中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080405

”因數”小子之不能”除”的秘密

學校名稱：桃園市楊梅區四維國民小學

作者：	指導老師：
小五 管芊華	戴榮輝
小五 劉康宥	陳月梅
小四 戴祁楨	
小四 楊旻熙	

關鍵詞：質數、因數、組合

摘要

本研究發現互不整除的組合個數在 2 至$\frac{N}{2}$（$\frac{N+1}{2}$）之間。且快速找出其中一個互不整除的最少組合內容為(N-1,N)且必有(2,3)。

當 N 為質數，組合個數(P)為 2 的情況下， 1~N 的組合數量（a_N）有$a_N = a_{N-1} + N - F_N$的關係存在。組合個數(P)的組合數量（$a_{(N,P)}$）有$a_{(N,P)} = a_{(N-1,P-1)} + a_{(N-1,P)}$的關係存在。也出現連續數的狀況，連續數的數量與 N 及組合個數(P)，呈現 N-2(P-1)的關係存在。

另外，我們創造了「互不整除表」，透過螢光筆劃線即可來快速判斷該組合是否為互不整除的組合。我們也可以透過「互不整除表」快速找出組合個數為 2 時，1~N 的組合數會有多少種組合數量。

壹、研究動機

在開學時，老師詢問有沒有同學想參加科展。我們有很多同學都踴躍報名參加。到了自然教室時，老師在桌上蓋了幾張白張，要我們看看想研究什麼內容。心想，科展應該是研究一些科學的東西吧。

在翻開了幾張問題後，想不到都是數學問題，有的看起來很簡單，有的卻看不懂在問什麼。但在老師一一問了一些問題之後，發現，答案好像不是表面想的那麼簡單似的。

這些題目中，我們挑了一個森棚教官的數學題——「互不整除」來研究，想說應該不會太難，就除來除去而已。而在研究過程中，發現到，原來一個看似簡單的「互不整除」，竟然與許多數學觀念(因倍數、規律)是有關係。

在研究過程中，我們運用了數學課常用的除法，還有因倍數。其實不算太難，但困難的在找出規則或整體性的答案。我們也發現到透過許多數字的大量觀察，和同學的互動才能找出化繁為簡的公式或結論。

最後，我們也期望可以找出一個快速的方式來判斷組合內容是否為互不整除。皇天不負苦心人，我們終於找出來了。

貳、名詞定義

一、1~N

本研究中的 1~N，指從 1 到 N 的連續自然數，亦即 1、2、3⋯(N-2)、(N-1)、N。且 N 最少為 3。

二、互不整除

本研究中互不整除的意思是在 1~N 中，任意兩數彼此間互相不能整除。

三、高斯符號

高斯符號為方括號[　]，[x]表示不大於（等於或小於）x 的最大整數。例如：[3.2]=3、[8]=8。

四、組合數、組合內容及組合個數

(一) **組合數**指符合同條件下，不同順序所形成之組合。本研究所稱之組合數，皆以由小到大依序排列為代表。如數字 2、3、5 可形成的組合為：組合一 2,3,5)、組合二(2,5,3)、組合三(3,2,5)、組合四(3,5,2)、組合五(5,2,3)、組合六(5,3,2)共六種。但以組合一(2,3,5)為代表。

(二) **組合內容**為組合數內的元素，如組合(2,3,5)的組合內容為 2、3、5。

(三) **組合個數**為組合數內的元素個數，如組合(2,3,5)的組合個數為 3 個。

五、a_N、$a_{(N,P)}$、$a_{(N,K)}$、F_N、、$V_{(K,N)}$

(一) a_N指 1~N 的組合數總數量。

(二) $a_{(N,P)}$指組合個數有 P 個時，1~N 的組合數總數量。

(三) $a_{(N,K)}$指在組合個數有 2 個時，組合開頭數為 K，1~N 的組合數總數量。

(四) F_N 指 N 的因數個數，如 3 的因數有 1、3，所以 $F_3=2$；16 的因數有 1、2、4、8、16，所以 $F_{16}=5$。

(五) $V_{(K,N)}$指在組合個數有 2 個時，組合開頭數為 K，K 與 N 是否有倍數關係。當 N 不為 K 的倍數時，$V_{(K,N)}$為 V；當 N 為 K 的倍數時，$V_{(K,N)}$為 0。例如：$V_{(2,6)}=0$、$V_{(3,7)}=V$。

參、研究目的

一、找出 1~N 中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與 N 的關係。

二、找出 1~N 中，互不整除之下，快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。

三、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數量的規律。

四、找出 1~N 中，互不整除之下，N 為質數時，組合數量的規律。

五、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數的開頭數(K)是 N 的因數的特性。

六、找出 1~N 中，互不整除之下，組合內容中連續數的規律。

七、設計「互不整除表」，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

肆、研究設備及器材

紙、鉛筆。

伍、研究過程及討論

一、找出 1~N 中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與 N 的關係。

(一) 列出 1~3 中，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)	1	+1	1
3 個	沒有	0	0	0

表 1-1　1~3 組合個數與組合內容分析表

1. 由表 1-1 可知，在 1~3 中，組合數只有 1 種。
2. 由表 1-1 可知，在 1~3 中，組合個數只有 2 個。
3. 由表 1-1 可知，在 1~3 中，最少組合個數為 2 個；最多組合個數也剛好為 2 個。

(二) 列出 1~4，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)	1	+1	2
	(3,4)	1		
3 個	沒有	0	0	0

表 1-2　1~4 組合個數與組合內容分析表

1. 由表 1-2 可知，在 1~4 中，組合數有 2 種。
2. 由表 1-2 可知，在 1~4 中，組合個數只有 2 個數字。
3. 由表 1-2 可知，在 1~4 中，最少組合個數為 2 個；最多組合個數也剛好為 2 個。

(三) 列出 1~5，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)	2	+3	5
	(3,4)(3,5)	2		
	(4,5)	1		
3 個	(2,3,5)	1	+2	2
	(3,4,5)	1		
4 個	沒有	0	0	0

表 1-3　1~5 組合個數與組合內容分析表

1. 由表 1-3 可知，在 1~5 中，組合數有 7 種。
2. 由表 1-3 可知，在 1~5 中，除了有 2 個數字的組合內容外，新增加了 3 個數字的組合內容。
3. 由表 1-3 可知，在 1~5 中，最少組合個數為 2 個；最多組合個數為 3 個。

(四) 列出 1~6，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)	2	+2	7
	(3,4)(3,5)	2		
	(4,5)(4,6)	2		
	(5,6)	1		
3 個	(2,3,5)	1	+1	3
	(3,4,5)	1		
	(4,5,6)	1		
4 個	沒有	0	0	0

表 1-4　1~6 組合個數與組合內容分析表

1. 由表 1-4 可知，在 1~6 中，組合數有 10 種。
2. 由表 1-4 可知，在 1~6 中，仍有 2 個及 3 個數字的組合內容。
3. 由表 1-4 可知，在 1~6 中，最少組合個數為 2 個；最多組合個數為 3 個。

(五) 找出 1~7、1~8 及 1~9 中，最少組合個數及最多組合個數

1. 猜想：由之前的結果整理成表 1-5，並推測如下

(1) 無論 N 為何數，最少組合個數應為 2 個。

(2) 如果 N 是奇數，最多組合個數應為$\frac{N+1}{2}$個。

(3) 如果 N 是偶數，最多組合個數應為$\frac{N}{2}$個。

	組合個數			
	2 個	3 個	4 個	5 個
1~3	V			
1~4	V			
1~5	V	V		
1~6	V	V		
1~7	V	V	V	
1~8	V	V	V	
1~9	V	V	V	V

表 1-5　1~3 至 1~9 組合個數分析表

2. 驗證：一一列出 1~7、1~8 及 1~9，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)	3	+5	12
	(3,4)(3,5)(3,7)	3		
	(4,5)(4,6)(4,7)	3		
	(5,6)(5,7)	2		
	(6,7)	1		
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)	3	+7	10
	(3,4,5)(3,4,7)(3,5,7)	3		
	(4,5,6)(4,5,7)(4,6,7)	3		
	(5,6,7)	1		
4 個	(2,3,5,7)	1	+3	3
	(3,4,5,7)	1		
	(4,5,6,7)	1		
5 個	沒有	0	0	0

表 1-6　1~7 組合個數與組合內容分析表

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)	3	+4	16
	(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)	4		
	(4,5)(4,6)(4,7)	3		
	(5,6)(5,7)(5,8)	3		
	(6,7)(6,8)	2		
	(7,8)	1		
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)	3	+5	15
	(3,4,5)(3,4,7)(3,5,7)(3,5,8)(3,7,8)	5		
	(4,5,6)(4,5,7)(4,6,7)	3		
	(5,6,7)(5,6,8)(5,7,8)	3		
	(6,7,8)	1		
4 個	(2,3,5,7)	1	+2	5
	(3,4,5,7)(3,5,7,8)	2		
	(4,5,6,7)	1		
	(5,6,7,8)	1		
5 個	沒有	0	0	0

表 1-7　1~8 組合個數與組合內容分析表

<table>
<tr><th>組合個數</th><th>組合內容</th><th>個數</th><th>增加數</th><th>總數</th></tr>
<tr><td rowspan="7">2 個</td><td>(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)</td><td>4</td><td rowspan="7">+6</td><td rowspan="7">22</td></tr>
<tr><td>(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(6,7)(6,8)(6,9)</td><td>3</td></tr>
<tr><td>(7,8)(7,9)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(8,9)</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3 個</td><td>(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)(2,5,9)(2,7,9)</td><td>5</td><td rowspan="6">+11</td><td rowspan="6">26</td></tr>
<tr><td>(3,4,5)(3,4,7)(3,5,7)(3,5,8)(3,7,8)</td><td>5</td></tr>
<tr><td>(4,5,6)(4,5,7)(4,5,9)(4,6,7)(4,6,9)(4,7,9)</td><td>6</td></tr>
<tr><td>(5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,7,8)(5,7,9)(5,8,9)</td><td>6</td></tr>
<tr><td>(6,7,8)(6,7,9)(6,8,9)</td><td>3</td></tr>
<tr><td>(7,8,9)</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4 個</td><td>(2,3,5,7)(2,5,7,9)</td><td>2</td><td rowspan="5">+8</td><td rowspan="5">13</td></tr>
<tr><td>(3,4,5,7)(3,5,7,8)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,7,9)(4,6,7,9)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,8,9)(5,7,8,9)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(6,7,8,9)</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5 個</td><td>(4,5,6,7,9)</td><td>1</td><td rowspan="2">+2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>(5,6,7,8,9)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6 個</td><td>沒有</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

表 1-8　1~9 組合個數與組合內容分析表

3.　小結:

1~N	最少組合個數	最多組合個數
1~7	2	4
1~8	2	4
1~9	2	5

表 1-9　1~7 至 1~9 組合個數與組合內容分析表

(1)　符合猜想：無論 N 為何數，最少組合個數為 2 個。

(2)　符合猜想：N 是奇數時，最多組合個數應為$\frac{N+1}{2}$個，。

(3)　符合猜想：N 是偶數時，最多組合個數應為$\frac{N}{2}$個。

(4)　綜合(2)(3)兩點，無論 N 為何數，最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

(六) 找出 1~10 中，組合個數及組合內容

1. 推測 1：最少組合個數為 2 個。

2. 推測 2：最多組合個數為 5 個。

3. 列出 1~10 組合個數及組合內容驗證。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)	4	+6	28
	(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)	5		
	(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)	5		
	(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)	4		
	(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)	4		
	(7,8)(7,9)(7,10)	3		
	(8,9)(8,10)	2		
	(9,10)	1		
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)(2,5,9)(2,7,9)	5	+12	38
	(3,4,5)(3,4,7)(3,4,10)(3,5,7)(3,5,8)(3,7,8)(3,7,10)(3,8,10)	8		
	(4,5,6)(4,5,7,)(4,5,9)(4,6,7)(4,6,9)(4,6,10)(4,7,9)(4,7,10)(4,9,10)	9		
	(5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,7,8)(5,7,9)(5,8,9)	6		
	(6,7,8)(6,7,9)(6,7,10)(6,8,9)(6,8,10)(6,9,10)	6		
	(7,8,9)(7,8,10)(7,9,10)	3		
	(8,9,10)	1		
4 個	(2,3,5,7)(2,5,7,9)	2	+9	22
	(3,4,5,7)(3,4,7,10)(3,5,7,8)(3,7,8,10)	4		
	(4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,7,9)(4,6,7,9)(4,6,7,10)(4,6,9,10)(4,7,9,10)	7		
	(5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,8,9)(5,7,8,9)	4		
	(6,7,8,9)(6,7,8,10)(6,7,9,10)(6,8,9,10)	4		
	(7,8,9,10)	1		
5 個	(4,5,6,7,9)(4,6,7,9,10)	2	+2	4
	(5,6,7,8,9)	1		
	(6,7,8,9,10)	1		
6 個	沒有	0	0	0

表 1-10　1~10 組合個數與組合內容分析表

4. 由表 1-10 可知，推測 1 及推測 2 皆符合。

5. 因此可得到以下結論

(1) 無論 N 為何數，最少組合個數為 2 個。

(2) 無論 N 為何數，最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

(七) 試證明規則如下：

從 1~N，任選$\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$個數，則一定可找到二個數，其中一個數一定被另一個數整除。

說明：$A_i=\{2^{\ell}(2i-1)|\ell\in N\cup\{0\},2^{\ell}(2i-1)\le N\}$

則$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}=\{1,2,3,\ldots,N\}$ 且$A_i\cap A_j=\Phi,\forall i\neq j$

從A_1、A_2、 …、 $A_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}$中，任取$\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$個數，由鴿籠原理可知，一定有 2 個數會落在同一個A_k中，k為$\left\{1,2,3,\ldots,\left[\frac{N+1}{2}\right]\right\}$中的某一個數，則此兩數必為倍數關係。

(八) 試舉例說明如下：

1. $\{1,2,3,4,5,6\}$，取$A_1=\{1,2,4\}$、$A_2=\{3,6\}$、$A_3=\{5\}$，從A_1、A_2、A_3中取 4 個數出來($\left[\frac{6+1}{2}\right]+1=4$)，一定有 2 個數落在同一個集合中，因此兩個數為倍數關係。
2. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，取$A_1=\{1,2,4,8\}$、$A_2=\{3,6\}$、$A_3=\{5\}$、$A_4=\{7\}$、$A_5=\{9\}$，從A_1、A_2、A_3、A_4、A_5中取 6 個數出來($\left[\frac{9+1}{2}\right]+1=6$)，一定有 2 個數落在同一個集合中，因此兩個數為倍數關係。

二、找出 1~N 中，互不整除之下，快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。

(一) 將 1~3 至 1~10 互不整除的資料，整理列表如下

	組合個數		
	最少組合內容	最多組合內容	
1~3	(2,3)	(2,3)	由 3 往回推 2 個
1~4	(2,3)(3,4)	(2,3)(3,4)	由 4 往回推 2 個
1~5	(2,3)(2,5)(3,4)(3,5)(4,5)	(2,3,5)(3,4,5)	由 5 往回推 3 個
1~6	(2,3)(2,5)(3,4)(3,5)(4,5)(4,6)(5,6)	(2,3,5)(3,4,5)(4,5,6)	由 6 往回推 3 個
1~7	(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(3,7)(4,5)(4,6)(4,7)(5,6)(5,7)(6,7)	(2,3,5,7)(3,4,5,7)(4,5,6,7)	由 7 往回推 4 個
1~8	(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(4,5)(4,6)(4,7)(5,6)(5,7)(5,8)(6,7)(6,8)(7,8)	(2,3,5,7)(3,4,5,7)(3,5,7,8)(4,5,6,7)(5,6,7,8)	由 8 往回推 4 個
1~9	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(6,7)(6,8)(6,9)(7,8)(7,9)(8,9)	(4,5,6,7,9)(5,6,7,8,9)	由 9 往回推 5 個
1~10	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)(7,8)(7,9)(7,10)(8,9)(8,10)(9,10)	(4,5,6,7,9)(4,6,7,9,10)(5,6,7,8,9)(6,7,8,9,10)	由 10 往回推 5 個

表 2-1　1~3 至 1~10 最少、最多組合內容分析表

(二) 找出 1~11 及 1~12，符合最少組合內容及最多組合內容的答案。

1. 猜想：由表 2-1 中發現

(1) 1~N 中，互不整除之下，最少組合內容為(N-1,N)且至少有(2,3)。

(2) 如果 N 是奇數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\frac{N+1}{2}$個的內容。

(3) 如果 N 是偶數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\frac{N}{2}$個的內容。

2. 將表 2-1 最少組合內容及最多組合內容之一解加上預測 1~11 及 1~12 的資料，整理如表 2-2。

1-N	最少組合內容之一解	最多組合內容之一解
1~3	(2,3)	(2,3)
1~4	(2,3)(3,4)	(3,4)
1~5	(2,3)(4,5)	(3,4,5)
1~6	(2,3)(5,6)	(4,5,6)
1~7	(2,3)(6,7)	(4,5,6,7)
1~8	(2,3)(7,8)	(5,6,7,8)
1~9	(2,3)(8,9)	(5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(9,10)	(6,7,8,9,10)
1~11	(2,3)(10,11)	(6,7,8,9,10,11)
1~12	(2,3)(11,12)	(7.8.9.10.11.12)

表 2-2　1~3 至 1~12 最少、最多組合內容分析表

3. 驗證：一一列出 1~11 及 1~12，組合個數及組合內容。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(2,11)	5	+9	37
	(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)(3,11)	6		
	(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)(4,11)	6		
	(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(5,11)	5		
	(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)(6,11)	5		
	(7,8)(7,9)(7,10)(7,11)	4		
	(8,9)(8,10)(8,11)	3		
	(9,10)(9,11)	2		
	(10,11)	1		
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,3,11)(2,5,7)(2,5,9)(2,5,11)(2,7,9)(2,7,11)(2,9,11)	9	+28	66
	(3,4,5)(3,4,7)(3,4,10)(3,4,11)(3,5,7)(3,5,8)(3,5,11)(3,7,8)(3,7,10)(3,7,11)(3,8,10)(3,8,11)(3,10,11)	13		

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
	(4,5,6)(4,5,7)(4,5,9)(4,5,11)(4,6,7)(4,6,9)(4,6,10)(4,6,11)(4,7,9)(4,7,10)(4,7,11)(4,9,10)(4,9,11)(4,10,11)	14		
	(5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,6,11)(5,7,8)(5,7,9)(5,7,11)(5,8,9)(5,8,11)(5,9,11)	10		
	(6,7,8)(6,7,9)(6,7,10)(6,7,11)(6,8,9)(6,8,10)(6,8,11)(6,9,10)(6,9,11,)(6,10,11)	10		
	(7,8,9)(7,8,10)(7,8,11)(7,9,10)(7,9,11)(7,10,11)	6		
	(8,9,10)(8,9,11)(8,10,11)	3		
	(9,10,11)	1		
4 個	(2,3,5,7)(2,3,5,11)(2,3,7,11)(2,5,7,9)(2,5,7,11)(2,5,9,11)(2,7,9,11)	7	+38	60
	(3,4,5,7)(3,4,5,11)(3,4,7,10)(3,4,7,11)(3,4,10,11)(3,5,7,8)(3,5,7,11)(3,5,8,11)(3,7,8,10)(3,7,8,11)(3,7,10,11)(3,8,10,11)	12		
	(4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,6,11)(4,5,7,9)(4,5,7,11)(4,5,9,11)(4,6,7,9)(4,6,7,10)(4,6,7,11)(4,6,9,10)(4,6,9,11)(4,6,10,11)(4,7,9,10)(4,7,9,11)(4,7,10,11)(4,9,10,11)	16		
	(5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,7,11)(5,6,8,9)(5,6,8,11)(5,6,9,11)(5,7,8,9)(5,7,8,11)(5,7,9,11)(5,8,9,11)	10		
	(6,7,8,9)(6,7,8,10)(6,7,8,11)(6,7,9,10)(6,7,9,11)(6,7,10,11)(6,8,9,10)(6,8,9,11)(6,8,10,11)(6,9,10,11)	10		
	(7,8,9,10)(7,8,9,11)(7,8,10,11)(7,9,10,11)	4		
	(8,9,10,11)	1		
5 個	(2,3,5,7,11)(2,5,7,9,11)	2	+22	26
	(3,4,5,7,11)(3,4,7,10,11)(3,5,7,8,11)(3,7,8,10,11)	4		
	(4,5,6,7,9)(4,5,6,7,11)(4,5,6,9,11)(4,5,7,9,11)(4,6,7,9,10)(4,6,7,9,11)(4,6,7,10,11)(4,6,9,10,11)(4,7,9,10,11)	9		
	(5,6,7,8,9)(5,6,7,8,11)(5,6,7,9,11)(5,6,8,9,11)(5,7,8,9,11)	5		
	(6,7,8,9,10)(6,7,8,9,11)(6,8,9,10,11)(6,7,9,10,11)(6,8,9,10,11)	5		
	(7,8,9,10,11)	1		
6 個	(4,5,6,7,9,11)(4,6,7,9,10,11)	2	+4	4
	(5,6,7,8,9,11)	1		
	(6,7,8,9,10,11)	1		
7 個	沒有	0	0	0

表 2-3　1~11 組合個數與組合內容分析表

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(2,11)	5	+6	43
	(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)(3,11)	6		
	(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)(4,11)	6		
	(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(5,11)(5,12)	6		
	(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)(6,11)	5		
	(7,8)(7,9)(7,10)(7,11)(7,12)	5		
	(8,9)(8,10)(8,11)(8,12)	4		
	(9,10)(9,11)(9,12)	3		
	(10,11)(10,12)	2		
	(11,12)	1		
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,3,11)(2,5,7)(2,5,9)(2,5,11)(2,7,9)(2,7,11) (2,9,11)	9	+14	80
	(3,4,5)(3,4,7)(3,4,10)(3,4,11)(3,5,7)(3,5,8)(3,5,11)(3,7,8) (3,7,10)(3,7,11)(3,8,10)(3,8,11)(3,10,11)	13		
	(4,5,6)(4,5,7)(4,5,9)(4,5,11)(4,6,7)(4,6,9)(4,6,10)(4,6,11) (4,7,9)(4,7,10)(4,7,11)(4,9,10)(4,9,11)(4,10,11)	14		
	(5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,6,11)(5,7,8)(5,7,9)(5,7,11)(5,7,12) (5,8,9)(5,8,11)(5,8,12)(5,9,11)(5,9,12)(5,11,12)	14		
	(6,7,8)(6,7,9)(6,7,10)(6,7,11)(6,8,9)(6,8,10)(6,8,11)(6,9,10) (6,9,11,)(6,10,11)	10		
	(7,8,9)(7,8,10)(7,8,11)(7,8,12)(7,9,10)(7,9,11)(7,9,12)(7,10,11) (7,10,12)(7,11,12)	10		
	(8,9,10)(8,9,11)(8,9,12)(8,10,11)(8,10,12)(8,11,12)	6		
	(9,10,11)(9,10,12)(9,11,12)	3		
	(10,11,12)	1		
4 個	(2,3,5,7)(2,3,5,11)(2,3,7,11)(2,5,7,9)(2,5,7,11)(2,5,9,11) (2,7,9,11)	7	+16	76
	(3,4,5,7)(3,4,5,11)(3,4,7,10)(3,4,7,11)(3,4,10,11)(3,5,7,8) (3,5,7,11)(3,5,8,11)(3,7,8,10)(3,7,8,11)(3,7,10,11)(3,8,10,11)	12		
	(4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,6,11)(4,5,7,9)(4,5,7,11)(4,5,9,11)(4,6,7,9) (4,6,7,10)(4,6,7,11)(4,6,9,10)(4,6,9,11)(4,6,10,11)(4,7,9,10) (4,7,9,11)(4,7,10,11)(4,9,10,11)	16		
	(5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,7,11)(5,6,8,9)(5,6,8,11)(5,6,9,11)(5,7,8,9) (5,7,8,11)(5,7,8,12)(5,7,9,11)(5,7,9,12)(5,7,11,12)(5,8,9,11) (5,8,9,12)(5,8,11,12)(5,9,11,12)	16		
	(6,7,8,9)(6,7,8,10)(6,7,8,11)(6,7,9,10)(6,7,9,11)(6,7,10,11) (6,8,9,10)(6,8,9,11)(6,8,10,11)(6,9,10,11)	10		
	(7,8,9,10)(7,8,9,11)(7,8,9,12)(7,8,10,11)(7,8,10,12)(7,8,11,12) (7,9,10,11)(7,9,10,12)(7,9,11,12)(7,10,11,12)	10		
	(8,9,10,11)(8,9,10,12)(8,9,11,12)(8,10,11,12)	4		
	(9,10,11,12)	1		
5 個	(2,3,5,7,11)(2,5,7,9,11)	2	+9	35
	(3,4,5,7,11)(3,4,7,10,11)(3,5,7,8,11)(3,7,8,10,11)	4		
	(4,5,6,7,9)(4,5,6,7,11)(4,5,6,9,11)(4,5,7,9,11)(4,6,7,9,10) (4,6,7,9,11)(4,6,7,10,11)(4,6,9,10,11)(4,7,9,10,11)	9		
	(5,6,7,8,9)(5,6,7,8,11)(5,6,7,9,11)(5,6,8,9,11)(5,7,8,9,11)	9		

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
	(5,7,8,9,12)(5,7,8,11,12)(5,7,9,11,12)(5,8,9,11,12)			
	(6,7,8,9,10)(6,7,8,9,11)(6,8,9,10,11)(6,7,9,10,11)(6,8,9,10,11)	5		
	(7,8,9,10,11)(7,8,9,10,12)(7,8,9,11,12)(7,8,10,11,12)(7,9,10,11,12)	5		
	(8,9,10,11,12)	1		
6 個	(4,5,6,7,9,11)(4,6,7,9,10,11)	2	+2	6
	(5,6,7,8,9,11)(5,7,8,9,11,12)	2		
	(6,7,8,9,10,11)	1		
	(7,8,9,10,11,12)	1		
7 個	沒有	0	0	0

表 2-4　1~12 組合個數與組合內容分析表

4. 小結

1~N	最少組合內容之一解	最多組合內容之一解
1~11	(2,3)(10,11)	(6,7,8,9,10,11)
1~12	(2,3)(11,12)	(7.8.9.10.11.12)

表 2-5　1-11、1-12 最少、最多組合內容分析表

(1) 符合猜想：1~N 中，互不整除之下，最少組合內容為(N-1,N)且至少有(2,3)

(2) 符合猜想：如果 N 是奇數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\frac{N+1}{2}$個的內容。

(3) 符合猜想：如果 N 是偶數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\frac{N}{2}$個的內容。

(4) 綜合(2)(3)兩點，無論 N 為何數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個的內容。

(三) 找出 1~13 中，組合個數及組合內容

1. 推測 1：最少組合內容至少有(2,3)(12,13)。
2. 推測 2：最多組合個數至少有(7,8,9,10,11,12,13)。
3. 列出 1~13 組合個數及組合內容驗證。

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
2 個	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(2,11)(2,13)	6	+11	54
	(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)(3,11)(3,13)	7		
	(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)(4,11)(4,13)	7		
	(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(5,11)(5,12)(5,13)	7		
	(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)(6,11)(6,13)	6		
	(7,8)(7,9)(7,10)(7,11)(7,12)(7,13)	6		
	(8,9)(8,10)(8,11)(8,12)(8,13)	5		
	(9,10)(9,11)(9,12)(9,13)	4		
	(10,11)(10,12)(10,13)	3		
	(11,12)(11,13)	2		
	(12,13)	1		

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
3 個	(2,3,5)(2,3,7)(2,3,11)(2,3,13)(2,5,7)(2,5,9)(2,5,11)(2,5,13)(2,7,9)(2,7,11)(2,7,13)(2,9,11)(2,9,13)(2,11,13)	14	+43	123
	(3,4,5)(3,4,7)(3,4,10)(3,4,11)(3,4,13)(3,5,7)(3,5,8)(3,5,11)(3,5,13)(3,7,8)(3,7,10)(3,7,11)(3,7,13)(3,8,10)(3,8,11)(3,8,13)(3,10,11)(3,10,13)(3,11,13)	19		
	(4,5,6)(4,5,7)(4,5,9)(4,5,11)(4,5,13)(4,6,7)(4,6,9)(4,6,10)(4,6,11)(4,6,13)(4,7,9)(4,7,10)(4,7,11)(4,7,13)(4,9,10)(4,9,11)(4,9,13)(4,10,11)(4,10,13)(4,11,13)	20		
	(5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,6,11)(5,6,13)(5,7,8)(5,7,9)(5,7,11)(5,7,12)(5,7,13)(5,8,9)(5,8,11)(5,8,12)(5,8,13)(5,9,11)(5,9,12)(5,9,13)(5,11,12)(5,11,13)(5,12,13)	20		
	(6,7,8)(6,7,9)(6,7,10)(6,7,11)(6,7,13)(6,8,9)(6,8,10)(6,8,11)(6,8,13)(6,9,10)(6,9,11,)(6,9,13)(6,10,11)(6,10,13)(6,11,13)	15		
	(7,8,9)(7,8,10)(7,8,11)(7,8,12)(7,8,13)(7,9,10)(7,9,11)(7,9,12)(7,9,13)(7,10,11)(7,10,12)(7,10,13)(7,11,12)(7,11,13)(7,12,13)	15		
	(8,9,10)(8,9,11)(8,9,12)(8,9,13)(8,10,11)(8,10,12)(8,10,13)(8,11,12)(8,11,13)(8,12,13)	10		
	(9,10,11)(9,10,12)(9,10,13)(9,11,12)(9,11,13)(9,12,13)	6		
	(10,11,12)(10,11,13)(10,12,13)	3		
	(11,12,13)	1		
4 個	(2,3,5,7)(2,3,5,11)(2,3,5,13)(2,3,7,11)(2,3,7,13)(2,3,11,13)(2,5,7,9)(2,5,7,11)(2,5,7,13)(2,5,9,11)(2,5,9,13)(2,5,11,13)(2,7,9,11)(2,7,9,13)(2,7,11,13)(2,9,11,13)	16	+80	156
	(3,4,5,7)(3,4,5,11)(3,4,5,13)(3,4,7,10)(3,4,7,11)(3,4,7,13)(3,4,10,11)(3,4,10,13)(3,4,11,13)(3,5,7,8)(3,5,7,11)(3,5,7,13)(3,5,8,11)(3,5,8,13)(3,5,11,13)(3,7,8,10)(3,7,8,11)(3,7,8,13)(3,7,10,11)(3,7,10,13)(3,7,11,13)(3,8,10,11)(3,8,10,13)(3,8,11,13)(3,10,11,13)	25		
	(4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,6,11)(4,5,6,13)(4,5,7,9)(4,5,7,11)(4,5,7,13)(4,5,9,11)(4,5,9,13)(4,5,11,13)(4,6,7,9)(4,6,7,10)(4,6,7,11)(4,6,7,13)(4,6,9,10)(4,6,9,11)(4,6,9,13)(4,6,10,11)(4,6,10,13)(4,6,11,13)(4,7,9,10)(4,7,9,11)(4,7,9,13)(4,7,10,11)(4,7,10,13)(4,7,11,13)(4,9,10,11)(4,9,10,13)(4,9,11,13)(4,10,11,13)	30		
	(5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,7,11)(5,6,7,13)(5,6,8,9)(5,6,8,11)(5,6,8,13)(5,6,9,11)(5,6,9,13)(5,6,11,13)(5,7,8,9)(5,7,8,11)(5,7,8,12)(5,7,8,13)(5,7,9,11)(5,7,9,12)(5,7,9,13)(5,7,11,12)(5,7,11,13)(5,7,12,13)(5,8,9,11)(5,8,9,12)(5,8,9,13)(5,8,11,12)(5,8,11,13)(5,8,12,13)(5,9,11,12)(5,9,11,13)(5,9,12,13)(5,11,12,13)	30		
	(6,7,8,9)(6,7,8,10)(6,7,8,11)(6,7,8,13)(6,7,9,10)(6,7,9,11)(6,7,9,13)(6,7,10,11)(6,7,10,13)(6,7,11,13)(6,8,9,10)(6,8,9,11)(6,8,9,13)(6,8,10,11)(6,8,10,13)(6,8,11,13)(6,9,10,11)(6,9,10,13)(6,9,11,13)(6,10,11,13)	20		
	(7,8,9,10)(7,8,9,11)(7,8,9,12)(7,8,9,13)(7,8,10,11)(7,8,10,12)(7,8,10,13)(7,8,11,12)(7,8,11,13)(7,8,12,13)(7,9,10,11)(7,9,10,12)(7,9,10,13)(7,9,11,12)(7,9,11,13)(7,9,12,13)(7,10,11,12)(7,10,11,13)(7,10,12,13)(7,11,12,13)	20		
	(8,9,10,11)(8,9,10,12)(8,9,10,13)(8,9,11,12)(8,9,11,13)(8,9,12,13)(8,10,11,12)(8,10,11,13)(8,10,12,13)(8,11,12,13)	10		
	(9,10,11,12)(9,10,11,13)(9,10,12,13)(9,11,12,13)	4		

組合個數	組合內容	個數	增加數	總數
	(10,11,12,13)	1		
5 個	(2,3,5,7,11)(2,3,5,7,13)(2,3,5,11,13)(2,3,7,11,13) (2,5,7,9,11)(2,5,7,9,13)(2,5,7,11,13)(2,5,9,11,13)(2,7,9,11,13)	9	+76	111
	(3,4,5,7,11)(3,4,5,7,13)(3,4,5,11,13)(3,4,7,10,11)(3,4,7,10,13) (3,4,7,11,13)(3,4,10,11,13)(3,5,7,8,11)(3,5,7,8,13)(3,5,7,11,13) (3,5,8,11,13)(3,7,8,10,11)(3,7,8,10,13)(3,7,8,11,13)(3,7,10,11,13) (3,8,10,11,13)	16		
	(4,5,6,7,9)(4,5,6,7,11)(4,5,6,7,13)(4,5,6,9,11)(4,5,6,9,13) (4,5,6,11,13)(4,5,7,9,11)(4,5,7,9,13)(4,5,7,11,13)(4,5,9,11,13) (4,6,7,9,10)(4,6,7,9,11)(4,6,7,9,13)(4,6,7,10,11)(4,6,7,10,13) (4,6,7,11,13)(4,6,9,10,11)(4,6,9,10,13)(4,6,9,11,13)(4,6,10,11,13) (4,7,9,10,11)(4,7,9,10,13)(4,7,9,11,13)(4,7,10,11,13)(4,9,10,11,13)	25		
	(5,6,7,8,9)(5,6,7,8,11)(5,6,7,8,13)(5,6,7,9,11)(5,6,7,9,13) (5,6,7,11,13)(5,6,8,9,11)(5,6,8,9,13)(5,6,8,11,13)(5,6,9,11,13) (5,7,8,9,11)(5,7,8,9,12)(5,7,8,9,13)(5,7,8,11,12)(5,7,8,11,13) (5,7,8,12,13)(5,7,9,11,12)(5,7,9,11,13)(5,7,9,12,13)(5,7,11,12,13) (5,8,9,11,12)(5,8,9,11,13)(5,8,9,12,13)(5,8,11,12,13)(5,9,11,12,13)	25		
	(6,7,8,9,10)(6,7,8,9,11)(6,7,8,9,13)(6,7,8,10,13)(6,7,8,11,13) (6,7,9,10,13)(6,7,9,11,13)(6,7,10,11,13)(6,8,9,10,11)(6,8,9,10,13) (6,8,9,11,13)(6,8,10,11,13)(6,7,9,10,11)(6,8,9,10,11)(6,9,10,11,13)	15		
	(7,8,9,10,11)(7,8,9,10,13)(7,8,9,11,13)(7,8,9,10,12)(7,8,9,11,12) (7,8,9,12,13)(7,8,10,11,12)(7,8,10,11,13)(7,8,10,12,13) (7,8,11,12,13)(7,9,10,11,12)(7,9,10,11,13)(7,9,10,12,13) (7,9,11,12,13)(7,10,11,12,13)	15		
	(8,9,10,11,12)(8,9,10,11,13)(8,9,10,12,13)(8,9,11,12,13) (8,10,11,12,13)	5		
	(9,10,11,12,13)	1		
6 個	(2,3,5,7,11,13)(2,5,7,9,11,13)	2	+35	41
	(3,4,5,7,11,13)(3,4,7,10,11,13)(3,5,7,8,11,13)(3,7,8,10,11,13)	4		
	(4,5,6,7,9,11)(4,5,6,7,9,13)(4,5,6,7,11,13)(4,5,6,9,11,13) (4,5,7,9,11,13)(4,6,7,9,10,11)(4,6,7,9,10,13)(4,6,7,9,11,13) (4,6,7,10,11,13)(4,6,9,10,11,13)(4,7,9,10,11,13)	11		
	(5,6,7,8,9,11)(5,6,7,8,9,13)(5,6,7,8,11,13)(5,6,7,9,11,13) (5,6,8,9,11,13)(5,7,8,9,11,12)(5,7,8,9,11,13)(5,7,8,9,12,13) (5,7,8,11,12,13)(5,7,9,11,12,13)(5,8,9,11,12,13)	11		
	(6,7,8,9,10,11)(6,7,8,9,10,13)(6,7,8,10,11,13)(6,7,8,9,11,13) (6,7,9,10,11,13)(6,8,9,10,11,13)	6		
	(7,8,9,10,11,12)(7,8,9,10,11,13)(7,8,9,10,11,13)(7,8,9,11,12,13) (7,8,10,11,12,13)(7,9,10,11,12,13)	6		
	(8,9,10,11,12,13)	1		
7 個	(4,5,6,7,9,11,13)(4,6,7,9,10,11,13)	2	+6	6
	(5.6.7.8.9.11.13)(5,7,8,9,11,12,13)	2		
	(6,7,8,9,10,11,13)	1		
	(7,8,9,10,11,12,13)	1		
8 個	沒有	0	0	0

表 2-6　1~13 組合個數與組合內容分析表

4. 由表 2-6 可知，推測 1 及推測 2 皆符合。

三、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數量的規律。

(一) 列出 1~3 至 1~13，組合個數 2 個的組合內容。

1~N	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
組合數量	1	2	5	7	12	16	22	28
組合內容 (組合個數=2)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
			(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)
					(2,7)	(2,7)	(2,7)	(2,7)
							(2,9)	(2,9)
		(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)
			(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)
					(3,7)	(3,7)	(3,7)	(3,7)
						(3,8)	(3,8)	(3,8)
								(3,10)
			(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
				(4,6)	(4,6)	(4,6)	(4,6)	(4,6)
					(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)
							(4,9)	(4,9)
								(4,10)
				(5,6)	(5,6)	(5,6)	(5,6)	(5,6)
					(5,7)	(5,7)	(5,7)	(5,7)
						(5,8)	(5,8)	(5,8)
							(5,9)	(5,9)
					(6,7)	(6,7)	(6,7)	(6,7)
						(6,8)	(6,8)	(6,8)
							(6,9)	(6,9)
								(6,10)
						(7,8)	(7,8)	(7,8)
							(7,9)	(7,9)
								(7,10)
							(8,9)	(8,9)
								(8,10)
								(9,10)

表 3-1　1~3 至 1~10 組合個數 2 個的組合數量分析表

(二) 列出 N 與各項增加數字的關係

1~N	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
增加的數字	2	3	2,3,4	4,5	2,3,4,5,6	3,5,6,7	2,4,5,6,7,8	3,4,6,7,8,9

表 3-2　1~3 至 1~10，N 與增加的數字對照表

1. 由表 3-1，可以發現增加的數量有一定的規則。
2. 由表 3-2，可以發現增加的數字與 N 互質。

(三) 推測：

1. 增加的數量為 N 的互質數量。
2. 1~N，互不整除下，組合個數為 2 時，N 的組合數量（a_N），$a_N=a_{N-1}+N-F_N$。

(四) 列出 1~8 到 1~13 的組合來驗證

1~N	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
N	8	9	10	11	12	13
F_N	4	3	4	2	6	2
組合數量（a_N）	16	22	28	37	43	54

表 3-3　1~8 到 1~13 組合個數 2 個的組合數量分析表

1. 將表 3-3 的組合數量內容與表 1-6、表 1-7、表 1-8、表 2-2、表 2-3 及表 2-4 對應，，可以發現推測的內容是符合的。
2. 透過表 3-3 可以驗證出來，組合個數為 2 時，N 的組合數量（a_N），$a_N=a_{N-1}+N-F_N$。

四、找出 1~N 中，互不整除之下，N 為質數時，組合數量的規律。

(一) 列出 1~3 到 1~10 的組合個數的資料

組合個數(P) \ 1~N	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
2 個	1	2	5	7	12	16	22	28
3 個			2	3	10	15	26	38
4 個					3	5	13	22
5 個							2	4

表 4-1　1~3 到 1~10 N 與組合個數分析表

1. 從表 4-1 可以發現，質數中的數字與前一排的數字有加總的關係。
2. 分析表 4-1 數字間的關係

(1)$a_{(5,3)}$的組合數為 2，組合內容分別為(2,3,5)、(3,4,5)，而$a_{(4,2)}$的組合數為 2，組合內容分別為(2,3)、(3,4)，$a_{(4,3)}$無組合數。與 N=4 比較，新增加的 N=5，為質數，除了 1 以外，不為任何數的倍數，因此$a_{(5,3)}$的組合內容為$a_{(4,2)}$的組合內容再增加第 3 個數 5。兩者的組合數相同，得到$a_{(5,3)}=a_{(4,2)}$。

(2)$a_{(7,3)}$的組合數為 10，組合內容分別為(2,3,5)、(2,3,7)、(2,5,7)、(3,4,5)、(3,4,7)、(3,5,7)、(4,5,6)、(4,5,7)、(4,5,7)、(5,6,7)，而$a_{(6,2)}$的組合數為 7，組合內容分別為(2,3)、(2,5)、

(3,4)、(3,5)、(4,5)、(4,6)、(5,6)，$a_{(6,3)}$的組合數為 3，組合內容分別為(2,3,5)、(3,4,5)、(4,5,6)。與N＝6比較，新增加的 N=7，為質數，除了 1 以外，不為任何數的倍數，$a_{(7,3)}$的組合內容為$a_{(6,2)}$的組合內容再增加第 3 個數 7。且$a_{(7,3)}$的組合內容中包含$a_{(6,3)}$的所有組合內容。由此可知，$a_{(7,3)}$的組合數為$a_{(6,2)}$及$a_{(6,3)}$兩數之和。得到$a_{(7,3)}=a_{(6,2)}+a_{(6,3)}$。

(3)$a_{(7,4)}$的組合數為 3，組合內容分別為(2,3,5,7)、(3,4,5,7)、(4,5,6,7)，而$a_{(6,3)}$的組合數為 3，組合內容分別為(2,3,5)、(3,4,5)、(4,5,6)，$a_{(6,4)}$無組合數。與 N＝6 比較，新增加的 N=7，為質數，除了 1 以外，不為任何數的倍數，因此$a_{(7,4)}$的組合內容為$a_{(6,3)}$的組合內容再增加第 4 個數 7。兩者的組合數相同，得到$a_{(7,4)}=a_{(6,3)}$。

3. 推測，如果 N 是質數時，組合個數(P)的組合數量（$a_{(N,P)}$），$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$。

(二) 列出 1~9 到 1~13 的組合個數的資料來驗證

1~N / 組合個數(P)	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2 個	22	28	37	43	54
3 個	26	38	66	80	123
4 個	13	22	60	76	156
5 個	2	4	26	35	111
6 個			4	6	41
7 個					6

表 4-2　1~9 到 1~13 組合個數分析表

1. 分析表 4-2 內容，可以發現

(1)N 為 11(質數)，$a_{(11,3)}$組合內容有$a_{(10,2)}$的組合內容，再增加第 3 個數 11，且包含$a_{(10,3)}$的一樣組合內容。$a_{(11,3)}=66$，$a_{(10,2)}=28$，$a_{(10,3)}=38$，$a_{(11,3)}=a_{(10,2)}+a_{(10,3)}$。

(2)N 為 11(質數)，$a_{(11,4)}$組合內容有$a_{(10,3)}$的組合內容，再增加第 4 個數 11，且包含$a_{(10,4)}$的一樣組合內容。$a_{(11,4)}=60$，$a_{(10,3)}=38$，$a_{(10,4)}=22$，$a_{(11,4)}=a_{(10,3)}+a_{(10,4)}$。

(3)N 為 11(質數)，$a_{(11,5)}$組合內容有$a_{(10,4)}$的組合內容，再增加第 5 個數 11，且包含$a_{(10,5)}$的一樣組合內容。$a_{(11,5)}=26$，$a_{(10,4)}=22$，$a_{(10,5)}=4$，$a_{(11,5)}=a_{(10,4)}+a_{(10,5)}$。

(4)N 為 11(質數)，$a_{(11,6)}$組合內容有$a_{(10,5)}$的組合內容，再增加第 6 個數 11，但$a_{(10,6)}$為 0。$a_{(11,6)}=4$，$a_{(10,5)}=4$，$a_{(11,6)}=a_{(10,5)}+a_{(10,6)}$。

(5)為 13(質數)，$a_{(13,3)}$組合內容有$a_{(12,2)}$的組合內容，再增加第 3 個數 13，且包含$a_{(12,3)}$的一樣組合內容。$a_{(13,3)}$＝123，$a_{(12,2)}$＝43，$a_{(12,3)}$＝80，$a_{(13,3)}$=$a_{(12,2)}+a_{(12,3)}$。

(6) N 為 13(質數)，$a_{(13,4)}$組合內容有$a_{(12,3)}$的組合內容，再增加第 4 個數 13，且包含$a_{(12,4)}$的一樣組合內容。$a_{(13,4)}$＝156，$a_{(12,3)}$＝80，$a_{(12,4)}$＝76，$a_{(13,4)}$=$a_{(12,3)}+a_{(12,4)}$。

(7) N 為 13(質數)，$a_{(13,5)}$組合內容有$a_{(12,4)}$的組合內容，再增加第 5 個數 13，且包含$a_{(12,5)}$的一樣組合內容。$a_{(13,5)}$＝111，$a_{(12,4)}$＝76，$a_{(12,5)}$＝35，$a_{(13,5)}$=$a_{(12,4)}+a_{(12,5)}$。

(8) N 為 13(質數)，$a_{(13,6)}$組合內容有$a_{(12,5)}$的組合內容，再增加第 6 個數 13，且包含$a_{(12,6)}$的一樣組合內容。$a_{(13,6)}$＝41，$a_{(12,5)}$＝35，$a_{(12,6)}$＝6，$a_{(13,5)}$=$a_{(12,4)}+a_{(12,5)}$。

(9) N 為 13(質數)，$a_{(13,7)}$組合內容有$a_{(12,6)}$的組合內容，再增加第 7 個數 13，但$a_{(12,7)}$為 0。$a_{(13,7)}$＝6，$a_{(12,6)}$＝6，$a_{(13,7)}$=$a_{(12,6)}+a_{(12,7)}$。

2. 由上述歸納可知，當 N 是質數時，組合個數(P)的組合數量（$a_{(N,P)}$）符合 $a_{(N,P)}$=$a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$的規則。

3. 試證明規則如下：

若 N 為質數，則$a_{(N,P)}$=$a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$

說明：　設$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p \leq \mathrm{N}$

(1)若$\{n_1; n_2; \dots; n_p\}$為互不整除，且$n_p = \mathrm{N}$

因為 N 為質數，則$\{n_1; n_2; \dots; n_{p-1}\}$為互不整除

(2)若$\{n_1; n_2; \dots; n_{p-1}\}$為互不整除，且$n_{p-1} \leq= \mathrm{N}-1$

因為 N 為質數，則$\{n_1; n_2; \dots; n_{p-1}; N\}$為互不整除

由(1)(2)可知，當 N 為質數時，$a_{(N,P)}$=$a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$成立。

4. 試舉例說明

(1)$\{2;3;5;7;9;11\}$為互不整除，因為 11 是質數，去除 11 之後，則$\{2;3;5;7;9\}$仍維持互不整除的關係，則$\{2;3;5;7;9\}$所形成的組合內容(例如:(2,3))，再增加一個數 11，也必形成另一組組合內容(例如:(2,3,11))。則$a_{(11,3)}$的組合數量必包含$a_{(10,2)}$的組合數量。

(2)$\{2;3;5;7;9\}$為互不整除，因為 11 是質數，增加 11 之後，則$\{2;3;5;7;9;11\}$仍維持互不整除的關係，則$\{2;3;5;7;9\}$所形成的組合內容(例如:(2,3,5))，再增加一個數 11，仍包含組合內容(2,3,5)，也就是不含數字 11 的組合內容仍包含在內含數字 11 的組合內容內。則$a_{(11,3)}$的組合數量必含$a_{(10,3)}$的組合數量。

(3)由(1)(2)可知，$a_{(N,P)}$=$a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$成立

五、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數的開頭數(K)是 N 的因數的特性。

(一) 列出 1~3 至 1~10，組合個數=2 時，不同的組合數開頭(K)數量分析。

1~N 組合數開頭(K)	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
2	1	1	2	2	3	3	4	4
3		1	2	2	3	4	4	5
4			1	2	3	3	4	5
5				1	2	3	4	4
6					1	2	3	4
7						1	2	3

表 5-1　1~3 至 1~10 組合數開頭(K)與 N 數量分析表

1. 從表 5-1 可知，在不同的組合數開頭的組合數量，有某一些 N，它的組合數量不會改變(也就是不會增加)。
2. 當組合開頭 k=2 時，$a_4 = a_3$、$a_6 = a_5$、$a_8 = a_7$、$a_{10} = a_9$。
3. 當組合開頭 k=3 時，$a_6 = a_5$、$a_9 = a_8$。
4. 當組合開頭 k=4 時，$a_8 = a_7$。
5. 當組合開頭 k=5 時，$a_{10} = a_9$。
6. 因為不會改變的數量（字），N 都是 K 的倍數。所以推測，當 N 是 K 的倍數時，組合數量會延續下去，不會增加。

(二) 列出 1~11 至 1~13，不同的組合數開頭數量分析。

1~N 組合數開頭(K)	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3		1	2	2	3	4	4	5	6	6	7
4			1	2	3	3	4	5	6	6	7
5				1	2	3	4	4	5	6	7
6					1	2	3	4	5	5	6
7						1	2	3	4	5	6
8									3	4	5
9									2	3	4
10									1	2	3
11										1	2
12											1

表 5-2　1~3 至 1~13 組合數開頭(K)與 N 數量分析表

1. 由表 5-2 可知，1~11 至 1~13 部份，當 N 為 K 的倍數時，組合數量符合推測，會延續下去。

六、找出 1~N 中，互不整除之下，組合內容中連續數的規律。

(一) 列出 1~3 至 1~10 的組合內容

	組合個數			
	2 個	3 個	4 個	5 個
1~3	(2,3)			
1~4	(2,3) (3,4)			
1~5	(2,3)(2,5) (3,4)(3,5) (4,5)	(2,3,5) (3,4,5)		
1~6	(2,3)(2,5) (3,4)(3,5) (4,5)(4,6) (5,6)	(2,3,5) (3,4,5) (4,5,6)		
1~7	(2,3)(2,5)(2,7) (3,4)(3,5)(3,7) (4,5)(4,6)(4,7) (5,6)(5,7) (6,7)	(2,3,5) (2,3,7)(2,5,7) (3,4,5)(3,4,7)(3,5,7) (4,5,6) (4,5,7)(4,6,7) (5,6,7)	(2,3,5,7) (3,4,5,7) (4,5,6,7)	
1~8	(2,3)(2,5)(2,7) (3,4)(3,5)(3,7)(3,8) (4,5)(4,6)(4,7) (5,6)(5,7)(5,8) (6,7)(6,8) (7,8)	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7) (3,4,5)(3,4,7)(3,5,7) (3,5,8)(3,7,8) (4,5,6)(4,5,7)(4,6,7) (5,6,7)(5,6,8)(5,7,8) (6,7,8)	(2,3,5,7) (3,4,5,7)(3,5,7,8) (4,5,6,7) (5,6,7,8)	
1~9	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9) (3,4)(3,5)(3,7)(3,8) (4,5)(4,6)(4,7)(4,9) (5,6)(5,7)(5,8)(5,9) (6,7)(6,8)(6,9) (7,8)(7,9) (8,9)	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)(2,5,9)(2,7,9) (3,4,5)(3,4,7)(3,5,7)(3,5,8)(3,7,8) (4,5,6)(4,5,7)(4,5,9)(4,6,7)(4,6,9) (4,7,9) (5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,7,8)(5,7,9) (5,8,9) (6,7,8)(6,7,9)(6,8,9) (7,8,9)	(2,3,5,7)(2,5,7,9) (3,4,5,7)(3,5,7,8) (4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,7,9) (4,6,7,9) (5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,8,9) (5,7,8,9) (6,7,8,9)	(4,5,6,7,9) (5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9) (3,4)(3,5)(3,7)(3,8) (3,10) (4,5)(4,6)(4,7)(4,9) (4,10) (5,6)(5,7)(5,8)(5,9) (6,7)(6,8)(6,9) (6,10) (7,8)(7,9) (7,10) (8,9)(8,10) (9,10)	(2,3,5)(2,3,7)(2,5,7)(2,5,9)(2,7,9) (3,4,5)(3,4,7)(3,4,10)(3,5,7) (3,5,8)(3,7,8)(3,7,10)(3,8,10) (4,5,6)(4,5,7,)(4,5,9)(4,6,7) (4,6,9)(4,6,10)(4,7,9)(4,7,10) (4,9,10) (5,6,7)(5,6,8)(5,6,9)(5,7,8)(5,7,9) (5,8,9) (6,7,8)(6,7,9)(6,7,10)(6,8,9) (6,8,10)(6,9,10) (7,8,9)(7,8,10)(7,9,10) (8,9,10)	(2,3,5,7)(2,5,7,9) (3,4,5,7)(3,4,7,10)(3,5,7,8) (3,7,8,10) (4,5,6,7)(4,5,6,9)(4,5,7,9) (4,6,7,9)(4,6,7,10)(4,6,9,10) (4,7,9,10) (5,6,7,8)(5,6,7,9)(5,6,8,9) (5,7,8,9) (6,7,8,9)(6,7,8,10)(6,7,9,10) (6,8,9,10) (7,8,9,10)	(4,5,6,7,9) (4,6,7,9,10) (5,6,7,8,9) (6,7,8,9,10)

表 6-1　1~3 至 1~10 組合個數與組合內容分析表

(二) 計算 1~3 至 1~10 的組合內容中，符合連續數的數量

連續數數量 / 1~N	組合個數(P)			
	2 個	3 個	4 個	5 個
1~3	1			
1~4	2			
1~5	3	1		
1~6	4	2		
1~7	5	3	1	
1~8	6	4	2	
1~9	7	5	3	1
1~10	8	6	4	2

組合個數為 2 個，連續數有(N-2)個

組合個數為 3 個，連續數有(N-4)個

組合個數為 4 個，連續數有(N-6)個

組合個數為 5 個，連續數有(N-8)個

1~N 的組合個數有 P 個時，連續數有 N-2(P-1)個

(三) 列出 1~3 至 1~10 的組合內容中，符合連續數的組合內容

	組合個數(P)			
	2 個	3 個	4 個	5 個
1~3	(2,3)			
1~4	(2,3)(3,4)			
1~5	(2,3)(3,4)(4,5)	(3,4,5)		
1~6	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)	(3,4,5)(4,5,6)		
1~7	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)	(4,5,6,7)	
1~8	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)	
1~9	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)(8,9)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)(7,8,9)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)(6,7,8,9)	(5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)(8,9)(9,10)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)(7,8,9)(8,9,10)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)(6,7,8,9)(7,8,9,10)	(5,6,7,8,9)(6,7,8,9,10)

組合個數為 2 個，連續數內容為，(2,3)、(3,4)…(9,10)

組合個數為 3 個，連續數內容為，(3,4,5)、(4,5,6)…(8,9,10)

組合個數為 4 個，連續數內容為，(4,5,6,7)、(5,6,7,8)、(6,7,8,9)、(7,8,9,10)

組合個數為 5 個，連續數內容為，(5,6,7,8,9)、(6,7,8,9,10)

- 1~N 的組合個數有 P 個時，連續數內容最小數字為 P，最大為 N，依序為 P、P+1、P+2、...,、N-2、N-1、N，任一數連續取 P 個，即可形成連續數($Q_1,Q_2,\ldots Q_P$)。
- 無論 N 為多少，最小的連續數為 P 開頭的數，組合內容為(P,P+1…,2P-1)
- 無論 N 為多少，最大的連續數為 N 結尾的數，組合內容為(N-P+1…,N-1,N)

(四) 小結

1. 1~N 的組合個數有 P 個時，連續數有 N-2(P-1)個。
2. 1~N 的組合個數有 P 個時，最小的連續數組合內容為(P,P+1…,2P-1)。
3. 1~N 的組合個數有 P 個時，最大的連續數組合內容為(N-P+1…,N-1,N)。

七、設計「互不整除表」，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

(一) 利用 N 與組合數開頭(K)的互不整除的概念設計「互不整除表」

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

表 7-1　互不整除表

1.表 7-1 中，V $_{(K,N)}$ 指在 1~N 中，組合開頭數(K)時的狀況，當 N 不為 K 的倍數時，V $_{(K,N)}$ 為 V；當 N 為 K 的倍數時，V $_{(K,N)}$ 為 0 (或無)。

2.「互不整除表」的限制為組合個數為 2 時使用，亦即每一個格子中，如有組合內容必為 1 個，組合內容為(K,N)。

(二) 「互不整除表」的使用方式—找出組合個數為 2 時，1~N 的組合數量。

1.K=2 時

(1)列出 K=2 的互不整除表與組合數量的分析。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

圖 7-1　互不整除表(K=2)與組合個數(P=2)分析圖

(2)由圖 7-1 可知，當組合個數(P)為 2，且組合數開頭數(K=2)固定，無論 N 為何數，黑色區域皆為 2(1~1 及 1~2 的格子)，扣除 1~1 及 1~2 後，其餘空格的位置皆為 K 的倍數，其關係歸納如下。

	K=2 時				
	黑色區域數 (A)	K~N 中 K 的倍數總數 (B)	A 與 B 重疊數(1~2 的格子) (C)	V 的總數 (N-A-B+C)	$a_{(n,2)}$
N=2	2	1	1	2-2-1+1=0	0
N=3	2	1	1	3-2-1+1=1	1
N=4	2	2	1	4-2-2+1=1	1
N=5	2	2	1	5-2-2+1=2	2
N=6	2	3	1	6-2-3+1=2	2
N=7	2	3	1	7-2-3+1=3	3
N=8	2	4	1	8-2-4+1=3	3
N=9	2	4	1	9-2-4+1=4	4
N=10	2	5	1	10-2-5+1=4	4
N=11	2	5	1	11-2-5+1=5	5
N=12	2	6	1	12-2-6+1=5	5
N=13	2	6	1	13-2-6+1=6	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
N	2	$\left[\frac{N}{K}\right]$	1	N-2-$\left[\frac{N}{K}\right]$+1	

表 7-2　互不整除表(K=2)與組合數量歸納表

(3)從表 7-2 可知，V 的總數與$a_{(n,2)}$相同，$a_{(n,2)} = \mathrm{N} - 2 - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$。

2.K=3 時

(1)列出 K=3 的互不整除表與組合數量的分析。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
3			V	V		V	V		V	V		V

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
3	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7

圖 7-2　互不整除表(K=3)與組合個數(P=2)分析圖

(2)由圖 7-2 可知，當組合個數(P)為 2，且組合數開頭數(K=3)固定，無論 N 為何數，黑色區域皆為 2(1~1、1~2 及 1~3 的格子)，扣除 1~1、1~2 及 1~3 後，其餘空格的位置皆為 K 的倍數，其關係歸納如下。

	K=3 時				
	黑色區域數 (A)	K~N 中 K 的倍數總數 (B)	A 與 B 重疊數(1~2 的格子) (C)	V 的總數 (N-A-B+C)	$a_{(n,3)}$
N=3	3	1	1	3-3-1+1=1	0
N=4	3	1	1	4-3-1+1=1	1
N=5	3	1	1	5-3-1+1=2	2
N=6	3	2	1	6-3-2+1=2	2
N=7	3	2	1	7-3-2+1=3	3
N=8	3	2	1	8-3-2+1=4	4
N=9	3	3	1	9-3-3+1=4	4
N=10	3	3	1	10-3-3+1=5	5
N=11	3	3	1	11-3-3+1=6	6
N=12	3	4	1	12-3-4+1=6	6
N=13	3	4	1	13-3-4+1=7	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
N	3	$\left[\frac{N}{K}\right]$	1	N-3-$\left[\frac{N}{K}\right]$+1	

表 7-3　互不整除表(K=3)與組合數量歸納表

(3)從表 7-3 可知，V 的總數與$a_{(n,3)}$相同，$a_{(n,3)} = \mathrm{N} - 3 - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$

3.K=4 時

(1)列出 K=4 的互不整除表與組合數量的分析。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
4				V	V	V		V	V	V		V

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
4	0	0	0	1	2	3	3	4	5	6	6	7

圖 7-3　互不整除表(K=4)與組合個數(P=2)分析圖

(2)由圖 7-3 可知，當組合個數(P)為 2，且組合數開頭數(K=4)固定，無論 N 為何數，黑色區域皆為 2(1~1、1~2、1~3 及 1~4 的格子)，扣除 1~1、1~2、1~3 及 1~4 後，其餘空格的位置皆為 K 的倍數，其關係歸納如下。

	K=4 時				
	黑色區域數 (A)	K~N 中 K 的倍數總數 (B)	A 與 B 重疊數(1~2 的格子) (C)	V 的總數 (N-A-B+C)	$a_{(n,4)}$
N=4	4	1	1	4-4-1+1=0	0
N=5	4	1	1	5-4-1+1=1	1
N=6	4	1	1	6-4-1+1=2	2
N=7	4	1	1	7-4-1+1=3	3
N=8	4	2	1	8-4-2+1=3	3
N=9	4	2	1	9-4-2+1=4	4
N=10	4	2	1	10-4-2+1=5	5
N=11	4	2	1	11-4-2+1=6	6
N=12	4	3	1	12-4-3+1=6	6
N=13	4	3	1	13-4-3+1=7	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
N	4	$\left[\frac{N}{K}\right]$	1	N-4-$\left[\frac{N}{K}\right]$+1	

表 7-4　互不整除表(K=4)與組合數量歸納表

(3)從表 7-4 可知，V 的總數與$a_{(n,4)}$相同，$a_{(n,4)} = \mathrm{N} - 4 - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$

4.由表 7-2、表 7-3 及表 7-4 可歸納出，表 7-1 中，每一列 V 的數量為$a_{(n,k)} = N - K - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$。

(三) 「互不整除表」的使用方式─快速判斷組合內容是否符合互不整除。

1.操作方式：將給定的組合內容內的元素，畫記在互不整除表上。再觀察畫記部份交叉的地方是否有 V。如果每交叉的地方都有 V，代表該組合符合互不整除的規則。反之，亦然。

2.範例一：不符合互不整除的規則，組合 1(2,3,4,5,6)。

(1) 在互不整除表兩側，將組合 1 內的組合元素分別畫線如圖 7-4。

(2) 發現組合數開頭(K=2)與 1~4、1~6 及組合數開頭(K=3)與 1~6 的交叉部份沒有 V 記號（紅色框框處），代表組合 1(2,3,4,5,6)並不符合互不整除的規則。

(3) 知道是造成互不整除的原因是 2 與 4、2 與 6 及 3 與 6 這些因素造成的。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

圖 7-4　組合 1 (2,3,4,5,6)交叉圖

3.範例二：符合互不整除的規則，組合 2(3,5,7,8)

(1) 在互不整除表兩側，將組合 2 內的組合元素分別畫線如圖 7-5。

(2) 發現畫線部份，每一個交叉的地方都有 V 存在。

(3) 確認組合 2 符合互不整除的規則。

1~N	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

圖 7-5　組合 2(3,5,7,8)交叉圖

陸、研究結果

一、找出 1~N 中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與 N 的關係。

(一) 無論 N 為何數，最少組合個數為 2 個。

(二) 無論 N 為何數，最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

二、找出 1~N 中，互不整除之下，快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。

(一) 無論 N 為何數，1~N 中，互不整除之下，最少組合內容為(N-1,N)且至少有(2,3)。

(二) 無論 N 為何數，1~N 中，互不整除之下，最多組合內容至少有 N 往回推$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個的內容。

三、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數量的規律。

(一) 組合個數為 2 時，N 的組合數量（a_N），$a_N=a_{N-1}+N-F_N$。

四、找出 1~N 中，互不整除之下，N 為質數時，組合數量的規律。

(一) 當 N 是質數時，組合個數(P)的組合數量（$a_{(N,P)}$），$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$

五、找出 1~N 中，互不整除之下，組合個數為 2 時，組合數的開頭數(K)是 N 的因數的特性。

(一) 當 N 為 K 的倍數時，組合數量會延續下去。

六、找出 1~N 中，互不整除之下，組合內容內中連續數的規律。

(一) 1~N 的組合個數有 P 個時，連續數有 N-2(P-1)個。

(二) 1~N 的組合個數有 P 個時，最小的連續數組合內容為(P,P+1…,2P-1)。

(三) 1~N 的組合個數有 P 個時，最大的連續數組合內容為(N-P+1…,N-1,N)。

七、設計「互不整除表」，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

(一) 「互不整除表」的使用方式一找出組合個數為 2 時，1~N 的組合數量。

1. 當組合個數(P)為 2，且組合數開頭數(K)固定，1~N 的組合數量等於 V 數量。

2. 每一列 V 的數量為$a_{(n,k)} = N - K - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$。

(二) 「互不整除表」的使用方式一快速判斷組合內容是否符合互不整除。

1. 透過給定的組合內容，將其數字在互不整除表中進行畫線，如果交叉的地方都有 V，則該組合即符合互不整除的規則。

柒、未來研究方向

本研究目前已探討出，N 與最小組合內容及最大組合內容的關係，並可以快速找出其中之一解。並透過設計的互不整除表可以快速判斷給定之組合是否為互不整除的關係。

但互不整除表的設計及研究 N 的組合數量（a_N），$a_N=a_{N-1} + N - F_N$都僅限於組合個數為 2 的情形之下，未來可以再深入研究，當組合個數為 3、4⋯之下，是否有一個更全面性的關係存在。

捌、參考文獻資料

一、游森棚(2018)。互不整除。*科學研習*。*57*(10)，57。

二、翰林數學學習領域教師手冊（民 109）。國小數學第七冊。第五單元　除法。台北：翰林出版事業股份有限公司。

三、翰林數學學習領域教師手冊（民 109）。國小數學第九冊。第二單元　因數與公因數。台北：翰林出版事業股份有限公司。

四、翰林數學學習領域教師手冊（民 109）。國小數學第九冊。第三單元　倍數與公倍數。台北：翰林出版事業股份有限公司。

五、康軒數學學習領域教師手冊（民 109）。國小數學第七冊。第四單元　整數的除法。台北：康軒文教事業股份有限公司。

六、康軒數學學習領域教師手冊（民 109）。國小數學第九冊。第二單元　因數與倍數。台北：康軒文教事業股份有限公司。

【評語】080405

本作品來自於科學研習月刊的一個「互不整除」數學問題，引發作者探討 1~N 的整數中，形成互不整除的組合內容與個數以及嘗試找出一些規律，從 n=3 的情形開始條列式的列出所有可能情形，再從數字中歸納可能的結論並試圖予以證明，整個思路過程完整，然而研究結果侷限於「互不整除表」，應可思考如何增加「互不整除表」的實用性，以豐富研究成果。

作品簡報

”因數”小子之不能”除”的秘密

國小組　數學科

摘要

本研究主要在找出1~N中，互不整除的組合個數在2到$\frac{N}{2}$（$\frac{N+1}{2}$）之間，而且一定有互不整除的最少組合個數為2，其內容可為(N-1, N)；最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$，其內容可為N往回推$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

當N為質數，組合個數(P)為2，我們找出1~N互不整除組合數總數量為$a_{(N,2)}$，其$a_{(N,2)}=a_{(N-1,2)}+N-F_N$（$F_N$是N的因素個數）。若組合個數為P時，1~N互不整除組合數總數量為$a_{(N,P)}$，其$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$。

我們創造了「互不整除表」，透過螢光筆劃線即可來快速判斷該組合是否為互不整除。也能快速找出組合個數為2時，1~N的組合數會有$a_{(N,2,K)}=N-K-\left[\frac{N}{K}\right]+1$。

研究動機

國立臺灣科學教育館，「森棚教官的數學題」：互不整除

名詞定義

- 1~N：指從1到N的連續自然數且N最少為3。
- 互不整除：在1~N中，任意兩數彼此間互相不能整除。
- 高斯符號：為方括號[ ]，[x]表示不大於（等於或小於）x的最大整數。
- 組合數、組合內容及組合個數
  - **組合數**指符合同條件下，不同順序所形成之組合。。
  - **組合內容**為組合數內的元素，如組合(2, 3, 5)的組合內容為2、3、5。
  - **組合個數**為組合數內的元素個數，如組合(2, 3, 5)的組合個數為3個。
- a_N、$a_{(N,P)}$、$a_{(N,2,K)}$、F_N
  - a_N指1~N中，互不整除下，1~N的組合數總數量。
  - $a_{(N,P)}$指1~N中，互不整除下，組合個數有P個時，1~N的組合數總數量。
  - $a_{(N,2,K)}$指1~N中，互不整除下，在組合個數有2個時，組合開頭數為K，1~N的組合數總數量。
  - F_N指N的因數個數。

研究目的

一. 找出1~N中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與N的關係。
二. 找出1~N中，互不整除之下，快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。
三. 找出1~N中，互不整除之下，組合個數(P)為2時的特性。
四. 找出1~N中，互不整除之下，N為質數時的特性。
五. 找出1~N中，互不整除之下，組合數的開頭數(K)是N的因數時的特性。
六. 找出1~N中，互不整除之下，組合內容內的數字之間的特性。
七. 設計「互不整除表」，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

研究一:找出1~N中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與N的關係。

研究過程

組合個數 1~N	組合個數			
	2個	3個	4個	5個
1~3	V			
1~4	V			
1~5	V	V		
1~6	V	V		
1~7	V	V	V	
1~8	V	V	V	
1~9	V	V	V	V

1~3至1-9組合個數分析表

性質： 從1~N，任選$\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$個數，則一定可找到二個數，其中一個數一定被另一個數整除。

舉例說明如下：

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ， 取 $A_1=\{1,2,4,8\}$ 、 $A_2=\{3,6\}$ 、 $A_3=\{5\}$、$A_4=\{7\}$、$A_5=\{9\}$從A_1 、A_2、A_3、A_4、A_5中取6個數出來($\left[\frac{9+1}{2}\right]+1=6$)，一定有2個數落在同一個集合中，因此兩個數為倍數關係。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
5	6	7	8	9
	3		4	
			2	
			1	

研究結果

1. 無論N為何數，最少組合個數為2個。 2. 無論N為何數，最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

研究二:找出1~N中,互不整除之下,快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。

研究過程

	組合個數	
	最少組合內容	最多組合內容
1~3	(2,3)	(2,3)
1~4	(2,3)(3,4)	(2,3)(3,4)
1~5	(2,3)(2,5)(3,4)(3,5)(4,5)	(2,3,5)(3,4,5)
1~6	(2,3)(2,5)(3,4)(3,5)(4,5)(4,6)(5,6)	(2,3,5)(3,4,5)(4,5,6)
1~7	(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(3,7)(4,5)(4,6)(4,7)(5,6)(5,7)(6,7)	(2,3,5,7)(3,4,5,7)(4,5,6,7)
1~8	(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(4,5)(4,6)(4,7)(5,6)(5,7)(5,8)(6,7)(6,8)(7,8)	(2,3,5,7)(3,4,5,7)(3,5,7,8)(4,5,6,7)(5,6,7,8)
1~9	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(6,7)(6,8)(6,9)(7,8)(7,9)(8,9)	(4,5,6,7,9)(5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(2,5)(2,7)(2,9)(3,4)(3,5)(3,7)(3,8)(3,10)(4,5)(4,6)(4,7)(4,9)(4,10)(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)(6,7)(6,8)(6,9)(6,10)(7,8)(7,9)(7,10)(8,9)(8,10)(9,10)	(4,5,6,7,9)(4,6,7,9,10)(5,6,7,8,9)(6,7,8,9,10)

表 2-1 1~3至1~10最少、最多組合內容分析表

由3往回推2個

由4往回推2個

由5往回推3個

由6往回推3個

由7往回推4個

由8往回推4個

由9往回推5個

由10往回推5個

1-N	最少組合內容之一解	最多組合內容之一解
1~3	(2,3)	(2,3)
1~4	(2,3)(3,4)	(3,4)
1~5	(2,3)(4,5)	(3,4,5)
1~6	(2,3)(5,6)	(4,5,6)
1~7	(2,3)(6,7)	(4,5,6,7)
1~8	(2,3)(7,8)	(5,6,7,8)
1~9	(2,3)(8,9)	(5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(9,10)	(6,7,8,9,10)
1~11	(2,3)(10,11)	(6,7,8,9,10,11)
1~12	(2,3)(11,12)	(7.8.9.10.11.12)

表2-2

1~3至1~12最少、最多組合內容分析表

研究結果

1. 無論N為何數,1~N中,互不整除之下,最少組合內容可為(N-1,N)且至少有(2,3) 。
2. 無論N為何數,1~N中,互不整除之下,最多組合內容至少有N往回推$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個的內容。

研究三:找出1~N中，互不整除之下，組合個數(P)為2時的特性。

研究過程

列出1~3至1~10，組合個數2個的組合內容。

1~N	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
組合數量	1	2	5	7	12	16	22	28
組合內容(組合個數=2)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
			(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)
					(2,7)	(2,7)	(2,7)	(2,7)
							(2,9)	(2,9)
		(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)
			(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)
					(3,7)	(3,7)	(3,7)	(3,7)
						(3,8)	(3,8)	(3,8)
								(3,10)
			(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
				(4,6)	(4,6)	(4,6)	(4,6)	(4,6)
					(4,7)	(4,7)	(4,7)	(4,7)
							(4,9)	(4,9)
								(4,10)
				(5,6)	(5,6)	(5,6)	(5,6)	(5,6)
					(5,7)	(5,7)	(5,7)	(5,7)
						(5,8)	(5,8)	(5,8)
							(5,9)	(5,9)
					(6,7)	(6,7)	(6,7)	(6,7)
						(6,8)	(6,8)	(6,8)
							(6,9)	(6,9)
								(6,10)
						(7,8)	(7,8)	(7,8)
							(7,9)	(7,9)
								(7,10)
							(8,9)	(8,9)
								(8,10)
								(9,10)

表 3-1　1~3至1~10組合個數2個的組合數量分析表

■ 探討N與各項增加數字的關係

1. 由表3-1，可以發現增加的數量有一定的規則。
2. 由表3-2，可以發現增加的數字與N互不整除。

1~N	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
增加的數字	2	3	2,3 4	4,5	2,3,4 5,6	3,5 6,7	2,4,5 6,7,8	3,4,6 7,8,9

表 3-2　1~3至1~10，N與增加的數字對照表

■ 列出1~8到1~13的組合來驗證

1. 透過表3-3可以驗證出來，組合個數為2時，1~N的組合數總數量(a_N)，$a_N = a_{N-1} + N - F_N$。

1~N	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
N	8	9	10	11	12	13
F_N	4	3	4	2	6	2
組合數量(a_N)	16	22	28	37	43	54

表3-3　1~8到1~13組合個數2個的組合數量分析表

研究結果

組合個數為2時，1~N的組合數總數量（$a_{(N,2)}$），$a_{(N,2)} = a_{(N-1,2)} + N - F_N$。

研究四：找出1~N中，互不整除之下，N為質數時的特性。

研究過程

■ 列出1~3到1~13的組合個數的資料

1~N 組合個數(P)	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2個	1	2	5	7	12	16	22	28	37	43	54
3個			2	3	10	15	26	38	66	80	123
4個					3	5	13	22	60	76	156
5個							2	4	26	35	111
6個									4	6	41
7個											6

1~3到1~13 N與組合個數分析表

■ 證明 若N為質數，則$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$

說明：設$1 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_p \le N$

1. 若$\{n_1;n_2;\ldots;n_p\}$為互不整除，且$n_p=N$
   因為N為質數，則$\{n_1;n_2;\ldots;n_{p-1}\}$為互不整除
2. 若$\{n_1;n_2;\ldots;n_{p-1}\}$為互不整除，且$n_{p-1} \le = N-1$
   因為N為質數，則$\{n_1;n_2;\ldots;n_{p-1};N\}$為互不整除
3. 由(1)(2)可知，當N為質數時，
   $a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$成立。

■ 舉例說明

1. 在1~11中，$\{2;3;5;7;9;11\}$為互不整除，因為11是質數，去除11之後，則$\{2;3;5;7;9\}$仍維持互不整除的關係，則$\{2;3;5;7;9\}$所形成的組合內容(例如：(2, 3))，再增加一個數11，也必形成另一組組合內容(例如：(2, 3, 11))。則$a_{(11,3)}$的組合數量必包含$a_{(10,2)}$的組合數量。
2. 在1~9中，$\{2;3;5;7;9\}$為互不整除，因為11是質數，增加11之後，則$\{2;3;5;7;9;11\}$仍維持互不整除的關係，則$\{2;3;5;7;9\}$所形成的組合內容(例如：(2, 3, 5))，再增加一個數11，仍包含組合內容(2, 3, 5)，也就是不含數字11的組合內容仍包含在內含數字11的組合內容內。則$a_{(11,3)}$的組合數量必含$a_{(10,3)}$的組合數量。

研究結果

N是質數時，組合個數(P)的組合數總數量（$a_{(N,P)}$），$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$

研究五：找出1~N中，互不整除之下，組合數的開頭數(K)是N的因數時的特性。

研究過程

1~N 組合數開頭(K)	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3		1	2	2	3	4	4	5	6	6	7
4			1	2	3	3	4	5	6	6	7
5				1	2	3	4	4	5	6	7
6					1	2	3	4	5	5	6
7						1	2	3	4	5	6
8									3	4	5
9									2	3	4
10									1	2	3
11										1	2
12											1

1~3至1~13組合數開頭(K)與N數量分析表

1. 當組合開頭k=2時，$a_4 = a_3$、$a_6 = a_5$、$a_8 = a_7$、$a_{10} = a_9$。
2. 當組合開頭k=3時，$a_6 = a_5$、$a_9 = a_8$。
3. 當組合開頭k=4時，$a_8 = a_7$。
4. 當組合開頭k=5時，$a_{10} = a_9$。
5. 當N是K的倍數時，組合數量會延續下去，不會增加。

■ 證明 若組合個數為2時，N為K的倍數，則 $a_{(N,2,K)}$=$a_{(N-1,2,K)}$

說明：設$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p \leq$ N

若n_p mod k =0，且n_p = N，則n_{p-1} mod k ≠ 0。

令$a_{N-1} = X$，因為N為K的倍數，則(N, K)不為互不整除的組合，所以a_N=a_{N-1}得證。

■ 舉例說明

在1~9中，組合數開頭4，則{8; 12}為4的倍數。則{7; 11}必不為3的倍數。a_7 =3， a_{11} =6，(8, 4)、(12, 4)不為互不整除的組合，所以。 $a_8 = a_7$ =3、$a_{12} = a_{11}$=6

研究結果

當N為K的倍數時，組合數總數量$a_{(N,2,K)} = a_{(N-1,2,K)}$。

研究六:找出1~N中，互不整除之下，組合內容內的數字之間的特性。

研究過程

列出1~3至1~10的組合內容中，符合連續數的數量(左圖)、組合內容(右圖)

連續數數量 1~N	組合個數(P) 2個	3個	4個	5個
1~3	1			
1~4	2			
1~5	3	1		
1~6	4	2		
1~7	5	3	1	
1~8	6	4	2	
1~9	7	5	3	1
1~10	8	6	4	2

組合個數為2個，連續數內容為，(2,3)、(3,4)⋯(9,10)

組合個數為3個，連續數內容為，(3,4,5)、(4,5,6)⋯(8,9,10)

組合個數為4個，連續數內容為，(4,5,6,7)、(5,6,7,8)⋯(7,8,9,10)

組合個數為5個，連續數內容為，(5,6,7,8,9)、(6,7,8,9,10)

1~N的組合個數有P個時，連續數有N-2(P-1)個

	組合個數(P) 2個	3個	4個	5個
1~3	(2,3)			
1~4	(2,3)(3,4)			
1~5	(2,3)(3,4)(4,5)	(3,4,5)		
1~6	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)	(3,4,5)(4,5,6)		
1~7	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)	(4,5,6,7)	
1~8	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)	
1~9	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)(8,9)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)(7,8,9)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)(6,7,8,9)	(5,6,7,8,9)
1~10	(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8)(8,9)(9,10)	(3,4,5)(4,5,6)(5,6,7)(6,7,8)(7,8,9)(8,9,10)	(4,5,6,7)(5,6,7,8)(6,7,8,9)(7,8,9,10)	(5,6,7,8,9)(6,7,8,9,10)

組合個數為2個，連續數內容為，(2,3)、(3,4)⋯(9,10)

組合個數為3個，連續數內容為，(3,4,5)、(4,5,6)⋯(8,9,10)

組合個數為4個，連續數內容為，(4,5,6,7)、(5,6,7,8)⋯(7,8,9,10)

組合個數為5個，連續數內容為，(5,6,7,8,9)、(6,7,8,9,10)

•無論N為多少，最小的連續數為P開頭的數，組合內容為(P,P+1⋯,2P-1)

•無論N為多少，最大的連續數為N結尾的數，組合內容為(N-P+1⋯,N-1,N)

研究結果

1. 1~N的組合個數有P個時，連續數有N-2(P-1)個。
2. 1~N的組合個數有P個時，最小的連續數組合內容為(P,P+1⋯,2P-1)。
3. 1~N的組合個數有P個時，最大的連續數組合內容為(N-P+1⋯,N-1,N)。

研究七：設計「互不整除表」，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

研究過程

■ 利用N與組合數開頭(K)的互不整除的概念設計「互不整除表」

1. 表7-1中，$V_{(N,2,K)}$指在1~N中，組合開頭數(K)時的狀況，當N不為K的倍數時，$V_{(N,2,K)}$為V；當N為K的倍數時，$V_{(N,2,K)}$為0(或無)。
2. 「互不整除表」的限制為組合個數為2時使用，亦即每一個格子中，如有組合內容必為(K, N)。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

表7-1　互不整除表

■ 「互不整除表」的使用方式—找出組合個數為2時，1~N的組合數量

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

圖7-1　互質表(K=2)與組合個數(P=2)分析圖

	K=2時					
	黑色區域數(A)	K~N中K的倍數總數(B)	A與B重疊數(1~2的格子)(C)	V的總數(N-A-B+C)	$a_{(N,2,K)}$
N=2	2	1	1	2-2-1+1=0	0
N=3	2	1	1	3-2-1+1=1	1
N=4	2	2	1	4-2-2+1=1	1
N=5	2	2	1	5-2-2+1=2	2
N=6	2	3	1	6-2-3+1=2	2
N=7	2	3	1	7-2-3+1=3	3
N=8	2	4	1	8-2-4+1=3	3
N=9	2	4	1	9-2-4+1=4	4
N=10	2	5	1	10-2-5+1=4	4
N=11	2	5	1	11-2-5+1=5	5
N=12	2	6	1	12-2-6+1=5	5
N=13	2	6	1	13-2-6+1=6	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
N	2	$\left[\frac{N}{K}\right]$	1	N-2-$\left[\frac{N}{K}\right]$+1	

表7-2　互不整除表(K=2)與組合數量歸納表

研究結果

V的總數與$a_{(N,2,K)}$相同，$a_{(N,2,K)} = \mathrm{N} - \mathrm{K} - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$。

■ 互不整除表的使用方式—快速判斷組合內容是否符合互不整除。

◆ 操作方式：將給定的組合內容內的元素，畫記在互不整除表上。再觀察畫記部份交叉的地方是否有V。如果每交叉的地方都有V，代表該組合符合互不整除的規則。反之，亦然。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

圖7-4　組合1 (2,3,4,5,6)交叉圖

◆ 範例一：不符合互不整除的規則，組合1(2,3,4,5,6)。

1. 在互不整除表兩側，將組合1內的組合元素分別畫線如圖7-4。
2. 發現組合數開頭(K=2)與1~4、1~6及組合數開頭(K=3)與1~6的交叉部份沒有V記號（紅色框框處），代表組合1(2,3,4,5,6)並不符合互不整除的規則。

1~N 組合數開頭(K)	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10	1~11	1~12	1~13
2		V		V		V		V		V		V
3			V	V		V	V		V	V		V
4				V	V	V		V	V	V		V
5					V	V	V	V		V	V	V
6						V	V	V	V	V		V
7							V	V	V	V	V	V
8								V	V	V	V	V
9									V	V	V	V
10										V	V	V

圖7-5　組合1 (3,5,7,8)交叉圖

◆ 範例二:符合互不整除的規則，組合2(3,5,7,8)

1. 在互不整除表兩側，將組合2內的組合元素分別畫線如圖7-5。
2. 發現畫線部份，每一個交叉的地方都有V存在。

研究結果

■研究一：找出1~N中，互不整除之下，最少組合個數及最多組合個數與N的關係。

1. 無論N為何數，最少組合個數為2個。
2. 無論N為何數，最多組合個數為$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個。

■ 研究二：找出1~N中，互不整除之下，快速找出符合最少組合內容及最多組合內容的方法。

1. 無論N為何數，1~N中，互不整除之下，最少組合內容為(N-1, N)且至少有(2, 3)。
2. 無論N為何數，1~N中，互不整除之下，最多組合內容至少有N往回推$\left[\frac{N+1}{2}\right]$個的內容。

■研究三：找出1~N中，互不整除之下，組合個數為2時的特性。

1. 組合個數為2時，N的組合數量（a_N），$a_N=a_{N-1}+N-F_N$。

■研究四：找出1~N中，互不整除之下，N為質數時的特性。

1. 當N是質數時，組合個數(P)的組合數量（$a_{(N,P)}$），$a_{(N,P)}=a_{(N-1,P-1)}+a_{(N-1,P)}$

■研究五：找出1~N中，互不整除之下，組合數的開頭數(K)是N的因數時的特性。

1. 當N為K的倍數時，組合數量會延續下去($a_N=a_{N-1}$)。

■研究六：找出1~N中，互不整除之下，組合內容內的數字之間的特性。

1. 1~N的組合個數有P個時，連續數有N-2(P-1)個。
2. 1~N的組合個數有P個時，最小的連續數組合內容為(P, P+1…, 2P-1)。
3. 1~N的組合個數有P個時，最大的連續數組合內容為(N-P+1…, N-1, N)。

研究結果

■研究七：設計互不整除表，來找出組合數內容、數量及是否符合互不整除的規則。

◆ 互不整除表的使用方式—找出組合個數為2時，1~N的組合數量。

1. 當組合個數(P)為2，且組合數開頭數(K)固定，1~N的組合數量等於V數量。
2. 每一列V的數量為$a_{(N,2,K)} = N - K - \left[\frac{N}{K}\right] + 1$。

◆互不整除表的使用方式—快速判斷組合內容是否符合互不整除。

1. 透過給定的組合內容，將其數字在互不整除表中進行畫線，如果交叉的地方都有V，則該組合即符合互不整除的規則。

參考文獻

■ 游森棚(2018)。互不整除。*科學研習*。*57*(10)，57。

■ 翰林數學學習領域教師手冊（民109）。國小數學第七冊。第五單元　除法。台北：翰林出版事業股份有限公司。

■ 翰林數學學習領域教師手冊（民109）。國小數學第九冊。第二單元　因數與公因數。台北：翰林出版事業股份有限公司。

■ 翰林數學學習領域教師手冊（民109）。國小數學第九冊。第三單元　倍數與公倍數。台北：翰林出版事業股份有限公司。

■ 康軒數學學習領域教師手冊（民109）。國小數學第七冊。第四單元　整數的除法。台北：康軒文教事業股份有限公司。

■ 康軒數學學習領域教師手冊（民109）。國小數學第九冊。第二單元　因數與倍數。台北：康軒文教事業股份有限公司。