()

1. $3x+4y=45\ (=5\times 9)$

x	1	2	3	4	5	6	7	11	15
y	╳	╳	9	╳	╳	╳	6	3	0

共 4 組

(1)(3，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{9}}}$) ╳不合



$23-2\times 9=23-18=5$

L 型可能蓋到為

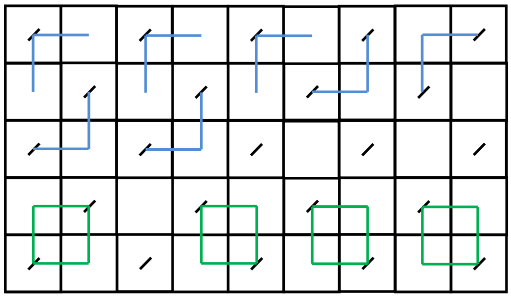
佔點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}} = 1$

> 5

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} = 4$

(2)(7，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{6}}}$) ╳不合



$23-2\times 6=23-12=11$

L 型可能蓋到為

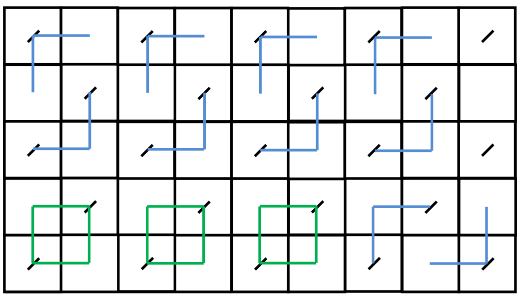
佔點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{3}}} = 3$

> 11

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}} = 8$

(3)(11，$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{3}}}$) ╳不合



$23-2\times 3=23-6=17$

L 型可能蓋到為

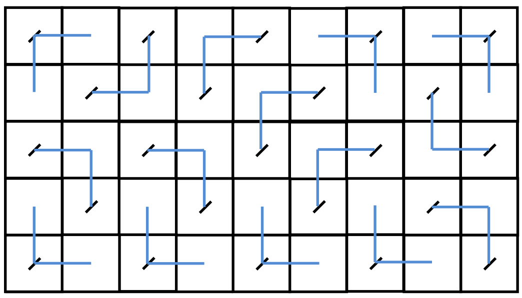
佔點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{5}}} = 5$

> 17

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{6}}} = 12$

(4)(15，0) V 合理



$23-2\times 0=23-0=23$

L 型可能蓋到為

佔點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{7}}} = 7$

> 23

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{8}}} = 16$

由上(1)~(3): L 型佔點數為 2 或田型的組合未達到需要個數，因此無法覆蓋填滿

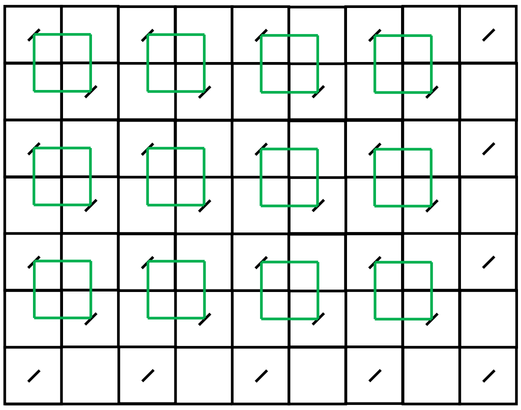
由於是被完全只有 L 型覆蓋填滿 5×9 矩形格子，故只有 (15,0)這 1 組合理。

$3x+4y=63\ (=7\times 9)$

x	1	2	3	4	5	9	13	17	21
y	15	╳	╳	╳	12	9	6	3	0

共 6 組

(1)(1，$\underline{\underline{15}}$) ╳不合
未達到



$32-2\times 15=32-30=2$

L 型可能蓋到為

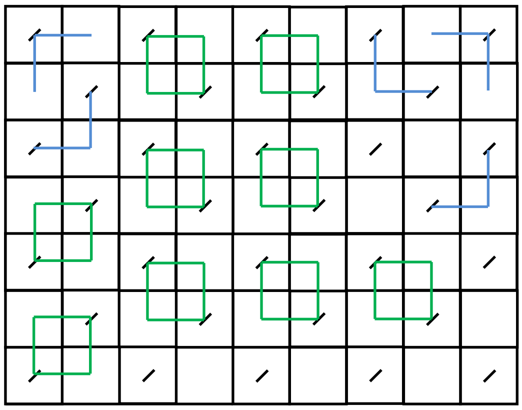
佔點數　　個數

$1 \times 0 = 0$

> 2

$2 \times \underline{\underline{1}} = 2$
未達到

(2)(5，$\underline{\underline{12}}$) ╳不合
未達到



$32-2\times 12=32-24=8$

L 型可能蓋到為

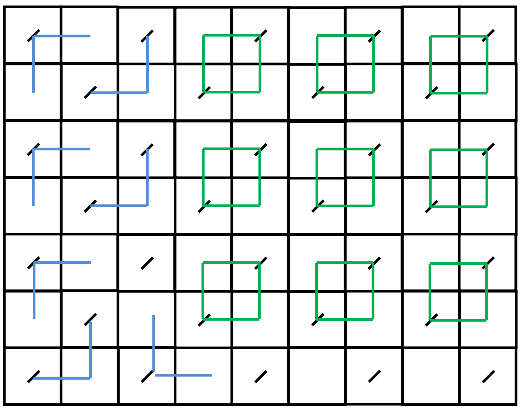
佔點數　　個數

$1 \times \underline{\underline{2}} = 2$
達到

> 8

$2 \times \underline{\underline{3}} = 6$
達到

(3)(9，$\underline{\underline{9}}$) ╳不合
達到



$32-2\times 9=32-18=14$

L 型可能蓋到為

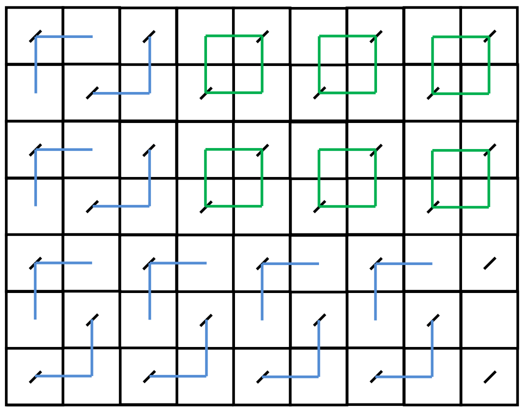
佔點數　　個數

$1 \times \underline{\underline{4}} = 4$
達到

> 14

$2 \times \underline{\underline{5}} = 10$
未達到

(4)(13，$\underline{\underline{6}}$) ╳不合
達到



$32-2\times 6=32-12=20$

L 型可能蓋到為

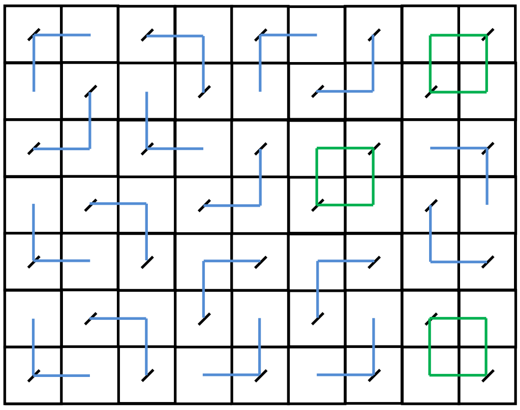
佔點數　　個數

$1 \times \underline{\underline{6}} = 6$
達到

> 20

$2 \times \underline{\underline{7}} = 14$
未達到

(5)(17，3) V 合理

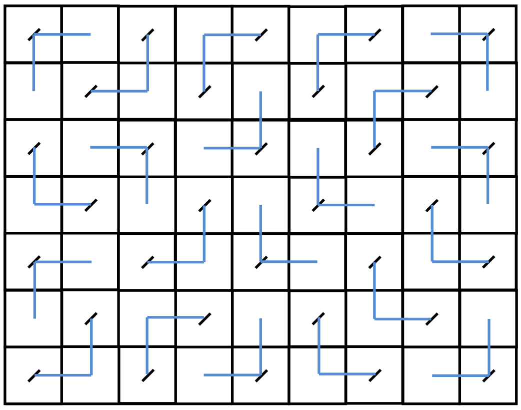


$32-2\times3=32-6=26$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	8	=	8	>26
2	×	9	=	18	

(6)(21，0) V 合理



$32-2\times0=32-0=32$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	10	=	10	>32
2	×	11	=	22	

由上(1)~(4): L 型佔點數為 1 或佔點數為 2 及田型的組合未達到需要個數

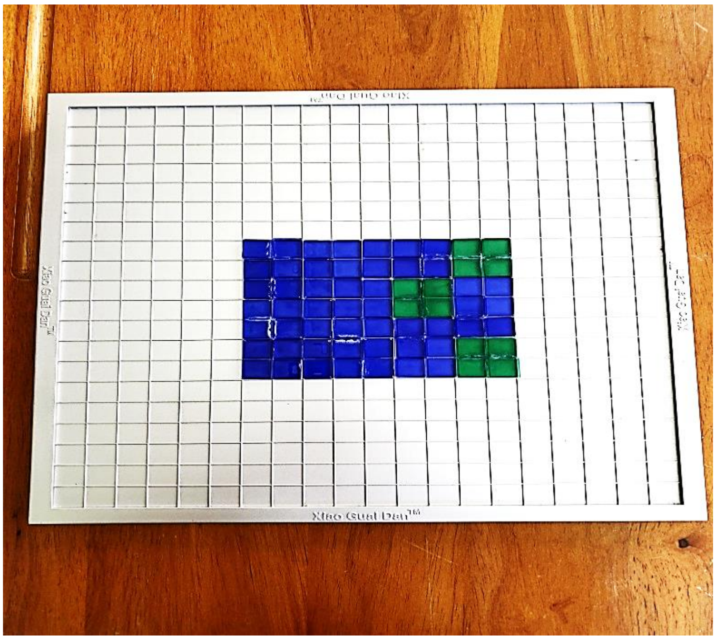
∵無法被 L 型與田型組合覆蓋填滿 7x9 矩形格子　　　∴上述這 4 組都不合理

只有 (17,3),(21,0)這 2 組合理，其中(17,3)可被 L 型與田型組合覆蓋填滿 7x9 矩形格子，而(21,0)則被完全只有 L 型覆蓋填滿 7x9 矩形格子。

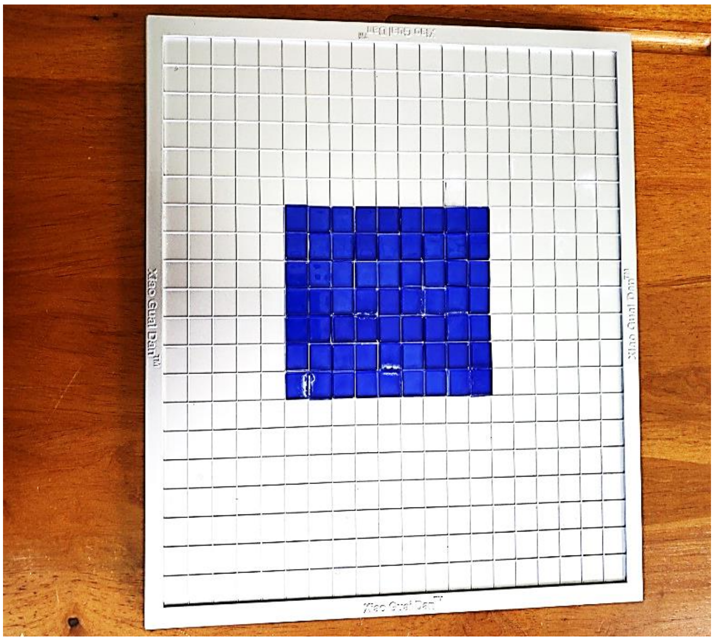
由「間隔標記點數模式」方法，得知可快速檢驗 L 型與田型個數是否分別都達到需求。

反之，矩形格子若被覆蓋填滿，亦可檢驗 L 型與田型是否符合應有的需求個數。

下面兩張圖片，是我們在塑膠格子拼盤上，實際拼排出 $3x+4y=63$ $(=7\times9)$ 解的圖示:



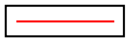
(17，3)



(21，0)

三、從小正方形方格表延伸到邊長為 N×N 單位所組成的正方形(方陣)格子覆蓋填滿情形：

用 3 方格構成的「L 字型方塊」搭配用 4 方格構成的「I 字型方塊」或搭配用 4 方格構成的「田字型方塊」去覆蓋填滿圖形，方塊可任意旋轉使用，但彼此不重疊。若用了 x 個「L 字型方塊」和 y 個「I 字型方塊」，與另一種情況用了 x 個「L 字型方塊」和 y 個「田字型方塊」，恰可將方陣方格表覆蓋填滿(沒有隙縫)，試求所有滿足的數對(x,y)。

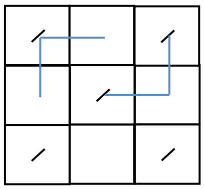
(一) *L* 型與 *I* 型的巧拼: *L* 型：表示有 *x* 個 () *I* 型：表示有 *y* 個 ()

1. $3x+4y=9(=3\times3)$

x	0	1	2	3
y	×	×	×	0

(3，0)共 1 組

$(3，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{0}}})$ ╳不合 $5-2\times0=5-0=5$



L 型可能蓋到為

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}} = 1$

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{2}}} = 4$

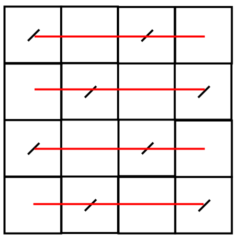
>5

2. $3x+4y=16(=4\times4)$

x	0	4
y	4	1

(0，4)、(4，1)共 2 組，且 2 組都合理

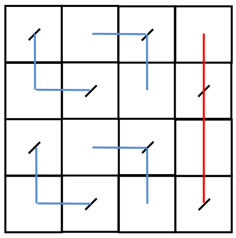
(1) $(0，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}})$ V 合理



$8-2\times4=8-8=0$

無 *L* 型覆蓋

(2) $(4，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}})$ V 合理



$8-2\times1=8-2=6$

L 型可能蓋到為

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} = 2$

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} = 4$

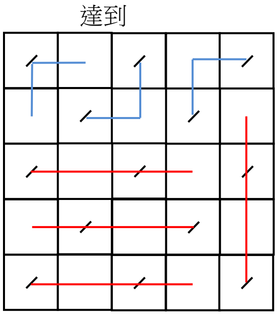
>6

3. $3x+4y=25(=5\times5)$

x	3	7
y	4	1

(3，4)、(7，1)共 2 組，且 2 組都合理

(1) $(3，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}})$ V 合理



$13-2\times4=13-8=5$

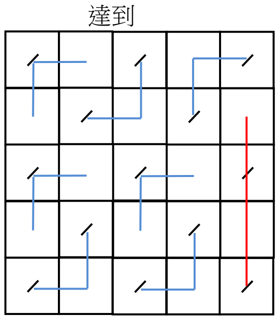
L 型可能蓋到為

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}} = 1$

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} = 4$

>5

(2) $(7，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}})$ V 合理



$13-2\times1=13-2=11$

L 型可能蓋到為

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{3}}} = 3$

$2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}} = 8$

>11

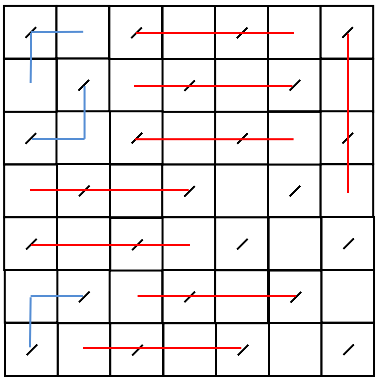
4. $3x+4y=49(=7\times7)$

x	3	7	11	15
y	10	7	4	1

(3，10)、(7，7)、(11，4)、(15，1)共 4 組，

只有 3 組合理

(1) (3，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{10}}}$) ╳不合



$25-2\times10=25-20=5$

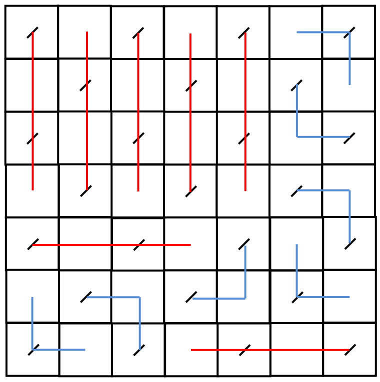
L 型可能蓋到為

$1 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}} \quad = \quad 1$

> 5

$2 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} \quad = \quad 4$

(2) (7，$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{7}}}$) V 合理



$25-2\times7=25-14=11$

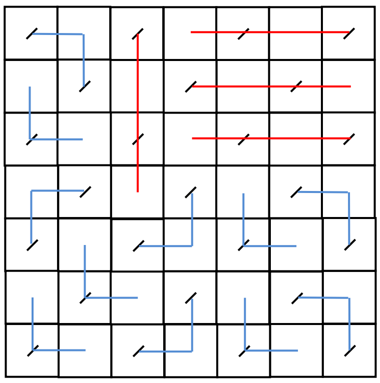
L 型可能蓋到為

$1 \quad \times \quad 3 \quad = \quad 3$

> 11

$2 \quad \times \quad 4 \quad = \quad 8$

(3) (11，$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}}$) V 合理



$25-2\times4=25-8=17$

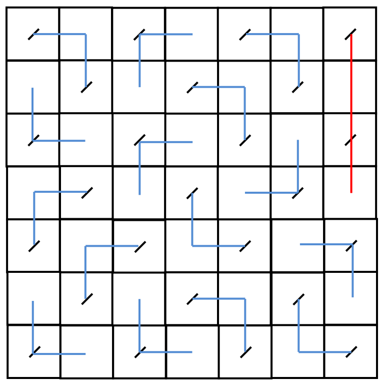
L 型可能蓋到為

$1 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{5}}} \quad = \quad 5$

> 17

$2 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{6}}} \quad = \quad 12$

(4) (15，$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}}$) V 合理



$25-2\times1=25-2=23$

L 型可能蓋到為

$1 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{7}}} \quad = \quad 7$

> 21

$2 \quad \times \quad \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{7}}} \quad = \quad 14$

由上(1):因只能放入 8 個 I 型，但剩餘格數放不進最後 2 個 I 型，

所以無法被所有 I 型及 L 型的組合覆蓋填滿 7×7 方陣格子，故不合理。

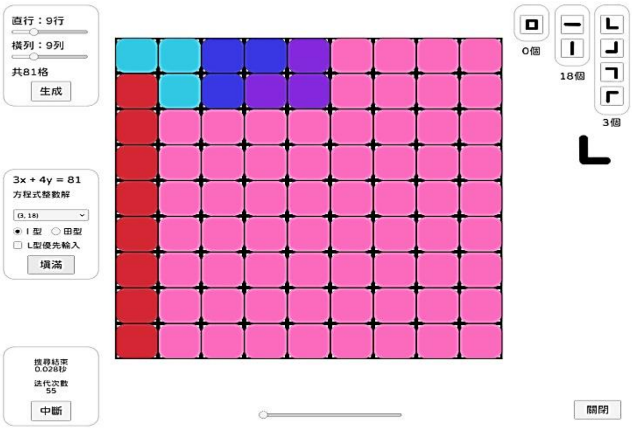
只有(7,7),(11,4),(15,1)這 3 組合理，都可被 L 型與 I 型組合覆蓋填滿 7×7 方陣格子。

由「間隔標記點數模式」方法，得知可快速檢驗 L 型與 I 型個數是否分別都達到需求。

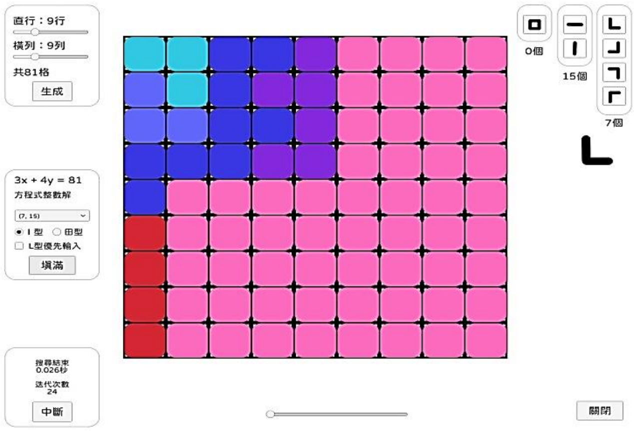
5. $3x+4y=81(=9\times 9)$

x	3	7	11	15	19	23	27
y	18	15	12	9	6	3	0

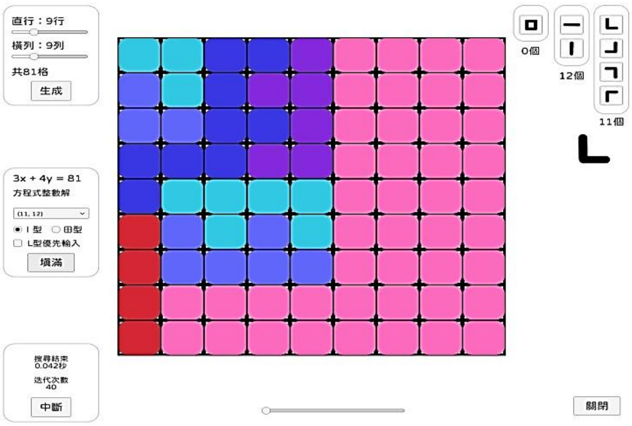
(3，18)、(7，15)、(11，12)、(15，9)、(19，6)、(23，3)、(27，0) 共 7 組，且 7 組都合理。



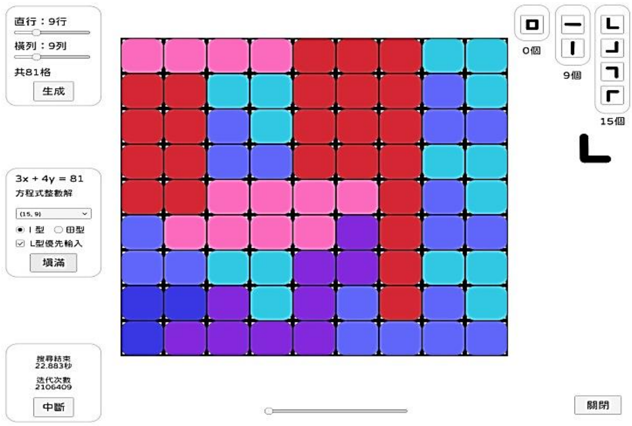
(3，18)



(7，15)

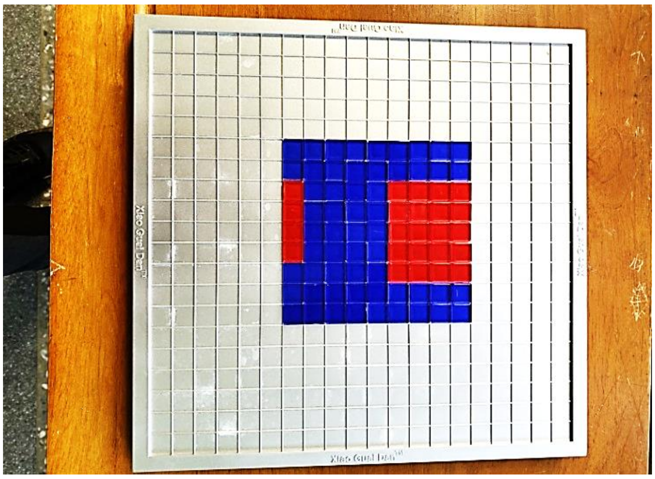


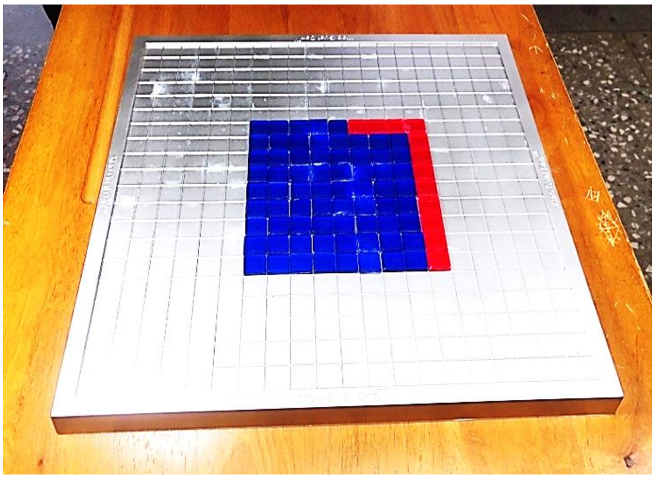
(11，12)



(15，9)

上面四張圖片是由程式執行的結果，同時我們透過「間隔標記點數模式」方法，試著將所有整數解推導驗證，得知可快速檢驗 L 型與 I 型個數都達到需求，讓 9x9 方陣格子可被 L 型與 I 型覆蓋填滿；而下面兩張圖片，是我們在塑膠格子拼盤上，拼排出解的圖示:


(19，6)

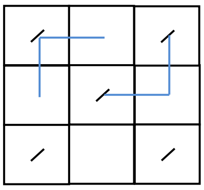

(23，3)

(二) L 型與田型的巧拼：　L 型：表示有 x 個 ()　　田型：表示有 y 個 ()

1. $3x+4y=9(=3\times3)$　　　$(3，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{0}}})$ ╳不合　$5-2\times0=5-0=5$

x	0	1	2	3
y	×	×	×	0

(3，0)共 1 組



L 型可能蓋到為

1　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}}$　=　1

　　　　　　　　　　>5

2　×　$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{2}}}$　=　4

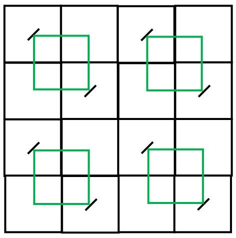
2. $3x+4y=16(=4\times4)$

x	0	4
y	4	1

(0，4)、(4，1)共 2 組，

且 2 組都合理

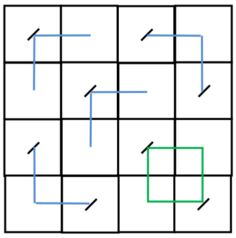
(1) $(0，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}})$ V 合理



$8-2\times4=8-8=0$

無 L 型覆蓋

(2) $(4，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}})$ V 合理



$8-2\times1=8-2=6$

L 型可能蓋到為

1　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}}$　=　2

　　　　　　　　　　>6

2　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}}$　=　4

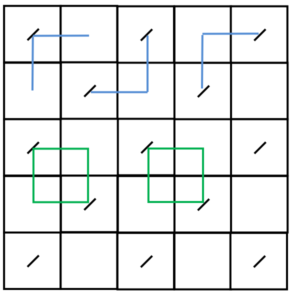
3. $3x+4y=25(=5\times5)$

x	3	7
y	4	1

(3，4)、(7，1) 共 2 組，

且 2 組都不合理

(1) $(3，\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{4}}})$ ╳不合



$13-2\times4=13-8=5$

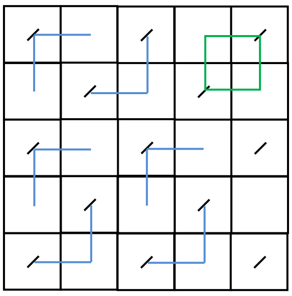
L 型可能蓋到為

1　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}}$　=　1

　　　　　　　　　　>5

2　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}}$　=　4

(2) $(7，\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}})$ ╳不合



$13-2\times1=13-2=11$

L 型可能蓋到為

1　×　$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{3}}}$　=　3

　　　　　　　　　　>11

2　×　$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{4}}}$　=　8

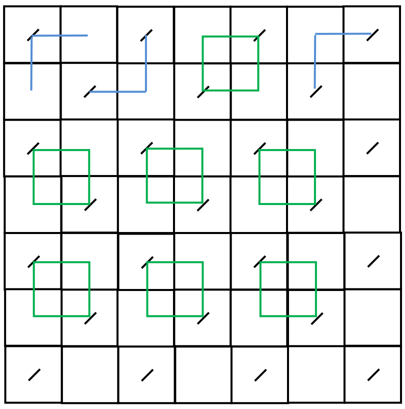
4. $3x+4y=49(=7\times7)$

x	3	7	11	15
y	10	7	4	1

(3，10)、(7，7)、(11，4)、(15，1) 共 4 組，

只有 1 組合理

(1) (3，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{10}}}$) ╳不合

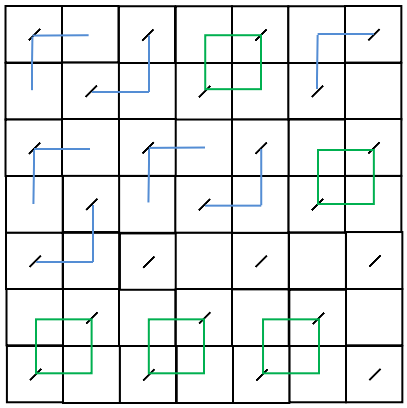


$25-2\times10=25-20=5$

L 型可能蓋到為

$$\begin{array}{l} 1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}} = 1 \\ 2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{2}}} = 4 \end{array} >5$$

(2) (7，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{7}}}$) ╳不合

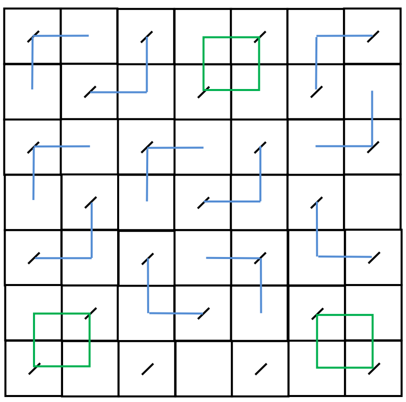


$25-2\times7=25-14=11$

L 型可能蓋到為

$$\begin{array}{l} 1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{3}}} = 3 \\ 2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{4}}} = 8 \end{array} >11$$

(3) (11，$\underset{\text{未達到}}{\underline{\underline{4}}}$) ╳不合

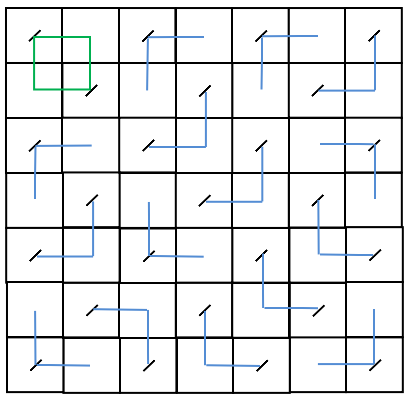


$23-2\times3=23-6=17$

L 型可能蓋到為

$$\begin{array}{l} 1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{5}}} = 5 \\ 2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{6}}} = 12 \end{array} >17$$

(4) (15，$\underset{\text{達到}}{\underline{\underline{1}}}$) V 合理



$23-2\times0=23-0=23$

L 型可能蓋到為

$$\begin{array}{l} 1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{7}}} = 7 \\ 2 \times \underset{\text{達到}}{\underline{\underline{8}}} = 16 \end{array} >23$$

由上(1)~(3): ∵無法被所需田型的個數覆蓋填滿 7x7 方陣格子　　∴不合理

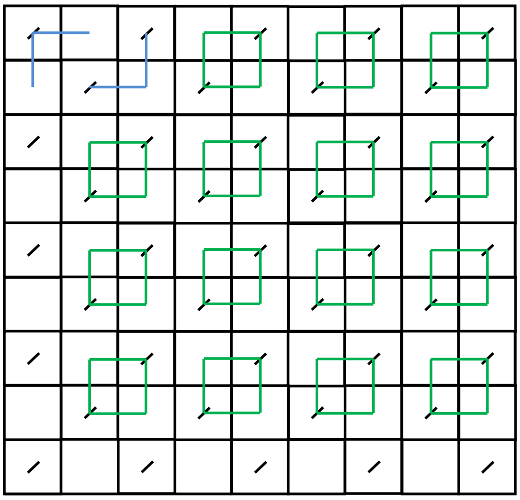
只有(15,1)這 1 組合理，可被 L 型與田型組合覆蓋填滿 7x7 方陣格子。

5. $3x+4y=81\ (=9\times 9)$

x	0	1	2	3	7	11	15	19	23	27
y	╳	╳	╳	18	15	12	9	6	3	0

共 7 組

(1)$(3，\underset{\text{未達到}}{\underline{18}})$ ╳不合　$41-2\times18=41-36=5$



L 型可能蓋到為

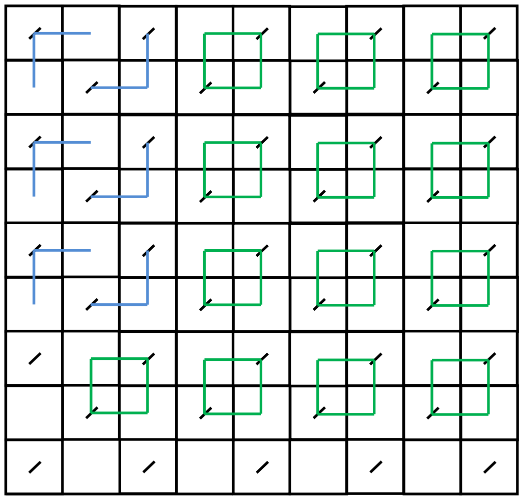
估點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{1}} = 1$

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{2}} = 4$

>5

(2)$(7，\underset{\text{未達到}}{\underline{15}})$ ╳不合　$41-2\times15=41-30=11$



L 型可能蓋到為

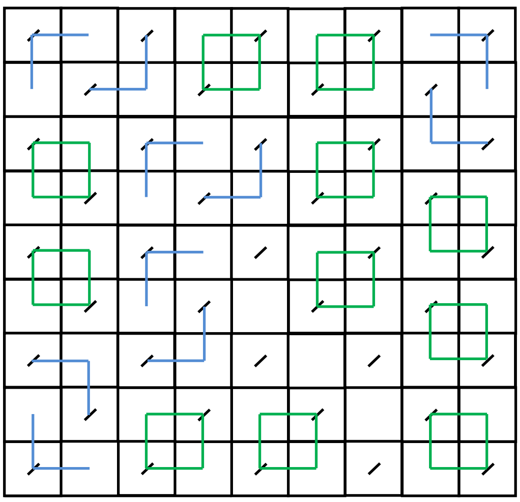
估點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{3}} = 3$

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{4}} = 8$

>11

(3)$(11，\underset{\text{達到}}{\underline{12}})$ ╳不合　$41-2\times12=41-24=17$



L 型可能蓋到為

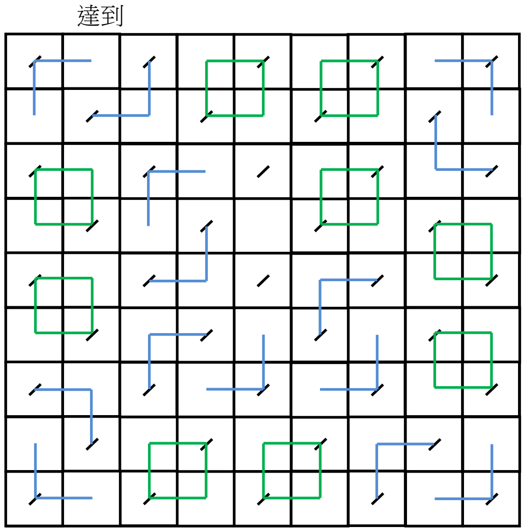
估點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{5}} = 5$

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{6}} = 12$

>17

(4)$(15，\underset{\text{達到}}{\underline{9}})$ ╳不合　$41-2\times9=41-18=23$



L 型可能蓋到為

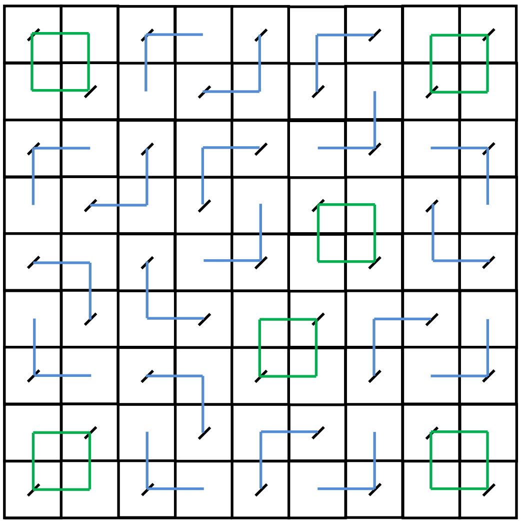
估點數　個數

$1 \times \underset{\text{達到}}{\underline{7}} = 7$

$2 \times \underset{\text{未達到}}{\underline{8}} = 16$

>23

(5)(19，6) V 合理

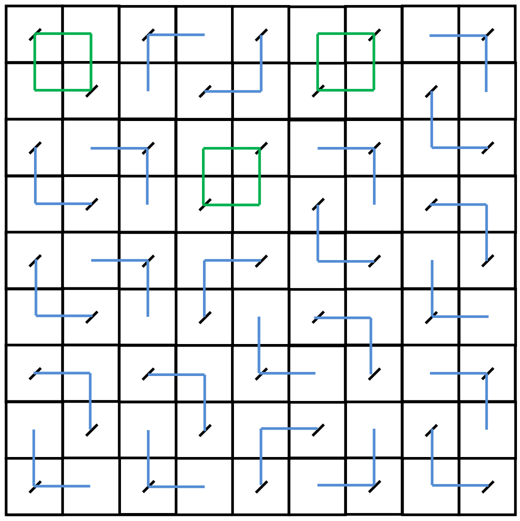


$41-2\times6=41-12=29$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	9 達到	=	9	>29
2	×	10 達到	=	20	

(6)(23，3) V 合理



$41-2\times3=41-6=35$

L 型可能蓋到為

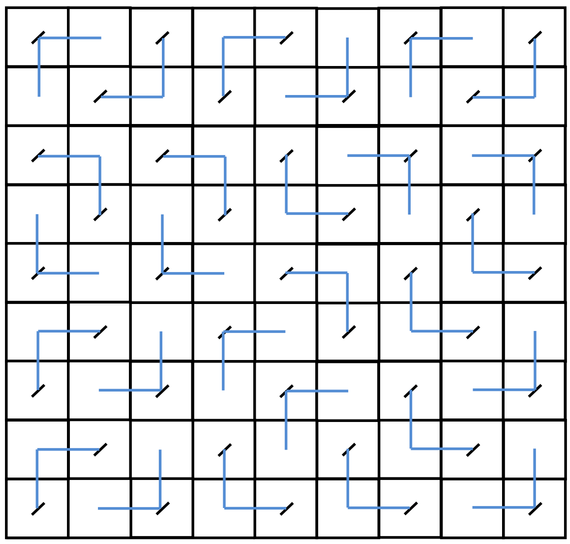
佔點數		個數			
1	×	11 達到	=	11	>35
2	×	12 達到	=	24	

(7)(27，0) V 合理

$41-2\times0=41-0=41$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	13 達到	=	13	>41
2	×	14 達到	=	28	



由上(1)~(4): L 型佔點數為 1 或佔點數為 2 及田型的組合未達到需要個數

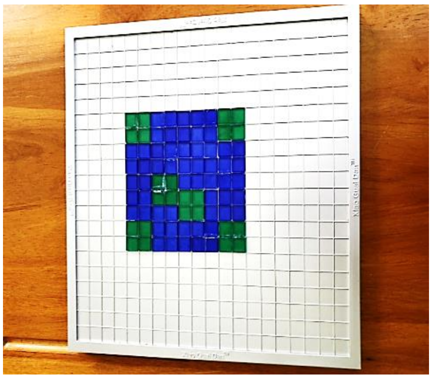
∵無法被 L 型與田型組合覆蓋填滿 9x9 方陣格子　　　∴上述這 4 組都不合理

只有 (19,6),(23,3),(27,0)這 3 組合理，其中(19,6),(23,3)可被 L 型與田型組合覆蓋填滿 9x9 方陣格子，而(27,0)則被完全只有 L 型覆蓋填滿 9x9 方陣格子。

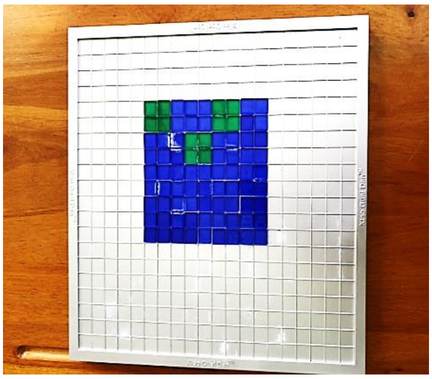
由「間隔標記點數模式」方法，得知可快速檢驗 L 型與田型個數是否分別都達到需求。

反之，方陣格子若被覆蓋填滿，亦可檢驗 L 型與田型是否符合應有的需求個數。

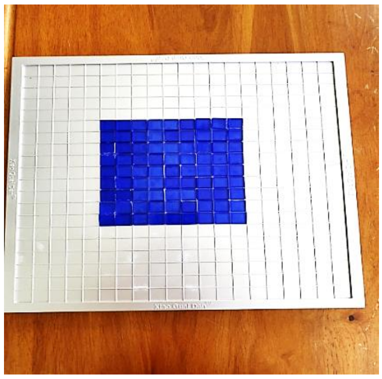
下面三張圖片，是我們在塑膠格子拼盤上，實際拼排出 $3x+4y=81\ (=9\times9)$ 解的圖示:



(19，6)



(23，3)



(27，0)

上述經由小矩形格子推廣到大矩形格子，或小方陣格子推廣到大方陣格子，藉由巧拼問題轉換成二元一次方程式的解，透過我們自己所研發「間隔標記點數模式」方法經推導驗證，可檢驗 L 型與 I 型、田型的組合覆蓋填滿個數，能否都達到應有需求，進而篩選出合理解。

陸、研究結果

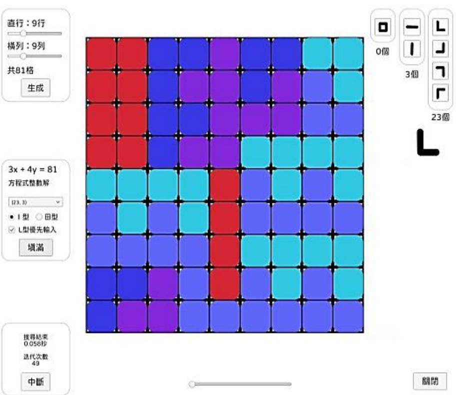
我們試著朝圖形使用者操作的友善介面(GUI)方式，來呈現巧拼問題的覆蓋填滿圖形，整理歸納相關探究如下：

一、不論從小正方形方格表延伸到邊長為 N×N 單位所組成的方陣格子覆蓋填滿情形，或從小長方形方格表延伸到邊長為 $M' \times N'$ 單位所組成的矩形格子覆蓋填滿情形：

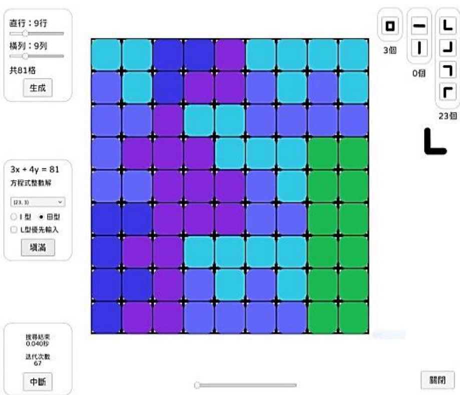
(一)方陣圖形可否覆蓋填滿的情況：

方陣格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
$4\times4=16$	0	4	0	4
	4	1	4	1
$5\times5=25$	3	4	X	X
	7	1	X	X
$6\times6=36$	X	X	0	9
	8	3	8	3
	12	0	12	0
$7\times7=49$	15	1	15	1

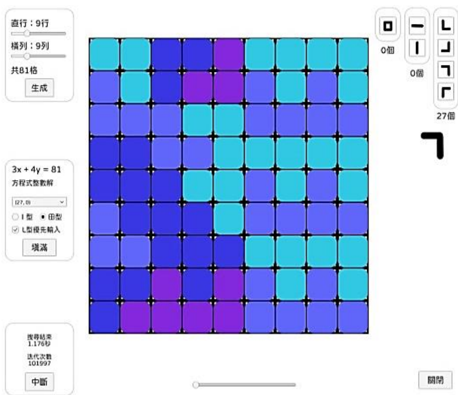
方陣格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
$8\times8=64$	0	16	0	16
	20	1	20	1
$9\times9=81$	3	18	X	X
	23	3	23	3
	27	0	27	0
$10\times10=100$	X	X	0	25
	32	1	32	1
$11\times11=121$	39	1	39	1



(23，3)
L　I



(23，3)
L　田



(27，0)
L

(二)矩形圖形可否覆蓋填滿的情況：

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
4×4=16	0	4	0	4
	4	1	4	1
4×5=20	0	5	X	X
	4	2	4	2
4×6=24	0	6	0	6
	4	3	4	3
	8	0	8	0
4×7=28	0	7	X	X
	8	1	8	1
4×8=32	0	8	0	8
	8	2	8	2
4×9=36	0	9	X	X
	8	3	8	3
	12	0	12	0
4×10=40	0	10	0	10
	12	1	12	1
4×11=44	0	11	X	X
	12	2	12	2

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
5×4=20	0	5	X	X
	4	2	4	2
5×5=25	3	4	X	X
	7	1	X	X
5×6=30	2	6	X	X
	6	3	6	3
	10	0	10	0
5×7=35	9	2	X	X
5×8=40	0	10	X	X
	12	1	12	1
5×9=45	3	9	X	X
	11	3	X	X
	15	0	15	0
5×10=50	2	11	X	X
	14	2	14	2
5×11=55	17	1	17	1

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
6×4=24	0	6	0	6
	4	3	4	3
	8	0	8	0
6×5=30	2	6	X	X
	6	3	6	3
	10	0	10	0
6×6=36	X	X	0	9
	8	3	8	3
	12	0	12	0
6×7=42	2	9	X	X
	10	3	10	3
	14	0	14	0
6×8=48	0	12	0	12
	12	3	12	3
	16	0	16	0
6×9=54	2	12	X	X
	14	3	14	3
	18	0	18	0
6×10=60	X	X	0	15
	16	3	16	3
	20	0	20	0
6×11=66	2	15	X	X
	18	3	18	3
	22	0	22	0

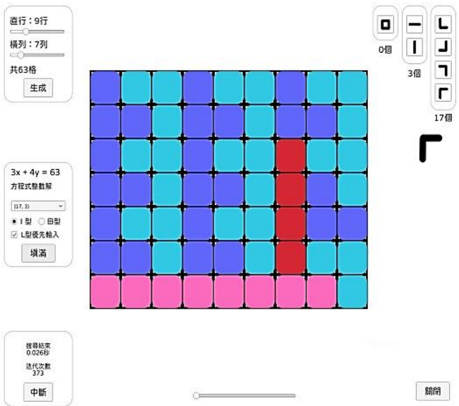
矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
7×4=28	0	7	X	X
	8	1	8	1
7×5=35	9	2	X	X
7×6=42	2	9	X	X
	10	3	10	3
	14	0	14	0
7×7=49	15	1	15	1
7×8=56	0	14	X	X
	16	2	16	2
7×9=63	17	3	17	3
	21	0	21	0
7×10=70	2	16	X	X
	22	1	22	1
7×11=77	23	2	23	2

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
8×4=32	0	8	0	8
	8	2	8	2
8×5=40	0	10	X	X
	12	1	12	1
8×6=48	0	12	0	12
	12	3	12	3
	16	0	16	0
8×7=56	0	14	X	X
	16	2	16	2
8×8=64	0	16	0	16
	20	1	20	1
8×9=72	0	18	X	X
	20	3	20	3
	24	0	24	0
8×10=80	0	20	0	20
	24	2	24	2
8×11=88	0	22	X	X
	28	1	28	1

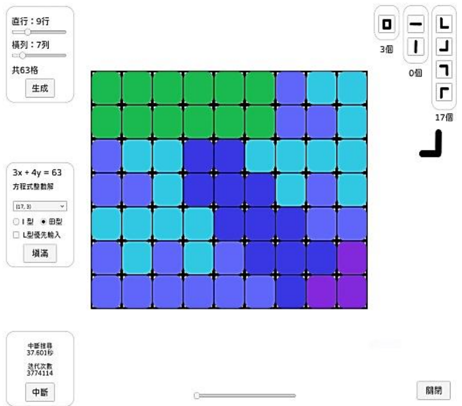
矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
9×4=36	0	9	X	X
	8	3	8	3
	12	0	12	0
9×5=45	3	9	X	X
	11	3	X	X
	15	0	15	0
9×6=54	2	12	X	X
	14	3	14	3
	18	0	18	0
9×7=63	17	3	17	3
	21	0	21	0
9×8=72	0	18	X	X
	20	3	20	3
	24	0	24	0
9×9=81	3	18	X	X
	23	3	23	3
	27	0	27	0
9×10=90	2	21	X	X
	26	3	26	3
	30	0	30	0
9×11=99	29	3	29	3
	33	0	33	0

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
10×4=40	0	10	0	10
	12	1	12	1
10×5=50	2	11	X	X
	14	2	14	2
10×6=60	X	X	0	15
	16	3	16	3
	20	0	20	0
10×7=70	2	16	X	X
	22	1	22	1
10×8=80	0	20	0	20
	24	2	24	2
10×9=90	2	21	X	X
	26	3	26	3
	30	0	30	0
10×10=100	X	X	0	25
	28	4	28	4
	32	1	32	1
10×11=110	2	26	X	X
	34	2	34	2

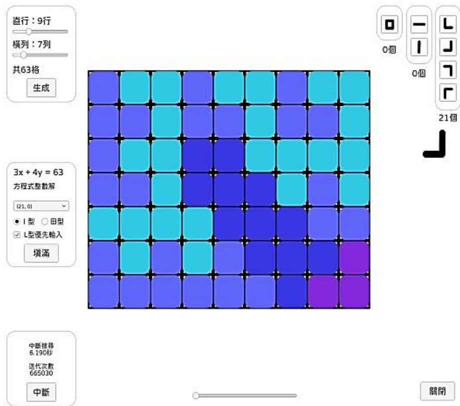
矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
11×4=44	0	11	X	X
	12	2	12	2
11×5=55	17	1	17	1
11×6=66	2	15	X	X
	18	3	18	3
	22	0	22	0
11×7=77	23	2	23	2
11×8=88	0	22	X	X
	28	1	28	1
11×9=99	29	3	29	3
	33	0	33	0
11×10=110	2	26	X	X
	34	2	34	2
11×11=121	39	1	39	1



(17，3)
L　I



(17，3)
L



(21，0)
L

1. 在 $N \times N$ 方陣的情形下，透過「間隔標記點數模式」方法驗證：$(N \geq 4)$

(1)只有總格數為3的倍數時，可完全被L型填滿，但總格數為9例外，若一定都要用到I型或田型，則分別最少都需3塊。

(2)當總格數為非3的倍數，在與L型巧拼時，則I型或田型分別最少都需1塊，除了N=5在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿，其餘都可完全覆蓋。

(3)在N=4及擴展到與N=4相同循環規律(如：N=8,N=12,……)時，則可完全被I型填滿，亦可完全被田型填滿。

(4)在N=6及擴展到與N=6相同循環規律(如：N=10,N=14,……)時，則可完全被田型填滿。

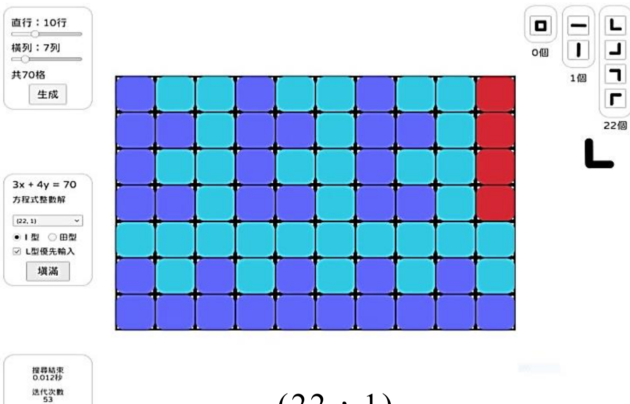
2. 在 $M' \times N'$ 矩形的情形下，透過「間隔標記點數模式」方法驗證：$(M' \geq 4$ 且 $N' \geq 4)$

(1)只有總格數為3的倍數時，可完全被L型填滿，若一定都要用到I型或田型，則分別最少都需3塊，除了 $M' \times N' = 5 \times 9 = 9 \times 5$ 時，在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿。

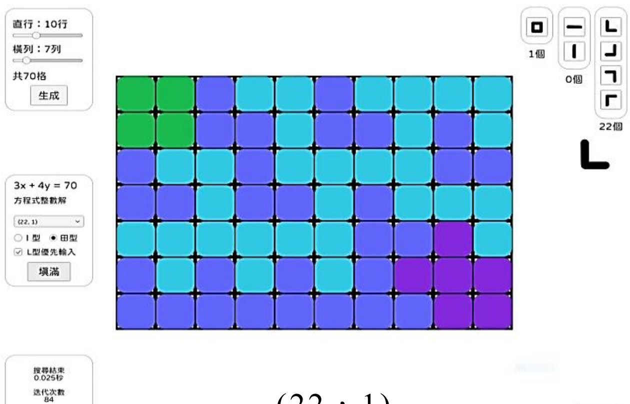
(2)當總格數為非3的倍數，在與L型巧拼時，則I型或田型分別最少為1塊或2塊，需視 $M' \times N'$ 組合的總格數推知。

(3)當短邊 $4 \leq M' \leq 7$ 固定，長邊 $N' \geq 4$ 時，則可推得長邊 N' 為由小到大，每4個數組合為一循環，循環下的狀況大致相同，但在 $M' \times N' = 5 \times 5$ 及 $M' \times N' = 5 \times 7 = 7 \times 5$ 時，在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿的。

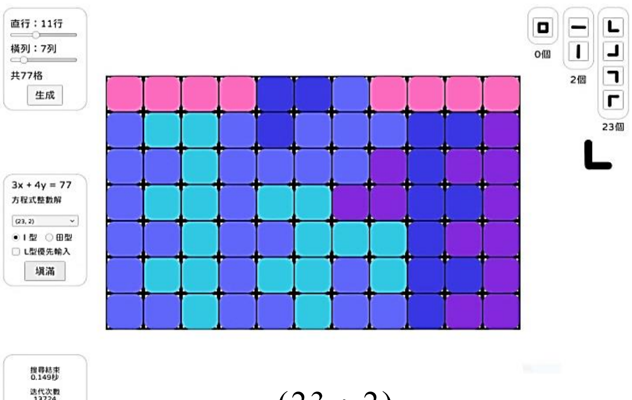
(4)當短邊 $M' \geq 8$ 且長邊 $N' \geq 4$ 時，則可推得 M' 與 N' 皆為由小到大且每4個數組合為一循環，循環下的狀況大致相同。



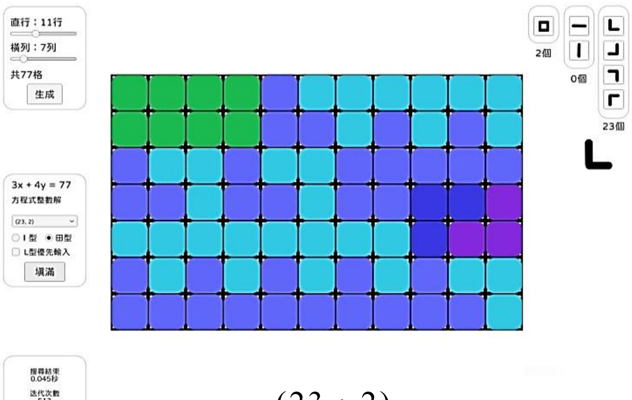
(22，1)
L　I



(22，1)
L



(23，2)
L　I



(23，2)
L

二、如果想拼的大方陣延伸到 N×N，或是想拼的大矩形延伸到 $M' \times N'$，透過我們自己所研發「間隔標記點數模式」方法。經推導驗證後，則探討其結果如下:

(一)延伸到 N×N 方陣的覆蓋填滿：

我們試著先從小正方形格子推廣延伸逐漸增大到 N×N 方陣格子時，從推導驗證中發掘，當延伸到大方陣格子時，可將其切割成較小方陣格表與較小矩形格表的組合，而在 $4 \le N \le 7$ 時，**除了 N=5 在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形**，亦即是沒有合理解，**其餘都既無間隙又不重疊的完全覆蓋**。是故，**經擴展到與 N=5 相同循環規律時，我們藉由其切割成兩較小矩形格表的組合，經得證在 L 型與田型的組合是都可覆蓋填滿圖形的**。

1. 4×4 方陣：(1)L 型&I 型：共 2 組，2 組都合理；(2)L 型&田型：共 2 組，2 組都合理。
2. 5×5 方陣：(1)L 型&I 型：共 2 組，2 組都合理；(2)L 型&田型：共 2 組，2 組都不合理。
3. 6×6 方陣：(1)L 型&I 型：共 4 組，只有 3 組合理；(2)L 型&田型：共 4 組，4 組都合理。
4. 7×7 方陣：(1)L 型&I 型：共 4 組，只有 3 組合理；(2)L 型&田型：共 4 組，只有 1 組合理。
5. 8×8 方陣：(1)L 型&I 型：共 6 組，6 組都合理；(2)L 型&田型：共 6 組，6 組都合理。
6. 9×9 方陣：(1)L 型&I 型：共 7 組，7 組都合理；(2)L 型&田型：共 7 組，只有 3 組合理。
7. 10×10 方陣：(1)L 型&I 型：共 9 組，只有 8 組合理；(2)L 型&田型：共 9 組，9 組都合理。
8. 11×11 方陣：(1)L 型&I 型：共 10 組，只有 8 組合理；(2)L 型&田型：共 10 組，只有 5 組合理。

試著再推廣驗證 12x12、13x13、14x14、15x15、…方陣格子時，其圖形都能被覆蓋填滿。

【方陣劃分的一般式】

當 $N \ge 8$ 時，$N = 4 \times k + r$ （$0 \le r < 4$，$k \ge 2$，$k \in N$，$r \in Z$），則 $N = 4(k-1)+(r+4)$

可把 $N \times N$ 表格劃分成一個 $(r+4)\times(r+4)$ 小方陣格表，

與一個 $N \times 4(k-1)$ 小矩形格表，及一個 $4(k-1)\times(r+4)$ 小矩形格表

在 $4 \le N \le 7$ 時，$(r+4)\times(r+4)$ 小方陣格表能被完全覆蓋，除了 **N=5 在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形，其餘都可既無間隙又不重疊的完全覆蓋**。

另外，因為 $4a \times b$ 小矩形格表，及 $c \times 4d$ 小矩形格表均能被 4×1 小矩形格子完全覆蓋。

所以，$N \times 4(k-1)$ 小矩形格表和 $4(k-1)\times(r+4)$ 小矩形格表均能被 4×1 小矩形格子完全覆蓋。

例：(1) $N \times N = 9\times9$ 時：$9 = 4(k-1)+(r+4) = 4\times(2-1)+(1+4) = 4\times1+5$

一個 $(r+4)\times(r+4) \Rightarrow (1+4)\times(1+4) = 5\times5$，一個 $N\times4(k-1) \Rightarrow 9\times4(2-1) = 9\times4\times1$，

一個 $4(k-1)\times(r+4) \Rightarrow 4\times(2-1)\times5 = 4\times1\times5$

(2) $N \times N = 13\times13$ 時：$13 = 4(k-1)+(r+4) = 4\times(3-1)+(1+4) = 4\times2+5$

一個 $(r+4)\times(r+4) \Rightarrow (1+4)\times(1+4) = 5\times5$，一個 $N\times4(k-1) \Rightarrow 13\times4(3-1) = 13\times4\times2 = 13\times8$，

一個 $4(k-1)\times(r+4) \Rightarrow 4\times(3-1)\times5 = 4\times2\times5 = 8\times5$

我們以 $N\times N=9\times 9$ 時，來做驗證說明如下：

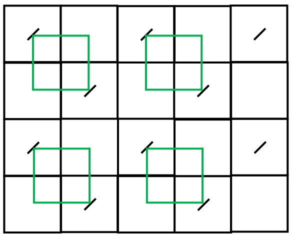
當 N=5 在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形，亦即是沒有合理解，而經擴展到與 N=5 相同循環規律(如 N=9)時：$9=4(k-1)+(r+4)=4\times(2-1)+(1+4)=4\times 1+5$

【作法 1】切割出一個 $(r+4)\times(r+4)\Rightarrow(1+4)\times(1+4)=5\times 5$ 方陣格子，及一個 9×4 矩形格子與一個 4×5 矩形格子

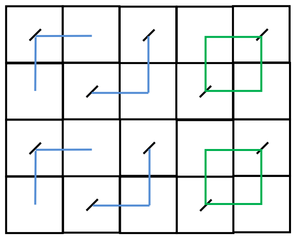
1.在 $3x+4y=20(=4\times 5)$ (0，5)、(4，2)共 2 組解，只有(4,2)這 1 組合理

x	0	4	8
y	5	2	×

(1) ($\overset{L}{0}$，$\overset{田}{5}$) ╳不合



(2) ($\overset{L}{4}$，$\overset{田}{2}$) V 合理



2.在 $3x+4y=36(=9\times 4)$

x	0	1	2	3	4	8	12
y	9	×	×	×	6	3	0

(0，9)、(4，6)、(8，3)、(12，0)

╳　V　V　V

只有上述這 3 組合理

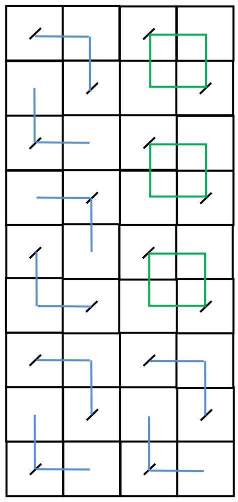
以(8,3)為例: $18-2\times 3=18-6=12$

L 型可能蓋到為　佔點數　個數

$1\times\underset{達到}{\underline{4}}=4$

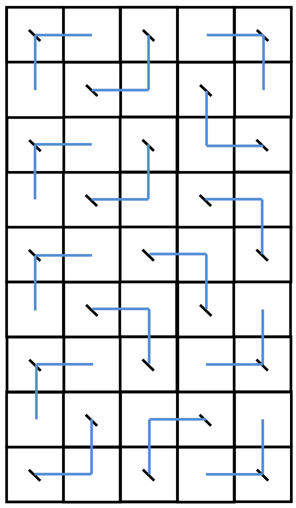
$2\times\underset{達到}{\underline{4}}=8$　>12

9×4 矩形格子



(8,3)

9×5 矩形格子



(15,0)

倘若我們藉由上述切割成一較小 5×5 方陣及兩較小 9×4 矩形與 4×5 矩形格子的組合，經得證在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形的。

【作法 2】切割出一個 9×4 矩形格子，及一個 9×5 矩形格子(如右上圖示)

在 $3x+4y=45(=9\times 5)$ 中，(3，9)、(7，6)、(11，3)、(15，0)，只有(15,0)這 1 組合理

倘若我們藉由上述切割成兩較小 9×4 矩形格子及 9×5 矩形格子的組合，而 9×5 矩形格子可完全由 L 型即(15,0)這 1 組覆蓋填滿，經得證在 L 型與田型的組合是可以覆蓋填滿圖形的。

我們以數學歸納法，求證『當延伸到 N×N 方陣的覆蓋填滿時，方格表劃分方式成立』。

即證明 $N^2=(4k+r)^2=(r+4)(r+4)+(4k+r)\left[4(k-1)\right]+4(k-1)(r+4)$ 成立

【證明】

(1)當k=2時(k應大於或等於2)，

左式：$(4\times 2+r)^2=64+16r+r^2$

右式：$(r+4)(r+4)+(4\times 2+r)\left[4(2-1)\right]+4(2-1)(r+4)$

$=r^2+8r+16+32+4r+4r+16=r^2+16r+64$

左式＝右式，成立

(2)若k=t時：$(4t+r)^2$=$(r+4)(r+4)$+$(4t+r)\left[4(t-1)\right]$+$4(t-1)(r+4)$ 成立

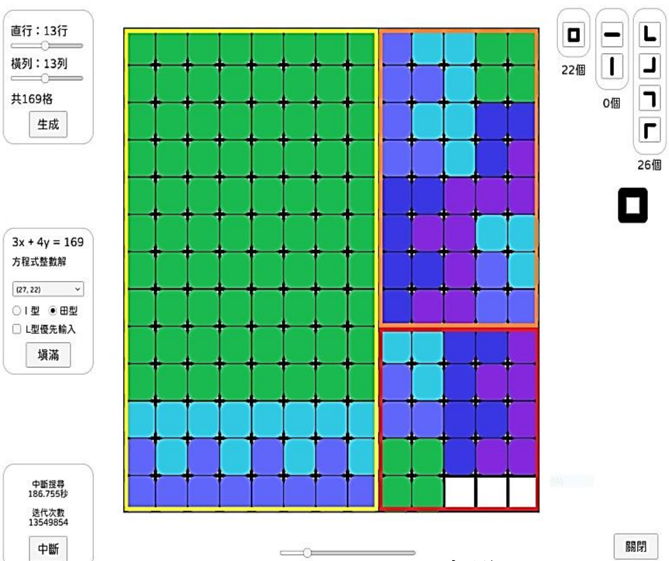
(3)當k=t+1時，則：左式=$\left[4(t+1)+r\right]^2$

$$
\begin{aligned}
&=(4t+4+r)^2=\left[(4t+r)+4\right]^2=(4t+r)^2+8(4t+r)+16\\
&=(r+4)(r+4)+(4t+r)\left[4(t-1)\right]+4(t-1)(r+4)+8(4t+r)+16\\
&=(r+4)(r+4)+(4t+r)\left[4t-4\right]+4(tr-r+4t-4)+8(4t+r)+16\\
&=(r+4)(r+4)+(4t+r)\times 4t-16t-4r+4tr-4r+16t-16+32t+8r+16\\
&=(r+4)(r+4)+\left[(4t+r)\times 4t+16t\right]+(16t+4tr)\\
&=(r+4)(r+4)+\left[(4t+r)+4\right]\times 4t+4t\times(r+4)\\
&=(r+4)(r+4)+\left[4(t+1)+r\right]\times 4\left[(t+1)-1\right]+4\left[(t+1)-1\right]\times(r+4)\text{=右式}
\end{aligned}
$$

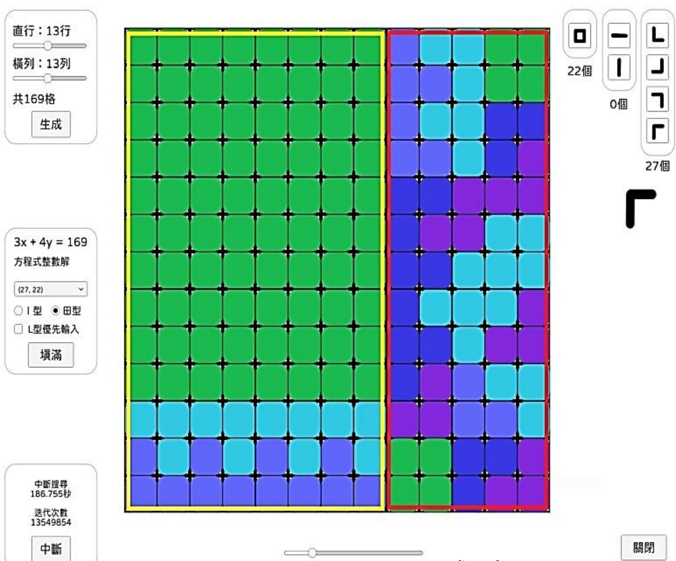
故由數學歸納法得證：$N^2=(4k+r)^2=(r+4)(r+4)+(4k+r)\left[4(k-1)\right]+4(k-1)(r+4)$

【範例】我們再以 $N\times N=13\times 13$ 時，來實作驗證方陣格子可被覆蓋填滿，圖形展示如下：

<以作法 1 方式劃分，則圖形無法覆蓋填滿> <以作法 2 方式劃分，則圖形可被覆蓋填滿>



$(27，22)_L$ 失敗



$(27，22)_L$ 成功

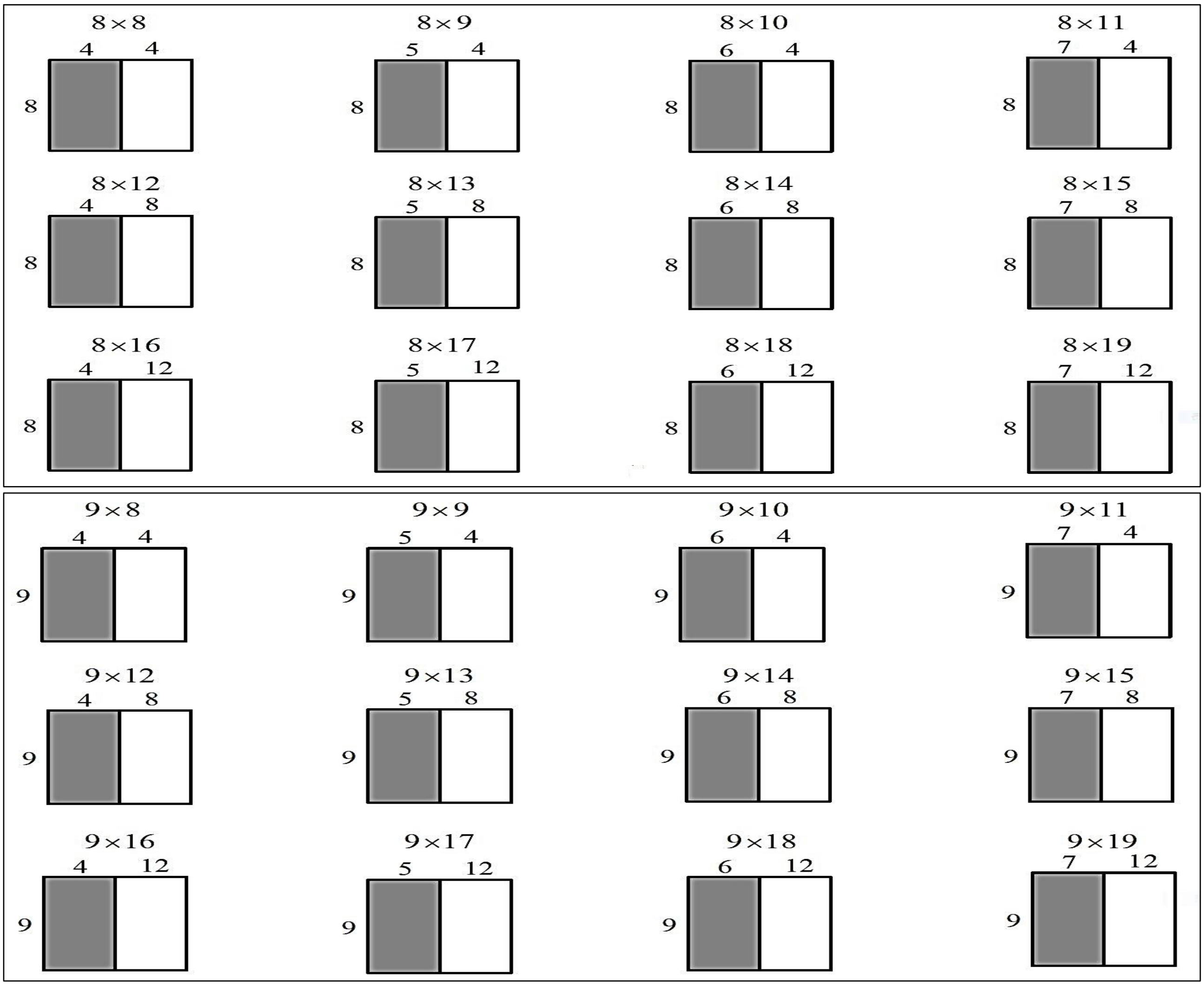
綜合而言，我們經由此二元一次方程式模式的實際操作推導觀察到，如果要形成覆蓋填滿，須先解決 4x4、5x5、6x6、7x7 方陣格表的覆蓋填滿，而 5x5 方陣格表在 L 型與田型組合覆蓋並無法共同填滿，需使用其他方法處理外，當嘗試驗證 8x8、9x9、10x10、11x11…推廣到 NxN 方陣格子時，都能被覆蓋填滿，藉此證明**推廣到 NxN 方陣格子時，此數學一般式亦成立**。

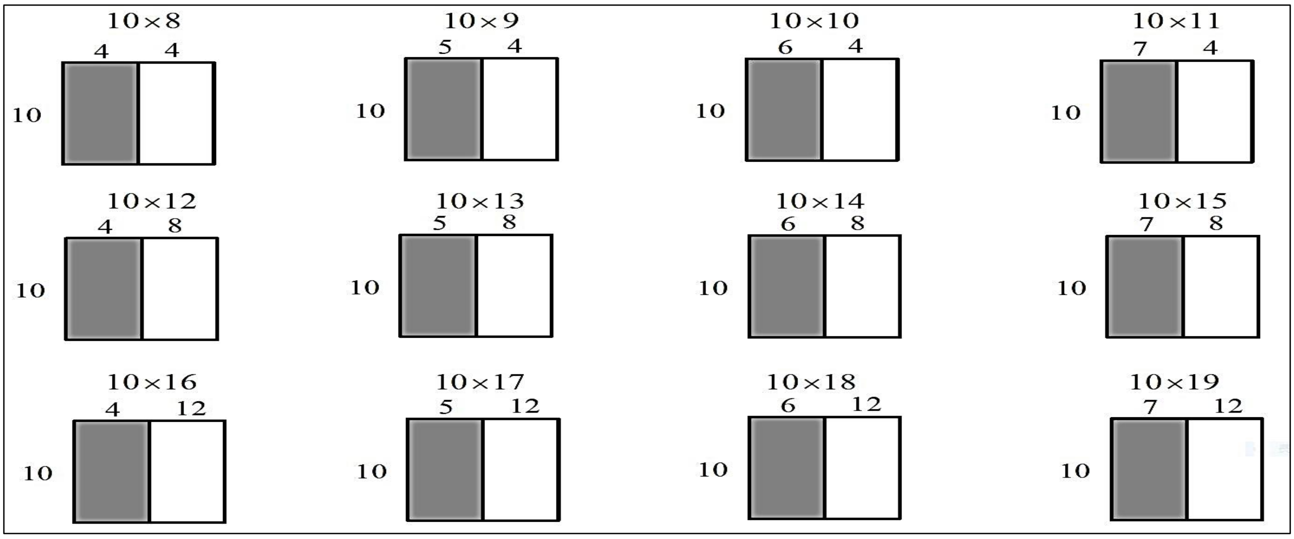
(二)延伸到$M' \times N'$矩形的覆蓋填滿：

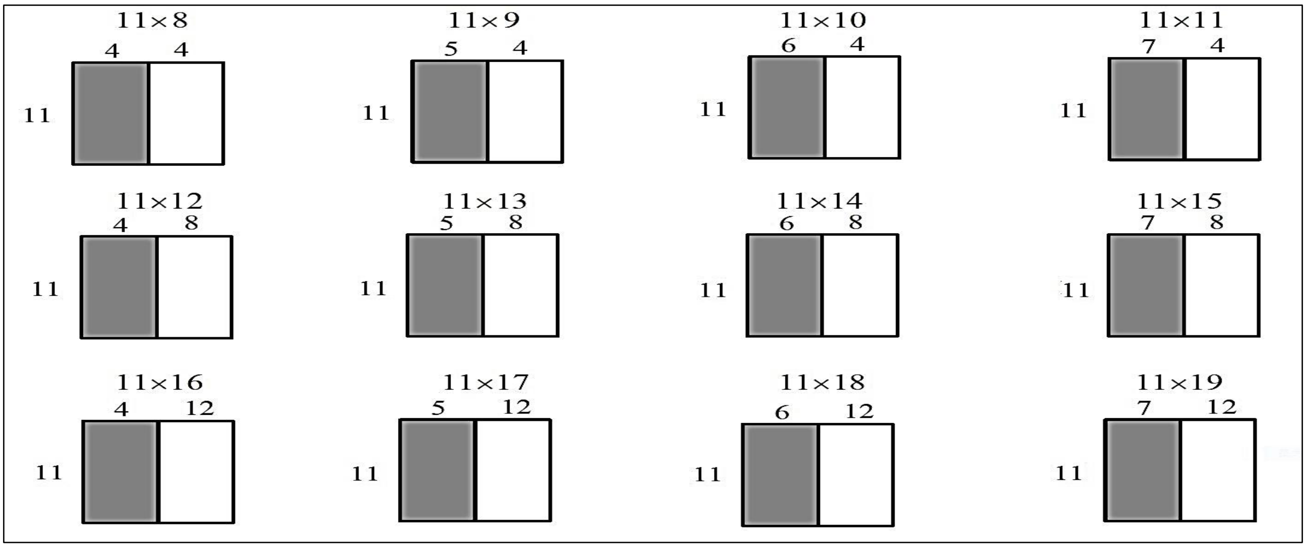
我們接著從小矩形格子推廣延伸逐漸增大到$M' \times N'$時，可任意變更其長邊與寬邊的單位長，且其複雜度頗高。過程中我們做了許多不同切割劃分的方式來試驗，從推導驗證中發掘，當延伸到大矩形格子時，可將其切割成兩較小矩形格表的組合，而當

$M' \times N' = 5 \times 7 = 7 \times 5$ 及 $M' \times N' = 5 \times 9 = 9 \times 5$**在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形**，亦即是沒有合理解，但$M' \times N' = 5 \times 9 = 9 \times 5$**可完全被 L 型填滿**。是故，**我們藉由其切割成兩較小矩形格表的組合，經得證其餘的組合情形，都既無間隙又不重疊地完全覆蓋填滿圖形。**

【矩形切割劃分方式】







【矩形劃分的一般式】

1.若 $4 \le M' \le 7$ 且 $4 \le N' \le 7$ 時，則 (R+4)(r'+4) 小矩形表格為：

$\because 0 \le R < 4, 0 \le r' < 4$，當 R、$r'$ 分別為

(1) R=1 且 r'=1，則 $(1+4)\times(1+4)=5\times5$，只有 L 型與 I 型的組合，可覆蓋填滿。

(2) R=1 且 r'=3 (或 R=3 且 r'=1)，則 $(1+4)\times(3+4)=5\times7$ 或 $(3+4)\times(1+4)=7\times5$，

只有 L 型與 I 型的組合，可覆蓋填滿。

2.當 $M' \ge 8$ 且 $N' \ge 8$ 時，

$M'=4P+R=4(P-1)+(R+4)$　$(P \ge 2, P \in N, R \in Z, 0 \le R < 4)$

$N'=4Q+r'=4(Q-1)+(r'+4)$　$(Q \ge 2, Q \in N, r' \in Z, 0 \le r' < 4)$

可把 $M' \times N'$ 表格，對其中任一較長邊進行切割，

劃分成一個 $M' \times 4(Q-1)$ 小矩形格表及一個 $M' \times (r'+4)$ 小矩形格表。

由(1) $\because M'\times 4(Q-1)=(4P+R)\times 4(Q-1)=4\times 4P(Q-1)+4R(Q-1)$

又 $4a\times b$ 小方格表可被 4×1 小方格表完全覆蓋

$\therefore 4P(Q-1)$ 小方格表和 $4R(Q-1)$ 小方格表均能被 4×1 小方格完全覆蓋

(2) $\because M'\times(r'+4)=(4P+R)\times(r'+4)=4P(r'+4)+R(r'+4)=4P(r'+4)+4R+Rr'$

又 $4a\times b$ 小方格表可被 4×1 小方格表完全覆蓋

$\therefore 4P(r'+4)$ 小方格表和 $4R$ 小方格表均能被 4×1 小方格完全覆蓋

(3) $\because 0\le R<4, 0\le r'<4$，當 $R=3$ 且 $r'=3$ 時，$Rr'=3\times 3=9$，則無法被覆蓋填滿

又 $M'\ge 4$ 且 $N'\ge 4$

$\therefore$ 在 $M'\times N'$ 矩形切割中，不會發生此情形

<例子>：經由上述矩形切割劃分的方式中，我們分別代入 2 組數據驗證一般式是成立的！

1. $M'\times N'=9\times 17$：

$M'=9=4P+R=4(P-1)+(R+4)=4(2-1)+(1+4)=4\times 1+5$，其中 $P=2, R=1$

$N'=17=4Q+r'=4(Q-1)+(r'+4)=4\times 4+1=4(4-1)+(1+4)=4\times 3+5$，其中 $Q=4, r'=1$

(1) 一個小矩形 $M'\times 4(Q-1)=9\times 4\times(4-1)=9\times 4\times 3=9\times 12$

(2) 一個小矩形 $M'\times(r'+4)=9\times(1+4)=9\times 5$

2. $M'\times N'=11\times 14$：

$M'=11=4P+R=4(P-1)+(R+4)=4(2-1)+(3+4)=4\times 1+7$，其中 $P=2, R=3$

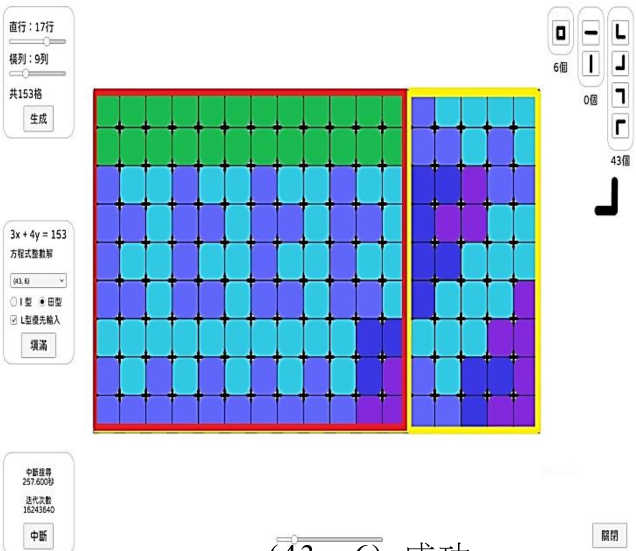
$N'=14=4Q+r'=4(Q-1)+(r'+4)=4(3-1)+(2+4)=4\times 2+6$，其中 $Q=3$，$r'=2$

(1) 一個小矩形 $M'\times 4(Q-1)=11\times 4(3-1)=11\times 4\times 2$

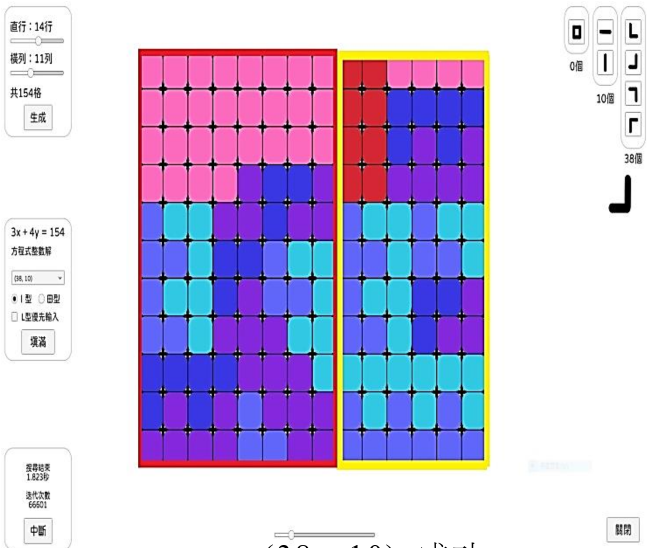
(2) 一個小矩形 $M'\times(r'+4)=11\times(2+4)=11\times 6$

【圖例】我們再分別以上述兩例子，來實作驗證矩形格子可被覆蓋填滿，圖形展示如下：

<例1劃分成兩矩形，則圖形可被覆蓋填滿>　<例2劃分成兩矩形，則圖形可被覆蓋填滿>



(43，6)_成功
L　田



(38，10)_成功
L　I

我們以數學歸納法，求證『當延伸到$M'\times N'$矩形的覆蓋填滿時，方格表劃分方式成立』。

即證明$M'\times N'=(4P+R)(4Q+r')=(4P+R)(4Q-4)+(4P+R)(r'+4)$成立

【證明】

(1)當Q=2時(Q應大於或等於2)，

左式：$(4P+R)(4Q+r')=16PQ+4RQ+4Pr'+Rr'$

右式：$(4P+R)(4Q-4)+(4P+R)(r'+4)$

$=16PQ+4RQ-16P-4R+4Pr'+16P+Rr'+4R$

$=16PQ+4RQ+4Pr'+Rr'$

左式＝右式，成立

(2)若Q=s時：$(4P+R)(4s+r')=(4P+R)(4s-4)+(4P+R)(r'+4)$成立

(3)當Q=s+1時，則：左式$=(4P+R)\left[4(s+1)+r'\right]$

$=(4P+R)(4s+4+r')=(4P+R)\left[(4s+r')+4\right]$

$=(4P+R)(4s+r')+(4P+R)\times 4$

$=(4P+R)(4s-4)+(4P+R)(r'+4)+(4P+R)\times 4$

$=\left[(4P+R)(4s-4)+(4P+R)\times 4\right]+(4P+R)(r'+4)$

$=(4P+R)\times 4s+(4P+R)(r'+4)$

$=(4P+R)\times\left[4(s+1)-4\right]+(4P+R)(r'+4)=$右式

故由數學歸納法得證：$M'\times N'=(4P+R)(4Q+r')=(4P+R)(4Q-4)+(4P+R)(r'+4)$

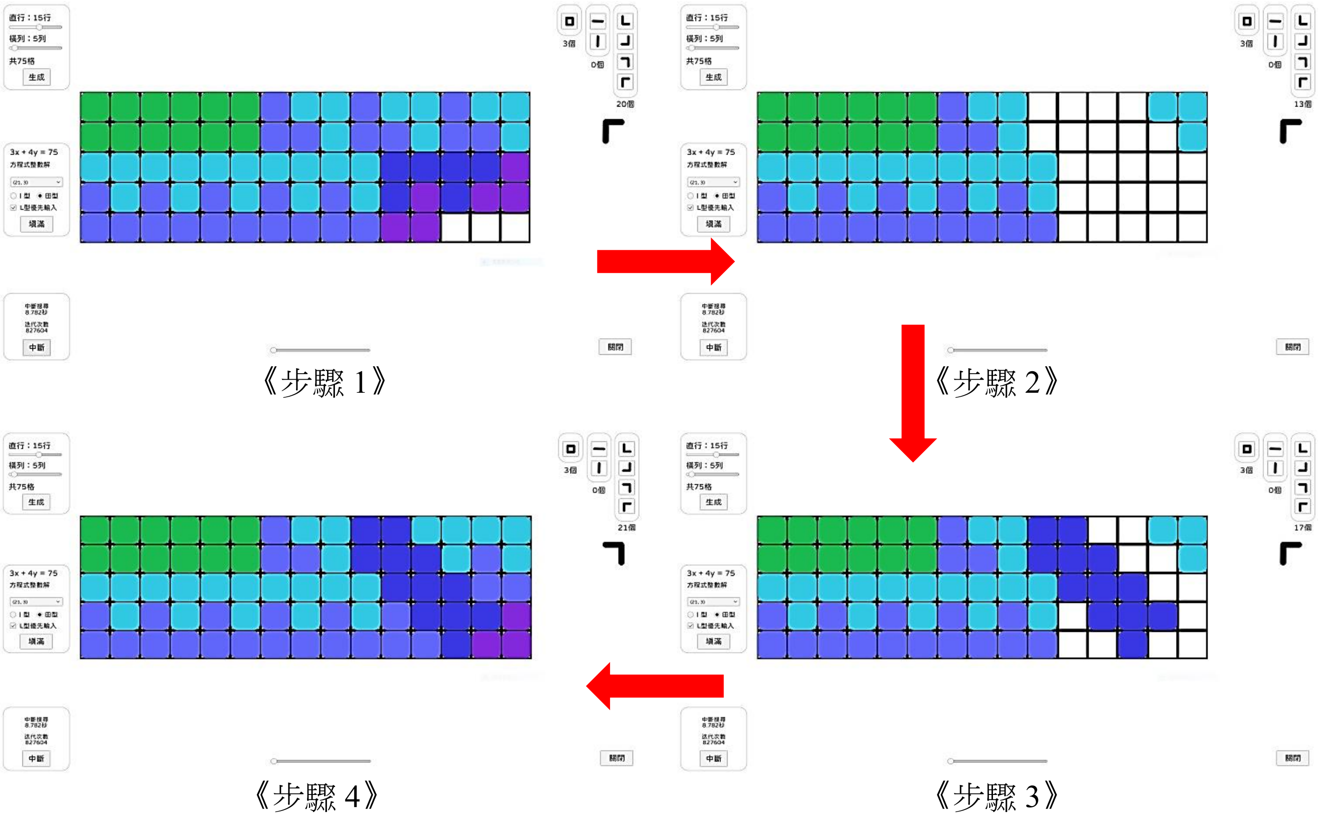
三、利用程式C#動態語言寫出執行，並以圖形使用者操作的友善介面（GUI）方式，進行驗證其規律與異同點，來呈現巧拼問題的覆蓋填滿情形：

拼圖填滿（骨牌）的問題在電腦科學中屬於**精確覆蓋問題**，可使用由高德納教授發表，使用舞蹈鏈 DLX 結構的 **X 演算法解決其問題**。該演算法是一種**遞迴演算法**，**時間複雜度不確定，以深度優先，透過回溯尋找精確覆蓋問題所有可能的解**，且執行過程中會產生數個搜尋樹，由於以深度優先，只有當遇到末端節點時，才會回溯到上一層，它可能會陷在錯誤的路徑中，亦可能會無法從錯誤的選擇路徑中，恢復到靠近解答存在的節點。若無適當的控制，將在錯誤的路徑中打轉，即使最終會找到解答路

徑，卻這些路徑可能比最佳路徑還長。

由於本作品無法確定拼圖各個放置方向的數量，隨著拼圖放置可能性的增加，亦增加了錯誤搜尋的可能性，加上搜尋時間過長等，皆是源自於錯誤的搜尋方向所導致，如果**出現人工可以直接辨識的結果，我們就會中斷並以人工來驗證，完成最後可被覆蓋填滿的圖形。**

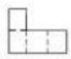
【**圖例**】以 $M'\times N'=5\times15$ 的解(21,3)為例，在 **L 型與田型組合**是**可被覆蓋填滿**，圖示如下：



《步驟 1》《步驟 2》《步驟 3》《步驟 4》

柒、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、倘若將原先我們設定的 **L 字型方塊定義修改換成把 L 字型加長 1 格成為長 L(****)型**，再繼續用「**長 L 型與 I 型、長 L 型與田型來覆蓋填滿各種長方形(矩形)格子或正方形(方陣)格子**」，這個方向值得之後繼續探討。

二、假如將原本我們設定的 **I 字型方塊定義修改換成由邊長 1×9 單位組成長方形拼片及田字型方塊定義修改換成由邊長 3×3 單位組成正方形拼片**，再繼續用「**L 型與 I 型，L 型與田型來覆蓋填滿各種矩形格子或方陣格子，則方格表的劃分方式，是否仍有相同規則性?限制條件則為何?**」，這還需要更多的時間去進一步觀察研討。

三、另一方面，就原本題目設定的田字型方塊定義修改換成矩型方塊，將其改用「L 型與 I 型、L 型與矩型來覆蓋填滿各種矩形格子或方陣格子；舉例：I 字型方塊定義為由邊長 1×6 單位組成長方形拼片及矩型方塊定義為由邊長 2×3 單位組成長方形拼片，則方格表的劃分方式，是否維持相同規則性?需滿足在何種條件下?」此推論的狀況，是我們日後可再進一步探究的方向。

捌、結論

全國科展or旺宏科學獎	組 別	作 品 名 稱	研 究 範 疇 與 貢 獻
第28屆全國科展	國中	虧格	邊長為n格的正方形或邊長為m× n的長方形，其中任意處缺一格時，可用L形填滿與邊長之關係。
第39屆全國科展	國小	擋不住的誘惑-L形	用L形方格填滿時，正方形與長方形的直邊(寬邊)及橫邊(長邊)的格子數之關係，進而推廣到L形加長1格成為長L形。
第50屆全國科展	國中	虧格與方陣的對話	將圖形分解為特定型態(L型及正方形)的方式，先證明了一般L型的方格可用三格的L形加以填滿，再得出一般n × n的正方形格狀圖的虧格問題。
第52屆全國科展	國中	任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	利用一些引理，將一般性問題化簡到少數有限個情況再一一解決，以L-形三階多米諾骨牌(tromino)分別求證了填任意矩形及矩形中任意移除一格或兩格小正方形。
第14屆旺宏科學獎	高中	鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	討論平面上任一方陣填入長條是否會出現虧格，和其虧格位置的問題，進而探討方陣邊長和長條之間的關係，並將長條延伸到小長方形，給出一般化的公式。
第57屆全國科展	國中	虧格與方陣的最後一塊拼圖	考慮m× n的長方形格狀圖，在缺了其中某一格或兩格的前提下，能否用三格的L形之積木填滿的虧格問題，對於缺一格的情形給出了完整解答。
第61屆	**國小**	**從巧拼問題探究L型與I型、田型的覆蓋填滿之解析** **(本作品是我們所研究的)**	**1.藉由巧拼問題轉換成二元一次方程式的解，不論從小正方形方格表延伸到邊長為N×N單位所組成的方陣格子，或從小長方形方格表延伸到邊長為$M'\times N'$ 單位所組成的矩形格子之覆蓋填滿情形: (其中二元一次式為3x+4y)** **(1)只有總格數為3的倍數可完全被L型填滿，若一定都要用到I型或田型，則分別最少都需3塊，除了$M'\times N'=5\times 9=9\times 5$時，在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿。** **(2)當總格數為非3的倍數，在與L型巧拼時，則I型或田型分別最少都需1塊，而方陣圖形除了N=5在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿，其餘都可完全覆蓋，但矩形圖形則需視總格數推知，亦可能I型或田型分別最少都需2塊。** **2.延伸到N×N方陣的覆蓋填滿，經推導驗證後，則探討其結果如下:** **(1)在 4≦N≦7 時，除了 N=5 在 L型與 田型的組合是無法覆蓋填滿圖形，亦即是沒有合理解，其餘都既無間隙又不重疊的完全覆蓋。** **(2)經擴展到與 N=5 相同循環規律時，我們藉由其切割成兩較小矩形格表的組合，經得證在L型與田型的組合是都可覆蓋填滿圖形的。** **(3)找出在N≥8方陣時 $N=4\times k+r(0\le r<4,k\ge 2,k\in N,r\in Z)$，則 $N=4(k-1)+(r+4)$ 可把N×N表格劃分成一個$(r+4)\times(r+4)$小方陣格表，與一個$N\times 4(k-1)$小矩形格表及一個 $4(k-1)\times(r+4)$ 小矩形格表，驗證方陣劃分的一般式成立。** **3.延伸到$M'\times N'$ 矩形的覆蓋填滿，經推導驗證後，則探討其結果如下:** **(1)在$4\le M',N'\le 7$ 時，則5×5及5×7=7×5在只有 L型與 I型的組合是可覆蓋填滿。** **(2) $M',N'\ge 8$ 時，$M'=4\times P+R(0\le R<4,P\ge 2,P\in N,R\in Z)$ 與 $N'=4\times Q+r'(0\le r'<4,Q\ge 2,Q\in N,r'\in Z)$ 對其中任一較長邊劃分成一個$M'\times 4(Q-1)$小矩形格表，及一個 $M'\times(r'+4)$ 小矩形格表，驗證矩形劃分的一般式成立。** **4.透過我們在推導過程中研發找到一個『間隔標記點數模式』方法，能快速且無遺漏的畫出，判斷能否將圖形覆蓋填滿。** **5.對I型與田型，雖然都是四個拼片所組合，但兩者結構不同，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。** **6.利用程式C#動態語言寫出執行，並以圖形使用者操作的友善介面方式，進行驗證其規律與異同點，來呈現巧拼問題的覆蓋填滿情形。**

數學的奧妙之處在於尋求其解決問題的過程中，又引發出此新的問題，讓我們發現可再對<柒、討論>所列出的進行探究。此過程推導磨練我們耐力與毅力，也遇到許多困難與挫折，還要拚命想出解釋的方法與為什麼會這樣，可是，當我們試驗導出時，也就顯得格外愉悅！在我們的努力和老師們的協助下，我們成功地完成了這個試驗，清楚的解釋了為什麼，並從這次的試驗，我們不斷地假設、推導、觀察、驗證和統整歸納的過程中，我們獲得了更多的知識，從中發掘到了數學樂趣，也更能體會「團結就是力量」！

仔細剖析探索，不難發現在日常生活中的每樣東西都有它的規律，相當有趣而奇妙；

另外，我們也發現了巧拼問題中的「間隔標記點數模式」方法，與 L 型、I 型、田型的覆蓋填滿圖形之妙用及其限制。從最初長方形(矩形)方格及正方形(方陣)方格分別延伸到邊長為 $M' \times N'$ 及邊長為 N×N，對於 I 型與田型都是四個拼片所組合，但兩者結構不同，將巧拼問題轉換成二元一次方程式求解，透過我們所研發找到的「間隔標記點數模式」，能快速且無遺漏的畫出是否可將圖形覆蓋填滿，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。這看似簡單且平凡的巧拼問題，加以延伸出其他研究方向並花時間去推導，再由推導結果觀察規律找出通式，其實背後有許多有趣的地方。當遇到瓶頸無法突破時，我們試著找尋相關知識並請教老師們，使問題的研究得以繼續進行，這正是古人所說的:「處處留心皆學問」。有時候一個人做可能非常困難，但如果是幾個同學開始分工，然後再將大家的意見還有分別觀察到的規律結合在一起，就會是更為完整的作品。除了推導出的種種研究結果外，其實「過程」也是非常寶貴的，這些都是我們日後進一步做研究的難得經驗。

玖、參考資料及其他

一、參考資料:

(一)游森棚，巧拼，科學研習月刊，Dec 2020，NO.59-06
(二)吳沛昀、柯睿穎，第五十七屆全國科展國中組數學科「虧格與方陣的最後一塊拼圖」
(三)游垚騰，第五十二屆全國科展國中組數學科第三名「任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題」
(四)李國豪、蔡承志、王琮寓、侯瓔旂，第五十屆全國科展國中組數學科「虧格與方陣的對話」
(五)杜信璋、顧昆潔，第三十九屆全國科展初小組數學科第一名「擋不住的誘惑-L 形」
(六)陳 綽、陳建彰、廖昱善，第二十八屆全國科展國中組數學科第三名「虧格」
(七)陳祐宇、黃梵書、戴培倫，台北市私立復興實驗高級中學三年級作品「再論 L 型覆蓋」
(八)石登輝，第十四屆旺宏科學獎數學類組金獎「鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係」
(九)湯姆斯.歐布里恩，奇數和偶數，漢聲精選世界兒童數學叢書第 2 冊，1988
(十)曼尼斯.凱洛許，看圖學數理，漢聲精選世界兒童數學叢書第 12 冊，1988
(十一)張煥泉著，七巧板大拼排，數學奠基活動-國小中年級組，第一期模組
(十二)馬榮喜、陳世易，國中數學第二冊&第四冊，康軒文教事業股份有限公司，2015
(十三)許志農主編，高中數學第二冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

二、附錄:部份程式碼【轉換為矩陣】

```
public void ConvertToMatrix()
{
    _matrix = new bool[_row.Count, _boardSize + _numberOfPieces.x + _numberOfPieces.y];
    for (int i = 0; i < _row.Count; i++)
    {
        for (int j = 0; j < _boardSize + _numberOfPieces.x + _numberOfPieces.y; j++)
        {
            _matrix[i, j] = _row[i][j];
        }
    }
}
```

【評語】080407

本作品主要探討方塊 L 型與 I 型、田型的巧拼問題。作者結合二元一次方程式與「間隔標記點數模式」，透過實作中觀察與推論，並經由數學歸納法，即可推導出 mxn 方格均可由 L 型與 I 型、田型的方塊混合覆蓋填滿。另外，作者研究初即針對過去相關主題進行分析與探討，也在結論處簡要整理出本研究與過去作品的最大不同之處，展現了科學研究的基礎做工。整體而言，這是一件值得鼓勵的佳作。

作品簡報

從巧拼問題探究L型與I型、田型的覆蓋填滿之解析

- 國小組
- 數學科

摘要

一.將問題先轉換成二元一次方程式的解(其中二元一次式為3x+4y)。

二.透過推導過程研發找到『間隔標記點數模式』方法，能快速且無遺漏的畫出，判斷能否將圖形覆蓋填滿。

三.延伸到N×N方陣或M'×N'矩形，只有總格數為3的倍數，可完全被L型填滿，若一定都要用到I型或田型，則分別最少需3塊；當總格數為非3的倍數，則I型或田型分別最少為1塊或2塊，需視總格數推知。

四.對I型與田型拼片數同但結構不同，部分巧拼是無法填滿，經總格數切割成小方陣或小矩形的組合，找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。

五.以程式C#寫出執行操作的友善介面，進行驗證其規律與異同點。

研究動機

從國立台灣科學教育館網站查詢到【科學研習月刊】：「森棚教官的數學題-巧拼」，加上數學課也學習到七巧板的幾何拼圖，於是我們著手研究推導將L型與I型、L型與田型這兩類巧拼組合，擴充行列格數後覆蓋，觀察其規律性。

研究目的

一、矩形及方陣圖形可否覆蓋填滿情況

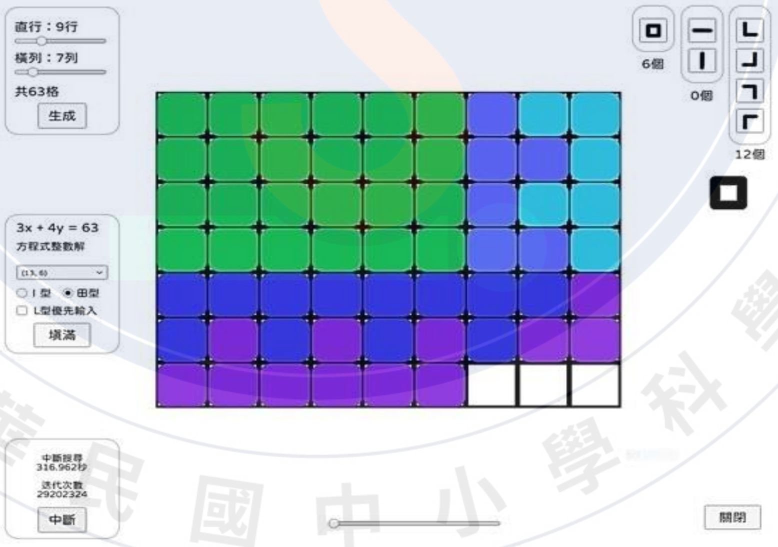
1.分別探討能否只用L型？L型與I型組合？L型與田型組合？來覆蓋填滿

2.研發一種『間隔標記點數模式』方法

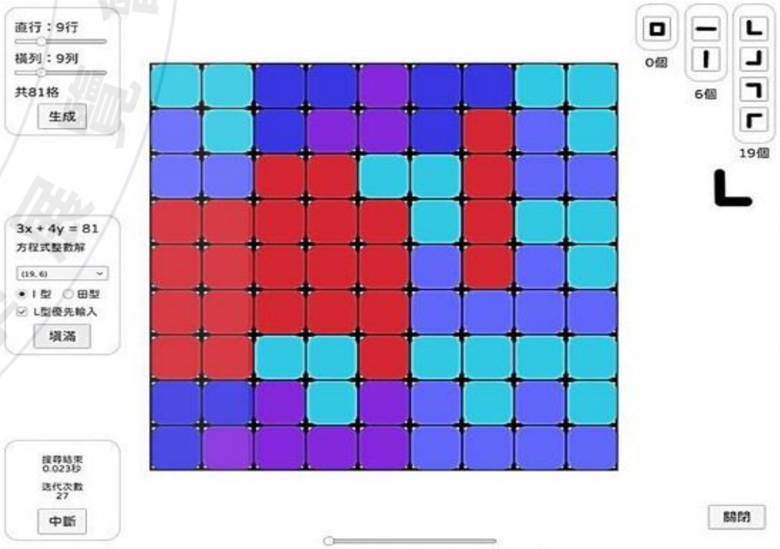
二、方陣及矩形圖形覆蓋填滿之劃分的一般式

分別將劃分的一般式以數學歸納法證明

三、利用程式寫出執行並驗證精確覆蓋問題



(13，6)_失敗
L 田



(19，6)_成功
L I

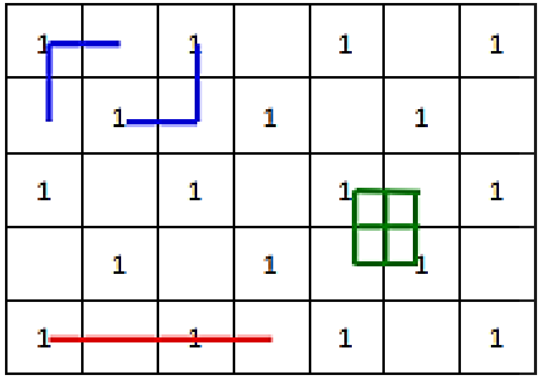
文獻探討

參賽名稱	屆數	組別	作品名稱	數學研究方法	得獎情形
全國科展	28	國中組	虧格	奇數和偶數、3 的倍數、數學歸納法	第三名
全國科展	39	國小組	擋不住的誘惑-L 形	奇數和偶數、3 的倍數、8 的倍數	第一名
全國科展	50	國中組	虧格與方陣的對話	奇數和偶數、mxm-1 $(m\in n, m>1)$方陣	
全國科展	52	國中組	任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	塗色法、3 的倍數、數學歸納法、對稱性	第三名
旺宏科學獎	14	高中組	鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	奇數和偶數、質數與合數、同餘式(mod)	金獎
全國科展	57	國中組	虧格與方陣的最後一塊拼圖	奇數和偶數、6 的倍數、枚舉法、對稱性	

作品名稱	分類	圖形邊長
虧格	虧格填滿正方形劃掉一格或長方形劃掉一格	$(3k+1)(3t+1), k$、$t\geq 1$ 或$(3k+2)(3t+2), k$、$t\geq 2$，以上 k、t 皆為正整數
擋不住的誘惑-L 形	虧格剛好填滿正方形或長方形	(3m)×n，m、$n\geq 1$ ，m、n 皆為正整數
虧格與方陣的對話	虧格填滿正方形劃掉一格	n×n − 1，n≥ 2的正整數
任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	以 L-形三階多米諾骨牌(tromino)填任意矩形及矩形中任意移除一格或兩格小正方形	任意矩形R(m,n), m、$n\geq 0$
鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	方陣邊長和長條之間的關係，和其虧格位置的問題。	在 M×M 方陣邊長中，找出對 1×N 長條或N'×N長方形的實際虧格位置(x,y)
虧格與方陣的最後一塊拼圖	虧格填滿長方形劃掉一格及劃掉二格。	$(3k+1)(3t+1), k$、$t\geq 1$ 或$(3k+2)(3t+2), k$、$t\geq 2$，及$(3k+1)(3t+2), k$、$t\geq 1$，以上 k、t 皆為正整數。

上述五件全國科展文獻主要都是著墨在探討L型(虧格)問題，而旺宏科學獎文獻則探討方陣邊長和長條之 間關係。
我們作品焦點放在**判斷能否拼出覆蓋填滿圖形**，亦是歷屆全國科展作品之評審評語的建議，加上運用不同巧拼組合並推廣到大方陣及大矩形，且分別歸納出劃分方式的一般式，做了與上述所有文獻之不同層面深入地探究。

研究過程及方法



名詞定義：

間隔標記點數模式：

對於任何字型方塊，將其任意旋轉擺放使用，但彼此不重疊，累計所有可能蓋到的數字相加總合。

(1) **L字型方塊**：對於**每個L字型**所有可能蓋到的數字相加總合，可分成佔1點及佔2點的。

(2) **I字型方塊**：對於**每個I字型**所有可能蓋到的數字相加總合皆是佔2點的。

(3) **田字型方塊**：對於**每個田字型**所有可能蓋到的數字相加總合皆是佔2點的。

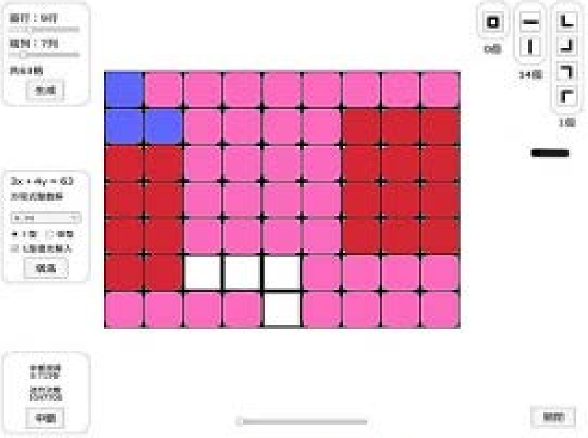
矩形可否覆蓋填滿

$3x+4y=63\ (=7\times9)$

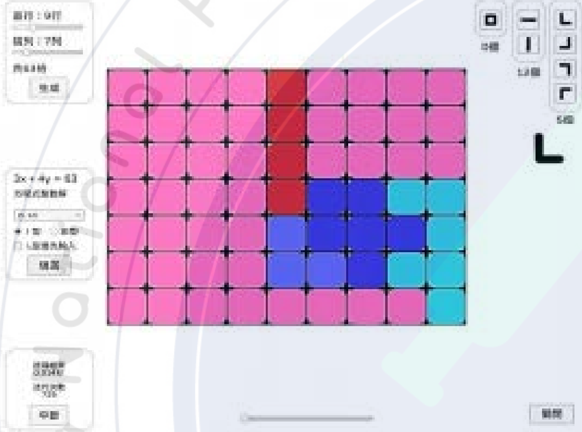
x	1	5	9	13	17	21
y	15	12	9	6	3	0

共 6 組

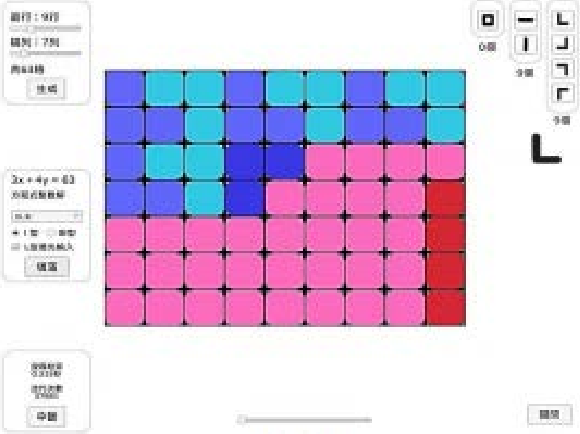
L型與I型，有5組合理



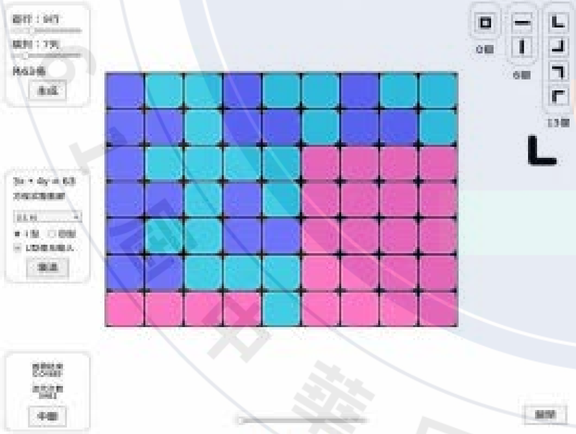
(1，15)_無解



(5，12)



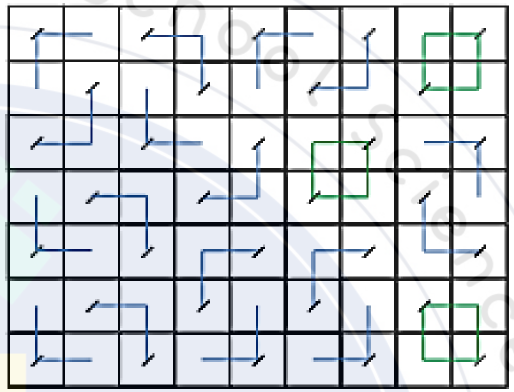
(9，9)



(13，6)

L型與田型，只有2組合理

(17，3) V 合理

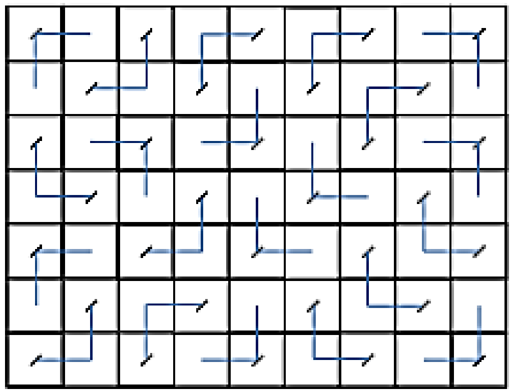


$32-2\times3=32-6=26$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	8	=	8	>26
2	×	9	=	18	

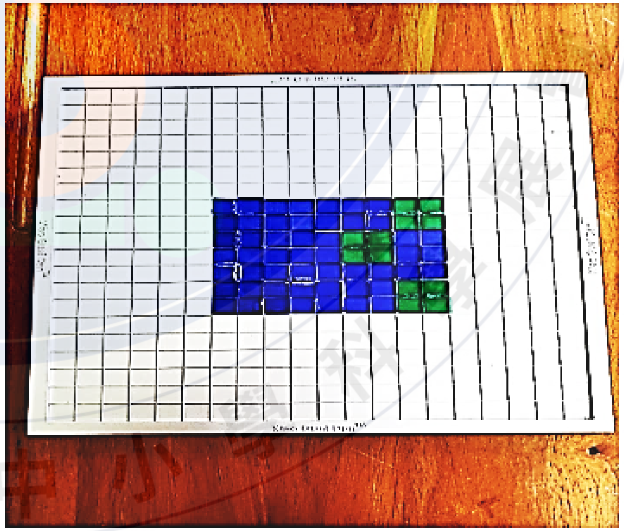
(21，0) V 合理



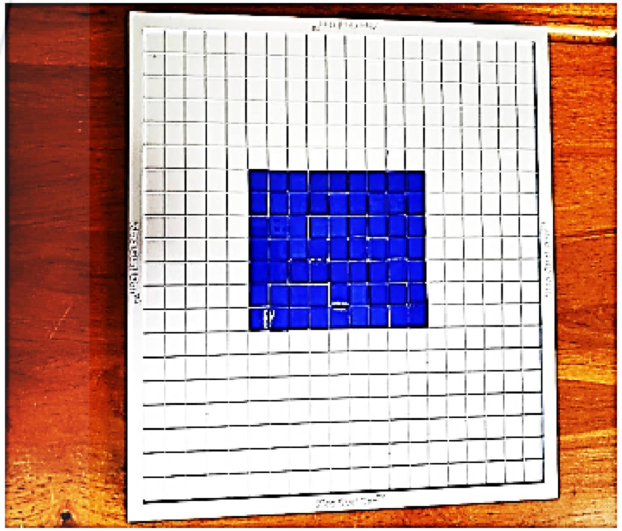
$32-2\times0=32-0=32$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	10	=	10	>32
2	×	11	=	22	



(17，3)



(21，0)

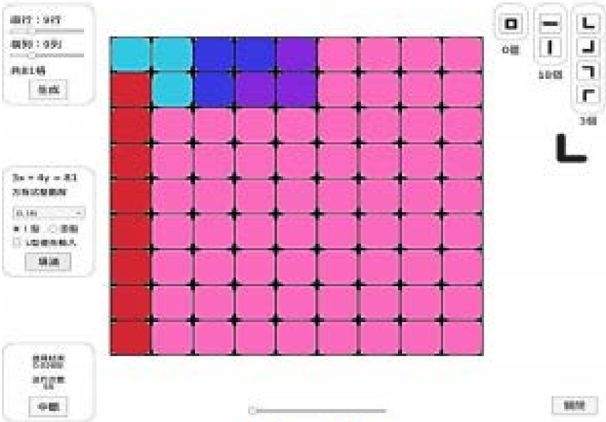
方陣可否覆蓋填滿

L型與I型，7組都合理

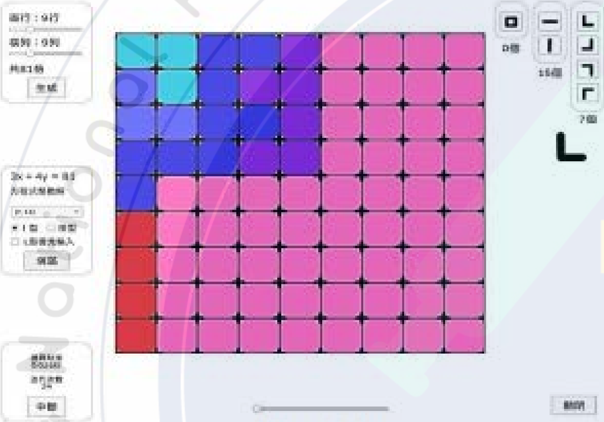
$3x+4y=81(=9\times9)$

x	3	7	11	15	19	23	27
y	18	15	12	9	6	3	0

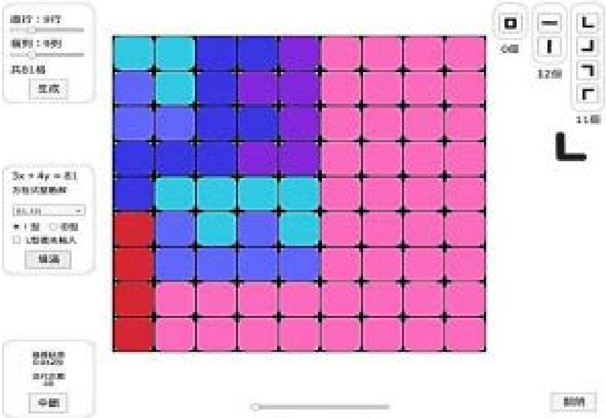
(3，18)、(7，15)、(11，12)、(15，9)、(19，6)、(23，3)、(27，0) 共 7 組，且 7 組都合理。



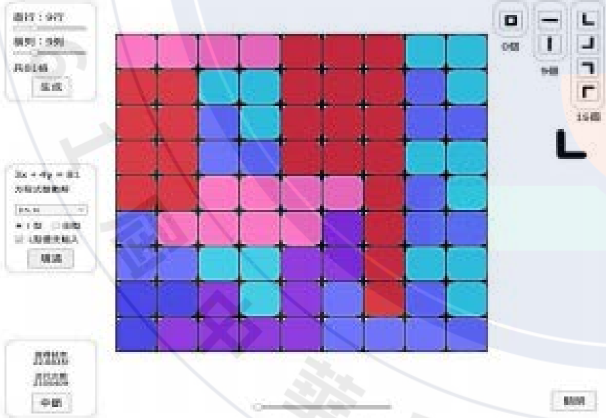
(3，18)



(7，15)



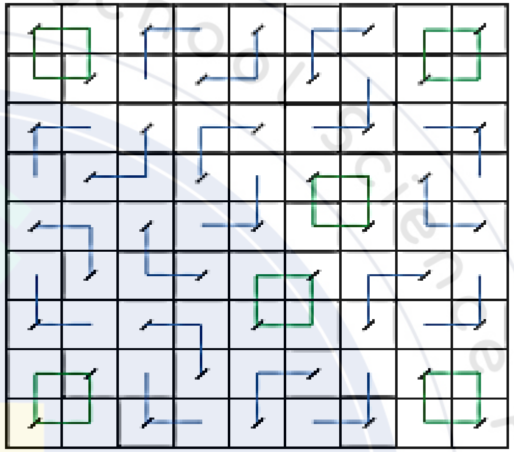
(11，12)



(15，9)

L型與田型，只有3組合理

(19，6) V 合理

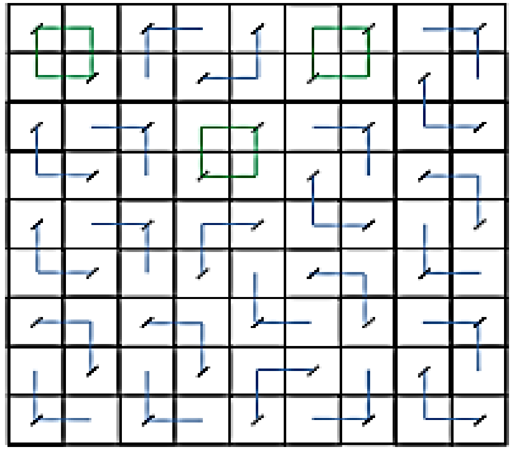


$41-2\times6=41-12=29$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	9 達到	=	9	> 29
2	×	10 達到	=	20	

(23，3) V 合理



$41-2\times3=41-6=35$

L 型可能蓋到為

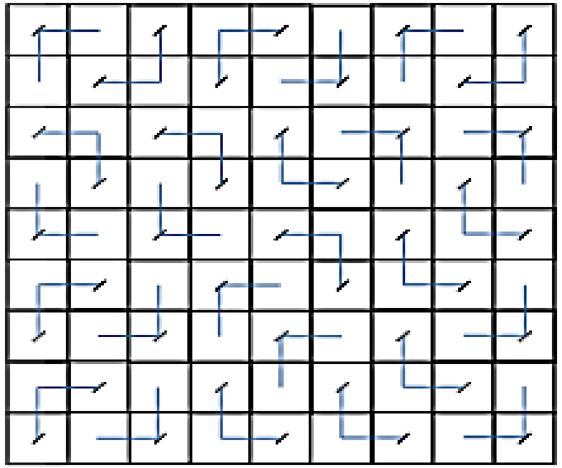
佔點數		個數			
1	×	11 達到	=	11	> 35
2	×	12 達到	=	24	

(27，0) V 合理

$41-2\times0=41-0=41$

L 型可能蓋到為

佔點數		個數			
1	×	13 達到	=	13	> 41
2	×	14 達到	=	28	



研究結果

總格數為3的倍數

方陣及矩形圖形覆蓋填滿情況

(一)方陣圖形可否覆蓋填滿的情況：

方陣格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
4×4=16	0	4	0	4
	4	1	4	1
5×5=25	3	4	X	X
	7	1	X	X
6×6=36	X	X	0	9
	8	3	8	3
	12	0	12	0
7×7=49	15	1	15	1

方陣格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
8×8=64	0	16	0	16
	20	1	20	1
9×9=81	3	18	X	X
	23	3	23	3
	27	0	27	0
10×10=100	X	X	0	25
	32	1	32	1
11×11=121	39	1	39	1

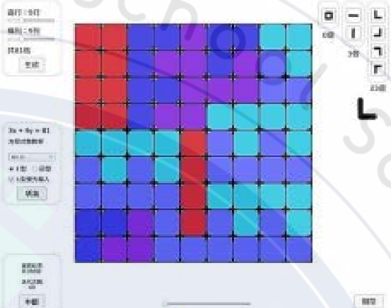
(二)矩形圖形可否覆蓋填滿的情況：

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
4x4=16	0	4	0	4
	4	1	4	1
4x5=20	0	5	X	X
	4	2	4	2
4x6=24	0	6	0	6
	4	3	4	3
	8	0	8	0
4x7=28	0	7	X	X
	8	1	8	1
4x8=32	0	8	0	8
	8	2	8	2
4x9=36	0	9	X	X
	8	3	8	3
	12	0	12	0
4x10=40	0	10	0	10
	12	1	12	1
4x11=44	0	11	X	X
	12	2	12	2

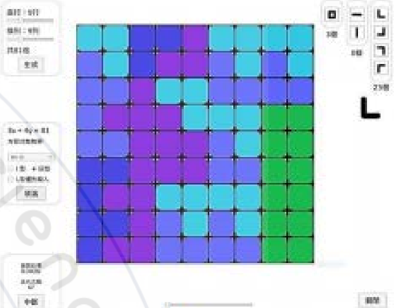
矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
5x4=20	0	5	X	X
	4	2	4	2
5x5=25	3	4	X	X
	7	1	X	X
5x6=30	2	6	X	X
	6	3	6	3
	10	0	10	0
5x7=35	9	2	X	X
5x8=40	0	10	X	X
	12	1	12	1
5x9=45	3	9	X	X
	11	3	X	X
	15	0	15	0
5x10=50	2	11	X	X
	14	2	14	2
5x11=55	17	1	17	1

矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
6×4=24	0	6	0	6
	4	3	4	3
	8	0	8	0
6×5=30	2	6	X	X
	6	3	6	3
	10	0	10	0
6×6=36	X	X	0	9
	8	3	8	3
	12	0	12	0
6×7=42	2	9	X	X
	10	3	10	3
	14	0	14	0
6×8=48	0	12	0	12
	12	3	12	3
	16	0	16	0
6×9=54	2	12	X	X
	14	3	14	3
	18	0	18	0
6×10=60	X	X	0	15
	16	3	16	3
	20	0	20	0
6×11=66	2	15	X	X
	18	3	18	3
	22	0	22	0

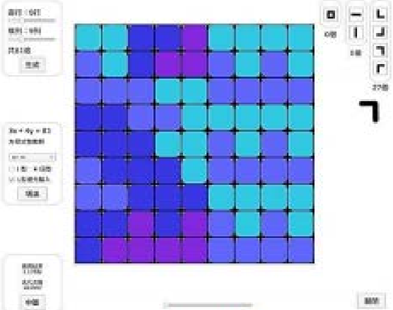
矩形格表	L型的個數	I型的個數	L型的個數	田型的個數
7x4=28	0	7	X	X
	8	1	8	1
7x5=35	9	2	X	X
7x6=42	2	9	X	X
	10	3	10	3
	14	0	14	0
7x7=49	15	1	15	1
7x8=56	0	14	X	X
	16	2	16	2
7x9=63	17	3	17	3
	21	0	21	0
7x10=70	2	16	X	X
	22	1	22	1
7x11=77	23	2	23	2



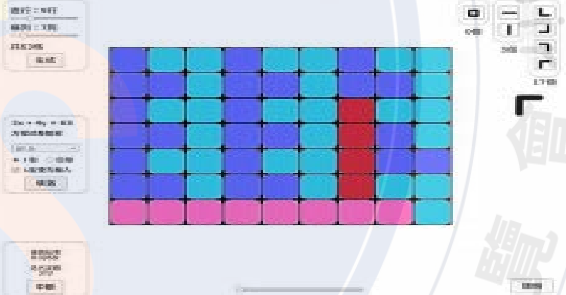
(23，3)
L I



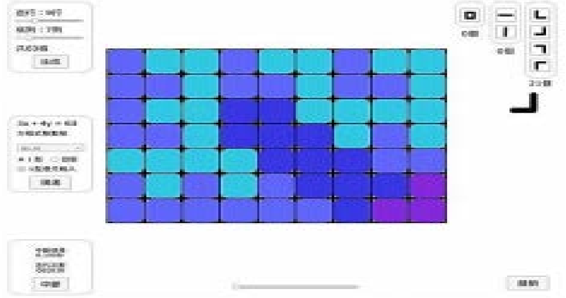
(23，3)
L 田



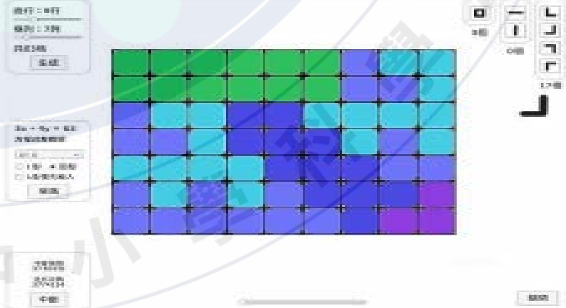
(27，0)
L



(17，3)
L I

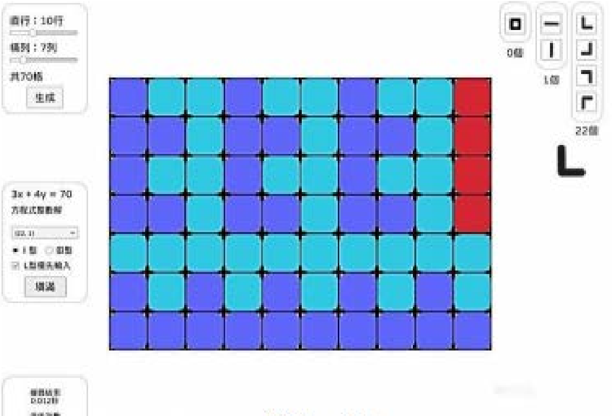


(21，0)
L

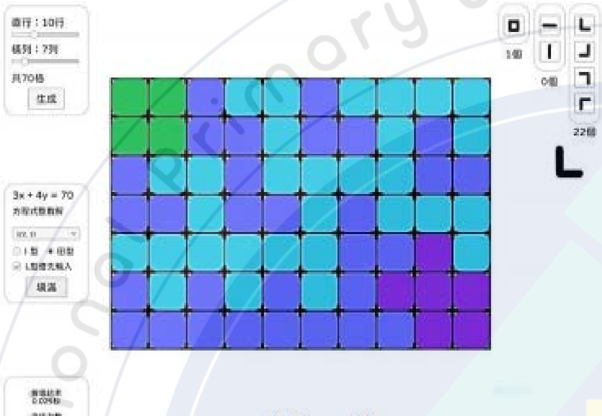


(17，3)
L 田

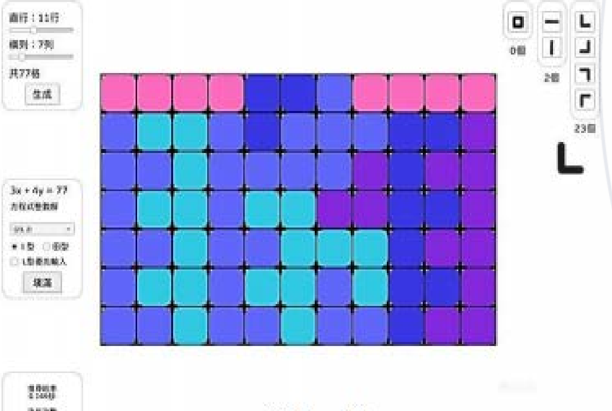
總格數為非3的倍數



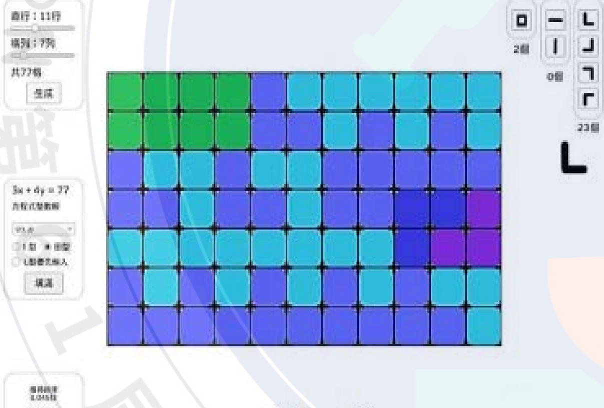
(22，1)
L　I



(22，1)
L　田



(23，2)
L　I



(23，2)
L　田

1. 在$N\times N$方陣的情形下，透過「間隔標記點數模式」方法驗證：$(N\geq 4)$

(1)只有總格數為**3的倍數**時，可**完全被L型填滿**，但總格數為9例外，若一定都要用到I型或田型，則分別**最少都需3塊**。

(2)當總格數為**非3的倍數**，在與L型巧拼時，則I型或田型分別**最少都需1塊**，除了N=5在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿，其餘都可完全覆蓋。

(3)在N=4及擴展到與N=4相同循環規律(如：N=8,N=12,……)時，則**可完全被I型填滿，亦可完全被田型填滿**。

(4)在N=6及擴展到與N=6相同循環規律(如：N=10,N=14,……)時，則**可完全被田型填滿**。

2. 在$M'\times N'$矩形的情形下，透過「間隔標記點數模式」方法驗證：$(M'\geq 4$且$N'\geq 4)$

(1)只有總格數為**3的倍數**時，可**完全被L型填滿**，若一定都要用到I型或田型，則分別**最少都需3塊**，除了$M'\times N'=5\times 9=9\times 5$時，在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿。

(2)當總格數為**非3的倍數**，在與L型巧拼時，則I型或田型分別**最少為1塊或2塊**，需視$M'\times N'$組合的**總格數推知**。

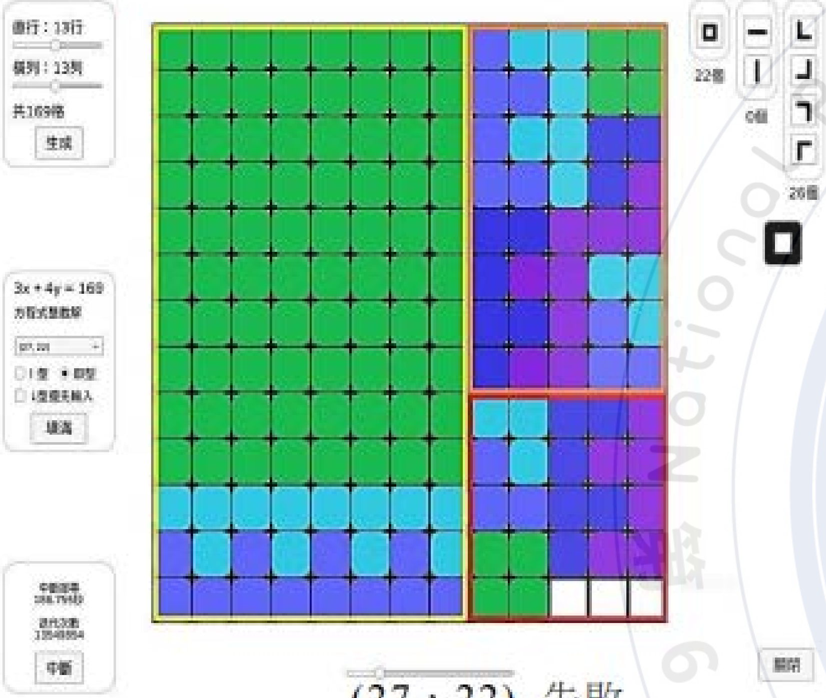
(3)當短邊$4\leq M'\leq 7$固定，長邊$N'\geq 4$時，則可推得長邊N'為**由小到大**，**每4個數組合為一循環**，循環下的狀況大致相同，但在$M'\times N'=5\times 5$及$M'\times N'=5\times 7=7\times 5$時在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿的。

(4)當短邊$M'\geq 8$且長邊$N'\geq 4$時，則可推得M'與N'皆為**由小到大且每4個數組合為一循環**，循環下的狀況大致相同。

方陣劃分的一般式

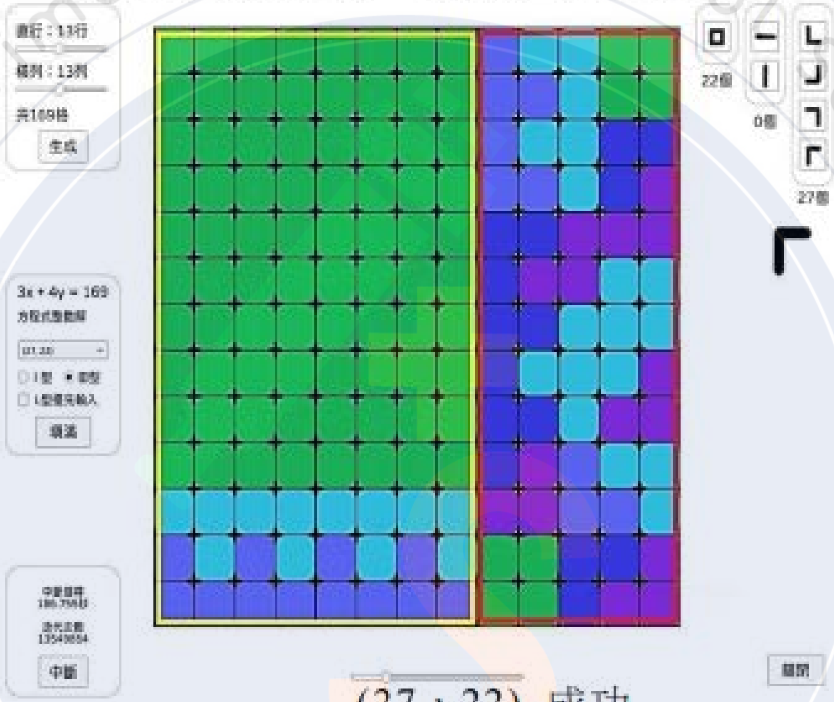
【**範例**】我們再以 $N\times N=13\times13$ 時，來實作驗證方陣格子可被覆蓋填滿，圖形展示如下：

<以作法 1 方式劃分，則圖形無法覆蓋填滿>



(27，22)_失敗
L 田

<以作法 2 方式劃分，則圖形可被覆蓋填滿>



(27，22)_成功
L 田

1.在 $4\le N\le 7$ 時，$(r+4)\times(r+4)$ 小方陣格表能被完全覆蓋，除了 **N=5 在 L 型與田型的組合是無法覆蓋填滿圖形，其餘都可既無間隙又不重疊的完全覆蓋**。

又 $4a\times b$ 小矩形格表，及 $c\times 4d$ 小矩形格表均能被 4×1 小矩形格子完全覆蓋。

所以，$N\times4(k-1)$ 小矩形格表和 $4(k-1)(r+4)$ 小矩形格表均能被 4×1 小矩形格子完全覆蓋。

2.當 $N\ge8$ 時，$N=4\times k+r$ $(0\le r<4，k\ge2，k\in N，r\in Z)$，

則 $N=4(k-1)+(r+4)$ 可把 $N\times N$ 表格劃分成

一個 $(r+4)(r+4)$ 小方陣格表，

與一個 $N\times4(k-1)$ 小矩形格表，

及一個 $4(k-1)(r+4)$ 小矩形格表。

我們以數學歸納法，求證『當延伸到 N×N 方陣的覆蓋填滿時，方格表劃分方式成立』。

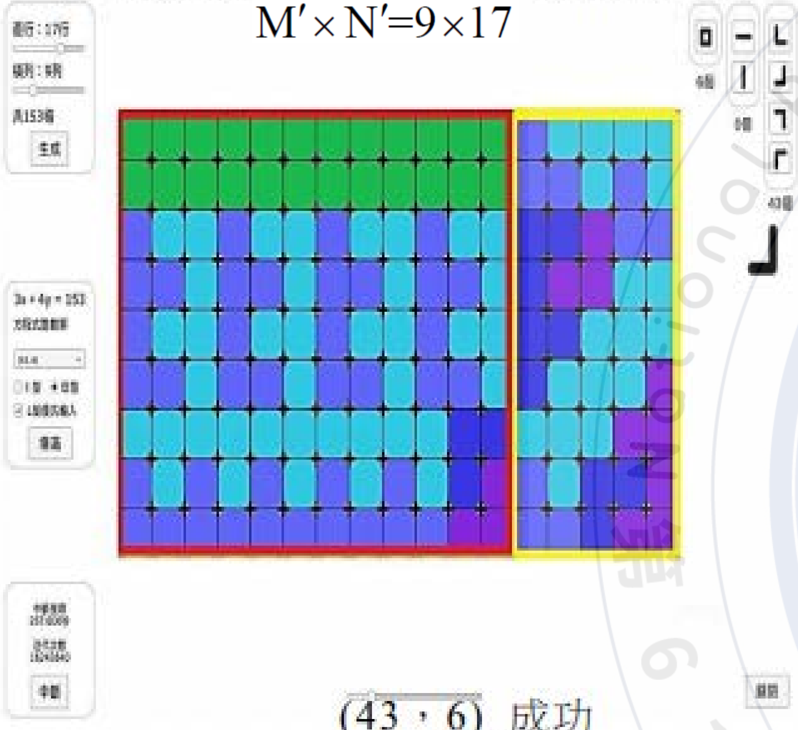
即證明 $N^2=(4k+r)^2=(r+4)(r+4)+(4k+r)\left[4(k-1)\right]+4(k-1)(r+4)$ 成立

矩形劃分的一般式

【**圖例**】我們再分別以上述兩例子，來實作驗證矩形格子可被覆蓋填滿，圖形展示如下：

<例1劃分成兩矩形，則圖形可被覆蓋填滿>

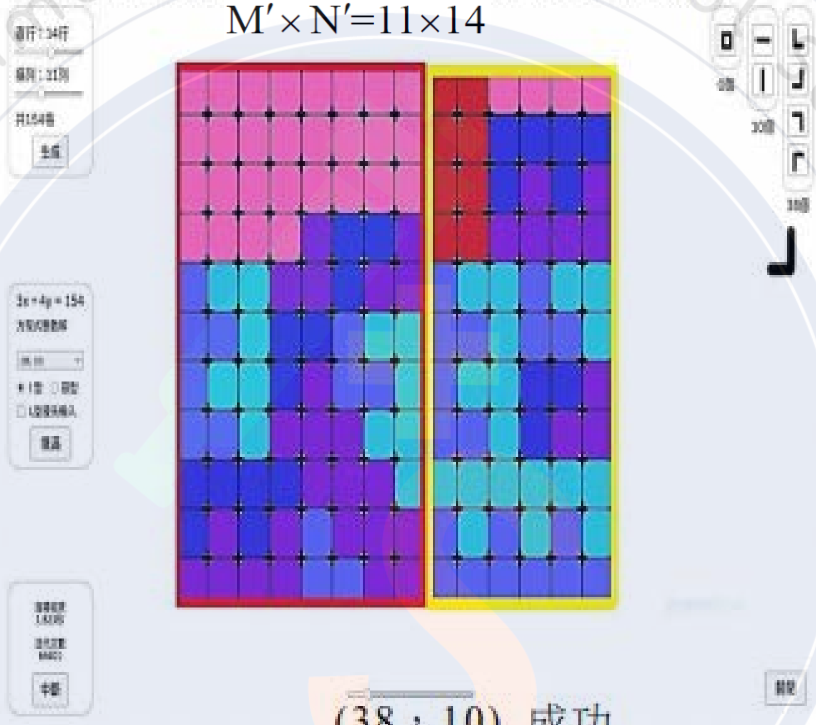
$M'\times N'=9\times 17$



(43，6)_成功
L　田

<例2劃分成兩矩形，則圖形可被覆蓋填滿>

$M'\times N'=11\times 14$



(38，10)_成功
L　I

我們以**數學歸納法**，求證『當延伸到$M'\times N'$矩形的覆蓋填滿時，方格表劃分方式成立』。

即證明$M'\times N'=(4P+R)(4Q+r')=(4P+R)(4Q-4)+(4P+R)(r'+4)$成立

1.若$4\le M'\le 7$且$4\le N'\le 7$時，則$(R+4)(r'+4)$小矩形表格為：

∵$0\le R<4, 0\le r'<4$，當R、r'分別為

(1) R=1 且$r'=1$，則$(1+4)\times(1+4)=5\times 5$，

只有L型與I型的組合，可覆蓋填滿。

(2) R=1 且$r'=3$ (或R=3且$r'=1$)，

則$(1+4)\times(3+4)=5\times 7$或$(3+4)\times(1+4)=7\times 5$，

只有L型與I型的組合，可覆蓋填滿。

2.當$M'\ge 8$且$N'\ge 8$時，

$M'=4P+R=4(P-1)+(R+4)$　$(P\ge 2, P\in N, R\in Z, 0\le R<4)$

$N'=4Q+r'=4(Q-1)+(r'+4)$　$(Q\ge 2, Q\in N, r'\in Z, 0\le r'<4)$

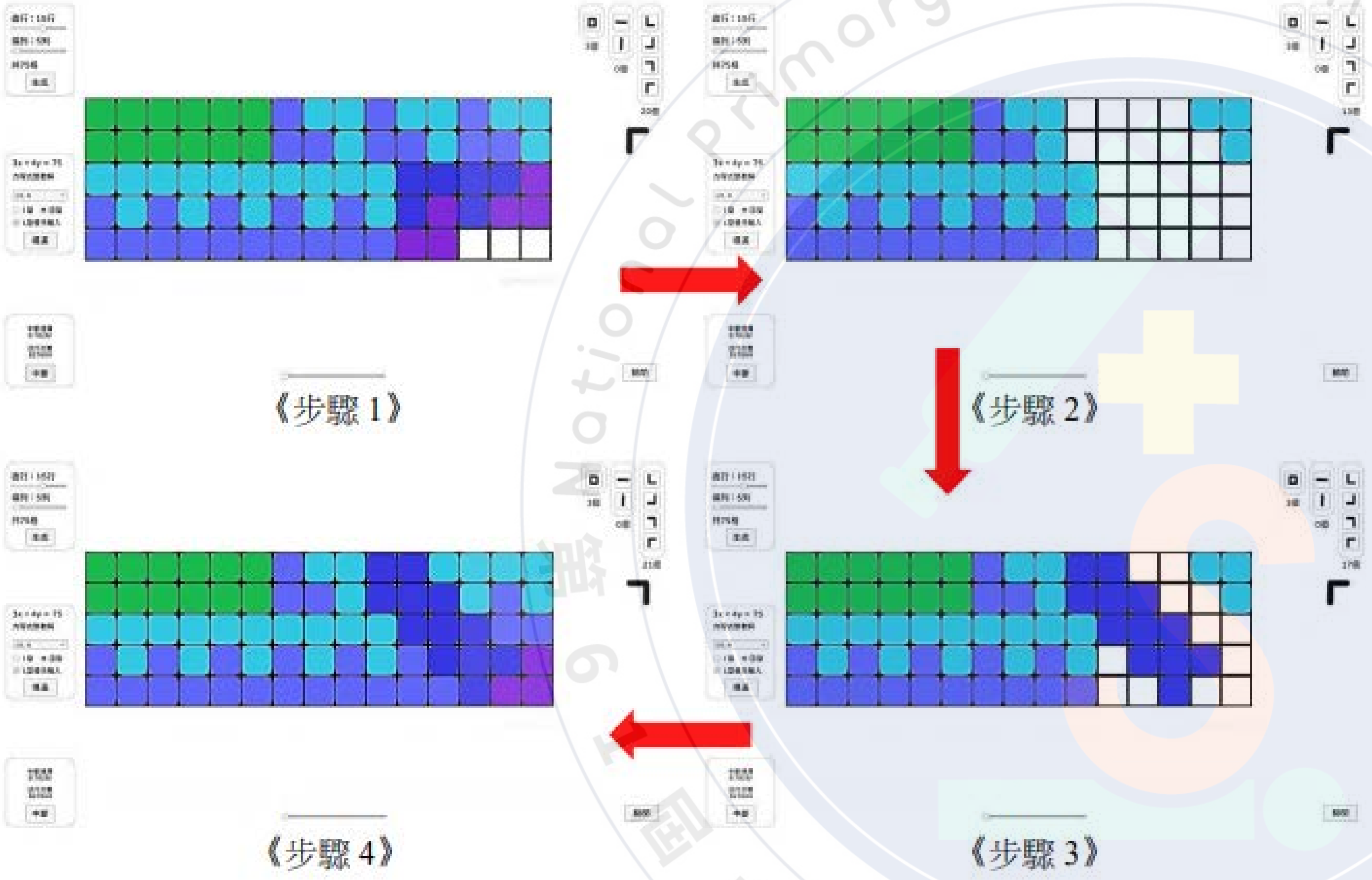
可把$M'\times N'$表格，**對其中任一較長邊進行切割**，

劃分成一個$M'\times 4(Q-1)$小矩形格表，

及一個$M'\times(r'+4)$小矩形格表。

精確覆蓋問題

【圖例】以 $M' \times N' = 5 \times 15$ 的解(21,3)為例，在 L 型與田型組合是可被覆蓋填滿，圖示如下：



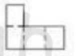
上述巧拼**出現人工可以直接辨識的結果，我們就會中斷並以人工來驗證，完成最後可被覆蓋填滿的圖形**。

1. **拼圖填滿（骨牌）**的問題在電腦科學中屬於**精確覆蓋問題**。
2. 本作品使用**X演算法**解決其問題，該演算法是一種**遞迴演算法**，**時間複雜度不確定**，**以深度優先**，透過**回溯尋找精確覆蓋問題所有可能的解**。
3. 執行過程中會**產生數個搜尋樹**，由於以深度優先，只有當**遇到末端節點時，才會回溯到上一層**，它可能會陷在錯誤的路徑中，亦可能會無法從錯誤的選擇路徑中，恢復到靠近解答存在的節點。若無適當的控制，將在錯誤的路徑中打轉，即使最終會找到解答路徑，卻這些路徑可能比最佳路徑還長。
4. 本作品**無法確定拼圖各個放置方向的數量**，隨著**拼圖放置可能性的增加**，亦增加了錯誤搜尋的可能性，加上**搜尋時間過長**等，皆源於**錯誤的搜尋方向所導致**。

結論

全國科展or旺宏科學獎	組 別	作 品 名 稱	研 究 範 疇 與 貢 獻
第28屆 全國科展	國中	虧格	邊長為n格的正方形或邊長為m× n的長方形，其中任意處缺一格時，可用L形填滿與邊長之關係。
第39屆 全國科展	國小	擋不住的誘惑-L形	用L形方格填滿時，正方形與長方形的直邊(寬邊)及橫邊(長邊)的格子數之關係，進而推廣到L形加長1格成為長L形。
第50屆 全國科展	國中	虧格與方陣的對話	將圖形分解為特定型態(L型及正方形)的方式，先證明了一般L型的方格可用三格的L形加以填滿，再得出一般n × n的正方形格狀圖的虧格問題。
第52屆 全國科展	國中	任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題	利用一些引理，將一般性問題化簡到少數有限個情況再一一解決，以L-形三階多米諾骨牌(tromino)分別求證了填任意矩形及矩形中任意移除一格或兩格小正方形。
第14屆 旺宏科學獎	高中	鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係	討論平面上任一方陣填入長條是否會出現虧格，和其虧格位置的問題，進而探討方陣邊長和長條之間的關係，並將長條延伸到小長方形，給出一般化的公式。
第57屆 全國科展	國中	虧格與方陣的最後一塊拼圖	考慮m× n的長方形格狀圖，在缺了其中某一格或兩格的前提下，能否用三格的L形之積木填滿的虧格問題，對於缺一格的情形給出了完整解答。
第61屆	國小	從巧拼問題探究L型與I型、田型的覆蓋填滿之解析 (本作品是我們所研究的)	1.藉由巧拼問題轉換成二元一次方程式的解，不論從小正方形方格表延伸到邊長為N×N單位所組成的方陣格子，或從小長方形方格表延伸到邊長為$M'\times N'$ 單位所組成的矩形格子之覆蓋填滿情形: (其中二元一次式為3x+4y) (1)只有總格數為3的倍數可完全被L型填滿，若一定都要用到I型或田型，則分別最少都需3塊，除了$M'\times N'=5\times9=9\times5$時，在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿。 (2)當總格數為非3的倍數，在與L型巧拼時，則I型或田型分別最少都需1塊，而方陣圖形除了N=5在L型與田型的巧拼是無法覆蓋填滿，其餘都可完全覆蓋，但矩形圖形則需視總格數推知，亦可能I型或田型分別最少都需2塊。 2.延伸到N×N方陣的覆蓋填滿，經推導驗證後，則探討其結果如下: (1)在 4≤N≤7 時，除了 N=5 在 L型與 田型的組合是無法覆蓋填滿圖形，亦即是沒有合理解，其餘都既無間隙又不重疊的完全覆蓋。 (2)經擴展到與 N=5 相同循環規律時，我們藉由其切割成兩較小矩形格表的組合，經得證在L型與田型的組合是都可覆蓋填滿圖形的。 (3)找出在N≥8方陣時 $N=4\times k+r(0\le r<4,k\ge2,k\in N,r\in Z)$，則 $N=4(k-1)+(r+4)$ 可把N×N表格劃分成一個$(r+4)\times(r+4)$小方陣格表，與一個$N\times4(k-1)$小矩形格表及一個 $4(k-1)\times(r+4)$ 小矩形格表，驗證方陣劃分的一般式成立。 3.延伸到$M'\times N'$ 矩形的覆蓋填滿，經推導驗證後，則探討其結果如下: (1)在$4\le M',N'\le7$ 時，則5×5及5×7=7×5在只有 L型與 I型的組合是可覆蓋填滿。 (2) $M',N'\ge8$ 時，$M'=4\times P+R(0\le R<4,P\ge2,P\in N,R\in Z)$ 與 $N'=4\times Q+r'(0\le r'<4,Q\ge2,Q\in N,r'\in Z)$ 對其中任一較長邊劃分成一個$M'\times4(Q-1)$小矩形格表，及一個 $M'\times(r'+4)$ 小矩形格表，驗證矩形劃分的一般式成立。 4.透過我們在推導過程中研發找到一個『間隔標記點數模式』方法，能快速且無遺漏的畫出，判斷能否將圖形覆蓋填滿。 5.對I型與田型，雖然都是四個拼片所組合，但兩者結構不同，推導找出符合可將方陣圖形及矩形圖形覆蓋填滿之劃分方式的一般式，同時以『數學歸納法』證明之。 6.利用程式C#動態語言寫出執行，並以圖形使用者操作的友善介面方式，進行驗證其規律與異同點，來呈現巧拼問題的覆蓋填滿情形。

討論

一、將原先設定的L字型方塊定義修改換成**把L字型加長1格成為長L(**  **)型**，再繼續用「長L型與I型、長L型與田型來覆蓋填滿各種矩形格子或方陣格子。」

二、將原本設定的**I字型方塊**定義修改換成由邊長**1×9單位**組成長方形拼片及**田字型方塊**定義修改換成由邊長**3×3單位**組成正方形拼片，再繼續用「L型與I型，L型與田型來覆蓋填滿各種矩形格子或方陣格子，則方格表的劃分方式，是否仍有相同規則性? 限制條件則為何?」

三、就原題目設定的**田字型方塊定義修改換成矩型方塊**，將其改用「L型與I型、L型與矩型來覆蓋填滿各種矩形格子或方陣格子；舉例：**I字型方塊**定義為由邊長**1×6單位**組成長方形拼片及**矩型方塊**定義為由邊長**2×3單位**組成長方形拼片，則方格表的劃分方式，是否維持相同規則性?需滿足在何種條件下?」

參考資料及其他

一、參考資料:

(一)游森棚，巧拼，科學研習月刊，Dec 2020，NO.59-06

(二)游垚騰，第五十二屆全國科展國中組數學科第三名「任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題」

(三)杜信璋、顧昆潔，第三十九屆全國科展初小組數學科第一名「擋不住的誘惑-L形」

(四)陳 綽、陳建彰、廖昱善，第二十八屆全國科展國中組數學科第三名「虧格」

(五)石登輝，第十四屆旺宏科學獎數學類組金獎「鋪天蓋地-論虧格位置與長條間的關係」

(六)馬榮喜、陳世易，國中數學第二冊&第四冊，康軒文教事業股份有限公司，2015

(七)許志農主編，高中數學第二冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

二、附錄:部份程式碼【轉換為矩陣】

```
public void ConvertToMatrix()
{_matrix = new bool[_row.Count, _boardSize + _numberOfPieces.x + _numberOfPieces.y];
  for (int i = 0; i < _row.Count; i++)
  {  for (int j = 0; j < _boardSize + _numberOfPieces.x + _numberOfPieces.y; j++)
     {_matrix[i, j] = _row[i][j];       }
  }
}
```