

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

第三名

080406

指間世界「圓弧」「曲」

學校名稱：臺北市私立靜心高級中學(國小部)

作者： 小六 陳瑞妤 小六 蘇禹臻 小六 陳宥叡 小六 鄭宇哲	指導老師： 陳慧娟 石光源
---	---------------------

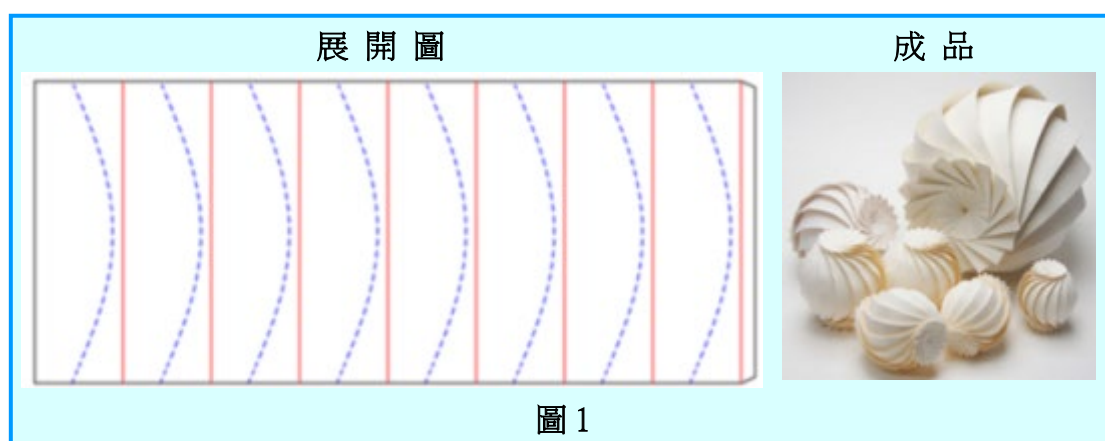
關鍵詞：曲線、曲面、圓弧

摘要

角柱與角錐側面都是由長方形或三角形組合而成，這些形狀的邊都是直的，我們想把直線摺痕改成曲線摺痕，探討能摺的條件與摺出的樣貌。我們依序在平面紙上研究無摺痕、一條曲線摺痕、兩條曲線摺痕、多條直線與曲線摺痕能摺的條件，發現曲面在彎摺處若找不到直線，則此曲面無法摺出來，封閉曲線不能摺成曲面，混合直線與曲線摺痕，摺痕間形成的曲面，只能是凸曲面或凹曲面，不能凹、凸曲面並存。我們把在平面紙上能摺的基本圖形連續組合繪製在圓柱與圓錐上，找出在什麼情況下能摺，其中能摺的作品若滿足 3 條件，則能「定型」摺出正 n 邊形的圖樣。我們可依此設計製作，創作出更多不同的形體應用在生活中。

壹、研究動機

五下在學柱體與錐體時(南一版五下柱體、錐體與球體)，我們觀察展開圖，發現側面都是由長方形或三角形組合而成，這些形狀的邊都是直的，我們就突發奇想，**如果這些直線改成曲線，或直線與曲線混合組成側面，還能摺嗎？如果能摺，那摺出來會是什麼樣貌呢？**於是我們先上網搜尋相關資料，發現日本摺紙家 Jun Mitani(參考文獻資料〔1〕)有摺出像洋蔥般的美麗作品(如圖 1)，與我們的想法很類似，但網頁上只呈現許多有關曲線的摺紙作品，並無說明展開圖是怎麼設計出來的，所以我們想從最簡單的一張紙、一條曲線、兩條曲線…等延伸、拓展做研究，希望能創造出更多不同的形體應用在我們生活中。



貳、研究目的

研究一、一張沒有摺痕的紙，能摺出什麼樣貌？

研究二、在紙上畫一條曲線，曲線都能摺嗎？

研究三、在長方形紙張中，曲線該如何做組合，曲線所圍成的平面才能摺成曲面？

研究四、紙張圍成圓柱，在側面畫縱向不交錯的線條組合，都能摺嗎？

研究五、紙張圍成圓錐，在側面畫上 n 組基本圖形，都能摺嗎？

參、研究設備及器材

影印紙、珠光紙、直尺、圓規、壓痕筆、剪刀、雙面膠、電腦、相機、列表機、小長尾夾。

肆、研究方法

一、研究範圍

1. 本研究的紙是不具彈性、不能拉伸的材質，假設紙張厚度為 0。

2. 摺痕圖中的曲線，皆為圓弧線，不是任意的曲線。

3. 摺痕線不論是直線還是曲線，線條的端點都有碰到紙張邊緣(如圖 2)，線條在紙張中間無碰到邊緣的情形(如圖 3)，不在本研究範圍內。

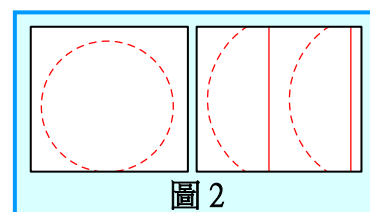


圖 2

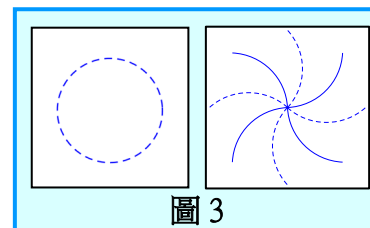


圖 3

二、名詞解釋及符號定義

1. **摺痕線**：在紙上繪製的線條(包含直線與曲線)，須按照線條摺疊，實線摺成山線(凸線)，虛線摺成谷線(凹線)。

2. **摺痕角**：P 是摺痕線上任一點，過 P 點且沿摺痕線的切線方向摺疊後，P 的法線與原始平面的夾角(如圖 4、5)。

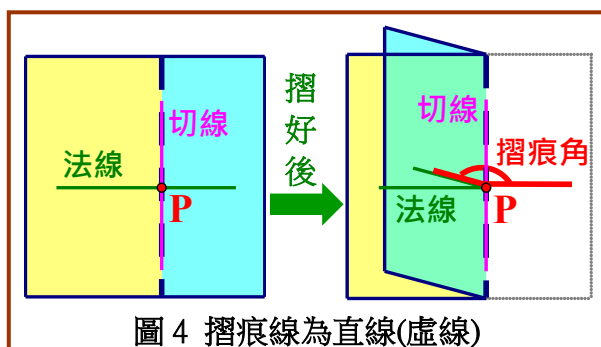


圖 4 摺痕線為直線(虛線)

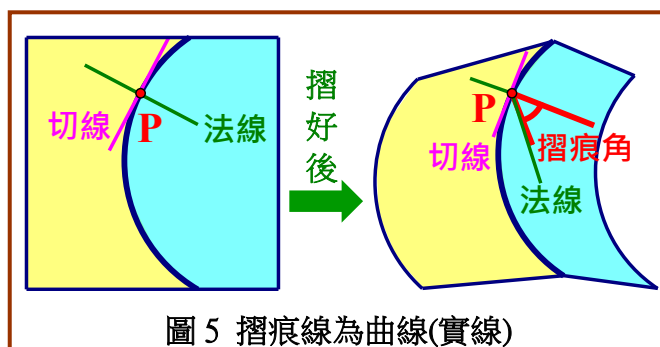


圖 5 摺痕線為曲線(實線)

3.曲面：平滑彎曲的面。以符號「+」代表凸曲面，「-」代表凹曲面(如圖 6、7)。

4.曲線內側與外側：紙沿曲線(摺痕線)摺，若與曲線凹口方向同一側，則此側稱為曲線內側，而另一側稱為曲線外側(如圖 6、7)。

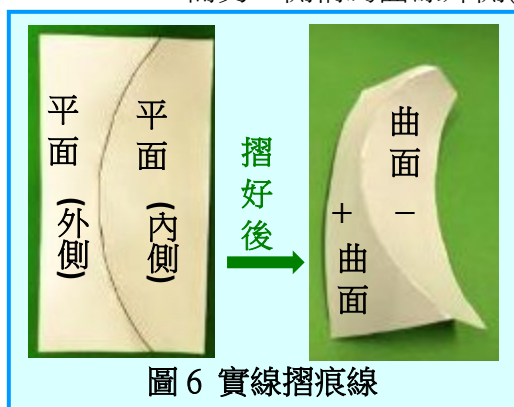


圖 6 實線摺痕線

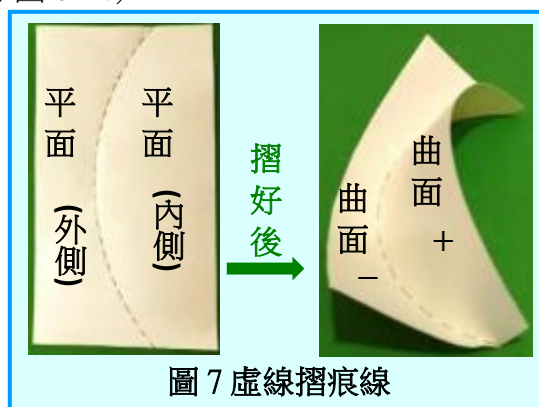


圖 7 虛線摺痕線

5.曲線能摺：紙沿曲線(摺痕線)摺，若曲線同一側同為凸曲面(或凹曲面)，則稱曲線能摺(如圖 8、9)。

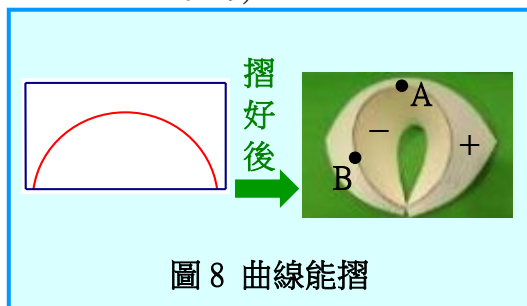


圖 8 曲線能摺

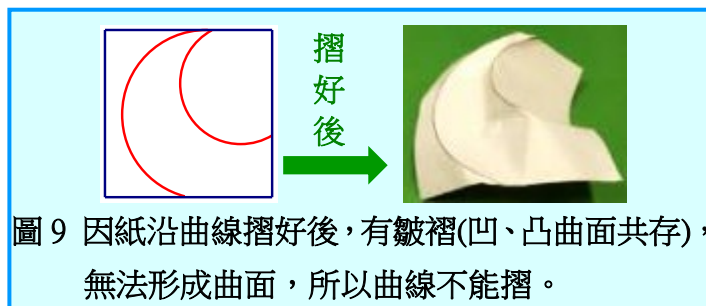


圖 9 因紙沿曲線摺好後，有皺褶(凹、凸曲面共存)，無法形成曲面，所以曲線不能摺。

6.定型：紙沿摺痕線摺好後，摺痕角固定，不因外力而變形(如圖 10、11)。



圖 10 長方體為定型

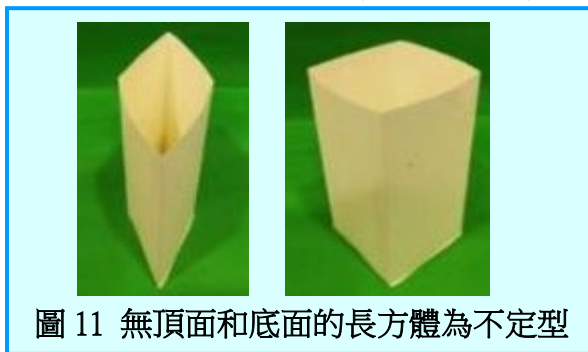


圖 11 無頂面和底面的長方體為不定型

7.上點、下點、中點、凸點：

在柱體或錐體側面畫圓弧線，弧與頂邊相交的點稱為上點(錐體上點只有一個，即頂點)，弧與底邊相交的點稱為下點，弧與側面中線相交的點稱為中點，弧上與 \overline{AE} 距離最長的點稱為凸點，當 $\overline{AB} = \overline{EF}$ 時，中點即為凸點(如圖 12)。

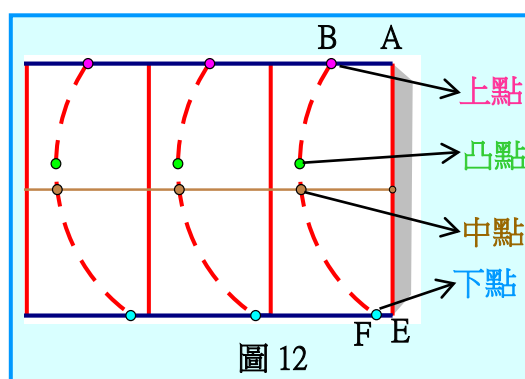


圖 12

★性質提出與整理

根據以上的名詞解釋及符號定義，我們整理出以下的摺紙性質

1.摺直線摺痕

- 性質一：紙沿直線摺好後，直線上每一點，摺痕角皆相同(如 P.2 圖 4)。
- 性質二：平面紙沿直線摺好後，直線兩側仍是平面(如 P.2 圖 4)。
- 性質三：曲面紙沿直線摺好後，直線兩側可以是凹、凹曲面，凸、凸曲面，或一凹一凸(如圖 13)。

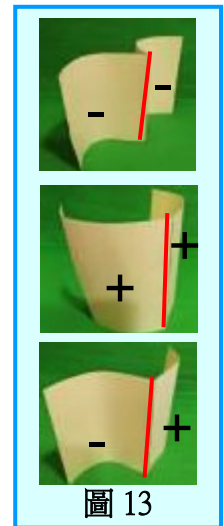


圖 13

2.摺曲線摺痕

- 性質四：紙沿曲線摺好後，曲線上每個點的摺痕角不盡相同，其中曲線最彎處摺痕角最大(如 P.3 圖 8，A 點摺痕角較大，B 點摺痕角較小。)
- 性質五：紙沿曲線摺好後，曲線兩側形成曲面。
 - 性質 5-1：紙沿曲線實線摺好後，曲線內側會形成凹曲面，外側形成凸曲面(如 P.3 圖 6)。
 - 性質 5-2：紙沿曲線虛線摺好後，曲線內側會形成凸曲面，外側形成凹曲面(如 P.3 圖 7)。
 - 性質 5-3：曲面只能是凸曲面或凹曲面任一種，同一曲面不能凹、凸曲面並存(如 P.3 圖 9)。
- 性質六：平面紙上有直線與曲線(2 線條並排且最多交於一點)，曲線摺好後，會帶動直線彎摺，其中凸曲面會使直線向外凸，凹曲面會使直線向內凹(如圖 14)。

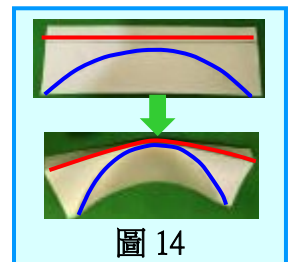
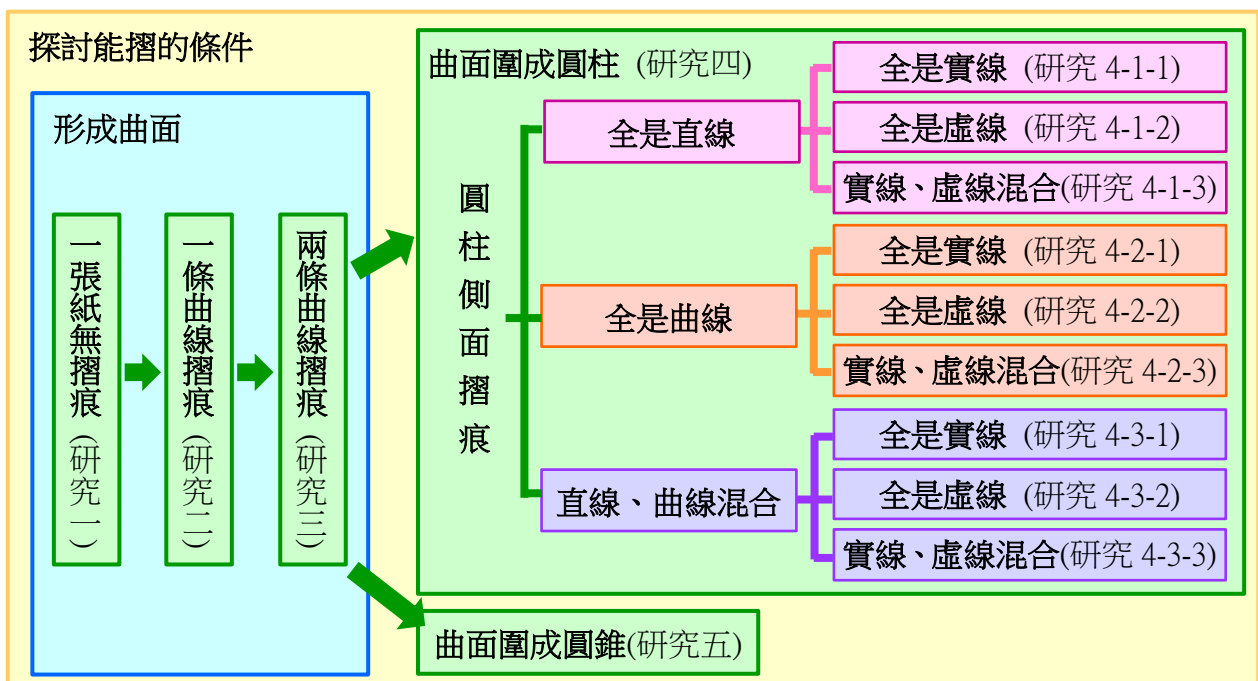


圖 14

三、研究架構圖



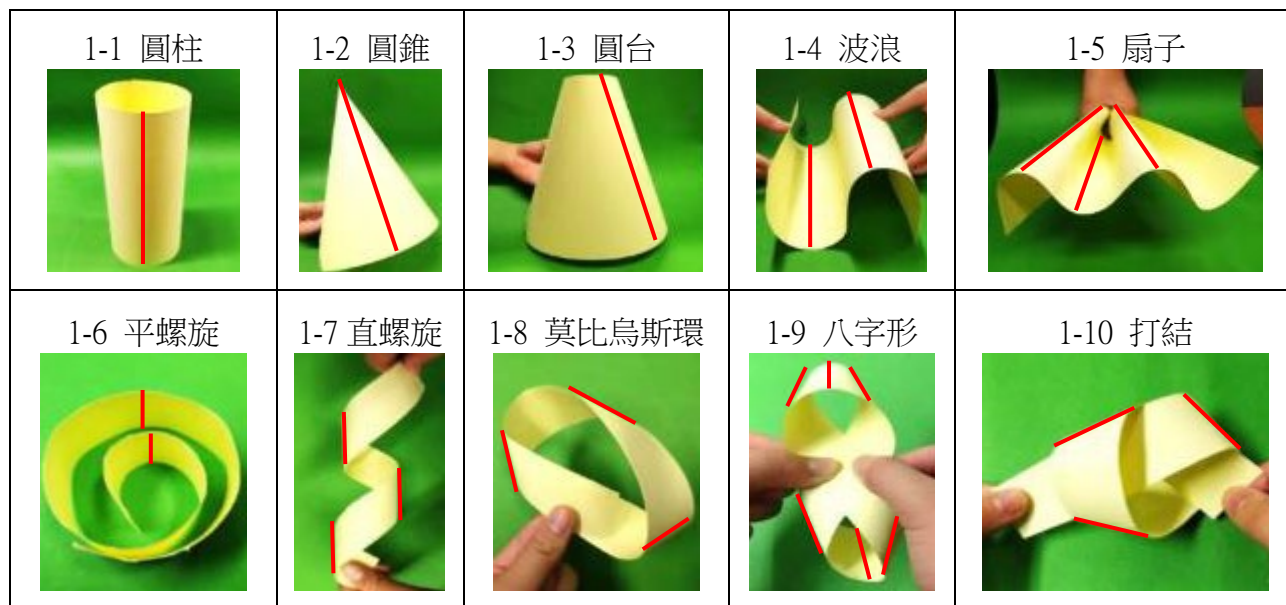
伍、研究過程與結果

研究一、一張沒有摺痕的紙，能摺出什麼樣貌？

(一)製作過程 拿一張長方形紙任意彎摺，但不能摺出摺痕，將摺出的不同樣貌拍照記錄下來。

(二)製作成果 我們將摺出的成果依不同樣貌各取一代表，分成下列 10 類，並予以命名，紅線

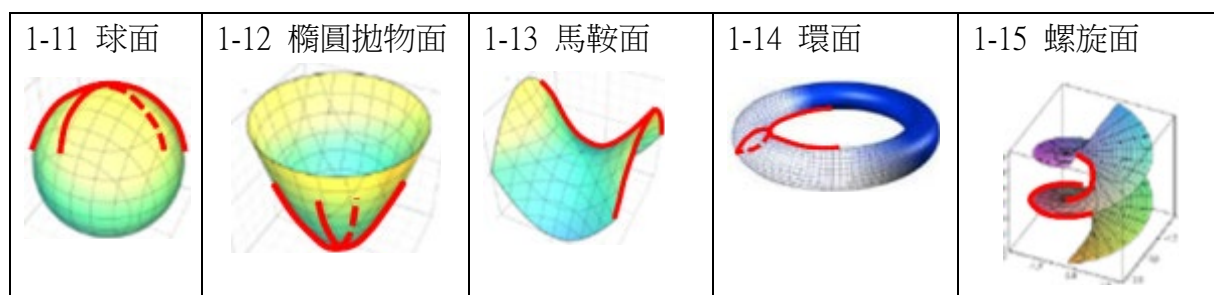
代表紙張在彎摺處的直線。



(三)發現與歸納

1.將紙任意彎摺，能摺出不同樣貌的曲面，但共同點是**都能在紙張最彎摺處(曲面)，找到一條直線。**

2.我們查出還有下列 5 種不同樣貌的曲面，在這些曲面最彎摺處，都找不到直線，我們也實際摺摺看，確實都摺不出來。(紅色線為曲面最彎摺處，紅虛線為位在曲面背後)



圖片來源：維基百科(參考文獻資料〔2〕)

研究二、在紙上畫一條曲線，曲線都能摺嗎？

(一)想法

對於曲線彎曲程度不同、弧長不同、弦長不同、弧的兩端點在長方形紙的不同邊緣處，所繪製出的圓弧線就不盡相同，想探討到底長什麼樣的曲線才能摺。

(二)製作過程

- 1.用 GSP 畫一個半徑 2 公分的圓與 2 公分的弦，並將弦貼近紙張邊緣。
- 2.按照摺痕摺，觀察曲線上每一個點的摺痕角是否都能同時大於 0° 且形成曲面。
- 3.重複步驟 1~2，改變圓半徑、弦長、弧長與曲線端點在長方形紙邊緣不同位置。

(三)製作成果

(註：粉紅線代表紙張在彎摺處的直線)

編號	摺痕圖	半徑 (cm)	弦長 (cm)	弧長 (cm)	摺好照片		是否能摺
					背面	側面	
2-1		2	0	12.56			×
2-2		2	2	10.36			○
2-3		3	2	16.66			○
2-4		4	2	22.92			○
2-5		3.7	5.8	16.66			○
2-6		5.79	11.47	16.66			○
2-7		3	0.5	18.28			○
2-8		3	3.5	15.04			○
2-9		5.79	11.47	16.66			○
2-10		5.79	11.47	16.66			○

(四)發現與歸納

1. **封閉曲線不能摺**(如編號 2-1)。

理由：若封閉曲線能摺，則由**性質五**知：曲線內部會形成曲面(凸或凹曲面)，但很明顯封閉曲線內部還是平面，因此封閉曲線不能摺。

2. **非封閉曲線**，不論曲線彎曲程度多大，弧長、弦長多長，弧的兩端點在紙的何處，**皆能摺**(如編號 2-2~2-10)。

理由：若為非封閉曲線，摺痕為圓弧，則存在一弦長，不論弦多短，都存在一中點，以此中點作為頂點， $\frac{1}{2}$ 弦長作為側邊，使紙張沿摺痕線摺好後，將弧的兩端點相碰，從側面看，會摺成類似斜圓錐的樣貌，且在紙張最彎摺處，可以找到一條直線(如圖 15 粉紅線)，由**研究一**得知此情形是可以摺。



3. 當弧的兩端點在長方形紙張的同一邊時，若直徑等於弦長，摺好後從側面看，會摺成直圓錐的樣貌。

理由：(用**反證法**說明)

設 A 為圓弧上任一點，D、E 為弧的兩端點，B 為弦 \overline{DE} 的中點，
假設不會摺成直圓錐的樣貌，即 $\overline{BD} \neq \overline{BA}$ (如圖 16)，

(1) 當 $\overline{BD} > \overline{BA}$ ，

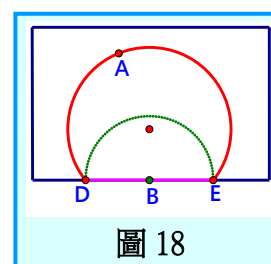
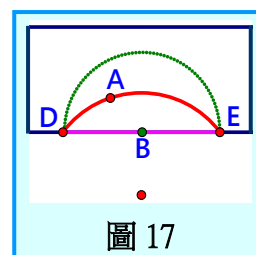
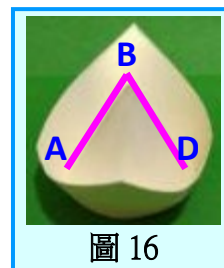
即以 B 為圓心， \overline{BD} 為半徑畫圓弧(綠色點線)，
原本在長方形紙張的圓弧(紅色)必在綠色弧內側(如圖 17)，
所以直徑不等於弦長(與已知矛盾)。

(2) 當 $\overline{BD} < \overline{BA}$ ，

即以 B 為圓心， \overline{BD} 為半徑畫圓弧(綠色點線)，
原本在長方形紙張的圓弧(紅色)必在綠色弧外側(如圖 18)，
所以直徑不等於弦長(與已知矛盾)。

故由(1)(2)知當弧的兩端點在長方形紙張的同一邊時，

若直徑等於弦長，摺好後從側面看，會摺成直圓錐的樣貌。

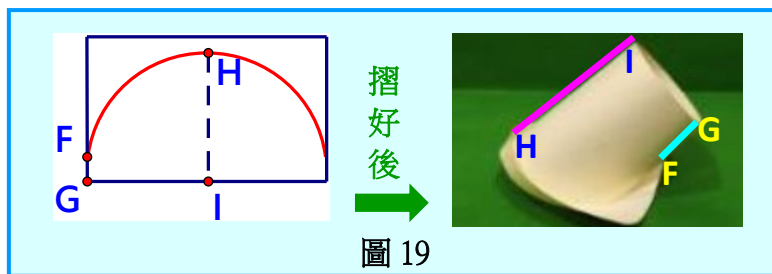


摺痕圖			
直徑與弦長關係	直徑 > 弦長	直徑 = 弦長	直徑 > 弦長
摺好後的側面			
樣貌	類似斜圓錐	直圓錐	斜圓錐

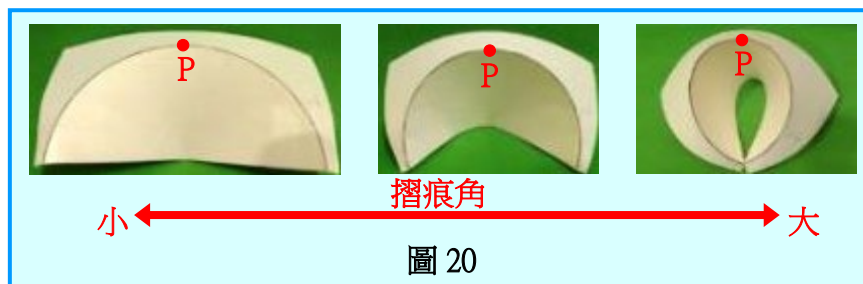
4.當弧的兩端點在長方形紙張的對邊時，摺好後從側面看，摺不出直圓柱的樣貌。

理由：如圖 19，若能摺出直圓柱的樣貌，則 $\overline{FG} = \overline{HI}$ ，

但由圓弧摺痕圖知 \overline{HI} 必大於 \overline{FG} ，所以摺不出直圓柱的樣貌。



5.對曲線上同一點 P 的摺痕角愈大，摺好後曲線愈彎，整體外形愈小(如圖 20)。



研究三、在長方形紙張中，曲線該如何做組合，曲線所圍成的平面才能摺成曲面？

(一)想法

由性質五知：實線(虛線)曲線摺好後，會在內側(外側)形成凹曲面，外側(內側)形成凸曲面，且凹、凸曲面不能並存在兩曲線間，所以我們想將曲線做不同組合，實際摺摺看，若兩曲線間凹、凸曲面並存，紙會變怎樣？2 條曲線該如何組合，才能摺？

(二)製作過程

- 1.用 GSP 畫兩條非封閉且不相交的實線曲線。
- 2.同 1.改變兩條實線曲線，畫出排列組合不同、相交情形不同的實、虛線曲線。
- 3.實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺好。

(三)製作成果

編號	摺痕圖	摺好照片	是否能摺	編號	摺痕圖	摺好照片	是否能摺
3-1			×	3-2			○
3-3			○	3-4			○
3-5			×	3-6			×
3-7			○	3-8			○
3-9			×	3-10			×
3-11			×	3-12			×

(四)發現與歸納

設兩條曲線摺痕線將平面紙張分割成若干個區域

1.若一曲線完全在另一曲線的內側，則兩曲線摺痕線需為一實線一虛線才能摺(如圖 21)。

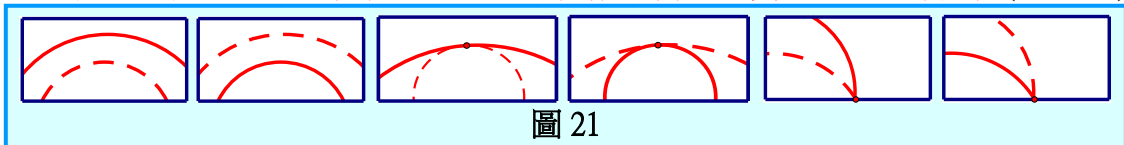


圖 21

理由：(以編號 3-1 用反證法說明，同理圖 5 中的摺痕圖情況相同。)

假設兩曲線摺痕線不為一實線一虛線，

(1)當兩曲線摺痕線為兩實線時，

實線曲線摺好後，由性質 5-1 知內側會形成凹曲面，外側會形成凸曲面，

當其中一條曲線摺好後，便決定此張紙形成凹、凸曲面的位置(如圖 22)，

因由性質 5-3 知凹、凸曲面不能並存，

所以另一條實線曲線會在原先摺好的曲線外側(如圖 23)，(與已知矛盾)。

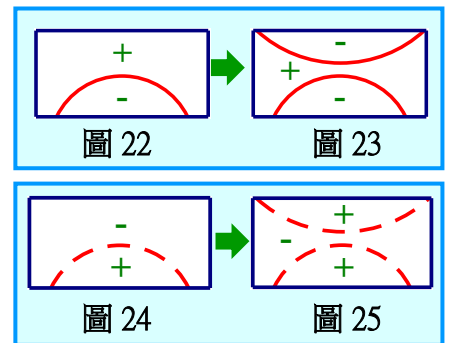
(2)當兩曲線摺痕線為兩虛線時，

虛線曲線摺好後，由性質 5-2 知內側會形成凸曲面，外側會形成凹曲面，當其中一條曲線摺好後，便決定此張紙形成凹、凸曲面的位置(如圖 24)，

因由性質 5-3 知凹、凸曲面不能並存，

所以另一條虛線曲線會在原先摺好的曲線外側(如圖 25)，(與已知矛盾)。

故由(1)(2)知若一曲線完全在另一曲線的內側，則兩曲線摺痕線需為一實線一虛線才能摺。



2.若兩曲線完全不在對方曲線的內側（或外側），則兩曲線摺痕線需同為兩實線（或兩虛線）
 才能摺(如圖 26)。

理由：同(1)

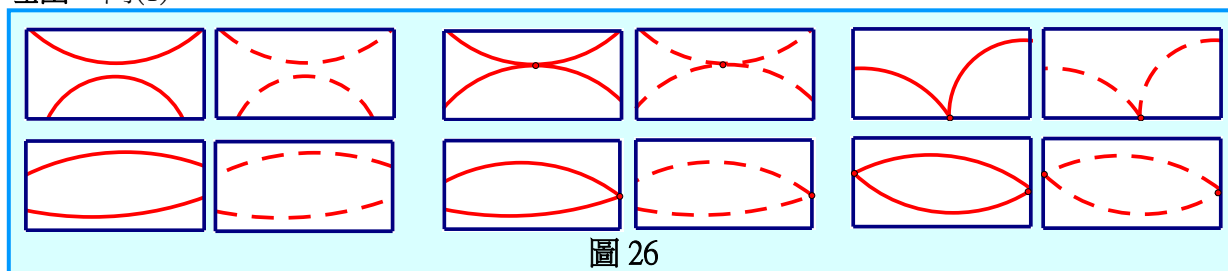


圖 26

3.將各區域塗成黑或白色，相鄰的區域須不同色。在曲線摺痕線的同側區域中，若存在此摺痕線圍出的區域，且這些區域為有黑有白，則不能摺(如圖 27)。

理由：(以編號 3-9 用反證法說明，同理圖 28 中的摺痕圖情況相同。)

假設在符合條件下，曲線摺痕線能摺，

由性質五知曲線一側會形成凹曲面(記作-)，另一側會形成凸曲面(記作+)，

若兩曲線摺痕線為

(1)兩實線或兩虛線(如圖 29)，則由性質 5-1、5-2 知兩黑色區域會凹、凸曲面並存(與性質 5-3 矛盾)。

(2)一實線一虛線(如圖 30)，則由性質 5-1、5-2 知兩白色區域會凹、凸曲面並存(與性質 5-3 矛盾)。

由(1)、(2)知

在曲線摺痕線的同側，若與此曲線共同邊的區域為不同色，則不能摺。

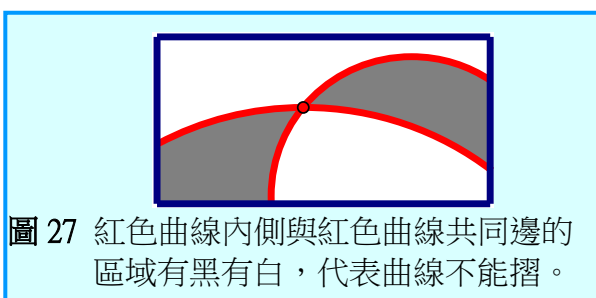


圖 27 紅色曲線內側與紅色曲線共同邊的區域有黑有白，代表曲線不能摺。

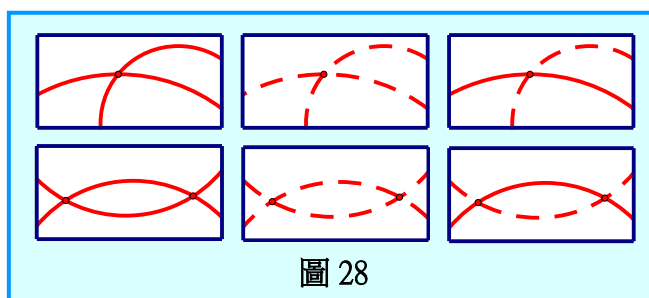


圖 28

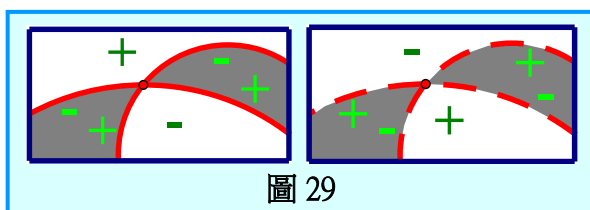


圖 29

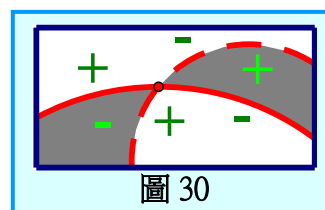


圖 30

進一步發展

1.若在不能摺的曲線間，多加一條直線或曲線，其中直線與曲線最多交於一點，曲線須符合發現與歸納的 1.2.且與原始曲線最多交於一點，則能摺。

理由：(1)直線(實線或虛線)摺痕線摺好後，直線兩側的平面可以摺成凸曲面或凹曲面，所以兩條曲線摺好後，其間若凹、凸曲面並存，則可以在此區域中加一條直線將凹、凸曲面做區隔。若直線與曲線相交兩點以上，直線與曲線間會形成封閉區域，則由研究二知不能摺。

(2)原始兩曲線間，若凹、凸曲面並存，可在其間增加一條曲線，使新增的曲線與原始曲線符合上述發現與歸納的 1.2.。若新增曲線與原始曲線相交兩點以上，其間會形成封閉區域，則不能摺。

分類	不能摺的例子	增加 藍線 則可以摺			
一曲線完全在另一曲線的內側					
兩曲線完全不在對方曲線的內側					
曲線摺痕線的同側與此曲線共同邊的區域為不同色					

2.在長方形紙張中， m 條曲線與 n 條直線若符合發現與歸納的 1.~3.做組合，則能摺。例如：

摺痕圖		
是否能摺	能摺	不能摺
理由	任意 2 條曲線，都有符合 <u>發現與歸納</u> 的 1.~3.，所以能摺。	藍色曲線內側與藍色曲線共同邊的區域有黑有白，不符合 <u>發現與歸納</u> 的 3.，所以不能摺。

研究四、紙張圍成圓柱，在側面畫縱向不交錯的線條組合，都能摺嗎？

(一)研究範圍

因能畫在圓柱側面的線條組合眾多，我們只針對垂直線、圓弧線的兩端點須與頂邊與底邊相接，且直線與曲線間不會交錯的線條組合(如圖 31)做探討，其它情形(如圖 32、33)，留待以後做研究。

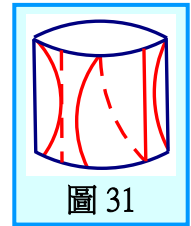


圖 31

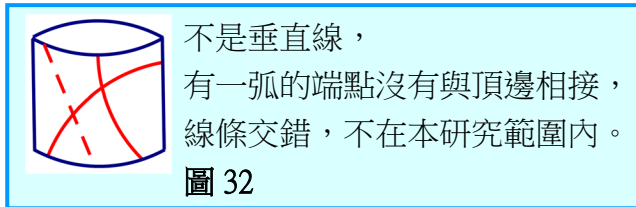


圖 32

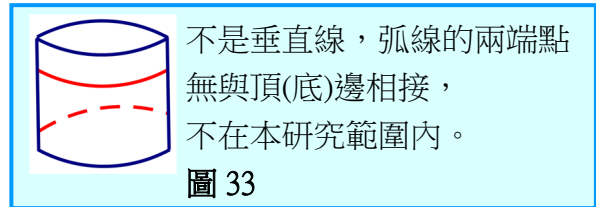


圖 33

(二)符號與圖示說明

- ：黑點代表直線實線。
- ：白點代表直線虛線。
- 當圓柱側面全是直線時，畫俯視圖代表摺好後的樣貌(如圖 34)。
- 當圓柱側面有直線與曲線

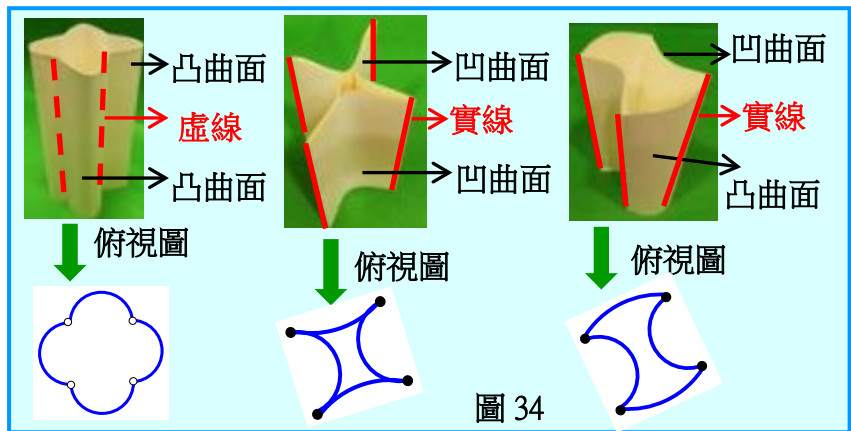


圖 34

混合時，畫線條集中側面圖，並用+、-分別表示凸、凹曲面(如圖 35)。

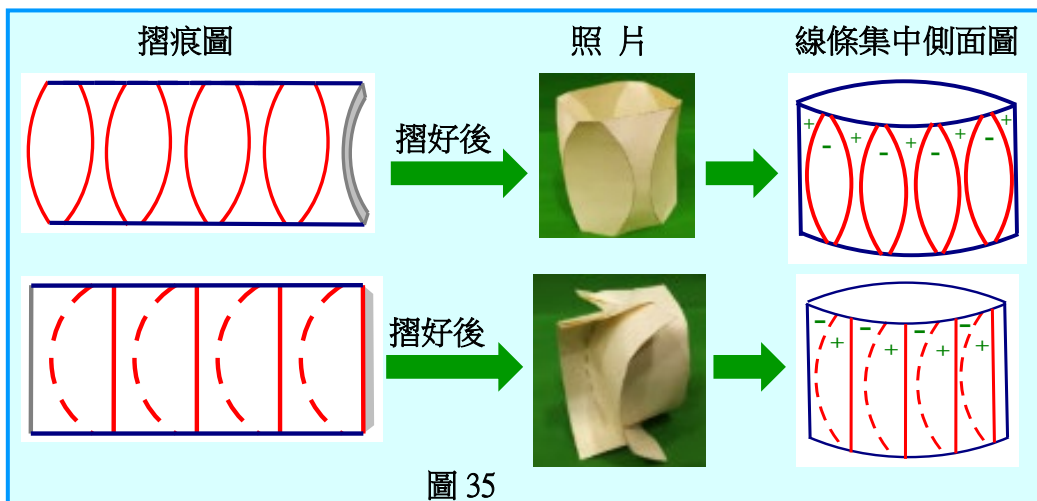


圖 35

(三)畫圖規則

- 圓柱側面的線條組合須符合研究三結果。
- 畫線條集中側面圖時(如圖 36)，塗黃色部分同為一個曲面，由性質 5-3 知不能凹、凸曲面並存，故代號應同為+或同為-，且不代表實際側面圍成圓柱的長度。

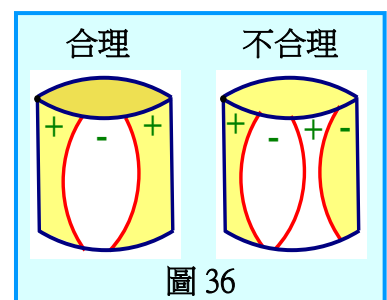


圖 36

(四)畫圖研究

研究 4-1-1：圓柱側面全是直線實線摺痕，
什麼情況下能摺？

摺痕線	能摺的俯視圖	所有情形
1 條		1 種
2 條		2 種
3 條		4 種
4 條		6 種
5 條		8 種

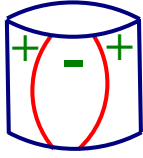
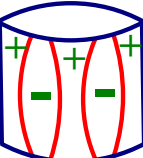
研究 4-1-2：圓柱側面全是直線虛線摺痕，
什麼情況下能摺？

摺痕線	能摺的俯視圖	所有情形
1 條		1 種
2 條		2 種
3 條		3 種
4 條		5 種
5 條		7 種

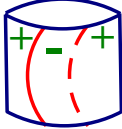
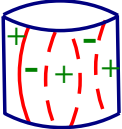
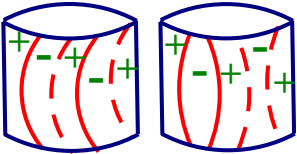
研究 4-1-3：圓柱側面全是直線，有實線與虛線混合摺痕，什麼情況下能摺？

實線	虛線	能摺的俯視圖	所有情形
1 條	1 條		2 種
1 條	2 條		5 種
1 條	3 條		9 種
2 條	1 條		5 種
2 條	2 條		17 種

研究 4-2-1：圓柱側面全是**曲線實線**摺痕，
什麼情況下能摺？

摺痕線	能摺的 線條集中側面圖	所有 情形
1 條	不能摺	0 種
2 條		1 種
3 條	不能摺	0 種
4 條		1 種

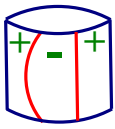
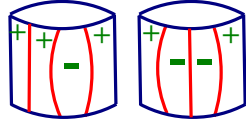
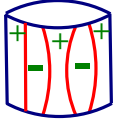
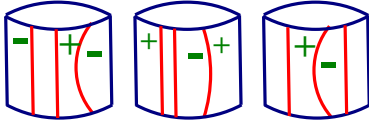
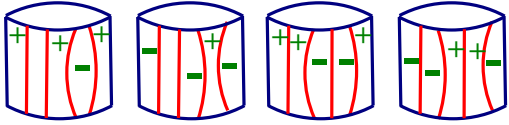
研究 4-2-3：圓柱側面全是**曲線**，
有實線與虛線混合摺痕，
什麼情況下能摺？

實線	虛線	能摺的 線條集中側面圖	所有 情形
1 條	1 條		1 種
1 條	2 條	不能摺	0 種
1 條	3 條		1 種
1 條	4 條	不能摺	0 種
2 條	1 條	不能摺	0 種
2 條	2 條		2 種
2 條	3 條	不能摺	0 種

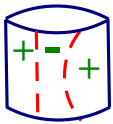
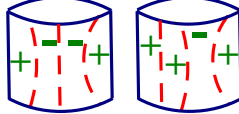
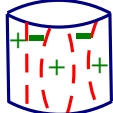
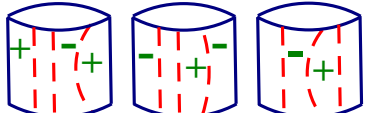
研究 4-2-2：圓柱側面全是**曲線虛線**摺痕，
什麼情況下能摺？

全部都不能摺

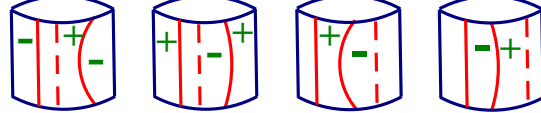
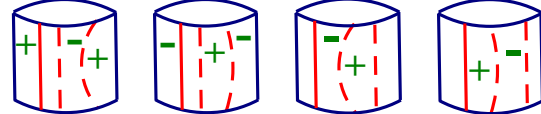
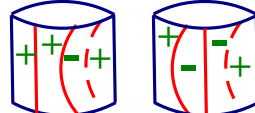
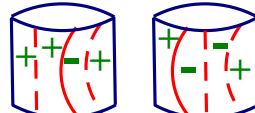
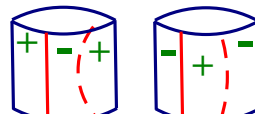
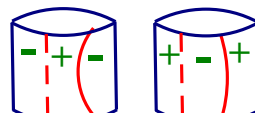
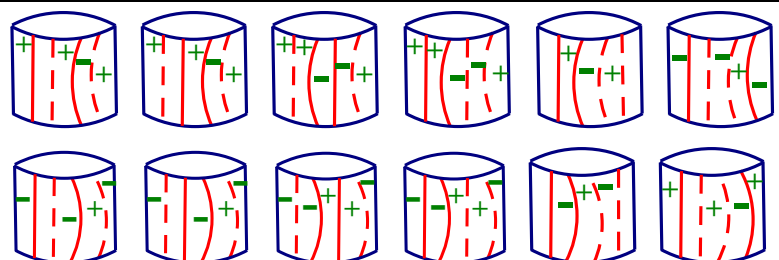
研究 4-3-1：圓柱側面有**直線與曲線混合**，全是**實線**摺痕，什麼情況下能摺？

直線	曲線	能摺的線條集中側面圖	所有情形
1 條	1 條		1 種
1 條	2 條		2 種
1 條	3 條		1 種
2 條	1 條		3 種
2 條	2 條		4 種

研究 4-3-2：圓柱側面有直線與曲線混合，全是虛線摺痕，什麼情況下能摺？

直線	曲線	能摺的線條集中側面圖	所有情形
1 條	1 條		1 種
1 條	2 條		2 種
1 條	3 條		1 種
2 條	1 條		3 種

研究 4-3-3：圓柱側面有直線、曲線、實線與虛線混合摺痕，什麼情況下能摺？

直線		曲線		能摺的線條集中側面圖	情形
實線	虛線	實線	虛線		
1 條	1 條	1 條	0 條		4 種
1 條	1 條	0 條	1 條		4 種
1 條	0 條	1 條	1 條		2 種
0 條	1 條	1 條	1 條		2 種
1 條	0 條	0 條	1 條		2 種
0 條	1 條	1 條	0 條		2 種
1 條	1 條	1 條	1 條		12 種

(五)發現與歸納

假設 L 是圍成圓柱的長方形紙長度， $\sum L^+$ 是圓柱上所有凸曲面頂邊的長度總和，

$\sum L^-$ 是圓柱上所有凹曲面頂邊的長度總和，即 $L = \sum L^+ + \sum L^-$ ，

n 是圓柱側面摺痕線條總數。

1.當圓柱側面全是直線時

(1)由研究 4-1-1 知**假設全是實線摺痕**，

若 $\sum L^+ \leq \sum L^-$ ，則不能摺出 1 個凹曲面、 $n-1$ 個凸曲面。

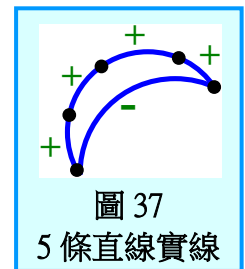
理由：(以圖 37 用**反證法**做說明，同理 n 條直線實線情況相同。)

假設能摺成 1 個凹曲面、4 個凸曲面，

則 $\sum L^+ > \sum L^-$ (與已知矛盾)，

所以想要摺成 1 個凹曲面，4 個凸曲面時，

若 $\sum L^+ \leq \sum L^-$ ，則不能摺。



(2)由研究 4-1-2 知**假設全是虛線摺痕**，

若 $\sum L^+ \leq \sum L^-$ ，則不能摺出 1 個凸曲面、 $n-1$ 個凹曲面。

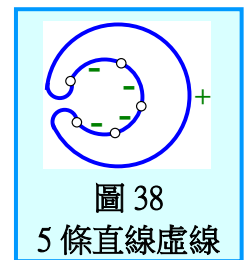
理由：(以圖 38 用**反證法**做說明，同理 n 條直線虛線情況相同。)

假設能摺成 1 個凸曲面、4 個凹曲面，

則 $\sum L^+ > \sum L^-$ (與已知矛盾)，

所以想要摺成 1 個凸曲面，4 個凹曲面時，

若 $\sum L^+ \leq \sum L^-$ ，則不能摺。



(3)由研究 4-1-3 知**假設有實線與虛線摺痕混合，其中有連續 a 條虛線兩側都摺成凹曲面**，

若能摺且不考慮凹、凸曲面頂邊的長度，則實線不只 2 條。

理由：(以 $a=3$ 用**反證法**做說明，同理連續 a 條虛線情況相同。)

① 假設沒有實線，與已知(有實線與虛線摺痕混合)矛盾。

② 假設只有 1 條實線(如圖 39)，

連續 a 條虛線兩側的線條，

必為一側是凹曲面，另一側是凸曲面，

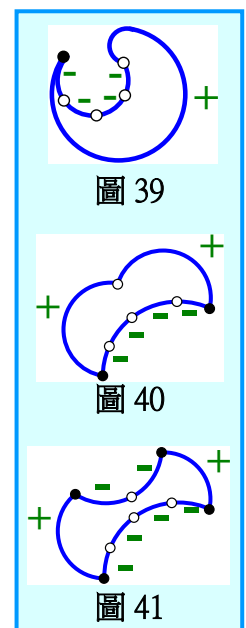
否則不能圍成柱體，所以 $\sum L^+ > \sum L^-$ (與已知矛盾)。

③ 假設只有 2 條實線(如圖 40)，與②同理。

故由①②③知有實線與虛線摺痕混合，

其中有連續 a 條虛線兩側都摺成凹曲面，

若能摺且不考慮凹、凸曲面頂邊的長度，則實線不只 2 條。



2.當圓柱側面全是曲線時

(1)由研究 4-2-1 知**假設全是實線摺痕，若能摺，則 n 是偶數。**

理由：(如圖 42，以 $n=3$ 用反證法做說明，同理 n 是奇數情況相同。)

假設 $n=3$ ，

如圖 42 塗黃色部分為圓柱同一曲面，

由**性質 5-3**知同一曲面凹、凸曲面不能共存(矛盾)，

所以全是實線摺痕，若能摺，則 n 是偶數。

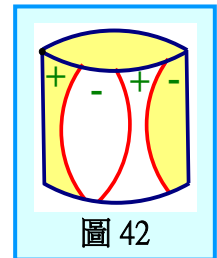


圖 42

(2)由研究 4-2-2 知**若能摺，則不全是虛線摺痕。**

理由：(用反證法做說明)

假設圓柱側面全是曲線虛線，

因曲線間形成的凸曲面或凹曲面，

彎摺處形成的直線與過凸點且沿摺痕線的切線方向垂直，

製作時先按照摺痕線摺好後再圍成圓柱，

摺痕線皆會在圓柱的內側(矛盾)，

所以圓柱側面全是曲線虛線，若能摺，則不全是虛線摺痕。

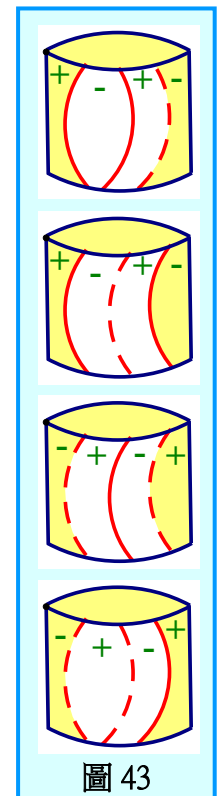


圖 43

(3)由研究 4-2-3 知**假設有實線與虛線摺痕混合，**

若能摺，則 n 是偶數且實線外側的凸曲面要夠寬。

理由：(用反證法做說明)

①假設 $n=3$ (如圖 43，同理 n 是奇數情況相同。)

全是曲線有實線與虛線摺痕混合，有下列 4 種情形，

塗黃色部分為圓柱同一曲面，

由**性質 5-3**知同一曲面凹、凸曲面不能共存(矛盾)，

所以全是曲線有實線與虛線摺痕混合，若能摺，則 n 不是奇數。

②假設 $n=2$ 且實線外側的凸曲面較窄(如圖 44，同理 n 是偶數情況相同。)

因曲線間形成的凸曲面或凹曲面，

彎摺處形成的直線與過凸點且沿摺痕線的切線方向垂直，

製作時先按照摺痕線摺好後無法圍成圓柱(矛盾)，

所以若能摺，則 n 是偶數且實線外側的凸曲面要夠寬。

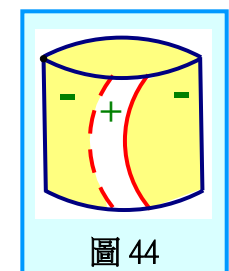


圖 44

3.當圓柱側面有直線與曲線混合時

(1)由研究 4-3-1 知**假設全是實線摺痕，若能摺，則直線兩側曲線凹口反向。**

理由：(如圖 45 用**反證法**做說明)

假設直線兩側曲線凹口同向，

則直線兩側的曲面一側為凸曲面，另一側為凹曲面，

由**性質六**知凸曲面會帶動直線向圓柱內部彎，

凹曲面會帶動直線向圓柱外部彎，

同一條直線不可能同時彎向圓柱內部與外部(矛盾)，

所以若能摺，則直線兩側曲線凹口反向。

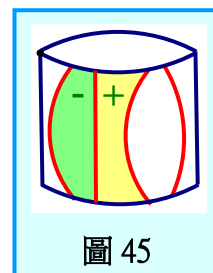


圖 45

(2)由研究 4-3-2 知**假設全是虛線摺痕，若能摺，則直線兩側曲線凹口反向。**

理由：如圖 46，同 3.(1)說明。

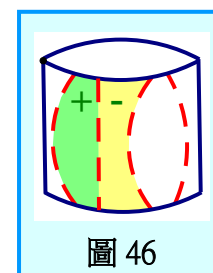


圖 46

(3)由研究 4-3-3 知**假設有實線與虛線混合，其中曲線間的直線，**

一側為凸曲面，另一側為凹曲面，若能摺，則直線兩側的曲線凹口方向要相同。

理由：(以 $n=3$ 為例，用**反證法**做說明，同理 $n \geq 3$ 情況相同。)

假設直線兩側的曲線凹口方向不同，

則只有 2 種情形(如圖 47)，

由**性質六**知凸曲面會帶動直線向圓柱內部彎，

凹曲面會帶動直線向圓柱外部彎，

同一條直線不可能同時彎向圓柱內部與外部(矛盾)，

所以若能摺，則直線兩側的曲線凹口方向要相同。

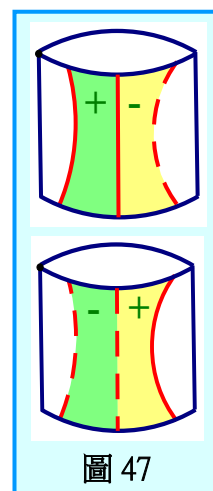


圖 47

(六)特例探討

1.想法

我們已研究出能摺成曲面的線條組合(研究三)，將此線條組合稱為基本圖形(如圖 48，共 11 種)，複製 n 個基本圖形，就可以畫出類似 n 角柱的展開圖，像這樣我們自創的直線、曲線混合組成的側面，如果可以摺，摺出來是什麼樣貌呢？

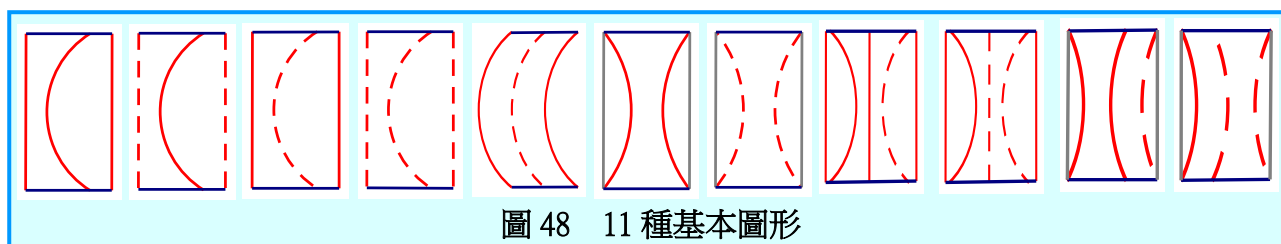


圖 48 11 種基本圖形

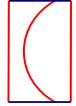
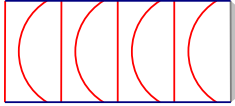

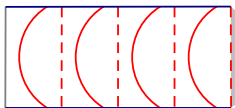

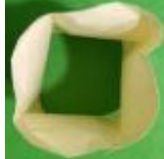

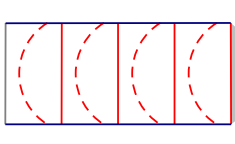



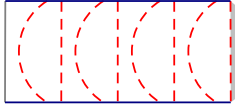

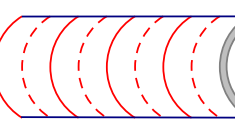


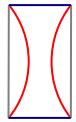
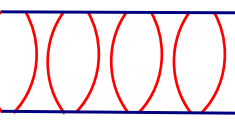



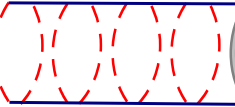

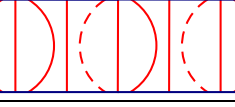

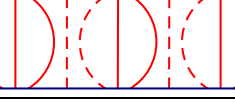
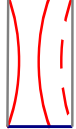
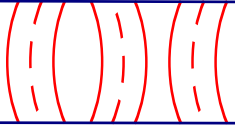




2.製作過程

(1)用 GSP 將基本圖形複製成 4 個連接做組合，畫出柱體的摺痕圖。

(2)實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕線摺好。

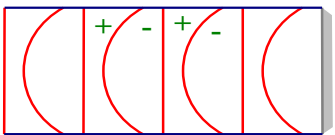
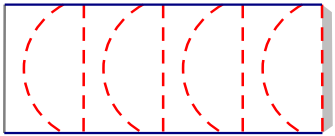
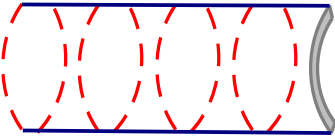
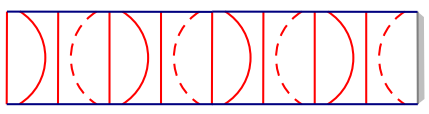
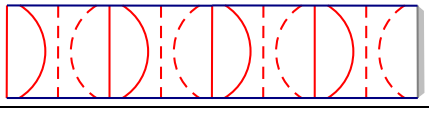

(3)先將長方形紙圍成圓柱黏好，再重新將直線、曲線按照摺痕摺好。

3.製作成果

編號	基本圖形	摺痕圖	摺好照片		是否能摺	能否定型
			側面	頂面(底面)		
4-1			---	---	×	×
4-2					○	×
4-3					○	○
4-4			---	---	×	×
4-5					○	×
4-6					○	×
4-7			---	---	×	×
4-8			---	---	×	×
4-9			---	---	×	×
4-10					○	×
4-11			---	---	×	×

4.結果與發現

(1)不能摺的理由整理如下表

編號	摺痕圖	不能摺的理由
4-1		由研究 4-3-1 知若直線兩側有曲線，則不能摺。
4-4		由研究 4-3-2 知若全是虛線摺痕，則不能摺。
4-7		由研究 4-2-2 知若全是虛線摺痕，則不能摺。
4-8		由研究 4-3-3 知假設曲線間的直線，一側為凸曲面，另一側為凹曲面，若直線兩側的曲線凹口方向不同，則不能摺。
4-9		同 5-8
4-11		由研究 4-2-3 知若實線外側的凸曲面不夠寬(塗黃色區域)，則不能摺。

(2)只有編號 4-3 能定型(於陸、討論中做詳細探討)。

研究五、紙張圍成圓錐，在側面畫上 n 組基本圖形，都能摺嗎？

(一)想法

在研究四特例探討中，我們已知 11 種基本圖形只有 5 種在圓柱上能摺，我們猜想圓錐也跟圓柱結果一樣，因為在五下學柱體與錐體時，有 n 角柱就有 n 角錐，所以研究五我們想驗證猜想是否正確，摺出來又會是什麼樣貌呢？。

(二)製作過程

- 1.將研究四中 11 個基本圖形(長方形)用 GSP 改畫成扇形(基本圖形)。
- 2.用 GSP 將基本圖形(扇形)複製成 4 個連接做組合，畫出圓錐的摺痕圖。
- 2.實線為山線，虛線為谷線，將直線、曲線按照摺痕摺好。
- 3.先將紙圍成圓錐黏好，再重新將直線、曲線按照摺痕摺好。

(三)製作成果

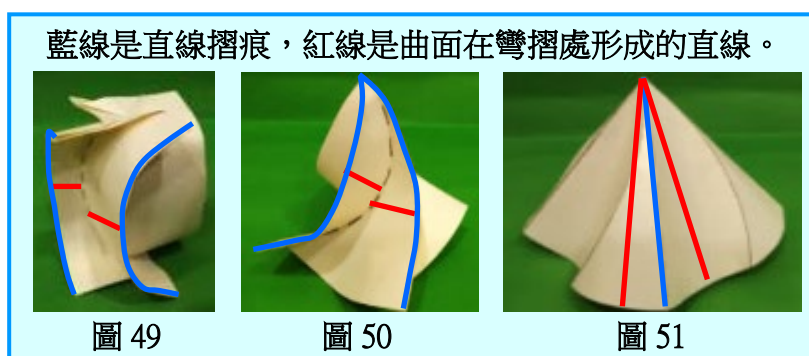
編號	基本圖形	摺痕圖	摺好照片			是否能摺	能否定型
			側面	俯拍	底面		
5-1						○	×
5-2						○	×
5-3						○	○
5-4						○	×
5-5						○	×
5-6						○	×
5-7						○	×
5-8						○	×
5-9						○	×
5-10						○	×
5-11						○	×

(四)發現與歸納

- 1.分別由 11 種基本圖形所組成的圓錐，都能摺，但只有編號 5-3 能定型(於陸、討論中做詳細探討)。
- 2.與研究四編號 4-1~4-11 做比較，有 6 種基本圖形在圓柱上不能摺，但在圓錐上卻能摺，其差異如下

①在圓柱上曲線皆能帶動直線彎摺(如編號 4-1)，但在圓錐上，只有曲線虛線能帶動直線實線彎摺(如編號 5-3)，其它曲線與直線的組合，曲線不會帶動直線彎摺(如編號 5-1)。

理由：曲線摺成曲面，若曲面在彎摺處形成的直線與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直，則會帶動曲線旁的直線彎摺(如圖 49、50)，但若曲面在彎摺處形成的直線與頂點、底邊相連，則不會帶動曲線旁的直線彎摺(如圖 51)，故 4-1、4-4、4-8、4-9 不能摺，5-1、5-4、5-8、5-9 能摺。



②當側面全是曲線虛線時，在摺紙過程中，若曲面在彎摺處形成的直線與頂點、底邊相連，則不會影響紙張圍繞成圓柱或圓錐的方向。

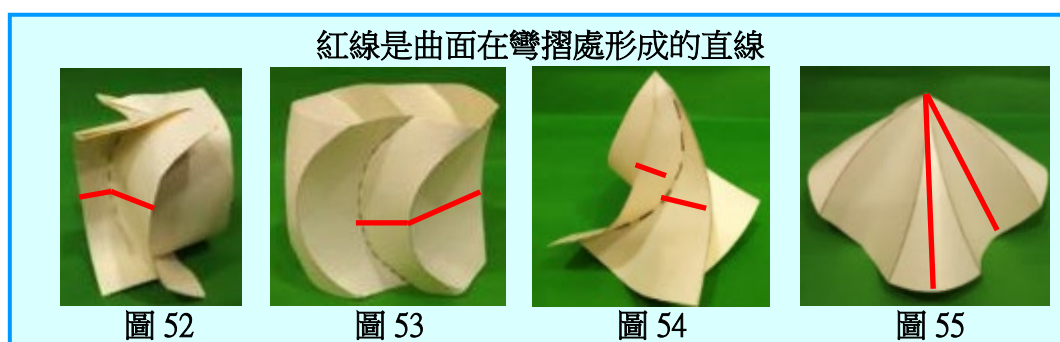
理由：圓柱側面全是曲線虛線，摺好後彎摺處形成的直線與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直，在摺紙過程中，先按照摺痕線摺好後再圍成圓柱，摺痕線皆會在圓柱的內側，但在圓錐上，曲面在彎摺處形成的直線與頂點、底邊相連，不影響紙張圍繞成圓錐的方向，故 4-7 不能摺，5-7 能摺。

③當側面全是曲線時，若彎摺處形成的直線與過凸點且沿摺痕線的切線方向垂直，則要考慮實線外側的凸曲面，要夠寬才能摺。

理由：若曲線摺好後形成曲面，曲面在彎摺處形成的直線與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直時，則虛線曲線需要靠實線曲線將長方形紙反摺回圍繞成圓柱的方向，否則虛線摺痕線會在圓柱的內側，而曲面在彎摺處形成的直線不與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直時，不影響紙張圍繞成圓錐的方向，所以不用考慮實線外側的凸曲面是否夠寬，故 4-11 不能摺，5-11 能摺。

3.基本圖形在圓柱與圓錐上有相同的線條組合，但在摺的過程中卻有差異，整理如下表

相異處	圓柱	圓錐
1.曲線摺好後形成曲面， 曲面在彎摺處形成的直線方向。	只有一種(與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直，如圖 52、53。)	不只一種(如圖 54、55)
2.曲線帶動直線彎摺	會(如圖 52)	只有當曲面在彎摺處形成的直線與過曲線上任一點且沿摺痕線的切線方向垂直，才會(如圖 54)。
3.直線兩側的曲線， 當缺口方向不同時。	不能摺(如編號 4-8)	能摺(如編號 5-8)
4.全為曲線， 若要能摺的條件。	摺痕線總數為偶數，且實線外側的凸曲面要夠寬(如研究 4-2-3 的結果)。	摺痕線總數為偶數
5.展開圖	長方形	扇形



4.用上述 3.圓柱與圓錐的差異表去檢視研究五中(五)發現與歸納所得的結果，其中研究 4-1-1、4-1-2、4-1-3、4-2-1 圓柱與圓錐結果相同，其餘不同。

陸、討論

一、「定型」的探討

(一)發現

由研究四、研究五製作成果中發現能定型的作品只有編號 4-3、5-3，因它們能透過曲面在頂面、底面處互相交疊，使摺痕角固定成定型，其它能摺的作品，因頂面、底面皆中空，手可施力在側面實線處，便能改變摺痕角，所以無法定型，我們想進一步探討能摺出定型作品的條件。

(二)觀察

1.觀察編號 4-3(如圖 56)，將分析結果整理如下：

(1)在頂面(底面)部分

曲面會**互相交疊成邊長為 $\overline{B_1B_4}$ 的正方形**，且有密合點P。(如圖 57 頂面(底面))

理由：因摺痕圖是由 $A_1E_1E_2A_2$ 基本圖形複製組合而成，

$$\text{所以 } \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \overline{A_4B_4} \quad , \quad \overline{B_1A_2} = \overline{B_2A_3} = \overline{B_3A_4} = \overline{B_4A_1}$$

$$\text{又 } \overline{B_1B_4} = \overline{A_1B_1} - \overline{B_4A_1} \quad , \quad \overline{B_2B_1} = \overline{A_2B_2} - \overline{B_1A_2} \quad ,$$

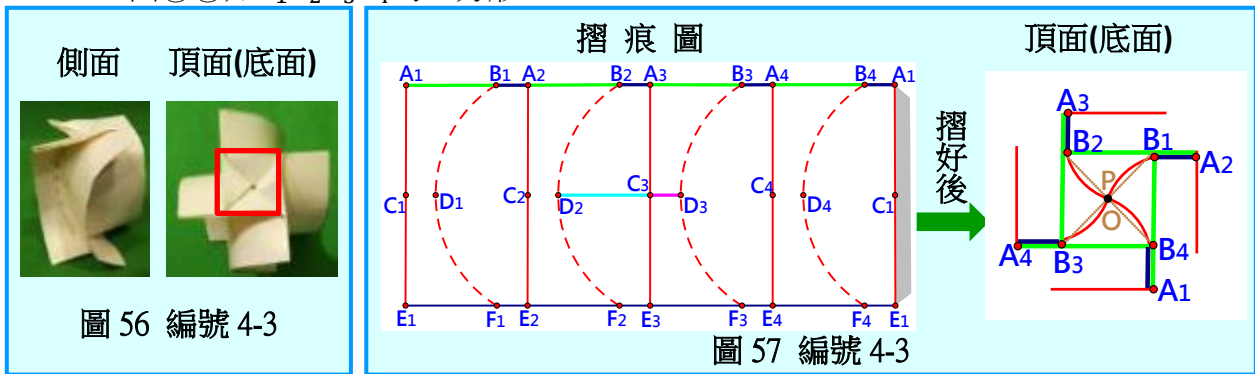
$$\overline{B_2B_3} = \overline{A_3B_3} - \overline{B_2A_3} \quad , \quad \overline{B_3B_4} = \overline{A_4B_4} - \overline{B_3A_4} \quad (\text{見圖 57 頂面(底面)圖})$$

$$\Rightarrow \overline{B_1B_4} = \overline{B_2B_1} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

假設O為圓柱中心軸線上的一點，且O與 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 在同一平面上，

$$\Rightarrow \overline{B_1O} = \overline{B_2O} = \overline{B_3O} = \overline{B_4O} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由①②知 $B_1B_2B_3B_4$ 為正方形。



(2)在側面部分

a.若曲線彎曲程度愈大，整體樣貌愈矮。

理由：由**性質六**知曲線摺好後，會帶動旁邊的直線彎摺，所以曲線彎曲程度愈大，直線會被彎摺得愈彎，所以摺好後整個作品會愈矮。

b.作品**內部中空部分**，**最寬處為凸點 $D_1D_2D_3D_4$ 所圍起的正方形**，寬度為 $\overline{D_2C_3} - \overline{C_3D_3}$ ，愈靠近頂面(底面)，寬度愈窄。(如圖 56、57)

理由：因摺痕圖是由 $A_1E_1E_2A_2$ 基本圖形複製組合而成，

$$\text{所以 } \overline{C_1D_1} = \overline{C_2D_2} = \overline{C_3D_3} = \overline{C_4D_4} \quad , \quad \overline{D_1C_2} = \overline{D_2C_3} = \overline{D_3C_4} = \overline{D_4C_1}$$

$$\Rightarrow \overline{D_1C_2} - \overline{C_2D_2} = \overline{D_2C_3} - \overline{C_3D_3} = \overline{D_3C_4} - \overline{C_4D_4} = \overline{D_4C_1} - \overline{C_1D_1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

因 D_1 為凸點，所以過 D_1 點且沿摺痕線的切線方向摺疊後，會與 $\overline{D_1C_2}$ 垂直，

同理 D_2 、 D_3 、 D_4 的切線會分別與 $\overline{D_2C_3}$ 、 $\overline{D_3C_4}$ 、 $\overline{D_4C_1}$ 垂直 $\cdots \cdots \textcircled{2}$

由①②知內部中空部分 $D_1D_2D_3D_4$ 會圍成正方形。

因 $\overline{B_1A_2} = \overline{F_1E_2}$ ， D_1 為凸點，

所以 D_1 與 $\overline{A_2E_2}$ 距離最長， D_1 沿曲線往 B_1 或 F_1 移動，會與 $\overline{A_2E_2}$ 距離愈來愈短，

同理 D_2 、 D_3 、 D_4 沿曲線往 B_2 、 B_3 、 B_4 或 F_2 、 F_3 、 F_4 移動，

也會與 $\overline{A_2E_2}$ 距離愈來愈短，

故組成作品內部中空部分會愈來愈窄。

(3)在摺痕部分

①直線摺痕線上的每一點，
摺痕角皆為 180° 。

②曲線摺痕線上的點，
愈靠近凸點，摺痕角愈小，
在凸點處摺痕角為 90° 。

理由：同上述(2)b.理由②的說明

c.曲線虛線的彎曲程度決定直線實線的彎度。

理由：由性質六知曲線摺好後，
會帶動直線彎摺，所以曲線彎度決定直線彎度。

2.觀察編號 5-3(如圖 58、59)，

與 5-3 不同處如下，其餘皆相同：

(1)摺痕交於頂點，**曲面會在底面處互相交疊**， $G_1、G_2、G_3、G_4$ 、交於 O' 。

(2) $J_1、J_2、J_3、J_4$ 分別為弧 KG_1 、弧 KG_2 、弧 KG_3 、弧 KG_4 的凸點，作品**內部中空部分**，最寬為凸點 $J_1J_2J_3J_4$ 所圍起的正方形，寬度為 $L_1J_1 - J_1L_2$ 。

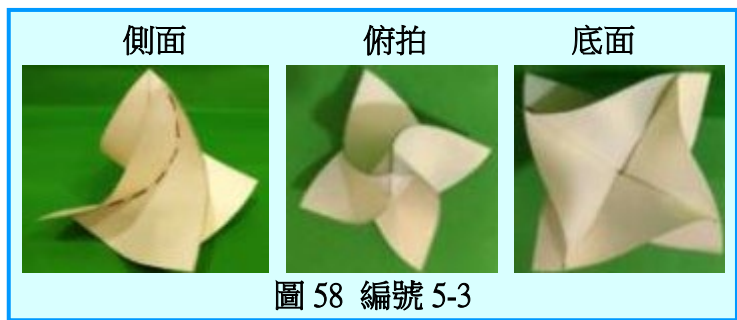


圖 58 編號 5-3

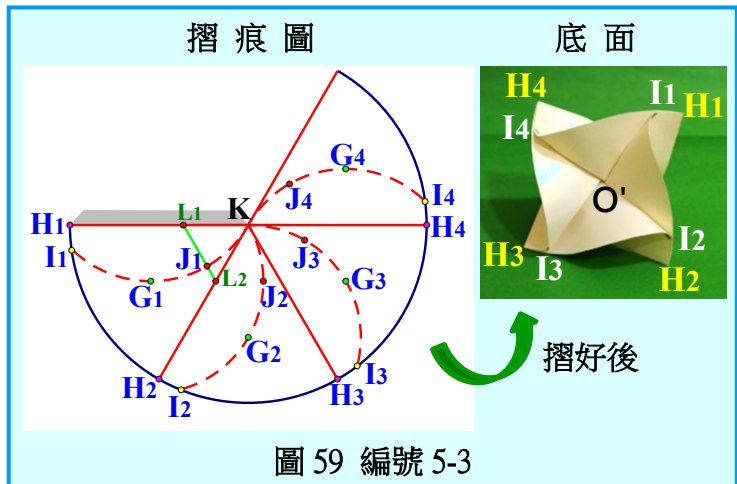


圖 59 編號 5-3

(三)找密合點

1.想法

柱體在頂面與底面處(錐體在底面處)不為中空，有密合點，才能定型。

2.製作過程

(1)用 GSP 畫出一個 $A_1E_1E_2A_2$ 的長方形，使得 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_1E_1} = 1 : 2$ 。

(2)在 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{E_1E_2}$ 上，分別取 5 個等分點，由右至左為 $B_{1,1}、B_{1,2}、\dots、B_{1,5}$ ， $F_{1,1}、F_{1,2}、\dots、F_{1,5}$ ，作為不同上點、下點位置。

(3)在 $\overline{B_{1,4}F_{1,4}}$ 中取中點 D，固定 D 點，分別畫出弧 A_2DE_2 、弧 $B_{1,i}DF_{1,i}$ ， $i=1、2、\dots、5$ ，與弧 A_1DE_1 (7 個不同的基本圖形)。

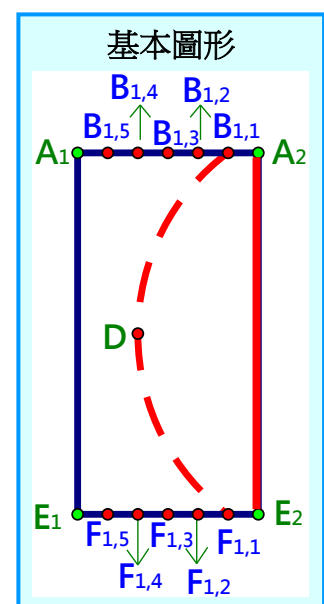
(4)將基本圖形複製成 4 個連接做組合，即完成 7 個彎曲程度不同的摺痕圖。

(5)實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕線摺好。

(6)先將摺痕圖圍成圓柱黏好，再重新將直線、曲線按照摺痕摺好。

(7)同(1)~(6)，將長方形改為扇形，上點即為圓心。

3.製作成果



(1)圓柱固定中點位置

編號	基本圖形	摺好照片		密合點
		側面	頂面	
6-1				有
6-2				有
6-3				有
6-4				無
6-5				無
6-6				無
6-7				無

4.結果 圓柱部分

- 編號 6-1~6-3 有密合點，從頂面可看出上點所圍出的正方形愈來愈小，內凹程度愈來愈淺。
- 編號 6-4 的上點、下點為頂邊、底邊的中點，所以曲面無法在頂面(底面)處互相交疊成正方形，用手將紙聚集靠攏，會交於一點(頂邊、底邊的中點)(如圖 60)，直線實線摺痕角無法固定為 180° 。
- 編號 6-5~6-7，摺好後中間會有空洞，無密合點。

(2)圓錐固定中點位置

編號	基本圖形	摺好照片		密合點
		頂面	底面	
7-1				有
7-2				有
7-3				有
7-4				無
7-5				無
7-6				無
7-7				無

圓錐部分

圓錐底邊是圓弧線，不是直線，所以從底面看，圓錐側面的曲面若能互相交疊，則底面不是正方形。

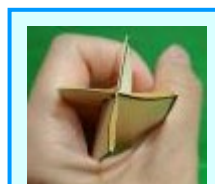
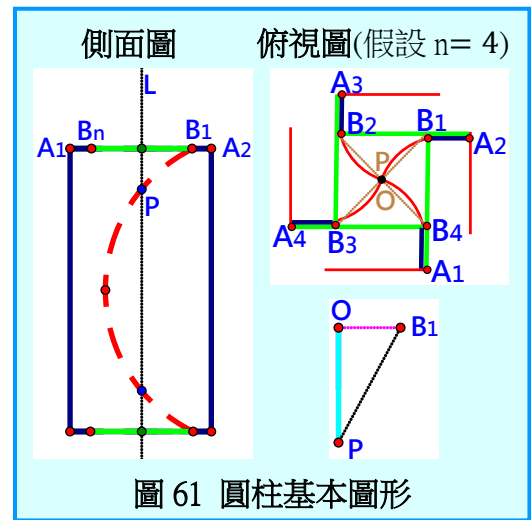


圖 60

5.分析

圓柱部分

見圖 61，有 n 組基本圖形， $\overline{B_1A_2} = \overline{A_1B_n}$ ，
 L 為 $\overline{B_1B_n}$ 的中垂線， L 與曲線虛線交於 P ，
 O 是 $B_1、B_2、\dots、B_n$ 所圍成正 n 邊形的中心點
 (P 與 $B_1、B_2、\dots、B_n$ 不一定共平面，
 但 O 與 $B_1、B_2、\dots、B_n$ 一定共平面)。



1.若 L 與曲線虛線沒有交於側面內部 2 點，則中間會
 有空洞(如編號 6-4~6-7)。

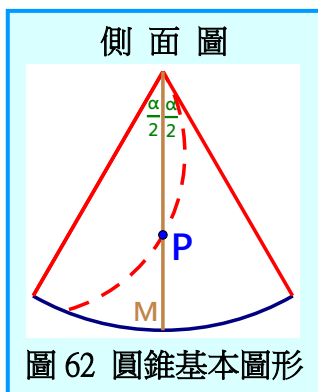
2.若 L 與曲線虛線有交於側面內部 2 點，此 2 點則為頂面、底面的密合點，(如編號 6-1~6-3)

其中(下表為這三種情形 $n=4$ 的舉例)

- (1)當 $\overline{B_1P} = \overline{B_1O}$ 時，摺好後，頂面(底面)會呈現平的正 n 邊形，邊長為 $\overline{B_1B_n}$ 。
- (2)當 $\overline{B_1P} > \overline{B_1O}$ 時，摺好後，頂面(底面)會呈現內凹的正 n 角錐，角錐底邊邊長為 $\overline{B_1B_n}$ 。
- (3)當 $\overline{B_1P} < \overline{B_1O}$ 時，摺好後，頂面(底面)會內凹，頂邊(底邊)不是直的，呈現彎曲狀，所以
 從俯視圖看， $B_1、B_2、\dots、B_n$ 圍成的正 n 邊形會往中心點 O 縮小。

圓錐部分

見圖 62，有 n 組基本圖形， α
 為圓心角， M 為 α 的角平分
 線， M 與曲線虛線交於 P ，若
 P 位在側面內部，則能密合
 (P.29 表為 $n=4$ 的例子)。



基本圖形	側面照片	頂面照片	$\frac{\overline{B_1B_4}}{\overline{B_1P}} / \frac{\overline{B_1B_4}}{\overline{B_1O}}$	摺好後 $\frac{\overline{B_1B_4}}{\overline{B_1B_4}}$ (cm)	俯視圖樣貌
			2.8 1.98 1.98 (cm)	2.8	平的正方形
			1.16 1.12 0.82 (cm)	1.16	內凹的正四角錐
			3.49 2.26 2.47 (cm)	<3.49	內凹頂邊為彎曲狀

(四)進一步分析

研究四、研究五中，除了編號 4-3、5-3 能定型以外，其它能摺的作品，都不能定型。

理由：圓柱頂面(底面)、圓錐底面要有密合點，才能定型，密合點是曲面藉由朝順(逆)時針方向互相交疊於一點而形成。圓柱部分，例如

基本圖形	底面照片	有無密合點
		P 在側面內部， 4 條虛曲線彎摺後會交於 P， 有密合點。
		P 是下點， 曲面無法在底部互相交疊， 無密合點。
		P 是頂點， 虛曲線只有在頂點相交， 底部中空無密合點。

編號 4-6，可以看出曲面彎摺後是朝向圓柱內側或外側，或例如編號 4-5，雖曲面朝順(逆)時針方向彎摺，但頂邊、底邊彎摺後，無互相交疊，手一放開作品即散開，無法密合，所以只有 4-3 能定形。圓錐部分，除了 5-3 以外，其餘能摺的作品，在曲面彎摺處，皆具有一條與頂點、底邊連線同方向的直線，由俯視可看出曲面彎摺處形成的直線，其方向為由頂點向外擴散，這樣曲面就無法聚攏交疊於底面，故只有 5-3 能定形。

(五)總結

能摺出「定型」的三條件是(如圖 63)：

- 1.基本圖形為直線實線與曲線虛線的組合。
- 2.直線實線摺痕角為 180° 。
- 3.(1)圓柱部分：L 為 $\overline{B_1B_n}$ 的中垂線，L 與曲線虛線交於側面內部 2 點。

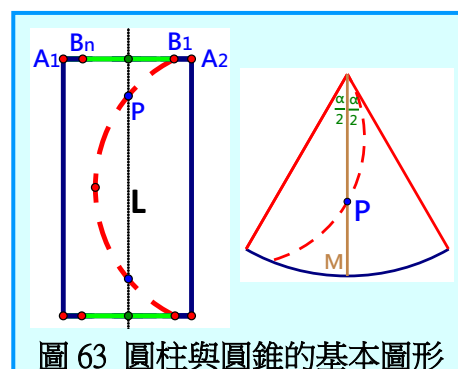


圖 63 圓柱與圓錐的基本圖形

- (2)圓錐部分： α 為圓心角，M 為 α 的角平分線，M 與曲線虛線交於 P，P 要位在側面內部。

若無滿足此三條件之一，則摺不出「定型」。

二、與平面摺紙比較

平面摺紙(摺痕只有直線，須壓平摺疊)符合的定理(前川、川崎定理)，立體摺紙(摺痕可以是直線或曲線，不須壓平摺疊)不符合。

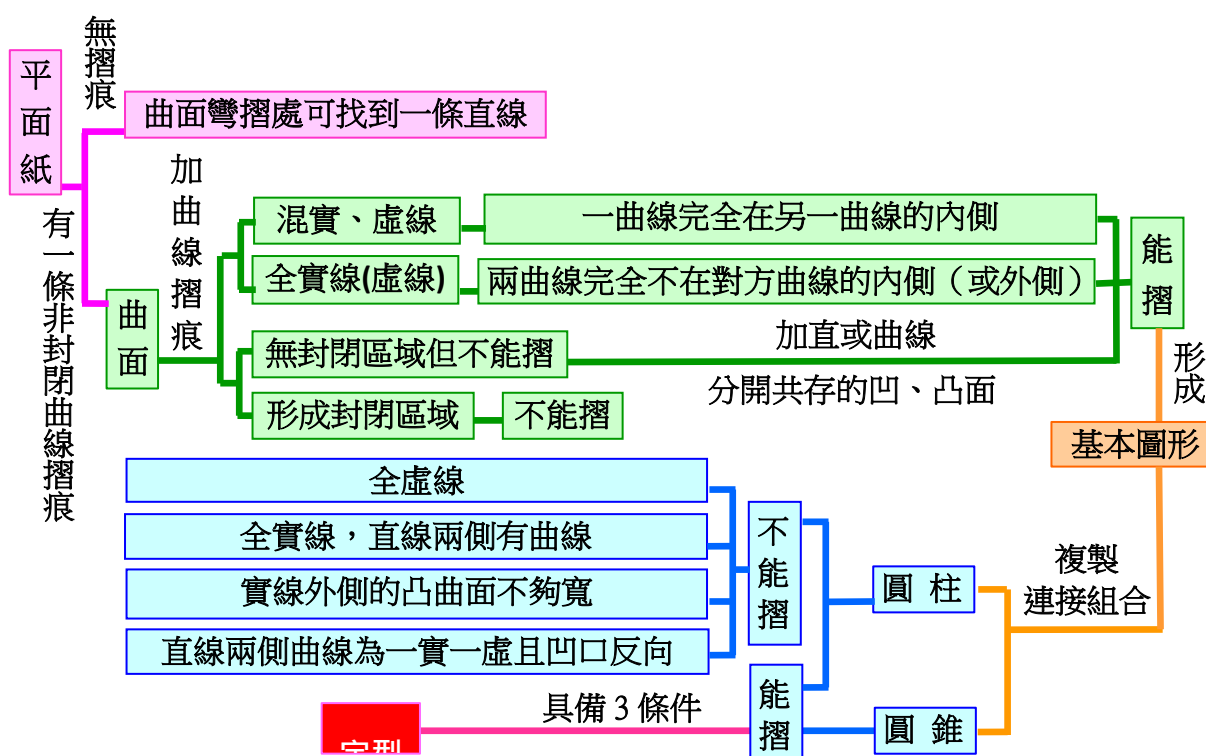
前川定理：在單一點摺痕中，若紙張可沿摺痕壓平摺疊，則點上實、虛線數量相差為 2。

(參考文獻資料〔3〕)

川崎定理：在單一點摺痕中，若紙張可沿摺痕壓平摺疊的充要條件為奇數角度的總和是 180° ，偶數角的和也是 180° 。(參考文獻資料〔4〕)

柒、結論

我們將研究結果整理如下：



捌、未來展望

- 1.本研究的紙是長方形紙，若紙張改為中空、只有邊框的紙，在同樣條件下能摺出何種樣貌？
- 2.摺痕圖中的曲線，皆為圓弧線，若改為橢圓弧線或任意曲線，研究結果相同嗎？
- 3.若將研究四、研究五在圓柱與圓錐側面上，畫橫向的曲線、直線，或曲線、直線有交點，還能摺嗎？能摺的話，會變成何種樣貌呢？
- 4.立體摺紙與平面摺紙皆具縮小體積、美觀…等特性，而最大不同處是立體摺紙中間中空部分可存放物品，於生活應用更加廣泛，如燈罩、禮品紙盒、建築景觀造景紙模…等。

玖、參考文獻資料

- 1.摺紙範例(無日期)。Jun Mitani。取自 <https://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/ja/index.html>
- 2.曲面(無日期)。維基百科。取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E9%9D%A2>
- 3.前川定理(無日期)。維基百科。取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%89%8D%E5%B7%9D%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 4.川崎定理(無日期)。維基百科。取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%9D%E5%B4%8E%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 5.曹亮吉(2002)。怎麼說它有多彎。科學月刊，第十六卷第八期。
- 6.數學家 and 藝術家都讚歎不已，神奇圈圈「莫比烏斯環」(2018年11月18日)。科技新報。取自 <https://technews.tw/2018/11/18/mobius-strip-mathematicians-and-artists-are-amazed/>

【評語】 080406

1. 該作品從教材中有關柱體與錐體的展開圖引發奇想，探究用直線、曲線、或直線與曲線混合組成在側面上的各種摺痕線，能否摺出成品，主題有趣。
2. 空間幾何的問題對小學生而言是需要相當的想像力才能去掌握及處理，本作品以手作實驗的方式來觀察並推演歸納結果並佐以說明，內容深入淺出，是相當有趣的作品。
3. 該摺紙研究最終目的在了解圓柱或直圓錐曲面的部分什麼時候能摺並利用密合點來找出圖形可以定型的條件為何？研究者先觀察基礎曲線摺痕的性質並以此基礎當成後續研究的依據，逐一探討摺痕間分佈的類型，然而一條摺痕可摺出多樣圖形，再摺第二條時已經是在曲面上了並非在平面上難度愈高例如曲面上再摺一條直線等，其研究精神可嘉。最後針對所摺出圖形中可定型的部分，觀察這些圖形的特性利用密合點的概念討論出可定型圖形的條件。

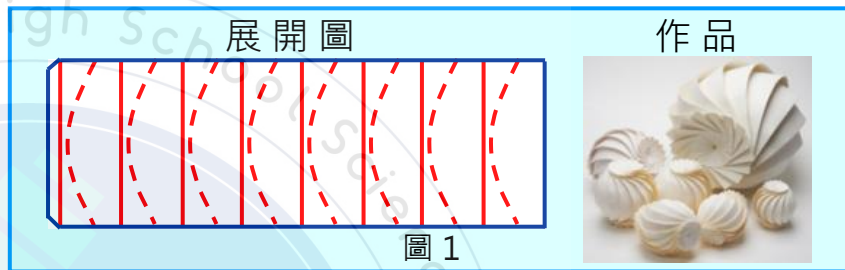
作品簡報

指間世界「圓弧」「曲」

國小組 數學科

研究動機

- 柱體與錐體的展開圖，直線改成曲線，或直線與曲線混合，會變怎樣呢？
- Jun Mitani(參考文獻〔1〕)只呈現作品，並無設計說明。(圖1)



研究問題與架構

探討能摺的條件

形成曲面

一張紙無摺痕(研究一)

一條曲線摺痕(研究二)

兩條曲線摺痕(研究三)

曲面圍成圓柱 (研究四)

圓柱側面摺痕

全是直線

全是實線

全是虛線

實線、虛線混合

全是曲線

全是實線

全是虛線

實線、虛線混合

直線、曲線混合

全是實線

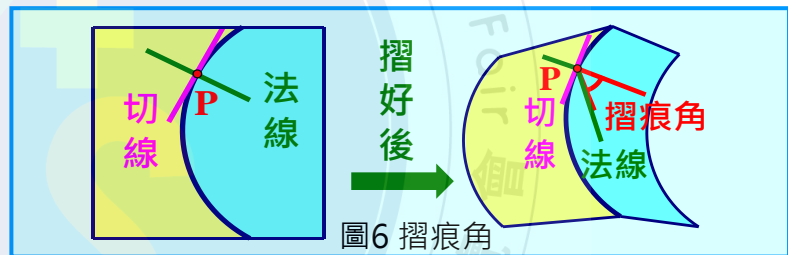
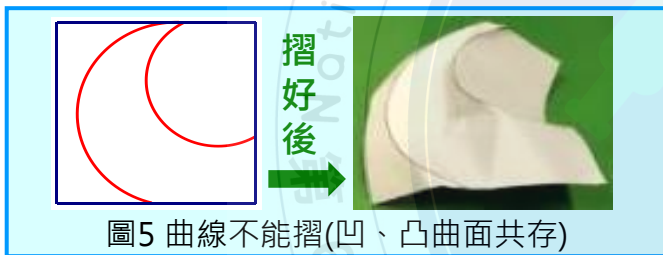
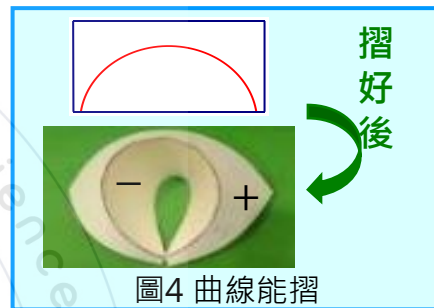
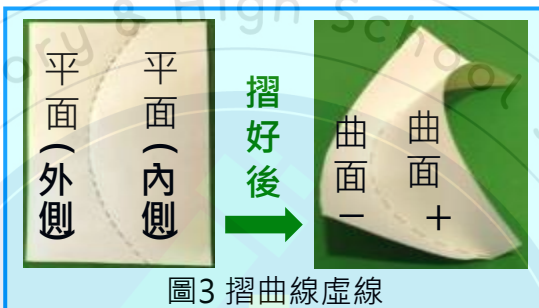
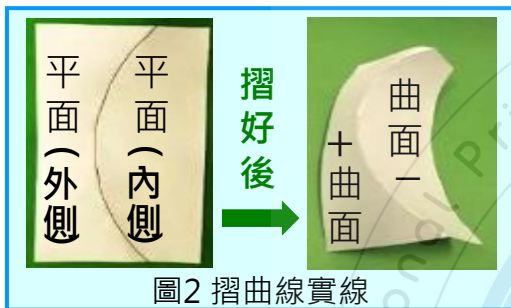
全是虛線

實線、虛線混合

曲面圍成圓錐 (研究五)

定型(討論)

名詞解釋及符號定義



摺紙重要性質

性質五：紙沿曲線摺好後，曲線兩側形成曲面。

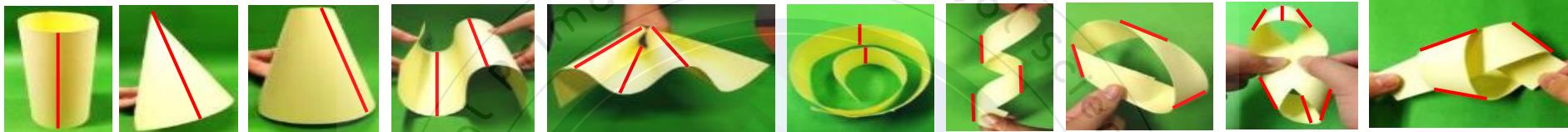
性質5-1：紙沿**曲線實線**摺好後，**曲線內側會形成凹曲面，外側形成凸曲面**(圖2)。

性質5-2：紙沿**曲線虛線**摺好後，**曲線內側會形成凸曲面，外側形成凹曲面**(圖3)。

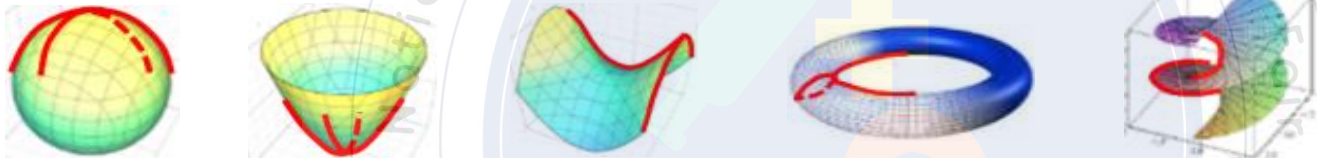
性質5-3：曲面只能是凸曲面或凹曲面任一種，同一曲面不能凹、凸曲面並存(圖5)。

研究一、一張沒有摺痕的紙，能摺出什麼樣貌？

- 將紙任意彎摺，能摺出不同曲面，共同點是**都能在紙張彎摺處，找到一條直線(紅線)**。



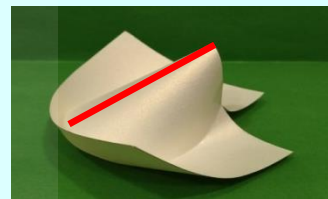
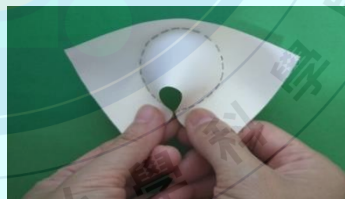
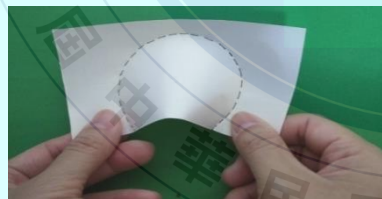
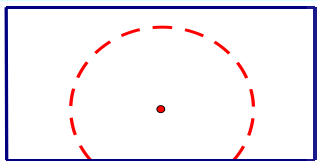
- 若曲面彎摺處，找不到直線，則摺不出來。



(圖片來源：參考文獻〔2〕)

研究二、在紙上畫一條曲線，曲線都能摺嗎？

- 封閉曲線不能摺，非封閉曲線都能摺。



非封閉曲線的摺紙過程

研究三、曲線該如何做組合，曲線所圍成的平面才能摺成曲面？

1. 一曲線完全在另一曲線內側 → 一實一虛才能摺(圖7)

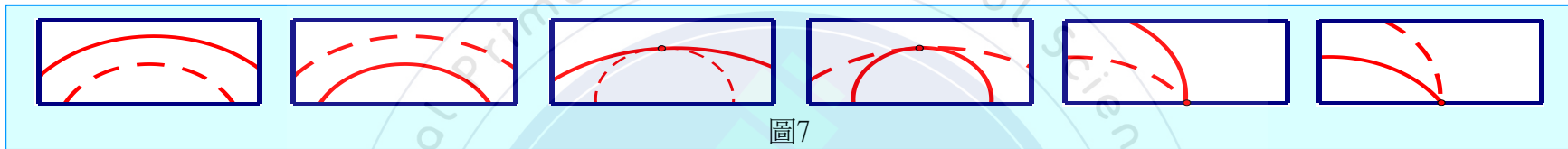


圖7

2. 兩曲線完全在對方曲線內或外側 → 兩實線或兩虛線才能摺(圖8)

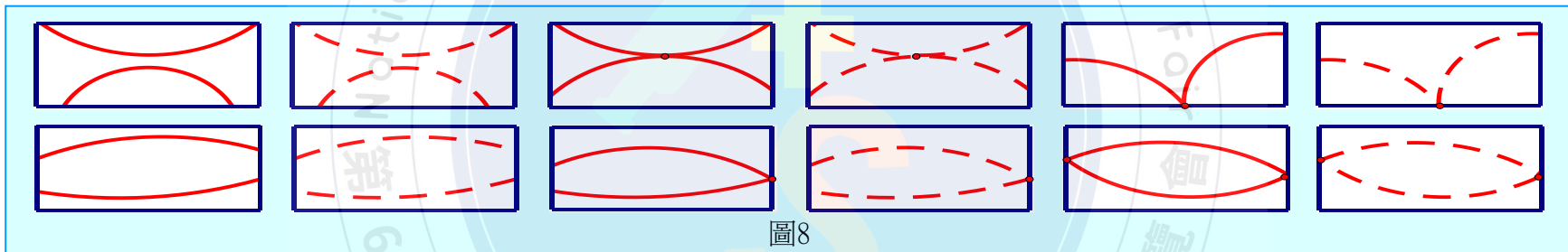


圖8

3. 將各區域塗黑或白色，相鄰區域須不同色。曲線圍出的區域有黑有白 → 不能摺(圖9)。

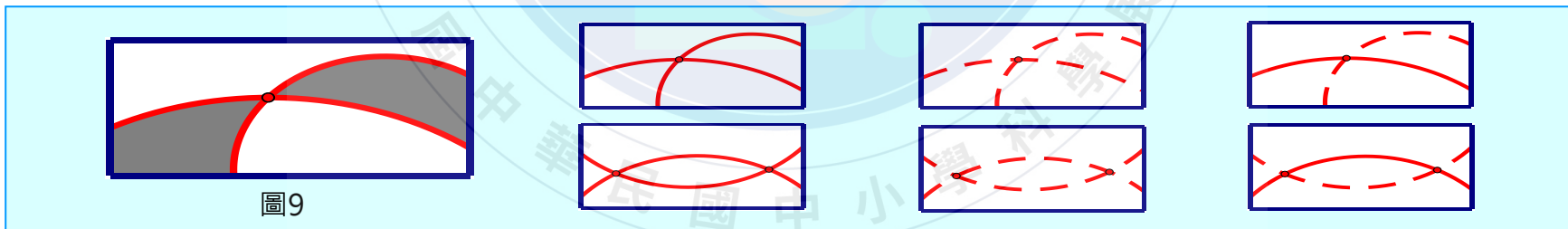

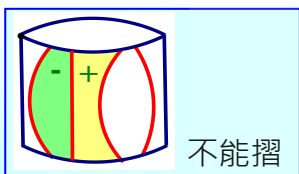
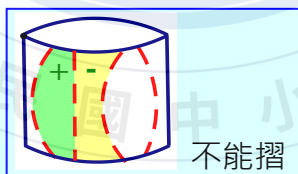
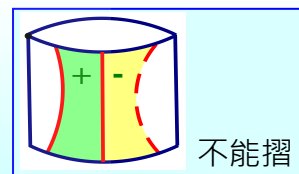


圖9

研究四、在圓柱側面畫縱向不交錯的線條組合，都能摺嗎？

$\sum L^+$ 是圓柱上所有凸曲面頂邊的長度總和， $\sum L^-$ 是圓柱上所有凹曲面頂邊的長度總和
 L 是圍成圓柱的長方形紙長度， m 是摺痕線條總數

	全是實線	全是虛線	實線、虛線混合
全是直線	<p>若 $\sum L^+ \leq \frac{1}{2}L$， 則不能摺出1個凹曲面， $m-1$個凸曲面。</p> 	<p>若 $\sum L^+ \leq \frac{1}{2}L$， 則不能摺出1個凸曲面， $m-1$個凹曲面。</p> 	<p>連續a條虛線兩側是凹曲面， 若能摺且不考慮 $\sum L^+$、$\sum L^-$， 則實線不只2條。</p> 
全是曲線	<p>若能摺，則 m 是偶數。</p> 	<p>若全是曲線虛線， 則不能摺。</p>	<p>若每條曲線虛線兩旁有曲線實線， 且此曲線虛線外側的凹曲面長度 $< \frac{1}{2}L$， 則能摺。</p>
直、曲線混合	<p>若能摺， 則直線兩側曲線凹口反向。</p> 	<p>若能摺， 則直線兩側曲線凹口反向。</p> 	<p>直線兩側是實、虛曲線，若能摺， 則直線兩側曲線凹口同向。</p> 

基本圖形												
側面	不能摺			不能摺			不能摺	不能摺	不能摺		不能摺	
頂面 (底面)												

定型

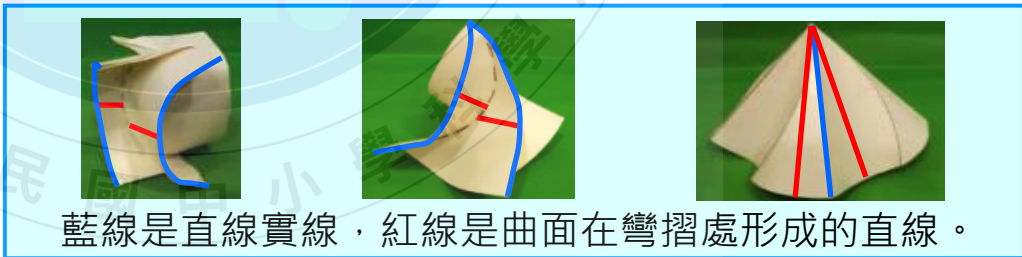
研究五、在圓錐側面畫能摺成曲面的線條組合，都能摺嗎？

基本圖形											
俯拍											

底面

定型

- 在圓錐上，
只有曲線虛線能帶動直線實線彎摺。



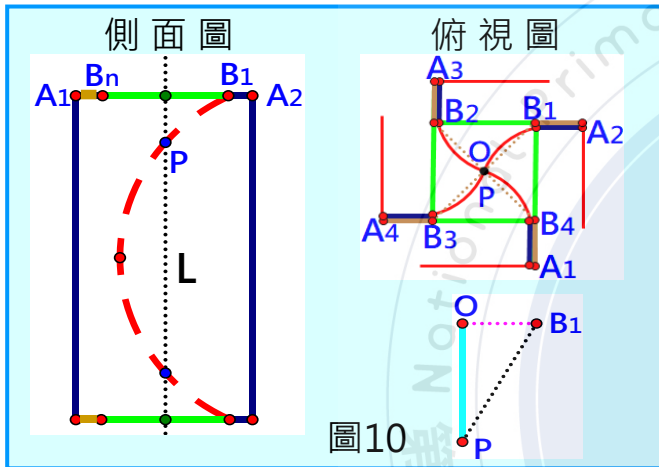
討論：「定型」的探討 (找密合點)

圓柱 固定中點	基本圖形							
	側面							
	頂面 (底面)							
	密合點	有	有	有	無	無	無	無

圓錐 固定中點	基本圖形							
	頂面							
	底面							
	密合點	有	有	有	無	無	無	無

討論：「定型」的探討 (分析)

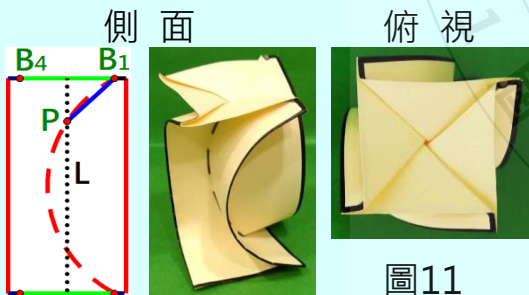
◆ 分析圓柱 (n=4)



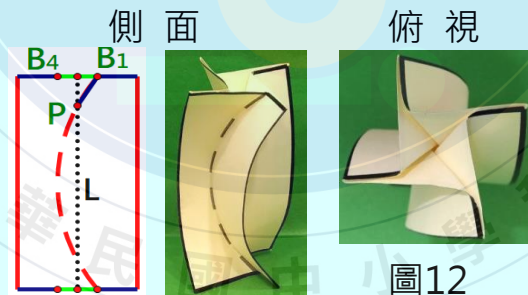
◆ 分析圓錐 (n=4)

基本圖形			
底面			
P點	在側面內部	在底邊	無交點
定型	能	不能	不能

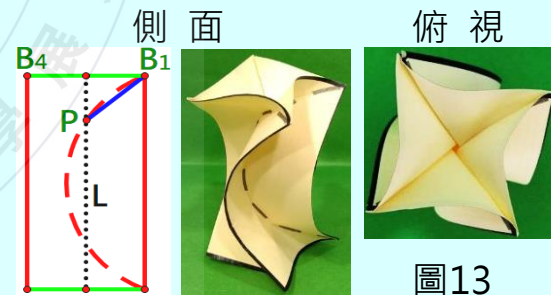
$\overline{B_1P} = \overline{B_1O} \rightarrow$ 平的正方形



$\overline{B_1P} > \overline{B_1O} \rightarrow$ 內凹正四角錐



$\overline{B_1P} < \overline{B_1O} \rightarrow$ 內凹波浪狀



討論：「定型」的探討

◆ 總結

能摺出「定型」的三條件是(圖14)：

1.基本圖形為直線實線與曲線虛線的組合。

2.直線實線摺痕角為 180° 。

3.(1)圓柱部分：

L為 $\overline{B_1B_n}$ 的中垂線，

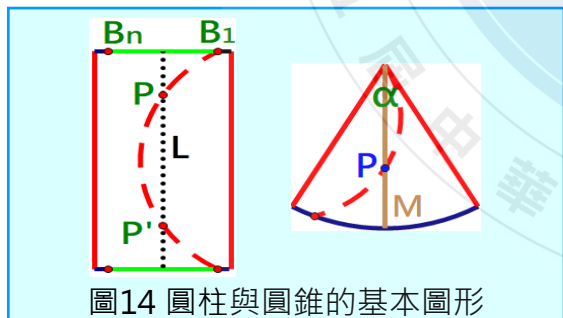
L與曲線虛線交於側面內部2點P、P'。

(2)圓錐部分：

α 為圓心角，**M**為 α 的角平分線，

M與曲線虛線交於側面內部1點P。

若無滿足此三條件之一，則摺不出「定型」。



◆ 創作

基本圖形	側面	頂面	底面

結論

無摺痕

曲面彎摺處可找到一條直線

平面紙

加曲線摺痕

混實、虛線

一曲線完全在另一曲線的內側

全實線(虛線)

兩曲線完全在對方曲線的內側或外側

無封閉區域但不能摺

加直或曲線，分開共存的凹、凸曲面

形成封閉區域

不能摺

能摺

有一條非封閉曲線摺痕

曲面

全實線，直線兩側曲線凹口同向

全虛線

全曲線，每條虛曲線兩旁沒有實曲線

直線兩側是實、虛曲線，且凹口反向

不能摺

圓柱

能摺

圓錐

基本圖形

複製
連接組合

形成

定型

具備3條件

未來展望

- 1.若**長方形紙改為中空**、只有邊框的紙，在同樣條件下能摺出何種樣貌？
- 2.摺痕圖中的曲線，皆為圓弧線，若改為橢圓弧線或**任意曲線**，研究結果相同嗎？
- 3.在圓柱與圓錐側面上，**畫橫向的曲線、直線**，還能摺嗎？
- 4.立體摺紙與平面摺紙皆具有縮小體積、美觀...等特性，最大不同是**立體摺紙中空部分可存放物品**，於生活應用更加廣泛，如燈罩、禮品紙盒、建築景觀造景紙模...等。

參考文獻資料

- 1.摺紙範例(無日期)。Jun Mitani。取自<https://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/ja/index.html>
- 2.曲面(無日期)。維基百科。取自<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E9%9D%A2>
- 3.前川定理(無日期)。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%89%8D%E5%B7%9D%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 4.川崎定理(無日期)。維基百科。取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%9D%E5%B4%8E%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 5.曹亮吉(2002)。怎麼說它有多彎。科學月刊，第十六卷第八期。
- 6.數學家和藝術家都讚歎不已，神奇圈圈「莫比烏斯環」(2018年11月18日)。科技新報。
取自<https://technews.tw/2018/11/18/mobius-strip-mathematicians-and-artists-are-amazed/>