中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080404

「換位」思考—交換座位問題方法數探討

學校名稱：新北市板橋區埔墘國民小學

作者：	指導老師：
小六 姜羽洛	陳怡君 吳雅芸

關鍵詞：交換座位、遞迴關係、費氏數列

摘要

我的研究是在$m \times n$層的教室座位圖，每位同學只能朝前後左右移動一格的情形下，有幾種交換座位的方法數探討。我利用圖形分析方式，得出以下四個主要結論：(1) 座位圖為奇數時就無法進行交換座位，某些座位圖為偶數時亦無法進行交換座位。(2) 透過樹狀圖分析發現$2 \times n$交換座位的方法數為費氏數列的完全平方數。(3) 利用木棒擺放的圖形方式來解釋交換座位的情形，進而推導出交換座位方法數為兩兩互換座位方法數的完全平方數。(4) 找到了$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$交換座位方法數的遞迴關係及規律和$2 \times 2 \times 2$之立體圖形的交換座位方法數。

壹、研究動機

老師在數學課時，教到如何利用火車座位圖（圖 1-1）找出自己的座位[1]。我心想下堂課就要進行本周的交換座位活動（圖 1-2），如果大家都朝自己的前後左右進行交換，那會有幾種方法呢？

單	號	雙	號
靠窗	靠走道	靠走道	靠窗
1	3	2	4
5	7	6	8
9	11	10	12
⋮	⋮	⋮	⋮

圖 1-1：火車走道圖

圖 1-2：教室座位圖

有了這樣初步想法後，我便開始透過國立科學教育館科展資訊管理系統，在歷屆科展作品中找到與我研究方向較具有相關性的作品來進行研讀，希望能對研究的方向有更進一步的了解。很快地我就從第 28 屆的「一種排列的探討」[2]一文中，發現我能利用樹狀圖來找出交換座位方法數。在拜讀第 30 屆的「奇妙的骨牌世界」[3]一文後，發現其探討骨牌在不同圖形的排列方式並找出骨牌排列方式之遞迴關係。讓我也想找看看交換座位是否有規律與遞迴關係隱含其中。

最後，我從交換座位與遞迴關係的關鍵字裡，找到了第 49 屆高中組數學科展中「旋乾轉坤陰陽易位」[4]一文，發現此篇文獻雖然已經探討出$2 \times n$的交換座位之遞迴關係及兩兩

交換座位方法數。但他們採用的探討方式較為抽象，加上我曾看到「棋迷之謎的探討」[5]要了解2×1牙牌在不同圖形的排列方式而利用西洋棋盤來當作座位，區分出可進行交換座位之座位圖，及不可進行交換座位之座位圖，然後找出牙牌排列之遞迴關係。因此激發我想試著用類似的實物操作的方式來進行研究，同時還要探討$3\times n$及 $4\times n$的交換座位的情形，並找到遞迴關係。

貳、研究目的

一、名詞釋義

(一) 交換座位

本研究所指交換座位方式為每一人自原本座位，朝自己的前後左右其中一格座位進行交換，不能移動到斜對角處座位，且每人皆必須進行交換座位。

在上述前提下，本研究所指的交換座位會發生兩種形式，一種是兩兩互換，是指兩個人互相交換座位，而不與他人交換座位，另一種則是繞圈交換座位，是指形成順時針或逆時針交換座位。例如：

1. 圖 2-1 為2×1的座位圖，而 A 只能和 B 互換，因此本圖只有 1 種交換座位方式。
2. 圖 2-2 是一個2×2的座位圖，而 A 有兩個地方可以交換座位，一個是移至 B 的座位，另一個則是可以移至 C 的座位。接著由 B、C、D 依此順序進行交換。可得2×2的座位圖有 4 種交換座位方式。

A
B

圖 2-1：交換座位說明示意圖

A	B
C	D

圖 2-2：交換座位說明示意圖

(二) 遞迴關係式[6]

數列$\langle a_n\rangle$第 n 項a_n與a_{n-1}、a_{n-2}、⋯、a_2、a_1之關係式。給定前面幾項的值(初始條件)，能夠藉由關係式推導數列後面的值。

二、研究目的

(一) 計算座位圖為$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$時，其交換座位的方法數。

(二) 找出交換座位問題方法數之規律。

(三) 建立座位數與交換座位方法數之遞迴關係。

參、研究設備及器材

電腦、相機（手機）、筆、紙、木棒（紫色、黃色）、紅綠交錯之格子紙。

肆、研究過程與架構

一、研究流程圖

從動機形成作品主題，然後搜索各屆科展文獻，設定研究問題

研究一：探討座位數為奇偶數時，是否可進行交換座位

發現奇數個座位時不可以交換座位	發現部分偶數個座位圖不能交換座位

研究二：以樹狀圖排列計算不同座位組合的交換座位方法數

利用樹狀圖發現2×1、2×2、2×3、2×4、2×5座位圖交換座位方法數為完全平方數

研究三：發展出木棒擺設圖的規則並計算交換座位方法數

找出方格圖配上木棒，呈現出2×2、2×3、2×4交換座位的各種情形

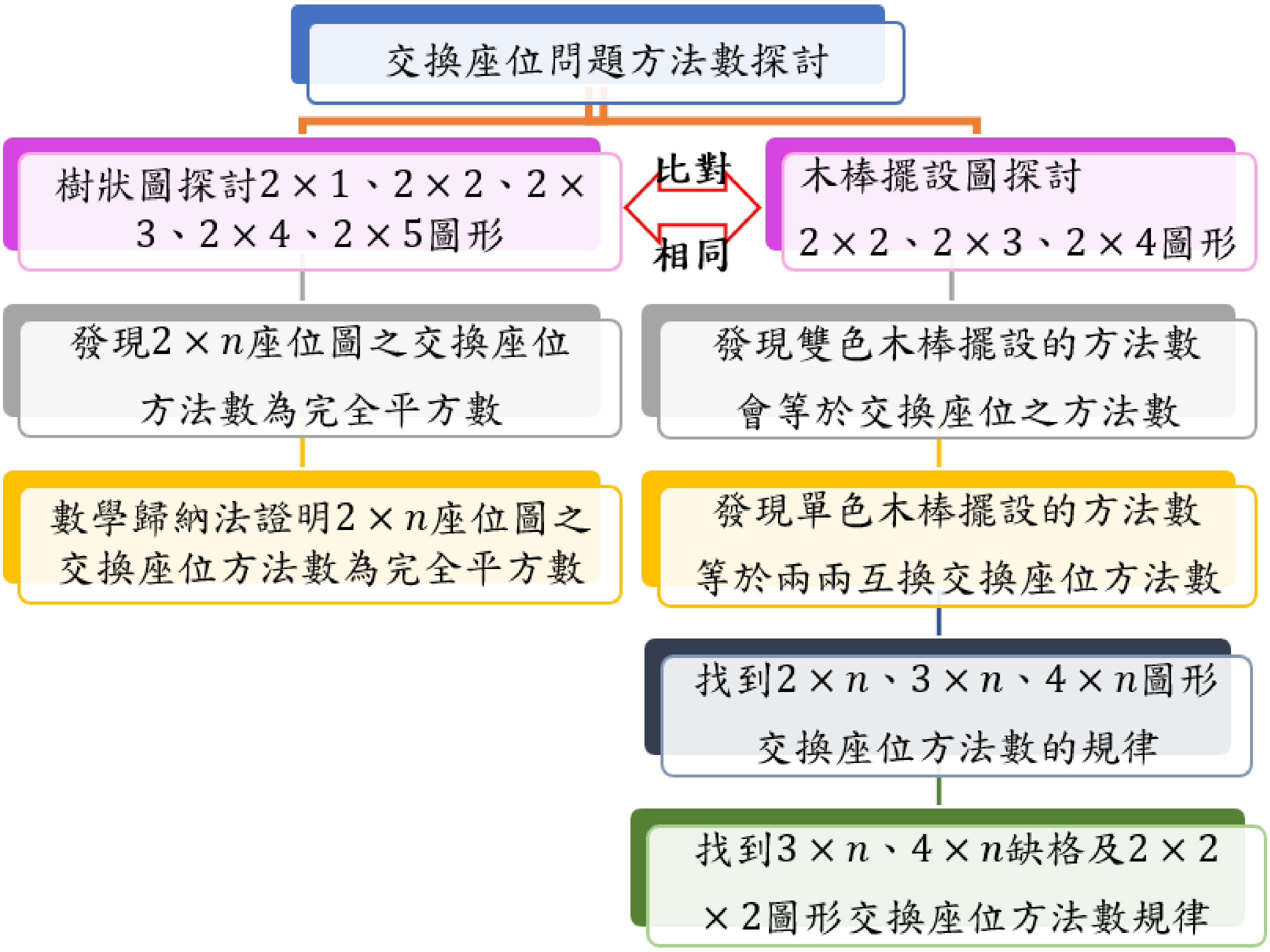
研究四：比對樹狀圖、木棒擺設圖研究結果，證明規則可行

比對研究二的樹狀圖排法與研究三的各種擺設圖排法，證明結果相符

研究五：找出$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$座位圖方法數的規律及遞迴關係

透過圖形的討論研究，發現方法數的規律關係，並進而推導缺格情形及立體圖形

二、研究架構圖



三、符號定義

$b_{(2,n)}$：指2×n座位圖兩兩互換的方法數。

$c_{(2,n)}$：指3×n座位圖兩兩互換的方法數。

$d_{(2,n)}$：指4×n座位圖兩兩互換的方法數。

$B_{(2,n)}$：指2×n座位圖的交換座位方法數。

$C_{(3,n)}$：指3×n座位圖的交換座位方法數。

$D_{(4,n)}$：指4×n座位圖的交換座位方法數。

伍、研究結果

研究一、 討論奇數個與偶數個座位圖是否可進行交換座位

經過研究後，我發現「奇數個座位數皆無法進行交換座位」(圖 3-1)，因為綠色座位的學生都必須移動到黃色座位，黃色座位必移動到綠色座位。而有些的偶數個座位數（圖 3-2)，是可以完成交換座位的。

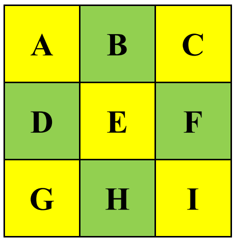


圖 3-1：奇數個座位示意圖

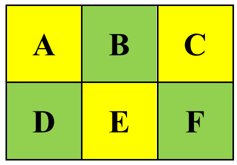
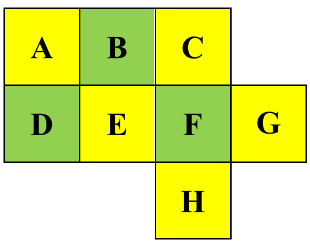
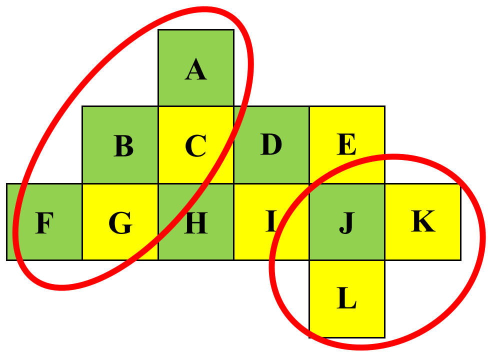


圖 3-2：偶數個座位示意圖

因為我雖然確定奇數個座位圖無法交換座位，但也不能肯定每種偶數個座位圖都能完成交換座位，所以開始進行進行了偶數個座位圖可否交換座位的研究，研究後發現，並非所有偶數座位圖都能進行交換座位如圖 4-1、圖 4-2。圖 4-1 在交換座位時，我發現 A、C、E、G、H 屬於同類座位（黃色)，而 B、D、F 屬於同類座位（綠色)，兩類座位數目並不相等，所以本圖無法完成交換座位。圖 4-2 在交換座位時，因為在紅線區塊內的綠色 A、B、F 只能移動到黃色的 C、G，或是 K 和 L 只能換到 J，因此圖 4-2 無法完成交換座位。





小結

透過研究一我發現只要是奇數個座位數的情形皆無法進行交換座位，有些偶數個座位數的情形亦無法交換座位，先確定能進行研究的對象後，我決定先從樹狀圖的探討出發，進行更進一步的研究。

研究二、 用樹狀圖探討$2 \times n$層圖形交換座位方法數規律關係

(一) 樹狀圖討論

1. 2×1層的交換座位方法數

圖 5-1 是一個2×1座位的圖形。由右圖可知，此圖只有 A、B 兩者，只能夠用兩兩互換的方式，所以這種座位圖僅有一種交換座位的方式。

因此我發現$B_{(2,1)} = 1$。

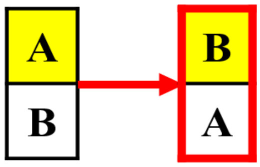


圖 5-1：2×1層交換座位情形樹狀圖

2. 2×2層的交換座位方法數

圖 5-2 是一個2×2座位的圖形。根據樹狀圖可知，此圖有 A、B、C、D 者，因為不能坐在原本的座位，所以 A 初始有兩種選擇，接著再由 B 選擇移動。最後我發現此圖有四種交換座位之方式。因此我發現$B_{(2,2)} = 4$。

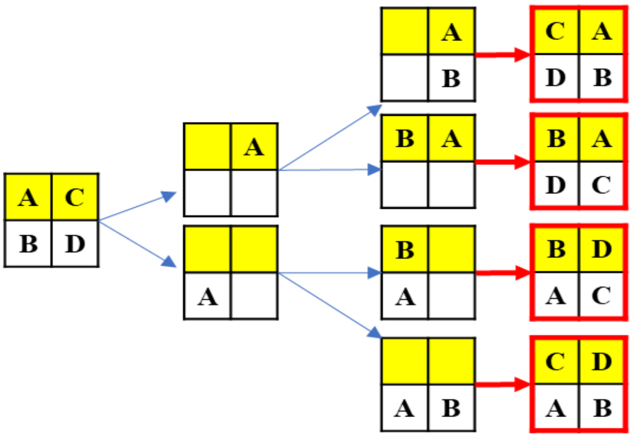


圖 5-2：2×2層交換座位情形樹狀圖

3. 2×3層的交換座位方法數

圖 5-3 是一個2×3座位的圖形。根據圖表可知，此圖有 A、B、C、D、E、F 者可以交換座位。先把 A 移到原本的 B 或 C 座位，接著再移動 B，以此類推。最後在進行數次交換座位後，我發現這種座位圖表僅有九種交換座位之方式。因此我發現 $B_{(2,3)}$=9。

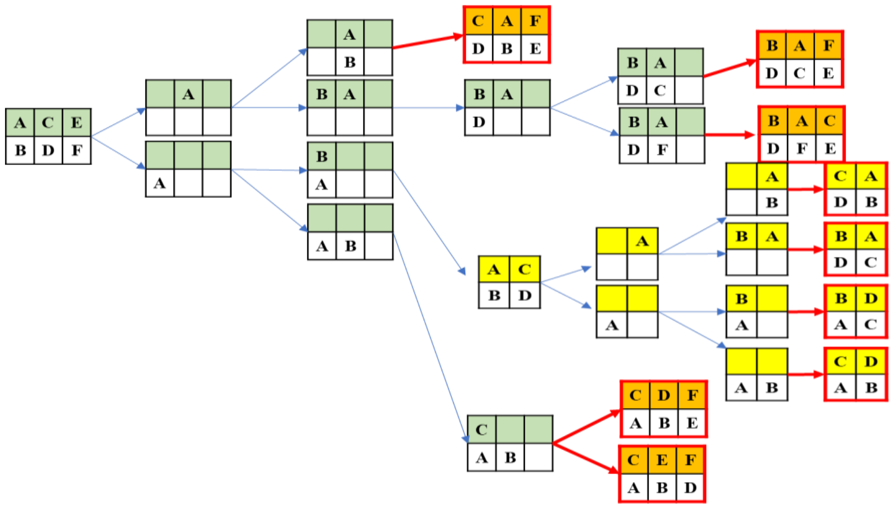


圖 5-3：2×3層交換座位情形樹狀圖

4.　2×4層的交換座位方法數

圖 5-4 是一個2×4的座位圖形。根據圖表可知，此圖有 A、B、C、D、E、F、G、H 者，先將 A 移到原本的 B 或 C 座位，接著再移動 B，以此類推。最後，我發現此圖有 25 種交換座位方式，因此$B_{(2,4)}$=25。

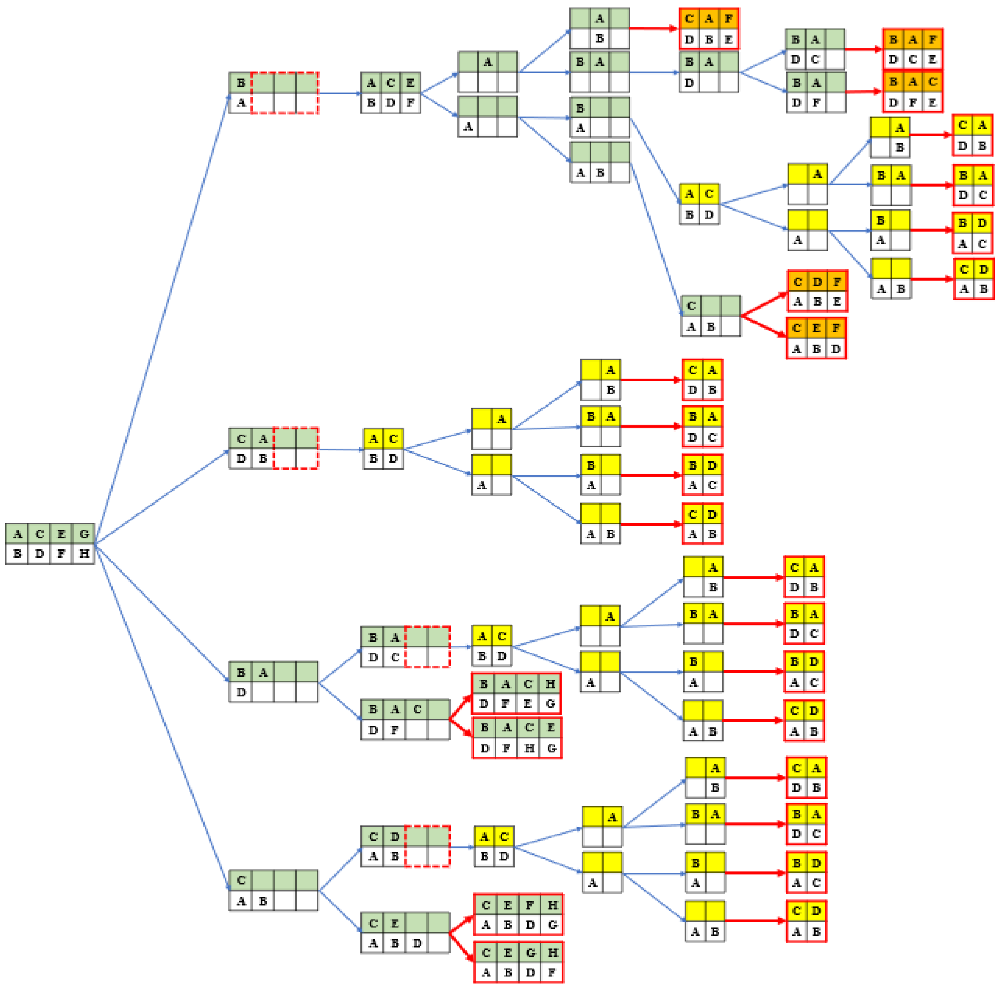


圖 5-4：2×4層交換座位情形樹狀圖

5. 2×5層的交換座位方法數

圖 5-5 是一個 2×5 的座位圖形。根據圖表可知，此圖有 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 者。先將 A 移到原本的 B 或 C 座位，並且依序移動，最後我發現此圖有 64 種交換座位方式。因此我發現$B_{(2,5)}=B_{(2,4)}+3B_{(2,3)}+2B_{(2,2)}+4$ =64。

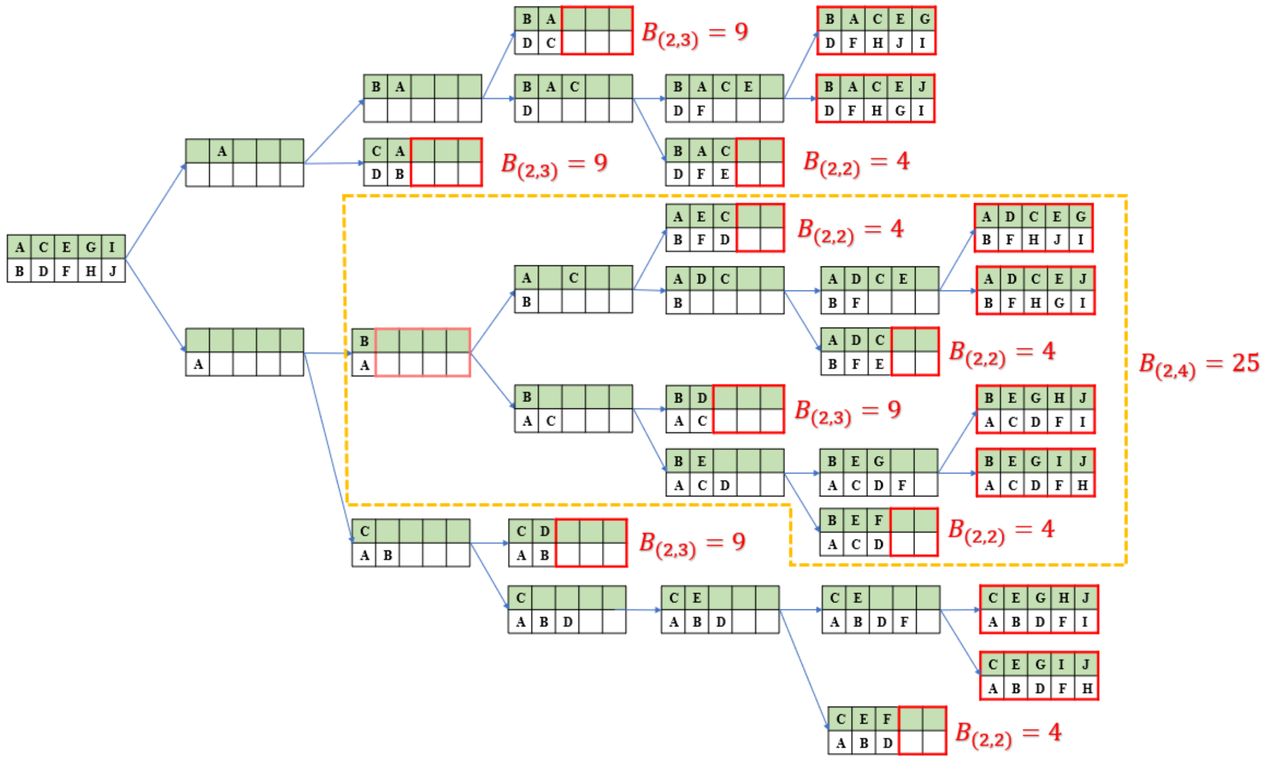


圖 5-5：2×5層交換座位情形樹狀圖

(二) $2\times n$層圖形交換座位方法數規律探討

透過樹狀圖找到以下各圖形的交換座位方法數：

$B_{(2,1)}$ =1→指2×1圖交換座位方法數有 1 種換法

$B_{(2,2)}$ =4→指2×2圖交換座位方法數有 4 種換法

$B_{(2,3)}$ =9→指2×3圖交換座位方法數有 9 種換法

$B_{(2,4)}$ =25→指2×4圖交換座位方法數有 25 種換法

$B_{(2,5)}$ =64→指2×5圖交換座位方法數有 64 種換法

再透過圖形討論所有的$2\times n$層交換座位方法數之關係，如圖 6-1 至圖 6-4。

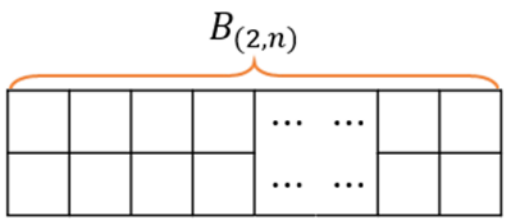


圖 6-1

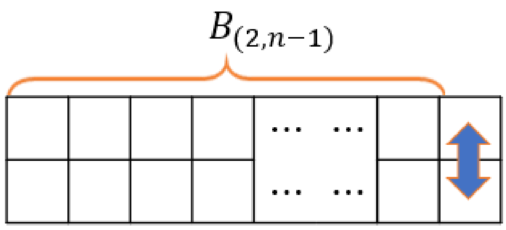


圖 6-2

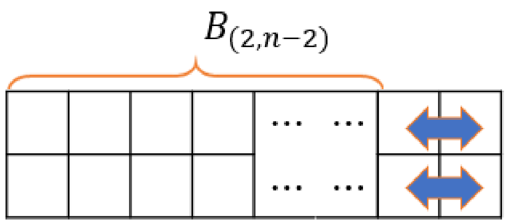


圖 6-3

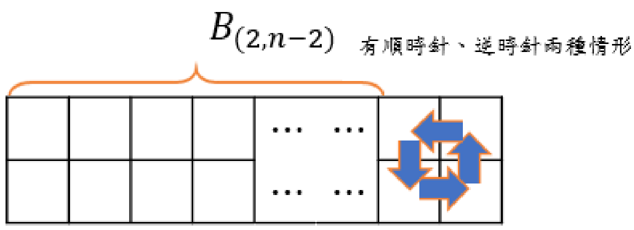


圖 6-4

$$B_{(2,n)}=B_{(2,n-1)}+B_{(2,n-2)}+2(B_{(2,n-2)}+B_{(2,n-3)}+\cdots\cdots+B_{(2,1)}+1)$$

$$=B_{(2,n-1)}+B_{(2,n-2)}+B_{(2,n-3)}+2(B_{(2,n-3)}+\cdots+B_{(2,1)}+1)+2B_{(2,n-2)}-B_{(2,n-3)}$$

$$=B_{(2,n-1)}+B_{(2,n-1)}+2B_{(2,n-2)}-B_{(2,n-3)}=2B_{(2,n-1)}+2B_{(2,n-2)}-B_{(2,n-3)}$$

利用上述得到的遞迴關係，使用數學歸納法證明$B_{(2,n)}$為完全平方數，證明如下：

當 n=4 時，已知 $B_{(2,1)}=1^2$，$B_{(2,2)}=2^2$，$B_{(2,3)}=3^2$，且$\sqrt{B_{(2,3)}}=\sqrt{B_{(2,1)}}+\sqrt{B_{(2,2)}}$

則$B_{(2,4)}=2\times3^2+2\times2^2-1^2=2\times(2+1)^2+2\times2^2-1^2$

$$=2\times(2^2+2\times2\times1+1^2)+2\times2^2-1^2$$

$$=4\times2^2+4\times2\times1+1^2=(2\times2+1)^2=5^2=(\sqrt{B_{(2,2)}}+\sqrt{B_{(2,3)}})^2$$ 成立

設 $n=k$ 時，$B_{(2,k-3)}=\mathrm{x}^2$，$B_{(2,k-2)}=\mathrm{y}^2$，$B_{(2,k-1)}=(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2$ 成立

則$B_{(2,k)}=2(x+y)^2+2y^2-x^2=2x^2+4xy+2y^2+2y^2-x^2$

$$=x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2=[y+(x+y)]^2$$ 為完全平方數成立

依數學歸納法原理可知，$n\in\mathrm{N}$時，$B_{(2,n)}$為完全平方數

小結

研究二主要是探討在$2\times n$層的交換座位的方法數，透過樹狀圖計算了2×1、2×2、2×3、2×4、2×5的情形，分別是1、4、9、25、64種交換座位的方法數。然後分析出$2\times n$圖形中交換座位的方法數為兩兩互換的方法數之平方數，且交換座位的方法數其遞迴關係為：$B_{(2,n)}=2B_{(2,n-1)}+2B_{(2,n-2)}-B_{(2,n-3)}$。

研究三、 發展木棒擺設圖使用方法並計算交換座位方法數

在利用樹狀圖發現$2 \times n$層圖形交換座位方法數的規律後，由於$3 \times n$層的交換座位方法數極多，若以手繪樹狀圖則易產生人為失誤，如此一來，利用樹狀圖列出每種圖形的交換座位方法數便耗時費力，因此我想找到其他操作方法來幫助計算。結果從文獻發現可以透過方格圖來表示座位圖，而我嘗試再加上木棒擺設來呈現座位交換的過程情形。

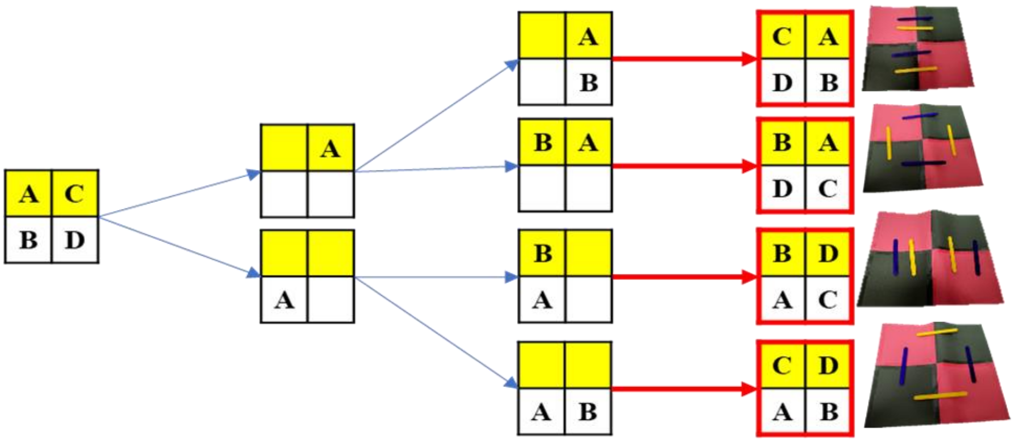


圖 7： $B_{(2,2)}$四種方法比對

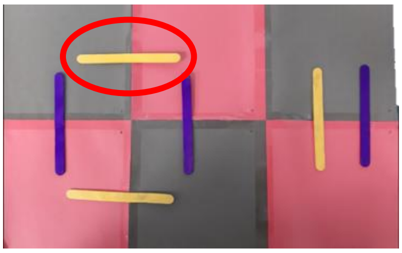
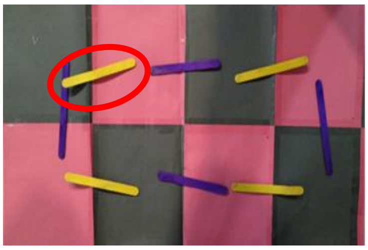
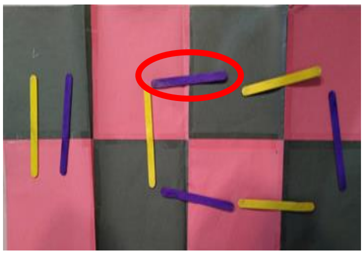
我一開始先用單色木棒來標示，發現難以區辨方向，最後發展出用雙色木棒來呈現交換座位的方法，圖 7 為$B_{(2,2)}$的樹狀圖，我發現樹狀圖的換座位結果類型與我的木棒擺設圖呈現的結果相符，因此我決定繼續將2×3、2×4交換方式以木棒擺設圖排列出來。

本研究所使用的木棒擺設圖排列規則與判讀方式說明於下，表 1-1 為木棒擺設圖交換座位方式判讀範例說明：

1. 當圖形成繞圈時，要判斷是為「順時針」還是「逆時針」時，就是先看該圈的左上角與其右側一格之間（如表 3-1 紅圈處）是為紫色木棒還是黃色木棒，紫色木棒連接為順時針交換座位，黃色木棒連接為逆時針交換座位。
2. 黃色木棒代表：朝上方或朝左方交換座位。

   紫色木棒代表：朝下方或朝右方交換座位。

表 1-1：木棒擺設圖例說明表

圖例			
判讀說明	左邊四格為逆時針繞圈交換座位，因為紅圈處為黃色木棒連接。然後旁邊兩格進行兩兩互換。	紅圈處為是黃色木棒連接，所以為逆時針交換座位。	左邊兩格進行兩兩互換。然後右邊六格為順時針交換座位，因為紅圈處是紫色木棒連接。

當座位圖形為2×2時，透過木棒擺設圖排出所有交換座位方法數共 4 種，當座位圖形為2×3時，透過木棒擺設圖排出所有交換座位方法數共 9 種，而當座位圖形為2×4時，透過木棒擺設圖排出所有交換座位方法數共 25 種，由於篇幅的限制，僅呈現2×2、2×3座位圖的所有木棒擺設圖方法列表如表 3-2、表 3-3，而$4\times n$座位圖之木棒擺設圖因說明書頁面不足，僅列於實驗紀錄。

(一)　2×2層木棒擺設圖交換方式

當座位圖形為2×2時，透過木棒擺設圖排出所有交換座位方法數共 4 種，交換座位情形如表 1-2。

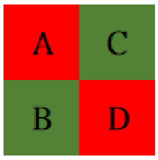
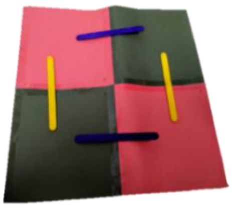
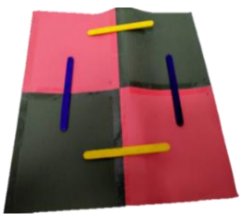


圖 8-1：2×2座位圖座位編

表 1-2：2×2木棒擺設圖交換方式

圖片	圖片探討	圖片	圖片探討
	表示 A、C、D、B 採用順時針繞圈的方式進交換座位。		表示 A 和 C 互換，B 和 D 互換。
	表示 A 和 B 互換，C 和 D 互換。		表示 A、B、D、C 採用逆時針繞圈的方式交換座位。

(二)　2 × 3層木棒擺設圖交換方式

當座位圖形為2 × 3時，透過木棒擺設圖排出所有交換座位方法數共 9 種，交換座位情形如表 1-3。

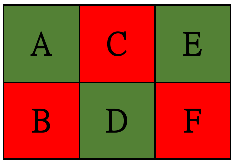
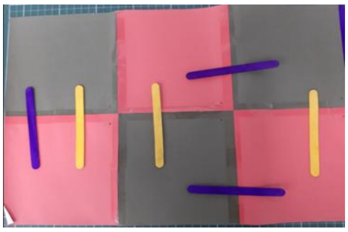
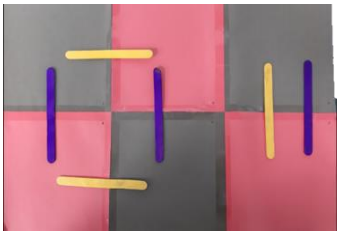
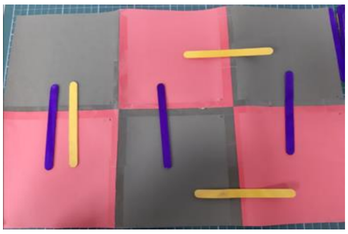
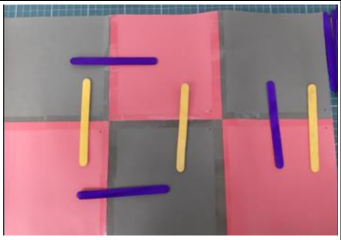
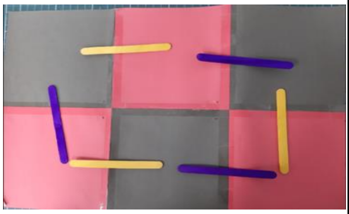
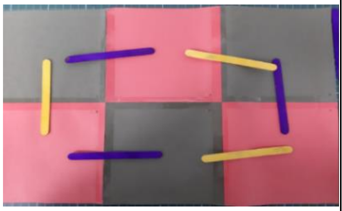
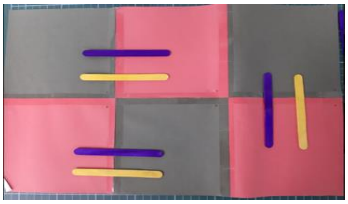
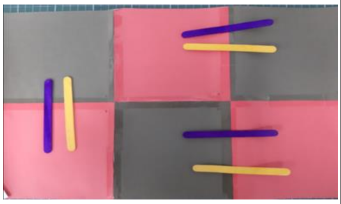
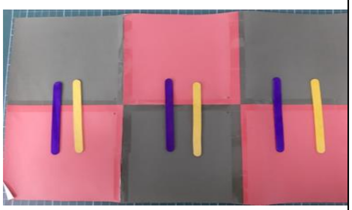


圖 8-2：2 × 3座位圖座位編號

表 1-3：2 × 3木棒擺設圖交換座位方法列表

圖片	圖片探討	圖片	圖片探討
	表示 A 和 B 互換，C、E、F、D 順時針繞圈。		表示 A、B、D、C 採用逆時針繞圈的方式且 E 和 F 互換。
	表示 A 和 B 互換且 C、D、F、E 用逆時針繞圈的方式交換座位。		表示 A、C、D、B 採用順時針繞圈的方式且 E 和 F 互換。
	表示 A、B、D、F、E、C 用逆時針繞圈的方式進行交換座位。		表示 A、C、E、F、D、 B 用順時針繞圈的方式進行交換座位。
	表示 A 和 C 互換，B 和 D 互換，E 和 F 互換。		表示 A 和 B 互換，C 和 E 互換，D 和 F 互換。
	表示 A 和 B 互換，C 和 D 互換，E 和 F 互換。		

小結

透過研究三證明了研究二之研究結果正確，並且再配合設定出的規則，能更清楚的呈現較換座位的方法，也能減少錯誤機率及減少計算時間。因此我想先利用木棒擺設圖和樹狀圖比對，希望能在比對中找到一些幫助推導公式的要點。

研究四、 比對樹狀圖、木棒擺設圖研究結果

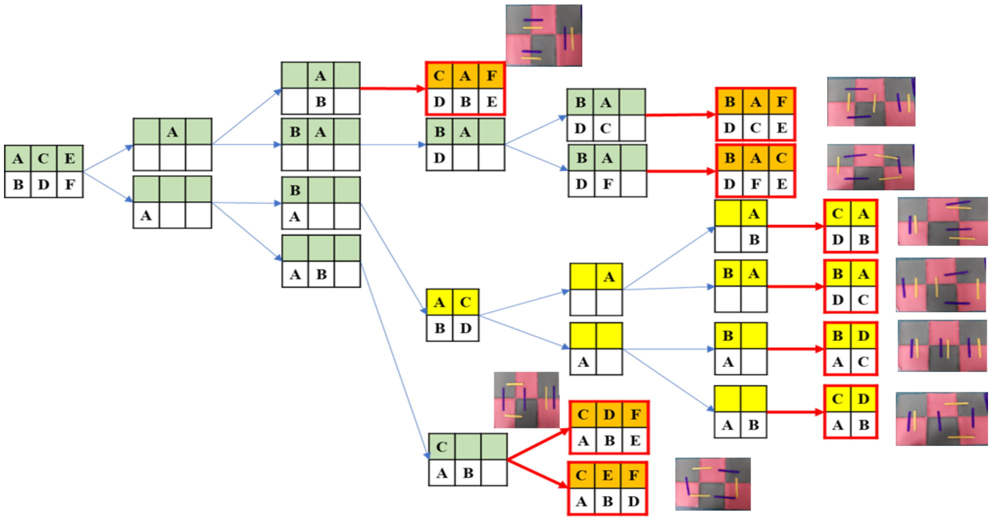


圖 9： $B_{(2,3)}$的樹狀圖與木棒擺設圖之比對圖

為了確認樹狀圖與木棒擺設圖所列的交換座位情形一致，才可以利用木棒擺設圖進行後續討論，因此又將2×3樹狀圖與木棒擺設圖進行一一比對，發現透過木棒的擺設方式與樹狀圖的交換方式相符。圖 9 為$B_{(2,3)}$的樹狀圖，發現此樹狀圖結果與擺設結果相符。並統整$2\times n$座位數於樹狀圖及木棒擺設圖交換座位方法數於表 2-1。

表 2-1：$2\times n$樹狀圖與木棒擺設圖結果對照表

n值 / 做法 / 方法數	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
樹狀圖	1	4	9	25	64
木棒擺設圖	1	4	9	25	64

由表 2-1 可知，我可以利用樹狀圖及木棒擺設圖來找出圖形之交換座位方法數。而在討論上述座位圖交換座位方法數的過程中，利用雙色木棒的擺設，透過不同擺法找出各種交換座位的方式，結果發現，**同一種顏色木棒的擺設方式，其方法數等於兩兩互換座位的方法數。而藉由兩種顏色木棒的擺設方式，則會等於交換座位的方法數。**透過以上的研究整理出了三個要點對照表，如表 2-2。

表 2-2：$2\times n$樹狀圖與木棒擺設圖成果對照表

成果發現		功用
1	木棒擺設圖可呈現出交換座位方式	木棒擺設圖可以簡化樹狀圖的情形
2	樹狀圖和木棒擺設圖可互相比對	有助簡易的探討規律與遞迴關係
3	木棒擺設圖能呈現出交換座位的方向	清楚呈現交換座位的方式，幫助後續推導

但因這兩種方式都需要透過的討論才能找到結果，所以想試著找找看交換座位的方法數有無規律關係。

小結

研究四找到$m\times n$層座位圖均有下列關係

兩兩互換方法數之平方數 ＝ 交換座位的方法數

若繼續推導出$3\times n$、$4\times n$、$5\times n$、…$m\times n$層座位圖的木棒擺放情形及遞迴關係，就可找到$m\times n$層座位圖兩兩互換的方法數，推導出$m\times n$層座位圖交換座位的方法數。

研究五、 規律推導及遞迴關係

(一) $2\times n$層圖形交換座位方法數規律探討

$b_{(2,n)}$→指此圖在$2\times n$層，兩兩互換時有多少種不同的交換座位方法數

$b_{(2,1)}=1$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$b_{(2,2)}=2$→指此圖在兩兩互換時只有 2 種換法

$b_{(2,3)}=3$→指此圖在兩兩互換時只有 3 種換法

$b_{(2,4)}=5$→指此圖在兩兩互換時只有 5 種換法

$b_{(2,5)}=8$→指此圖在兩兩互換時只有 8 種換法

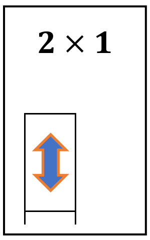


圖 10-1

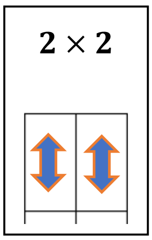


圖 10-2

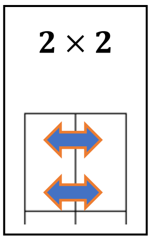


圖 10-3

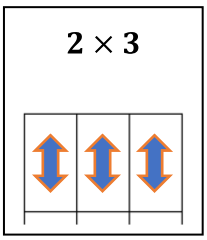


圖 10-4

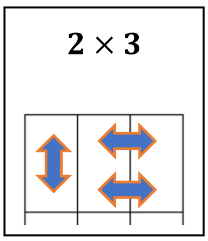


圖 10-5

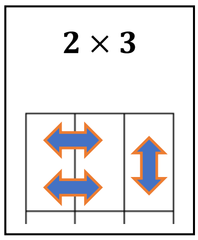


圖 10-6

現在透過圖形討論$2\times n$層兩兩互換時的交換座位方法數

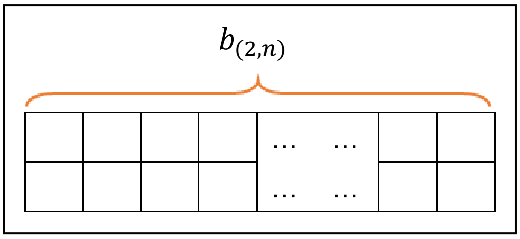


圖 11-1

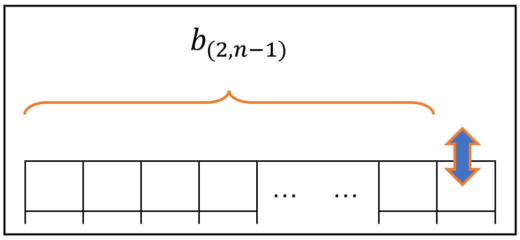


圖 11-2

透過觀察圖形可知遞迴關係

$b_{(2,n)}=b_{(2,n-2)}+b_{(2,n-1)}$ $(n\geq 3$ 時$)$，

$b_{(2,n)}$數列依序為 1、2、3、5、8、……

為費氏數列第二項起的數列。

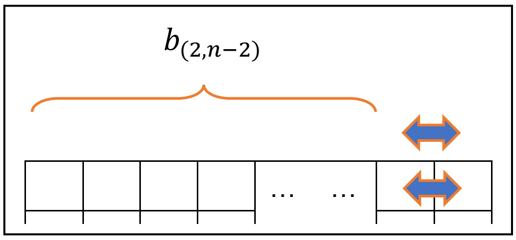


圖 11-3

(二)　$3\times n$層圖形交換座位方法數規律探討 (n為偶數)

$c_{(3,n)}$→指此圖在$3\times n$層，兩兩互換時有多少種不同的交換座位方法數。

$c_{(3,2)}=3$→指此圖在兩兩互換時只有 3 種換法（同$b_{(2,3)}=3$）

$c_{(3,4)}=11$→指此圖在兩兩互換時只有 11 種換法

$c_{(3,6)}=41$→指此圖在兩兩互換時只有 41 種換法

$k_{(3,n)}$→指此圖在$3\times n$層，第 n 行缺少上方兩格或是下方兩格時，

兩兩互換有多少種不同的交換座位方法數。

$k_{(3,2)}=1$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$k_{(3,4)}=4$→指此圖在兩兩互換時只有 4 種換法

$k_{(3,6)}=15$→指此圖在兩兩互換時只有 15 種換法

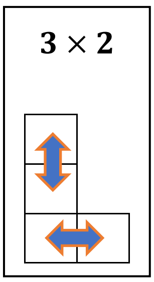


圖 12-1

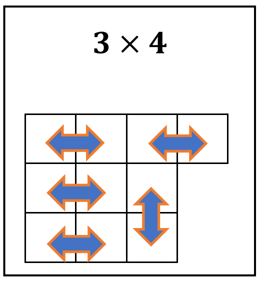


圖 12-2

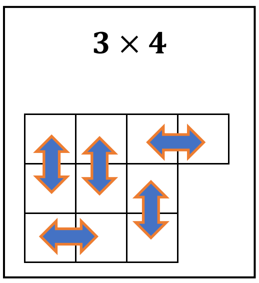


圖 12-3

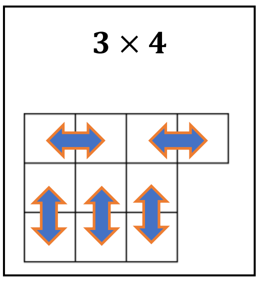


圖 12-4

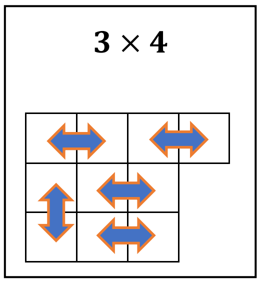


圖 12-5

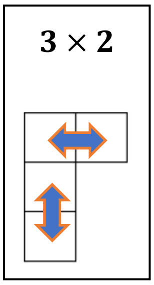


圖 12-6

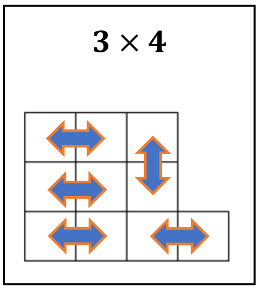


圖 12-7

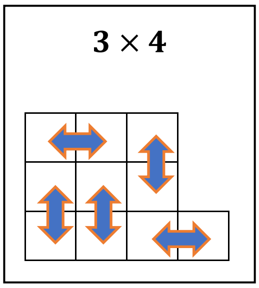


圖 12-8

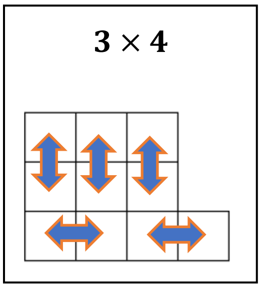


圖 12-9

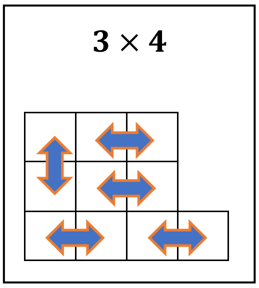


圖 12-10

以上兩排的排法數視為$k_{(3,2)}$與$k_{(3,4)}$的不同的圖形排法

現在透過圖形討論$3\times n$層兩兩互換時的交換座位方法數

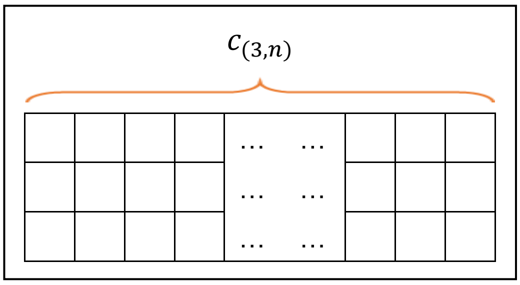


圖 13-1

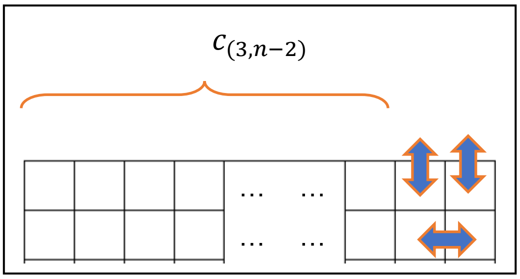


圖 13-2

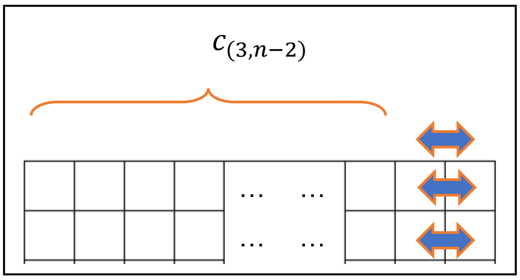


圖 13-3

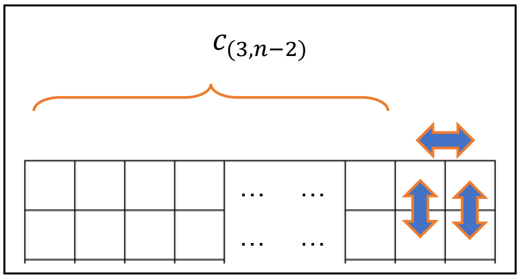


圖 13-4

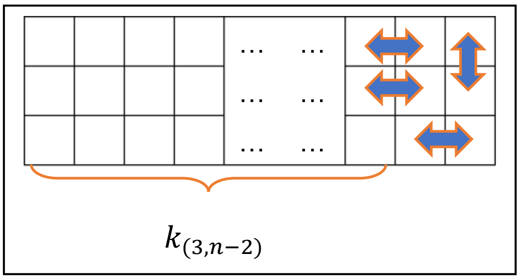


圖 13-5

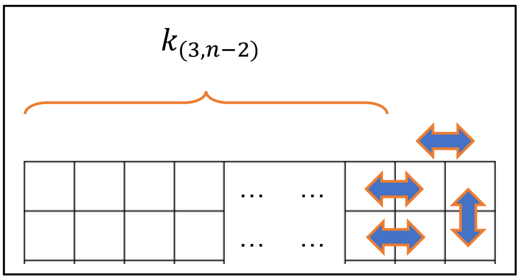


圖 13-6

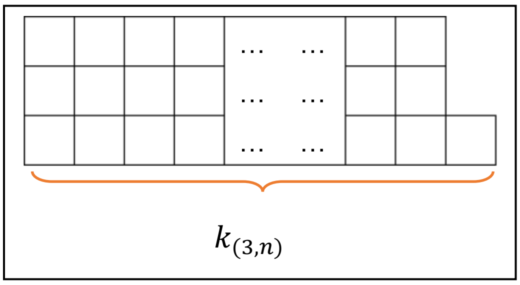


圖 13-7

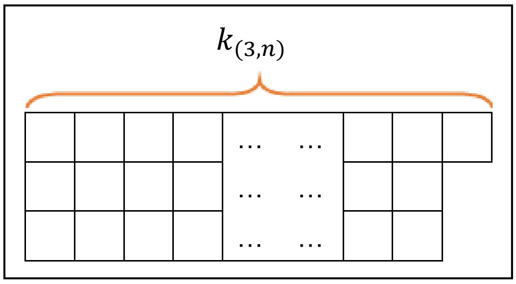


圖 13-8

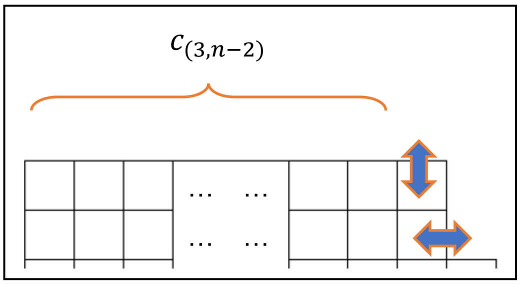


圖 13-9

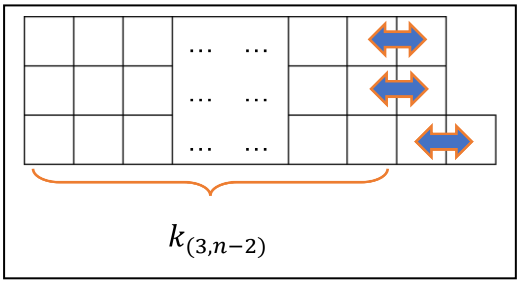


圖 13-10

透過上述的圖形發現兩種遞迴關係 $\begin{cases} c_{(3,n)} = 3c_{(3,n-2)} + 2k_{(3,n-2)} \\ k_{(3,n)} = c_{(3,n-2)} + k_{(3,n-2)} \end{cases}$

經由累加法，發現 $k_{(3,n)} = c_{(3,n-2)} + c_{(3,n-4)} + \cdots + c_{(3,2)} + 1$

$$\begin{array}{rrcrcl}
 & k_{(3,n)} & = & c_{(3,n-2)} & + & k_{(3,n-2)} \\
 & k_{(3,n-2)} & = & c_{(3,n-4)} & + & k_{(3,n-4)} \\
 & k_{(3,n-4)} & = & c_{(3,n-6)} & + & k_{(3,n-6)} \\
 & \vdots & = & \vdots & + & \vdots \\
+) & k_{(3,4)} & = & c_{(3,2)} & + & k_{(3,2)} \\
\hline
 & k_{(3,n)} & = & \multicolumn{3}{l}{c_{(3,n-2)} + c_{(3,n-4)} + \cdots + c_{(3,2)} + 1}
\end{array}$$

$c_{(3,n)} = 3c_{(3,n-2)} + 2k_{(3,n-2)} = 3c_{(3,n-2)} + 2(c_{(3,n-4)} + c_{(3,n-6)} + \cdots\cdots + c_{(3,2)} + 1)$

$= 3c_{(3,n-2)} + (3c_{(3,n-4)} + 2\big(c_{(3,n-6)} + c_{(3,n-8)} + \cdots\cdots + c_{(3,2)} + 1\big) - c_{(3,n-4)}$

$= 3c_{(3,n-2)} + c_{(3,n-2)} - c_{(3,n-4)} = 4c_{(3,n-2)} - c_{(3,n-4)}$　(n為偶數且$n \geq 6$ 時)

由 $k_{(3,n)} = c_{(3,n-2)} + k_{(3,n-2)}$ 可知 $c_{(3,n-2)} = k_{(3,n)} - k_{(3,n-2)}$代入上式

可得 $k_{(3,n)} = 5k_{(3,n-2)} - 5k_{(3,n-4)} + k_{(3,n-6)}$　(n為偶數且$n \geq 8$ 時)

(三)　$4 \times n$層圖形交換座位方法數規律探討

$d_{(4,n)}$→指此圖在$4 \times n$層，兩兩互換時有多少種不同的交換座位方法數

$d_{(4,1)} = 1$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$d_{(4,2)} = 5$→指此圖在兩兩互換時只有 5 種換法（同$b_{(2,4)} = 5$）

$d_{(4,3)} = 11$→指此圖在兩兩互換時只有 11 種換法（同$c_{(3,4)} = 11$）

$m_{(4,n)}$→指此圖在$4 \times n$層，第 n 行缺少中間兩格時，

兩兩互換有多少種不同的交換座位方法數

$m_{(4,2)} = 1$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$m_{(4,3)} = 1$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$m_{(4,4)} = 6$→指此圖在兩兩互換時只有 6 種換法

$n_{(4,n)}$→指此圖在$4 \times n$層，第 n 行缺少上方兩格或是下方兩格時，

兩兩互換有多少種不同的交換座位方法數

$n_{(4,2)} = 2$→指此圖在兩兩互換時只有 1 種換法

$n_{(4,3)} = 7$→指此圖在兩兩互換時只有 7 種換法

$n_{(4,4)} = 18$→指此圖在兩兩互換時只有 18 種換法

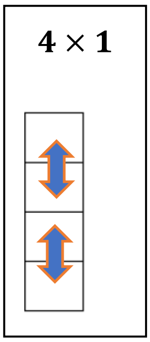


圖 14-1

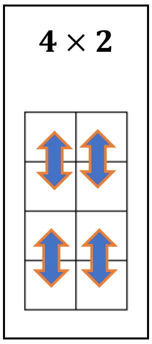


圖 14-2

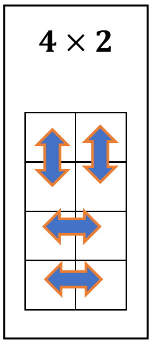


圖 14-3

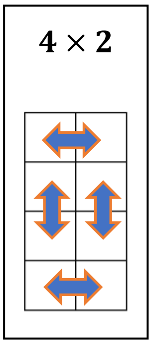


圖 14-4

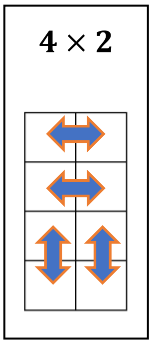


圖 14-5

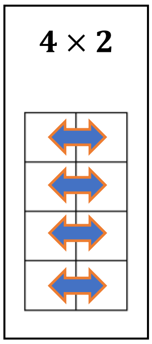


圖 14-6

以上的圖形排法視為$d_{(4,1)}$與$d_{(4,2)}$的排法數

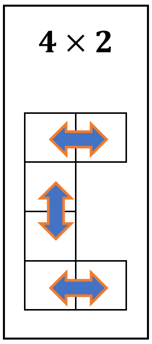


圖 15-1

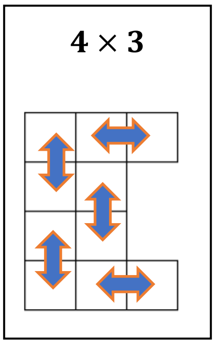


圖 15-2

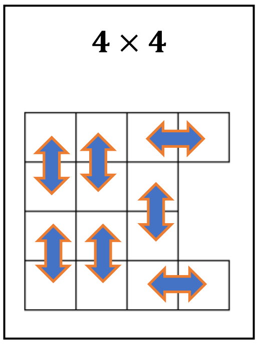


圖 15-3

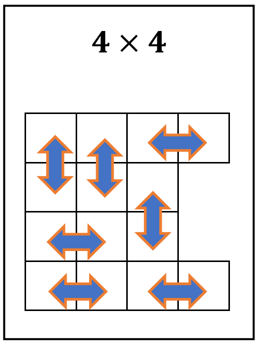


圖 15-4

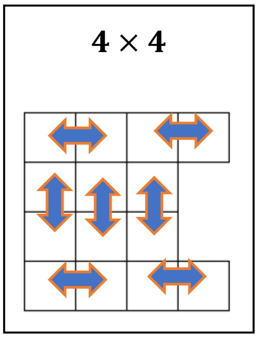


圖 15-5

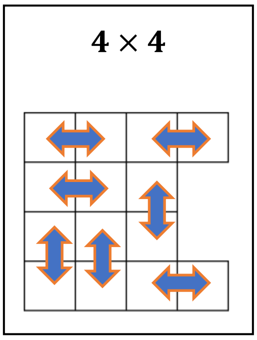


圖 15-6

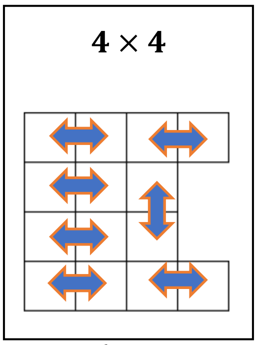


圖 15-7

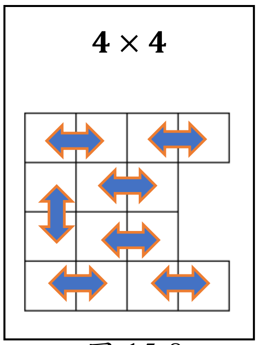


圖 15-8

以上兩排的圖形排法視為$m_{(4,2)}$與$m_{(4,3)}$與$m_{(4,4)}$的排法數

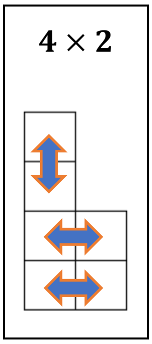


圖 16-1

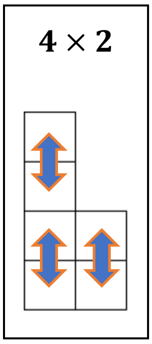


圖 16-2

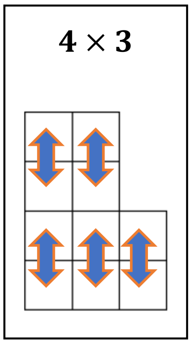


圖 16-3

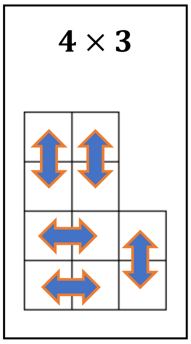


圖 16-4

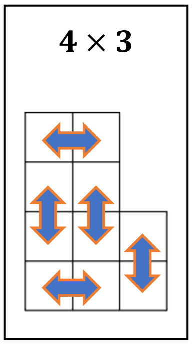


圖 16-5

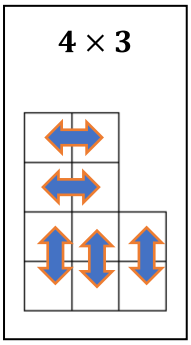


圖 16-6

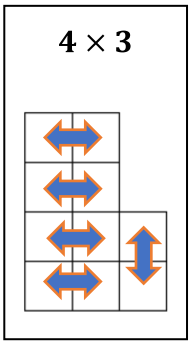


圖 16-7

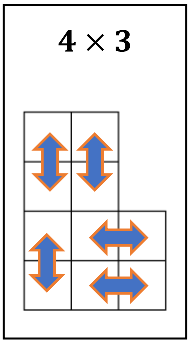


圖 16-8

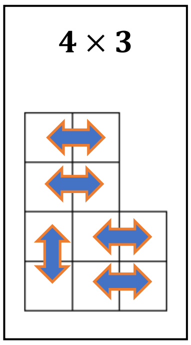


圖 16-9

以上兩排的圖形排法視為$n_{(4,2)}$與$n_{(4,3)}$的排法數

現在透過圖形討論$4\times n$層兩兩互換時的交換座位方法數

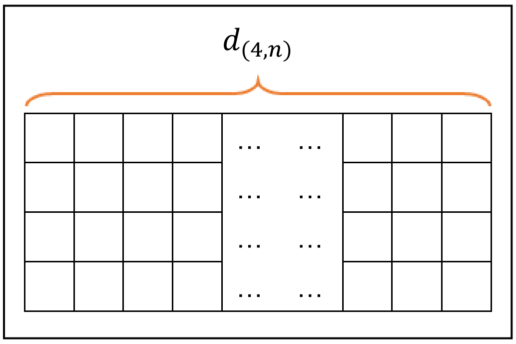


圖 17-1

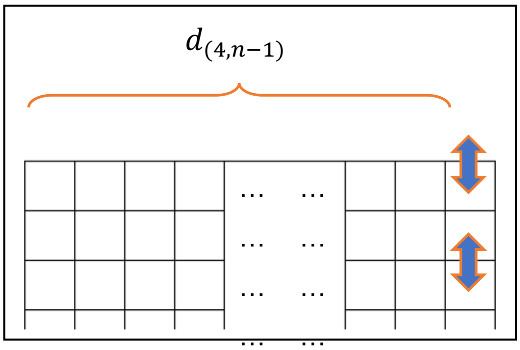


圖 17-2

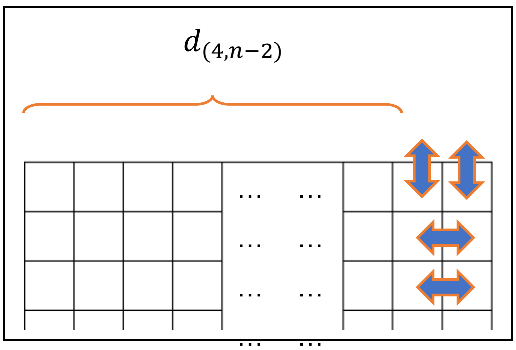


圖 17-3

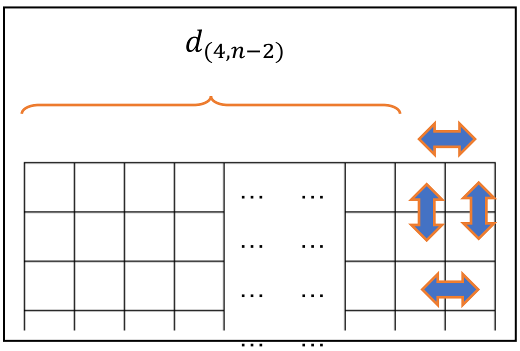


圖 17-4

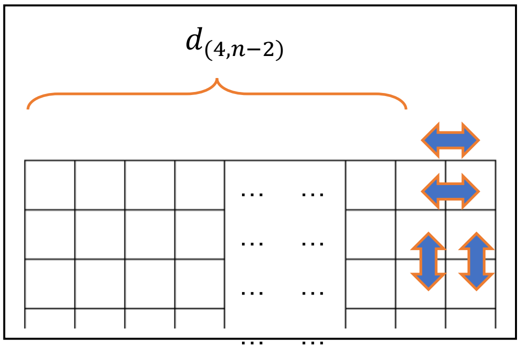


圖 17-5

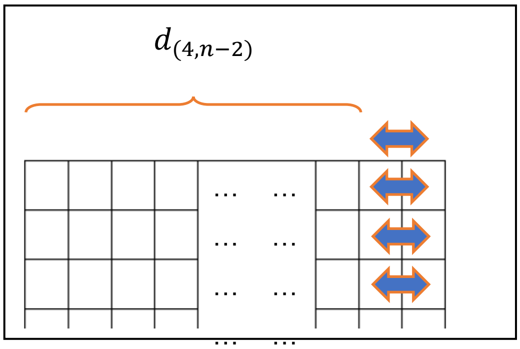


圖 17-6

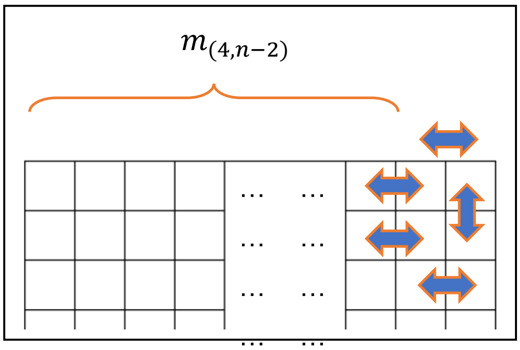


圖 17-7

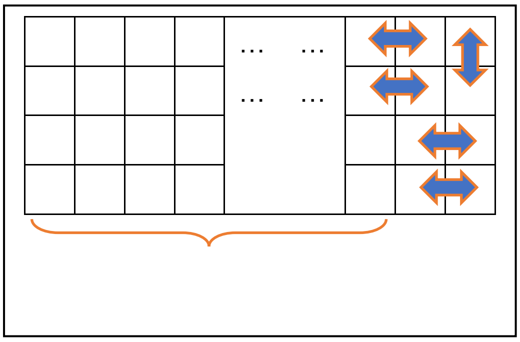


圖 17-8

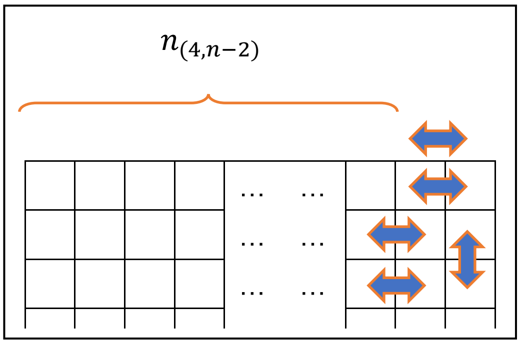


圖 17-9

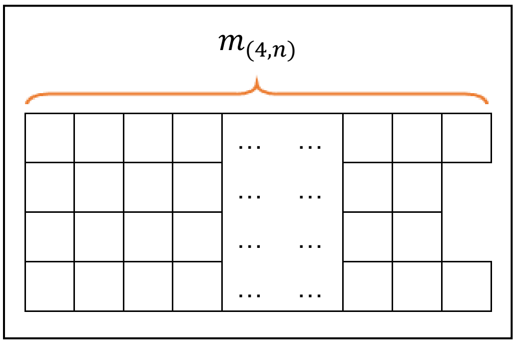


圖 17-10

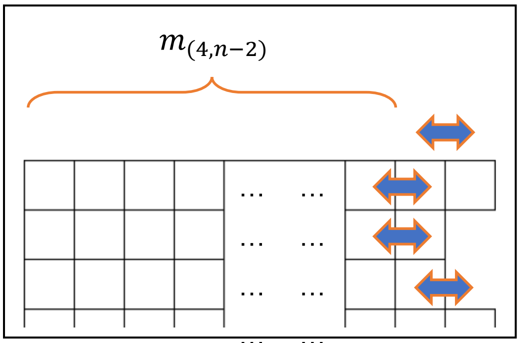


圖 17-11

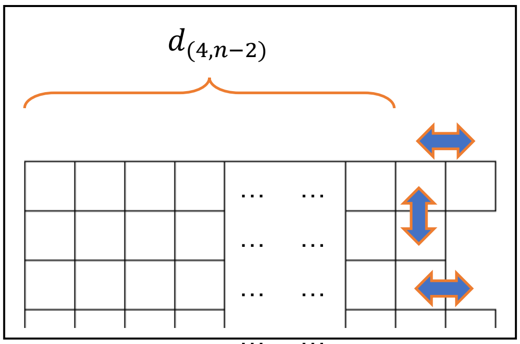


圖 17-12

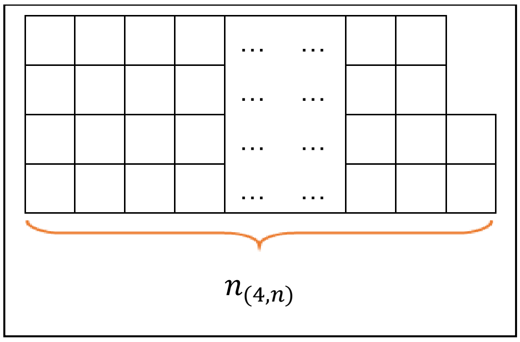


圖 17-13

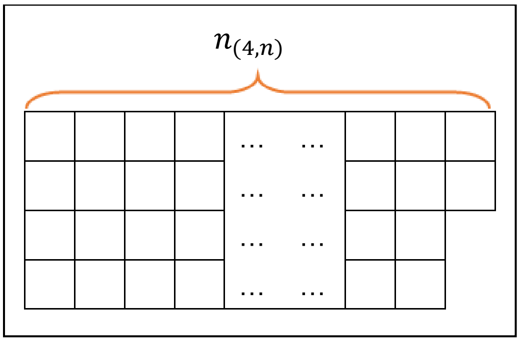


圖 17-14

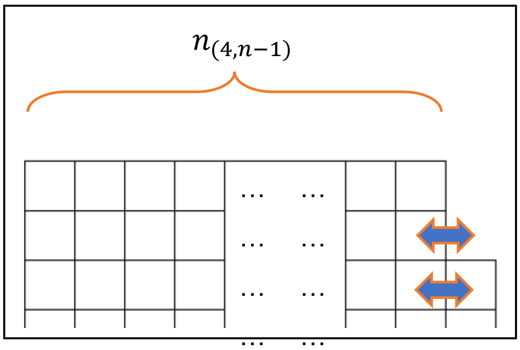


圖 17-15

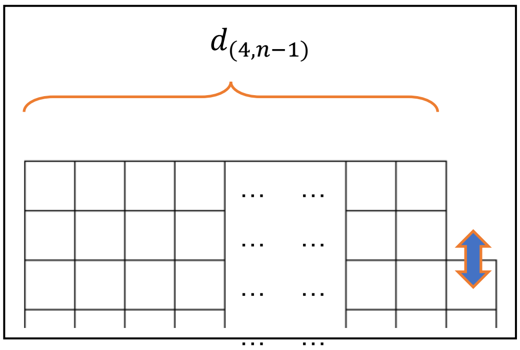


圖 17-16

透過上述的圖形發現三種遞迴關係

$$\begin{cases} d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)} + 2n_{(4,n-2)} \\ m_{(4,n)} = d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)} \\ n_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + n_{(4,n-1)} \end{cases}$$

經由移項，發現$m_{(4,n)} - m_{(4,n-2)} = d_{(4,n-2)}$

經由移項，發現$n_{(4,n)} - n_{(4,n-2)} = d_{(4,n-1)} + d_{(4,n-2)}$

$$\begin{array}{rl} n_{(4,n)} & = d_{(4,n-1)} + n_{(4,n-1)} \\ +)\ n_{(4,n-1)} & = d_{(4,n-2)} + n_{(4,n-2)} \\ \hline n_{(4,n)} & = d_{(4,n-1)} + d_{(4,n-2)} + n_{(4,n-2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{已知}\quad d_{(4,n)} & = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)} + 2n_{(4,n-2)} \\ -)\ d_{(4,n-2)} & = d_{(4,n-3)} + 4d_{(4,n-4)} + m_{(4,n-4)} + 2n_{(4,n-4)} \\ \hline d_{(4,n)} - d_{(4,n-2)} & = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} - d_{(4,n-3)} - 4d_{(4,n-4)} \\ & \quad +\left(m_{(4,n-2)} - m_{(4,n-4)}\right) + 2\left(n_{(4,n-2)} - n_{(4,n-4)}\right) \\ & = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} - d_{(4,n-3)} - 4d_{(4,n-4)} \\ & \quad + d_{(4,n-4)} + 2\left(d_{(4,n-3)} + d_{(4,n-4)}\right) \\ & = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)} \end{array}$$

$$d_{(4,n)} - d_{(4,n-2)} = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)}$$

$$d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 5d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)} \quad （n \geq 5 \text{ 時}）$$

由$m_{(4,n)} = d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)}$ 可知 $d_{(4,n-2)} = m_{(4,n)} - m_{(4,n-2)}$ 代入上式

可得 $m_{(4,n)} = m_{(4,n-1)} + 6m_{(4,n-2)} - 7m_{(4,n-4)} + m_{(4,n-5)}$ （$n \geq 6$ 時）

由$n_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + n_{(4,n-1)}$ 可知 $d_{(4,n-1)} = n_{(4,n)} - n_{(4,n-1)}$ 代入上式

可得 $n_{(4,n)} = 2n_{(4,n-1)} + 4n_{(4,n-2)} - 4n_{(4,n-3)} - 2n_{(4,n-4)} + n_{(4,n-5)}$ （$n \geq 6$ 時）

由以上研究結果可知，所使用的研究方法已找出$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$，而$5 \times n$以後的座位圖的規律探討方式相同，加上教室座位通常是 24 個以下，也就是4×6的圖形，因此在$m \times n$的教室座位情形僅討論到$4 \times n$。

而在研究後，我發現教室裡可能因各種狀況而有空缺座位的情形，因此讓我不禁思考，在有缺格的狀況下，交換座位的方法數又有什麼規律？

(四) $3 \times n$層圖形（中間某行恰缺一格）交換座位方法數探討 （n為奇數）

因為並非所有的圖形皆恰為$m \times n$層圖形，有可能在中間某行發生發生缺格的情形，但因缺格的各種可能情形很多，故本研究限縮以中間某行恰缺一格的情形來做為討論對象，其他缺格情形則可以類推適用本研究討論方式。

$p_{(3,(x,1,y))}$→指此圖在$3 \times (x+1+y)$層，且 x 與 y 皆為偶數，第$(x+1)$行缺少上方一格或是下方一格時，兩兩互換有多少種的交換座位方法數。排列情形如圖 18-1 或圖 18-2。

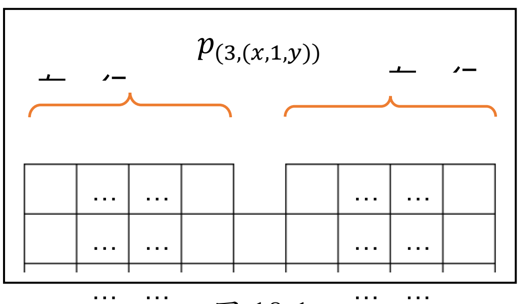


圖 18-1

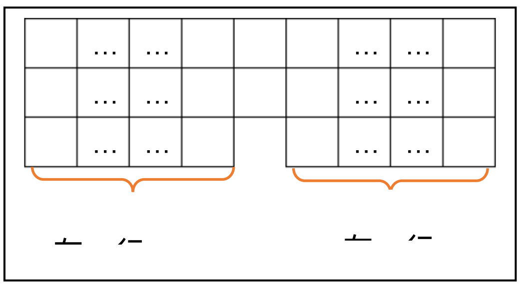


圖 18-2

可能的排列情形如圖 18-3 或圖 18-5

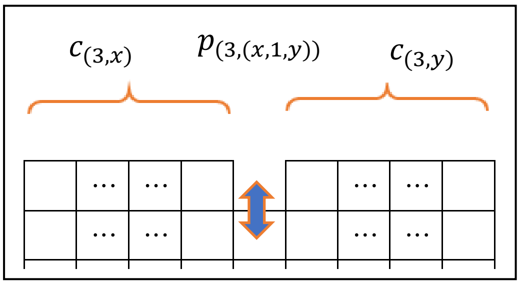


圖 18-3

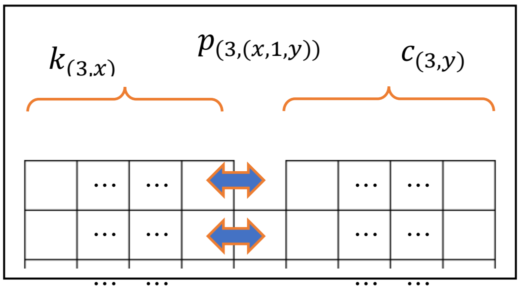


圖 18-4

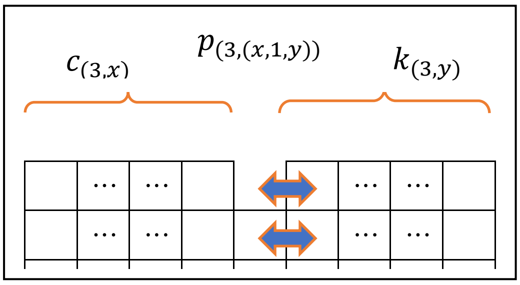


圖 18-5

所以兩兩互換座位的方法數為：$p_{(3,(x,1,y))} = c_{(3,x)} \cdot c_{(3,y)} + k_{(3,x)} \cdot c_{(3,y)} + c_{(3,x)} \cdot k_{(3,y)}$

(五) $4 \times n$層圖形（中間某行恰缺兩格）交換座位方法數探討：

本研究限縮以中間某行恰缺兩格的情形來做為討論對象，其他缺格情形則可以類推適用本研究討論方式。

$q_{(4,(x,1,y))}$→指此圖在$4 \times (x+1+y)$層，在第$(x+1)$行缺少上方兩格或是下方兩格時，兩兩互換有多少種不同的交換座位方法數。排列情形如圖 19-1 或圖 19-2。

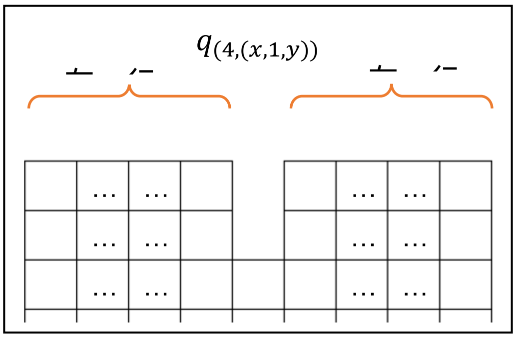


圖 19-1

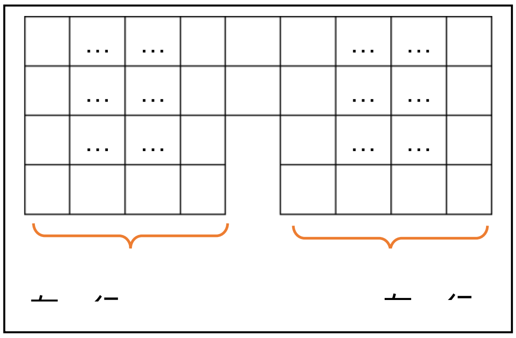


圖 19-2

可能的排列情形如圖 19-3 或圖 19-4 或圖 19-5

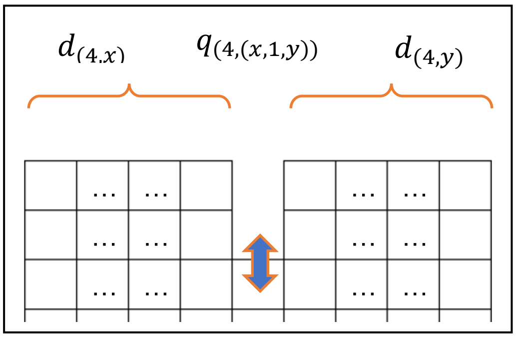


圖 19-3

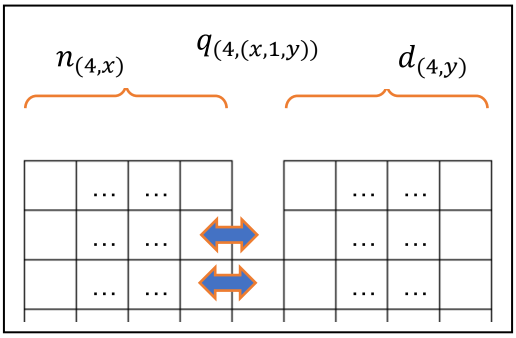


圖 19-4

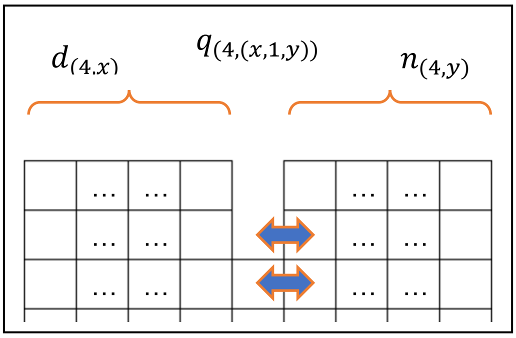


圖 19-5

所以兩兩互換座位的方法數為：$q_{(4,(x,1,y))} = d_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + n_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + d_{(4,x)} \cdot n_{(4,y)}$

小結

我利用減少座位的方式進行排列探討，找到了$2 \times n$、$3 \times n$、$4 \times n$座位，及 $3 \times n$缺格、$4 \times n$缺格座位，各種情形的交換座位方法數之遞迴關係和規律。

(六) 立體圖形交換座位方法數探討

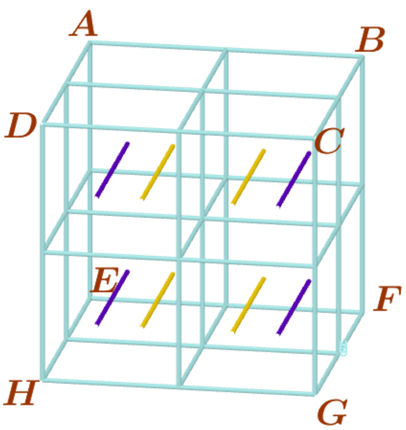
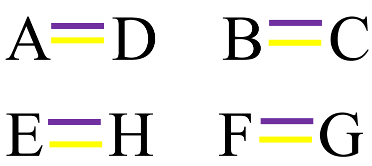
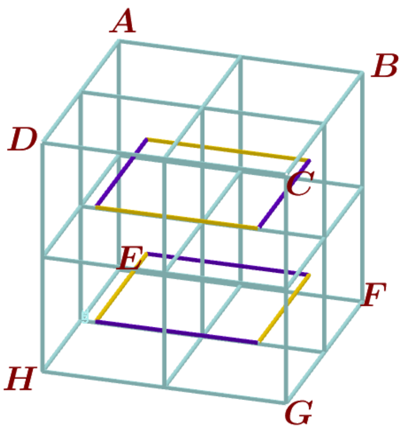
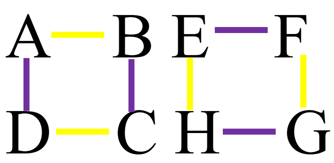
後來我發現並非所有座位皆是平面圖形，也可能會有多層的情形，像是雙層巴士。因此我就想說木棒擺設方式可否使用於立體圖形，幫助呈現交換座位的方式與方向，後來我試著做排列，發現亦可以適用。

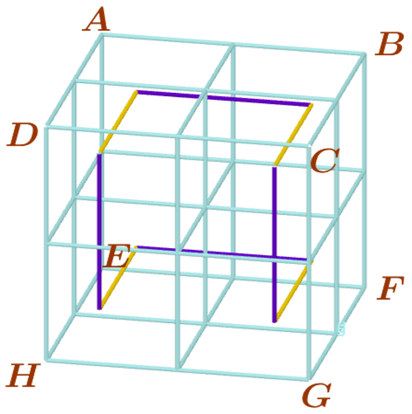
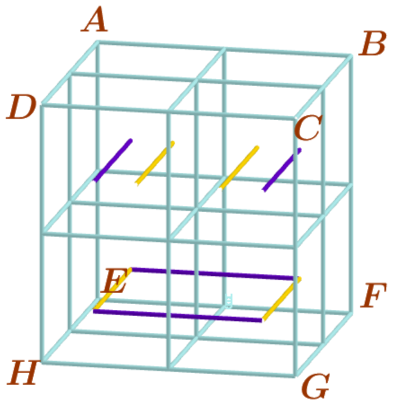
表 3 為立體圖形之木棒擺設圖交換座位方式判讀範例說明，表 4 為木棒擺設圖交換座位方式判讀範例說明。

表 3：立體圖形之木棒擺設圖交換座位方式判讀範例說明

1. 當圖形成繞圈時，要判斷是為「順時針」還是「逆時針」時，就是先看該圈的左上角與其右側一格之間是為紫色木棒還是黃色木棒，紫色木棒連接為順時針交換座位，黃色木棒連接為逆時針交換座位。
2. 黃色木棒代表：朝前方或朝上方或朝左方交換座位。
   紫色木棒代表：朝後方或朝下方或朝右方交換座位。

表 4：四個代表性範例判讀說明

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>交換過程：</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>判讀說明：</td></tr>
<tr><td>A 和 D 互換；B 和 C 互換；
E 和 H 互換；F 和 G 互換。</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>交換過程：</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>判讀說明：</td></tr>
<tr><td>ABCD 逆時針交換座位；EFGH 順時針交換座位。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>交換過程：</td></tr>
<tr><td>A—B—C—G—F—E—H—D—A</td></tr>
<tr><td>判讀說明：</td></tr>
<tr><td>A 往順時針方向朝 B 交換座位，B 再朝 C 交換座位，接下來 C 換到 G，G 換到 F，F 換到 E，E 換到 H，H 換到 D，最後 D 再回到原本的 A。</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>交換過程：</td></tr>
<tr><td>A═D　E—F
B═C　G—H</td></tr>
<tr><td>判讀說明：</td></tr>
<tr><td>EFGH 順時針交換座位， A 和 D 互換，B 和 C 互換。</td></tr>
</table>

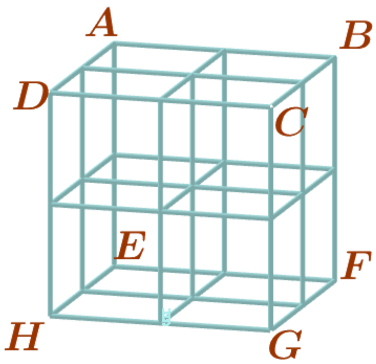


圖 20：2×2×2立體圖形示意圖

- A 和 B 互換
  - C 和 G 互換｛D 和 H 互換、E 和 F 互換
  - C 和 D 互換
    - E 和 F 互換、G 和 H 互換
    - E 和 H 互換、F 和 G 互換
- A 和 D 互換
  - B 和 F 互換｛E 和 H 互換、C 和 G 互換
  - B 和 C 互換
    - E 和 H 互換、F 和 G 互換
    - E 和 F 互換、G 和 H 互換
- A 和 E 互換
  - B 和 C 互換｛D 和 H 互換、F 和 G 互換
  - B 和 F 互換
    - C 和 D 互換、G 和 H 互換
    - C 和 G 互換、D 和 H 互換

小結

透過以上的立體圖形分析發現我設定的規則對於立體圖形亦然適用。因此我將兩兩互換的情形列出，列出後我發現2×2×2的立體圖形的交換座位方法數為 81 種。

兩兩交換座位方法數為 9 種，平方數是 81。所以此立體圖形的交換座位方法數共有 81 種，並且一樣可以透過我的規則來找出交換座位方法數。

陸、討論

一、透過本研究可以找到計算出交換座位方法數的場所如下：

以下所列場所均為$m \times n$層圖形，與本研究的對象相符，可應用本研究結果計算座位交換方法數。

	講台		
1	7	13	19
2	8	14	20
3	9	15	21
4	10	16	22
5	11	17	23
6	12	18	24

圖 21-1：教室座位圖

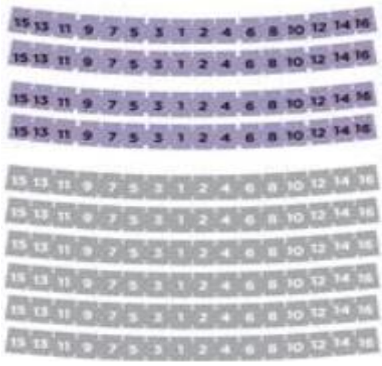


圖 21-2：衛武營歌劇院座位示意圖[7]

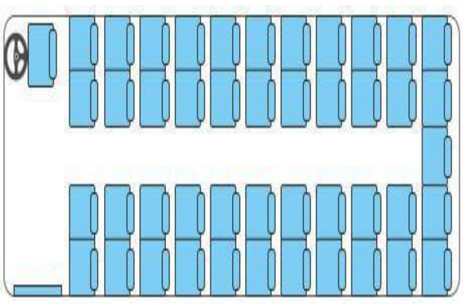


圖 21-3：日本高速巴士座位圖[8]

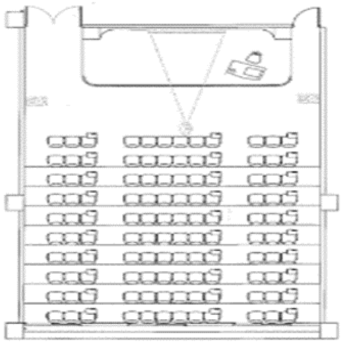


圖 21-4：高雄大學視聽教室座位圖[9]

二、本研究使用之木棒擺設圖亦可用於立體圖形：

本研究找到的木棒擺設方法亦可用於立體圖形。例如：$2 \times 2 \times 2$的立體圖形只用一種顏色的木棒擺設方法數為 9 種，所以兩種不同顏色的木棒擺設方法數為 81 種。代表兩兩互換座位的方法數為 9 種，真正交換座位的方法數為 81 種。對於後續研究$m \times n \times k$層立體圖形的交換座位方法數問題時，就可以簡化成一種顏色的木棒擺設方法數。

柒、結論

一、只要奇數個座位的座位圖皆不能使用此規則交換座位，有些偶數座位圖亦無法。

二、發現$2 \times n$圖形中交換座位的方法數為兩兩互換的方法數之平方數，亦為費氏數列的完全平方數。而其遞迴關係為$\boldsymbol{B_{(2,n)} = 2B_{(2,n-1)} + 2B_{(2,n-2)} - B_{(2,n-3)}}$

三、如圖 22，找到透過木棒擺放的圖形方式來解釋交換座位的情形。

圖 22　木棒擺設圖

四、在比對的過程中我發現**單一顏色的木棒擺設情形之平方數=兩種顏色的木棒擺設方法數，也就是說兩兩互換方法數之平方數=交換座位的方法數。**

五、我找到兩兩互換座位方法數的遞迴關係。透過計算出兩兩互換的方法數，即可計算出全部交換座位的方法數，**規律如下：**

$2 \times n$層兩兩互換座位方法數的規律：

$$b_{(2,n)} = b_{(2,n-2)} + b_{(2,n-1)} \quad （n \geq 3 \text{ 時}）$$

$2 \times n$層交換座位方法數的規律：

$$B_{(2,n)} = b_{(2,n)} \text{ 的平方數} \quad （n \geq 3 \text{ 時}）$$

$3 \times n$層兩兩互換座位方法數的規律：

$$c_{(3,n)} = 4c_{(3,n-2)} - c_{(3,n-4)} \quad （n\text{為偶數且}n \geq 6 \text{ 時}）$$

$3 \times n$層交換座位方法數的規律：

$$C_{(2,n)} = c_{(2,n)} \text{ 的平方數} \quad （n\text{為偶數且}n \geq 6 \text{ 時}）$$

$3 \times n$層兩兩互換座位方法數的規律（有缺格）：

$$p_{(3,(x,1,y))} = c_{(3,x)} \cdot c_{(3,y)} + k_{(3,x)} \cdot c_{(3,y)} + c_{(3,x)} \cdot k_{(3,y)} \quad （x\text{、}y\text{為正偶數}）$$

$4 \times n$層兩兩互換座位方法數的規律：

$$d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 5d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)} \quad （n \geq 5 \text{ 時}）$$

4 × n層交換座位方法數的規律：

$$D_{(2,n)} = d_{(2,n)} \text{ 的平方數} \quad (n \geq 5 \text{ 時})$$

4 × n層兩兩互換座位方法數的規律（有缺格）：

$$q_{(4,(x,1,y))} = d_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + n_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + d_{(4,x)} \cdot n_{(4,y)}$$

因此發現所有$m \times n$層座位圖均有下列關係（圖 21）：

兩兩互換的方法數之平方數 = 交換座位的方法數。

圖 21：$m \times n$層座位圖方法數關係圖

六、 同時亦找出2 × 2 × 2之立體圖形的交換座位方法數。也發現立體圖形也能用木棒擺設的方式進行探討，並且一樣可以透過計算單一顏色木棒（兩兩互換）交換座位方法數來找出交換座位的方法數。

七、 未來希望可以透過此規律探討出更多不同立體圖形$m \times n \times k$層的交換座位方法數的遞迴關係。

捌、參考資料及其他

1. 李坤能（2018）主編。**國民小學數學課本第 11 冊第九單元**。台北市：翰林。
2. 連淵淥、潘清岳（1988）。**一種排列的探討**，中華民國第 28 屆科學展覽會國中組數學科。
3. 翁邦彥、吳欣儒、施傑文（1990）。**奇妙的骨牌世界**，中華民國第 30 屆科學展覽會高中組數學科。
4. 蘇晏徵、卓筠凌、戴筱燕（2009）。**旋乾轉坤陰陽易位**，中華民國第 49 屆科學覽會高中組數學科。
5. 蔡坤佑、高三貴、蔡淑玲、高玉鳳（1989）。**棋迷之謎的探討**，中華民國第 29 屆科學展覽會國小組數學科。
6. 許志農（2018）主編。**高中數學第二冊**。新北市：龍騰文化。
7. 衛武營國家藝術文化中心（無日期）。**歌劇院座位對照圖**，取自：https://reurl.cc/noZ9Kn
8. 日本高速巴士·夜間巴士比較（無日期）。**日本高速巴士座位圖**，取自：https://reurl.cc/EnR0jg
9. 國立高雄大學（無日期）。**視聽教室座次表**，取自：https://reurl.cc/83pavM

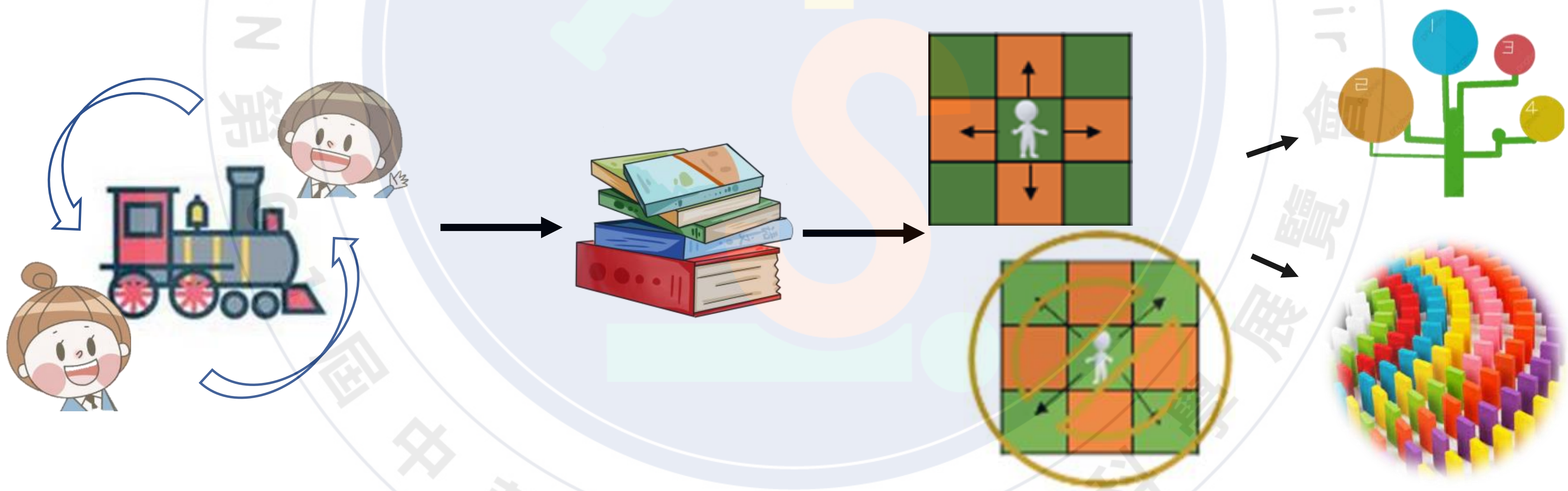
【評語】080404

1. 該作品針對座位表研究座位兩兩互換與加入循環互換兩種模式並推廣至立體空間，其中利用木棒擺設簡化研究問題的複雜度並觀察遞迴關係，巧妙的轉化問題讓學生得以深入研究問題並在不同的座位結構上運用數學歸納法解決所面對的問題。

2. 作者從 2xn 方格出發，先以樹狀圖的方式觀察所有可能的換位方法數，接著利用減少座位的方式進行排列探討，找到了 $2\times n$、$3\times n$、$4\times n$座位，及 $3\times n$缺格、$4\times n$缺格座位，各種情形的交換座位方法數的規律並以遞迴關係表示，並進一步推導出其為互換方法數的平方，這是很不顯然的結果，這對小學生而言是相當不容易的成就。

作品簡報

「換位」思考—交換座位問題方法數探討



組別：國小組　　　　科別：數學科

研究架構

交換座位問題方法數探討

樹狀圖探討2×1、2×2、2×3、2×4、2×5圖形

比對 相同

木棒擺設圖探討2×2、2×3、2×4圖形

發現2×n座位圖之交換座位方法數為完全平方數

發現雙色木棒擺設的方法數會等於交換座位之方法數

數學歸納法證明2×n座位圖之交換座位方法數為完全平方數

發現單色木棒擺設的方法數等於兩兩互換交換座位方法數

找到2×n、3×n、4×n圖形交換座位方法數的規律

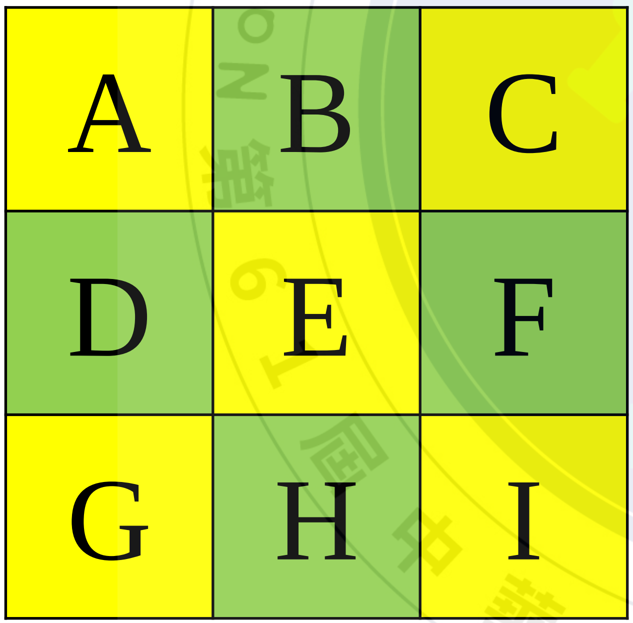
找到3×n、4×n缺格及2×2×2圖形交換座位方法數規律

研究目的

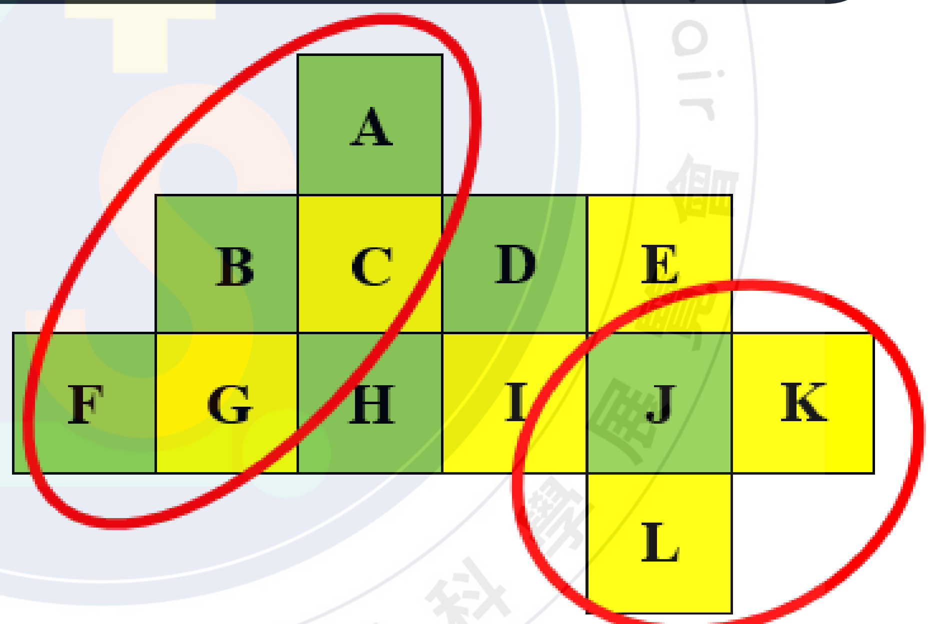
1. 計算座位圖為 $2\times n$、$3\times n$、$4\times n$ 時，其交換座位的方法數。
2. 找出交換座位問題方法數之規律。
3. 建立座位數與交換座位方法數之遞迴關係。

研究結果

研究一：奇數個與偶數個座位圖是否可進行交換座位



▲圖1：奇數個座位示意圖

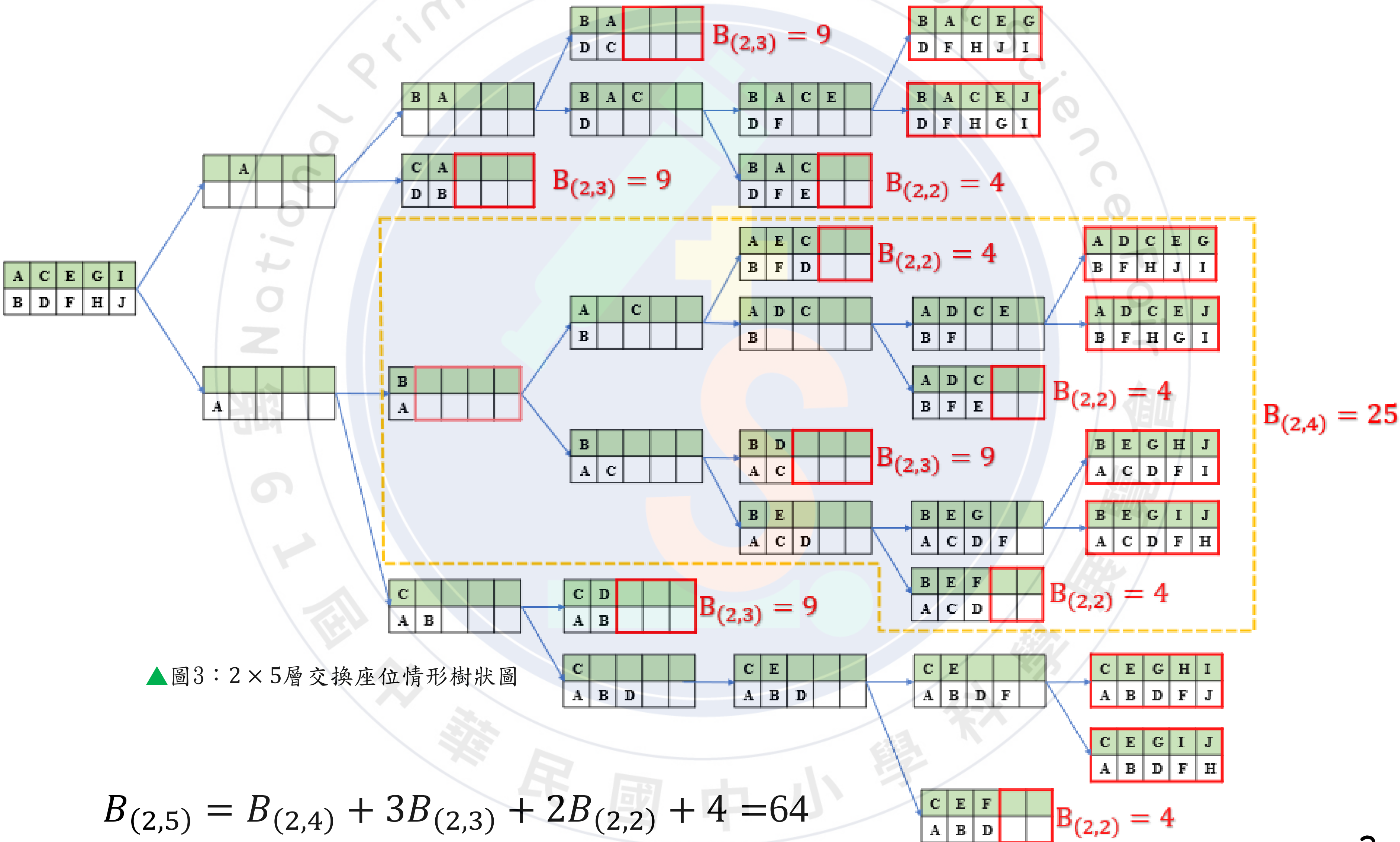


▲圖2：兩類座位數目相等

所有奇數個座位圖無法換座，部分偶數個座位圖亦無法換座。

研究二：樹狀圖探討$2\times n$圖形交換座位方法數規律關係

由樹狀圖結果可知：$B_{(2,1)}=1$、$B_{(2,2)}=4$、$B_{(2,3)}=9$、$B_{(2,4)}=25$、$B_{(2,5)}=64$

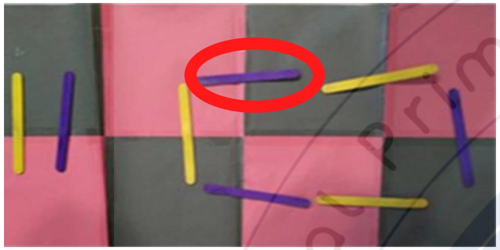


▲圖3：2 × 5層交換座位情形樹狀圖

$$B_{(2,5)}=B_{(2,4)}+3B_{(2,3)}+2B_{(2,2)}+4=64$$

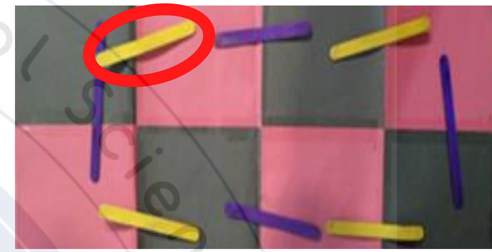
研究三：木棒擺設圖使用方法並計算交換座位方法數

有可操作又方便觀察交換座位方向的方法嗎?

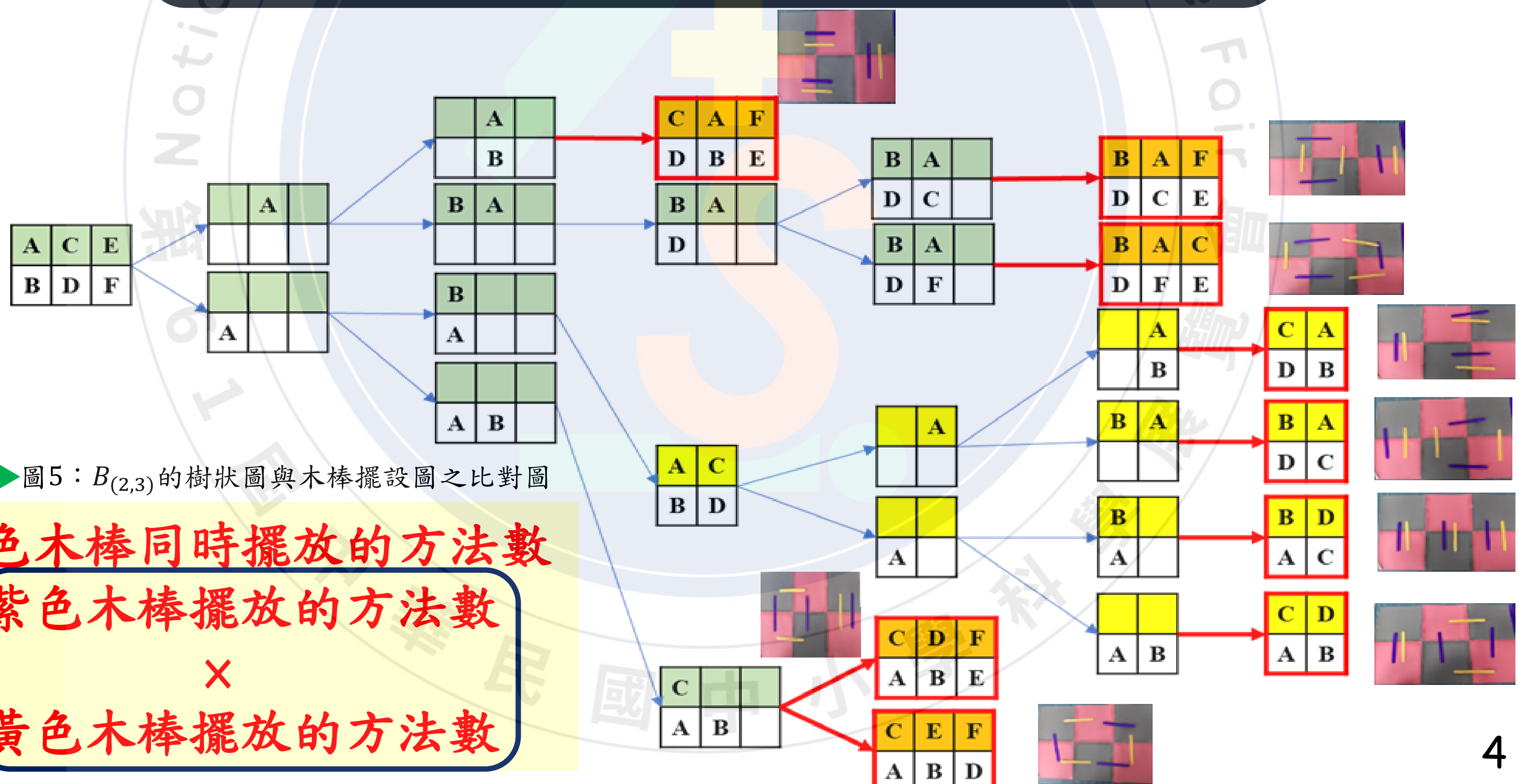


◀圖4-1：木棒擺設圖例

圖4-2：木棒擺設圖例 ▶



研究四：比對樹狀圖、木棒擺設圖研究結果



▶圖5：$B_{(2,3)}$的樹狀圖與木棒擺設圖之比對圖

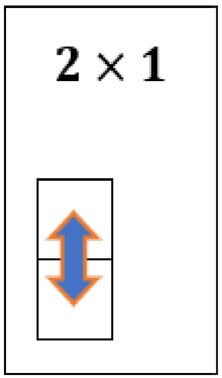
雙色木棒同時擺放的方法數

＝ 紫色木棒擺放的方法數 × 黃色木棒擺放的方法數

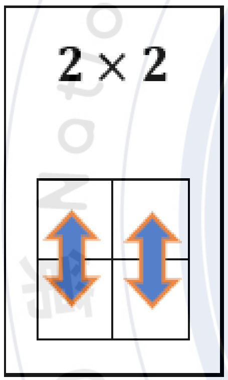
探討$2 \times n$圖形交換座位方法數

透過觀察圖形可知遞迴關係：$b_{(2,n)} = b_{(2,n-2)} + b_{(2,n-1)} (n \geq 3)$

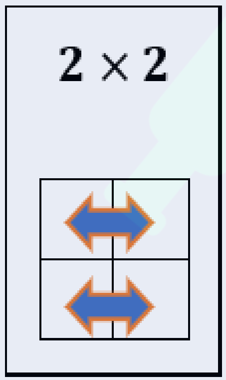
數列依序1、2、3、5、8、……**為費氏數列第二項起的數列。**



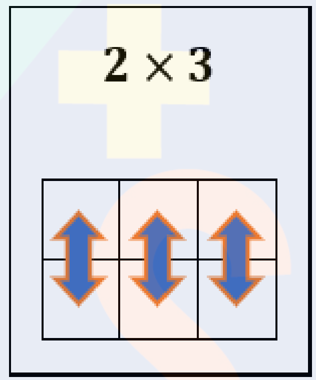
▲ 圖6-1



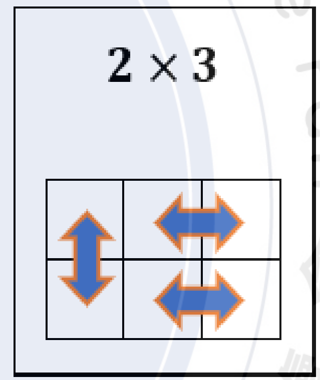
▲ 圖6-2



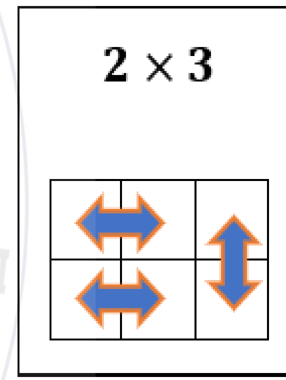
▲ 圖6-3



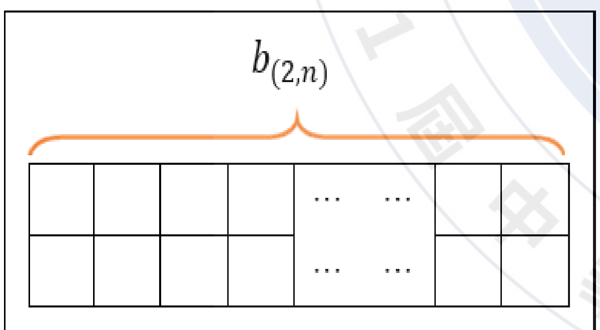
▲ 圖6-4



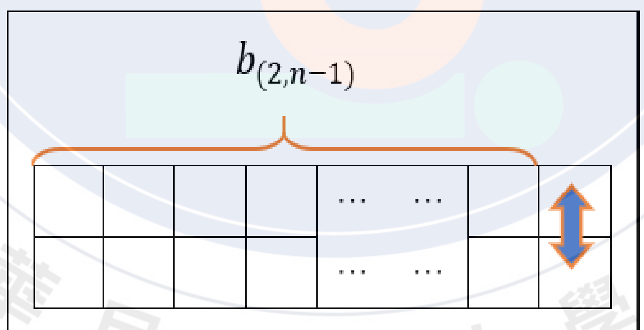
▲ 圖6-5



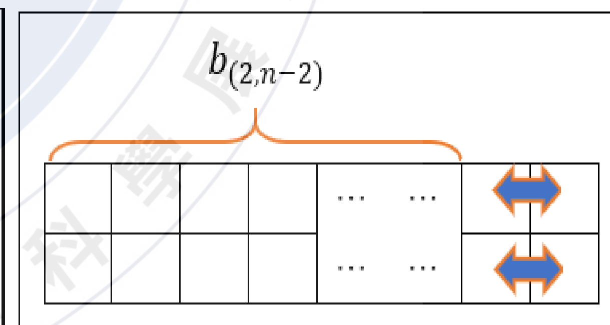
▲ 圖6-6



▲ 圖6-7

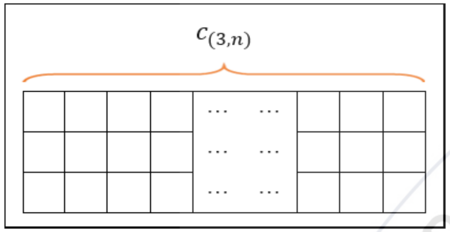


▲ 圖6-8

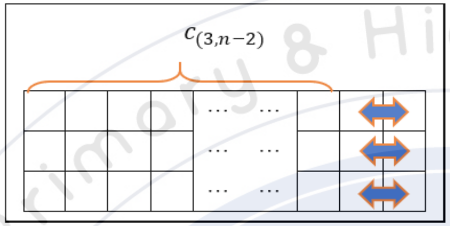


▲ 圖6-9

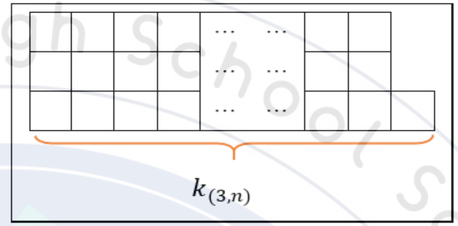
探討3 × n圖形交換座位方法數



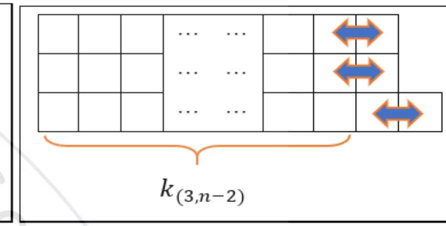
▲圖7-1



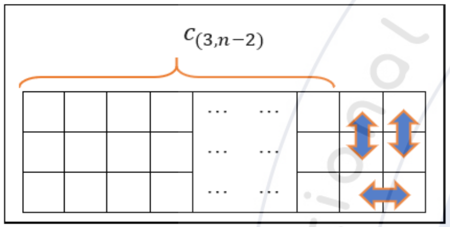
▲圖7-2



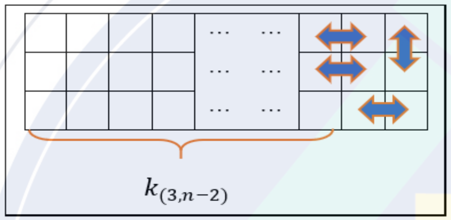
▲圖7-3



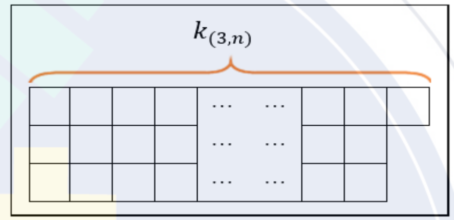
▲圖7-4



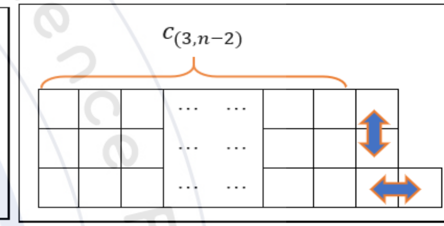
▲圖7-5



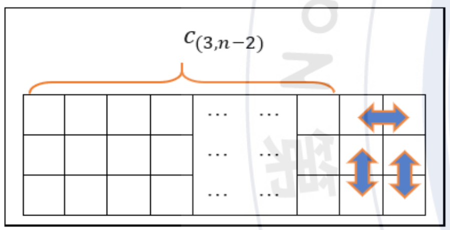
▲圖7-6



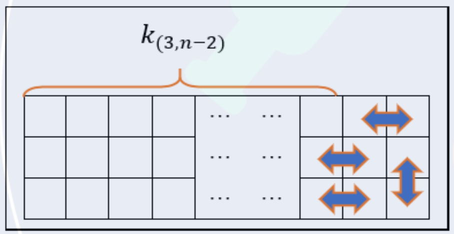
▲圖7-7



▲圖7-8



▲圖7-9



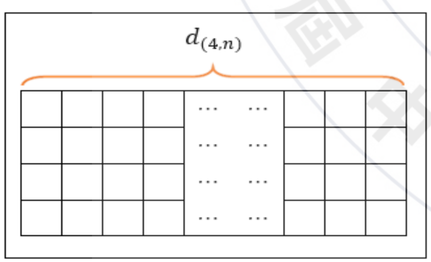
▲圖7-10

經由圖形發現二種遞迴關係

$$\begin{cases} c_{(3,n)} = 3c_{(3,n-2)} + 2k_{(3,n-2)} \\ k_{(3,n)} = c_{(3,n-2)} + k_{(3,n-2)} \end{cases}$$

發現$c_{(3,n)} = 4c_{(3,n-2)} - c_{(3,n-4)}$（$n$為偶數且$n \geq 6$時）

探討4 × n圖形交換座位方法數



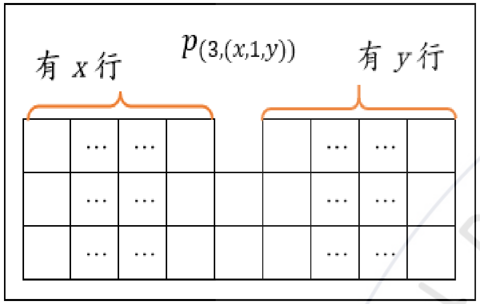
▲圖8：4 × n示意圖

經由圖形發現三種遞迴關係

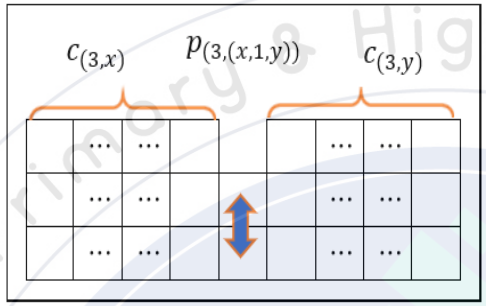
$$\begin{cases} d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 4d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)} + 2n_{(4,n-2)} \\ m_{(4,n)} = d_{(4,n-2)} + m_{(4,n-2)} \\ n_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + n_{(4,n-1)} \end{cases}$$

發現$d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 5d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)}$（$n \geq 5$時）

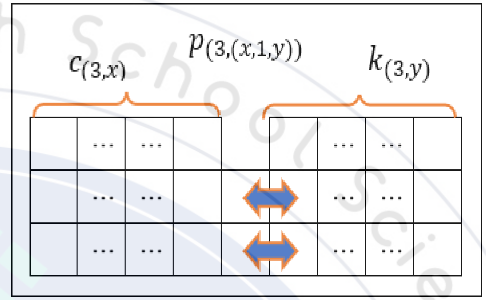
3 × *n*（缺格）交換座位方法數規律探討



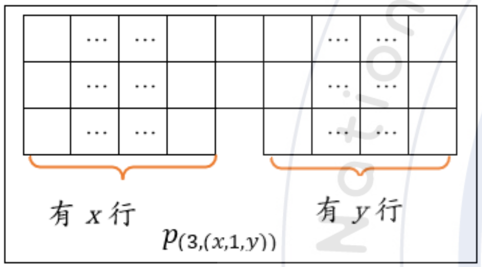
▲圖9-1



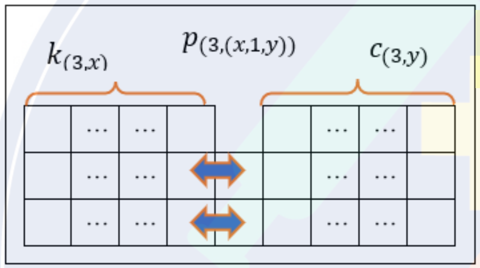
▲圖9-2



▲圖9-3



▲圖9-4



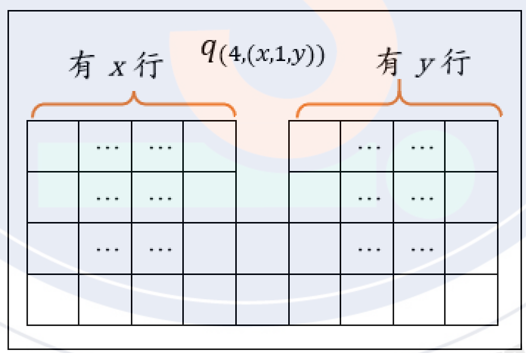
▲圖9-5

3 × *n*中間某行缺格交換座位方法數規律：

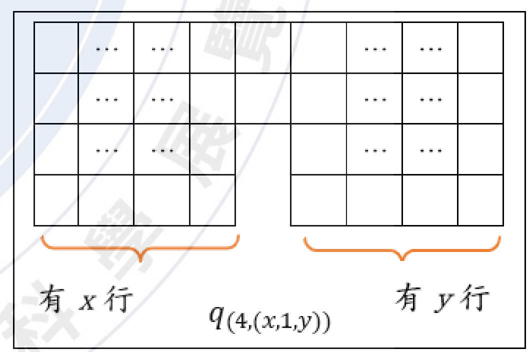
$$p_{(3,(x,1,y))}=c_{(3,x)}\cdot c_{(3,y)}+k_{(3,x)}\cdot c_{(3,y)}+c_{(3,x)}\cdot k_{(3,y)}$$（x、y為正偶數）

4 × *n*（缺格）交換座位方法數規律探討

4 × *n*缺格圖形透過減少2格進行討論。



▲圖10-1

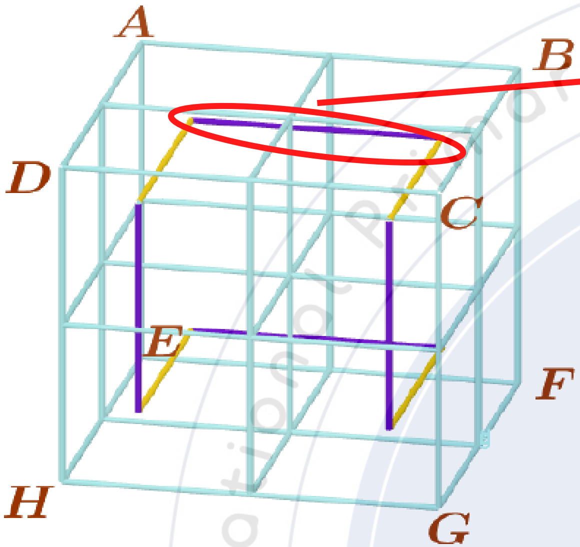


▲圖10-2

4 × *n*中間某行缺格交換座位方法數規律：

$$q_{(4,(x,1,y))}=d_{(4,x)}\cdot d_{(4,y)}+n_{(4,x)}\cdot d_{(4,y)}+d_{(4,x)}\cdot n_{(4,y)}$$

立體圖形圖形交換座位方法數探討

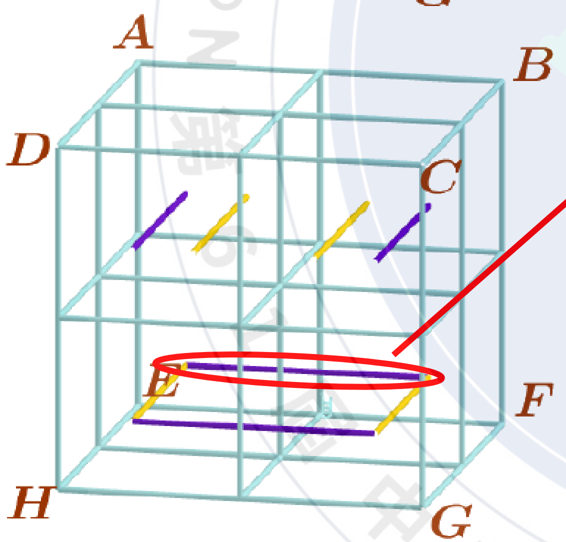


紅圈處為紫色，可知此為朝順時針方向進行交換座位。

A — B — C — G —

F — E — H — D — A

圖11-1



紅圈處為紫色，可知此為朝順時針方向進行交換座位。

A = D　E — F

B = C　G — H

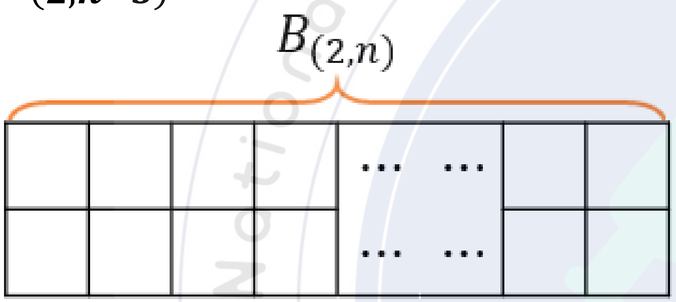
圖11-2

1. 發現平面木棒擺設的規則亦適用立體圖形。
2. 立體圖形兩兩交換座位方法數的平方數即為交換座位方法數。

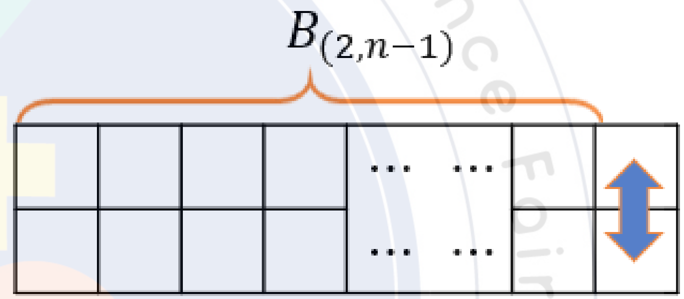
研究結論

- 奇數個的座位圖→**不能交換座位**；偶數個的座位圖→**部分無法交換座位**

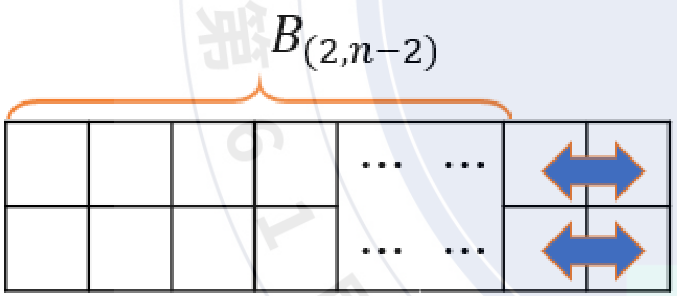
- $2 \times n$圖形交換座位的方法數之遞迴關係為：$\boldsymbol{B_{(2,n)} = 2B_{(2,n-1)} + 2B_{(2,n-2)} - B_{(2,n-3)}}$。$2 \times n$圖形交換座位的方法數之遞迴關係推導過程示意圖：



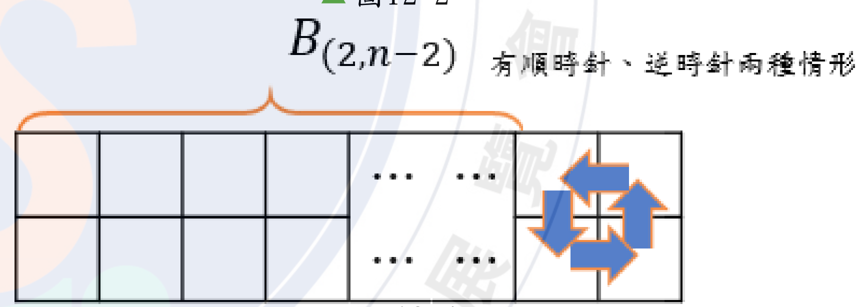
▲ 圖12-1



▲ 圖12-2



▲ 圖12-3



▲ 圖12-4

- 找到透過**木棒擺設**的圖形方式來解釋交換座位的情形。

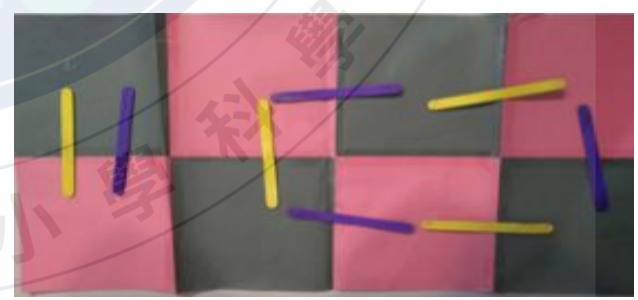


圖13 ：2 × 4木棒擺設交換座位示意圖

- **單一顏色**的木棒擺設情形之平方數=**兩種顏色**的木棒擺設方法數，也就是說**兩兩互換**方法數之平方數=**交換座位**的方法數。
- $m \times n$層交換座位問題的方法數之規律**如下**：

$2 \times n$層座位圖之交換座位方法數規律探討

$2 \times n$層座位圖之交換座位方法數規律探討：

$$b_{(2,n)} = b_{(2,n-2)} + b_{(2,n-1)} \ (n \geq 3\text{時})$$

$2 \times n$ 層交換座位方法數的規律：

$$B_{(2,n)} = b_{(2,n)}\text{的平方數} \ (n \geq 3\text{時})$$

$3 \times n$層座位圖之交換座位方法數規律探討

$3 \times n$層座位圖之交換座位方法數規律探討：

$$c_{(3,n)} = 4c_{(3,n-2)} - c_{(3,n-4)} \quad (n\text{為偶數且}n \geq 6\text{時})$$

$3 \times n$層交換座位方法數的規律：

$$C_{(2,n)} = c_{(2,n)} \text{ 的平方數} \quad (n\text{為偶數且}n \geq 6\text{時})$$

$3 \times n$ 層兩兩互換座位方法數的規律（有缺格）：

$$p_{(3,(x,1,y))} = k_{(3,x)} \cdot c_{(3,y)} + c_{(3,x)} \cdot k_{(3,y)} \qquad (x\text{、}y\text{為正偶數})$$

$4\times n$層座位圖之交換座位方法數規律探討

$4\times n$層兩兩互換座位方法數的規律：

$$d_{(4,n)} = d_{(4,n-1)} + 5d_{(4,n-2)} + d_{(4,n-3)} - d_{(4,n-4)} \quad (n \geq 5\text{時})$$

$4\times n$層交換座位方法數的規律：

$$D_{(2,n)} = d_{(2,n)}\text{的平方數}\ (n \geq 5\text{時})$$

$4\times n$ 層兩兩互換座位方法數的規律（有缺格）：

$$q_{(4,(x,1,y))} = d_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + n_{(4,x)} \cdot d_{(4,y)} + d_{(4,x)} \cdot n_{(4,y)}$$

- **立體圖形能**用木棒擺設的方式進行探討
  - **單一顏色木棒（兩兩互換）交換座位方法數。**
- 希望可以透過此規律探討出更多不同立體圖形$\boldsymbol{m\times n\times k}$**層的交換座位方法數的遞迴關係。**

參考資料

蘇晏徵、卓筠凌、戴筱燕（2009）。**旋乾轉坤陰陽易位**，中華民國第49屆科學覽會高中組數學科。

連淵淥、潘清岳（1988）。**一種排列的探討**，中華民國第28屆科學展覽會國中組數學科。

蔡坤佑、高三貴、蔡淑玲、高玉鳳（1989）。**棋迷之謎的探討**，中華民國第29屆科學展覽會國小組數學科。

翁邦彥、吳欣儒、施傑文（1990）。**奇妙的骨牌世界**，中華民國第30屆科學展覽會高中組數學科。