

# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

051816

量力而微－微波脈衝分析降低量子閘誤差

學校名稱：彰化縣私立精誠高級中學

作者： 高二 張仁瑀 高二 徐育兆 高一 劉子睿	指導老師： 林慶豪
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：IBM 超導量子電腦、Qiskit Pulse、  
微波誤差

## 摘要

本實驗最主要探討如何降低 Two Qubits System 經由 SWAP 閘後 Qubits 互相交換訊號時產生的誤差，用 Qiskit 環境測量雙量子位元系統誤差，利用隨機基準測量實驗找出誤差值，目前經由我們測量後經典量子 SWAP 閘的誤差值為 2.003%。為了提高現代量子演算法的可信度及可行性，我們將經典量子 SWAP 閘的誤差定義為初始誤差，我們嘗試設計新的交換邏輯閘 SWAP 閘，將經典量子 SWAP 閘替換成其他能達到相同目的的邏輯電路和調整脈衝作用時間，以及透過交叉共振理論以及調整脈衝圖形找出最優結構，延長超導量子電腦 ibmq\_casablanca 的保真度，最後經由實際操作得到新的數值，並測量其誤差。我們成功的利用自製的 SWAP 閘降低 67.2%的誤差，也找出沒有相位翻轉也能實現的 SWAP 閘，這是個可行性很高的實驗。

## 壹、研究動機

量子電腦是 21 世代的新興領域，但是超導量子電腦實用性質卻不高，因為超導量子位元容易受到雜訊干擾進而產生誤差，在無法精確的轉換訊息的情況下，使量子演算法，例如: QFT 不具有實驗可信性和可行性。SWAP 閘的操作已被用於許多量子操作的電路設計中，但因為其誤差較為明顯，所以有必要以減少誤差的方式實施 SWAP 閘操作，在目前提出的經典量子 SWAP 閘的電路構造中使用的閘的數量為三個 CNOT 閘，這造成了系統的噪音誤差變大。因此我們希望能建立一個保有初始 SWAP 閘的功能，同時又優於初始 SWAP 閘的準確度的量子電路，並分析各項變數對交換狀態後的 Two Qubits System 的誤差影響比例，藉由此實驗，希望能夠為目前量子學界的技術添一分力。

量子位元是量子計算所需要的基礎單位，在物理上可以透過量子力學來證明。我們可以將表示單個量子位元的二維希爾伯特空間擴展到  $2n$  的更高維空間，其中  $n$  是量子位元的數量。但是，希爾伯特空間的維數不一定是  $2^n$ ，因此我們對研究任意維數  $n$  的希爾伯特空間感興趣，二量子位運算是實現通用量子電路的基礎，一些著名的二位元量子閘像是 CNOT 和 SWAP 閘，前者根據控制量子位對目標量子位執行 CNOT 操作，後者將控制量子位和目標量子位的輸入狀態互換。

最後我們為此提出了使用其他量子閘的 SWAP 閘的電路構造，來實現優化的任務，利用閘的等效性建立新的 SWAP 閘脈衝結構並且利優化先前提出的 Qubit SWAP 閘的脈衝結構。

## 貳、研究目的

- 一、建立能優化經典 SWAP 閘的脈衝結構
- 二、建立多種能替代 IBMQ SWAP 閘的脈衝結構
- 三、探討不同超導量子電路脈衝交換位元狀態後的相位影響
- 四、探討不同超導量子電路脈衝交換位元狀態後誤差影響

## 參、研究設備與器材

### 一、軟體環境：

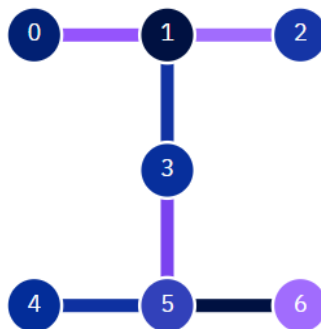
Version Information	
Qiskit Software	Version
Qiskit	0.23.1
Terra	0.16.1
Aer	0.7.1
Ignis	0.5.1
Aqua	0.7.3
IBM Q Provider	0.7.2
System information	
Python	3.7.6 (default, Jan 8 2020, 20:23:39) [MSC v.1916 64 bit (AMD64)]
OS	Windows
CPUs	4
Memory (Gb)	7.818538665771484
Fri Dec 11 14:58:37 2020 ϕDxϕD_?DjPCRE?!	

(圖一) 軟體版本

### 二、硬體環境：

7 Qubits	Status: ● Paused - In use	Avg. CNOT Error: 8.563e-3
32 Quantum Volume	Total pending jobs: 322 jobs	Avg. Readout Error: 1.817e-2
	Processor type ⓘ: Falcon	Avg. T1: 86.85 us
	Version: 1.1.8	Avg. T2: 109.95 us
	Basis gates: CX, ID, RZ, SX, X	Providers with access: 1 Providers ↓
	Your usage: 1 job (1 pending)	

(圖二) 硬體資訊



(圖三) 超導位元電路連結圖

### 三、IBM 量子電腦

(表二) ibmq\_casablanca 中 0 號 Qubit、1 號 Qubit、2 號 Qubit、3 號 Qubit 的退相干時間與讀出錯誤訊號的機率

	0 號 Qubit	1 號 Qubit	2 號 Qubit	3 號 Qubit
T1(退相干時間) 單位:μs	100.56	41.56	82.75	112.82
Readout error rate 單位:%	2.66%	1.59%	1.35%	1.94%

(表三) 各個通道的誤差

	CX0_1	CX1_3	CX1_2	CX1_0	CX2_1	CX3_1
誤差	0.9974%	0.7949%	0.1016%	0.9974%	1.0160%	0.7795%

### 肆、實驗設計與方法

#### 一、文獻探討

##### 超導量子電路結構與脈衝控制原理

##### (一) 查閱量子脈衝通道之文獻

##### 1. 常見通道種類:

- (1) Drive Channel :發訊號給 Qubit，提供共振頻率，為 Pulse Channel 的子類
- (2) Measure Channel :傳 Qubit 測量結果讀取部分，為 Pulse Channel 的子類。
- (3) CNOTrol Channel :對 Drive Channel 提供控制，為 Pulse Channel 的子類。
- (4) Acquire Channel :收集資料的場所。
- (5) Pulse Channel :發射通道的基礎頻率。

##### 2. 常見指令種類：

- (1) play :打出脈衝，執行於 Pulse Channel。
- (2) delay :使指令延遲執行，執行於所有通道。
- (3) shift phase :改變發射的相位(弧度)，執行於 Pulse Channel。
- (4) set frequency :設定頻率，執行於 Pulse Channel。
- (5) acquire :收集指定時間內資料並存於 register，執行於 Acquire Channel。

##### 3. pulse schedule:

(1) 各個通道的波圖和波的持續時間。

(二) 名詞解釋:

1. 希爾伯特空間:每個有限維度內積空間都是希爾伯特空間，泛指一切具有完備性的內積空間，但內積空間不一定具有完備性，以下將會分開說明完備空間和內積空間，兩者的結合就是完備的內積空間。

(1) 完備空間:在數學分析裡，又稱為完備度量空間或是柯西空間，當一度量空間的柯西序列全部縮在空間的一點時，則稱該空間是完備空間，其中實數空間就是完備空間的一種。

(2) 內積空間:加入了一種運算方法的向量空間(線性空間)，此運算方法為內積，內積能夠讓我們考慮向量的夾角和長度，就空間可以討論他的正交性，因為內積可以把向量和純量連結起來。因此希爾伯特空間= 完備性+內積空間。

二、理論說明

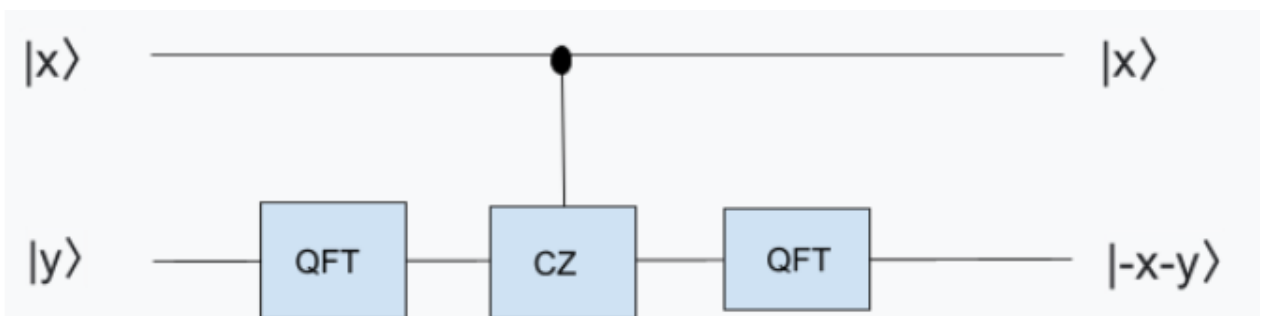
(一) 量子傅立葉轉換(QFT)

量子傅立葉變換是量子版本的離散傅立葉變換。它使任何 Qubit 態 $|x\rangle$  成為一致的疊加態

$$U_{QFT}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi xk}{N}} |k\rangle$$

式 1:量子傅立葉轉換公式

CX'門(代字號「'」在傅立葉基礎上紀錄狀態)可以分解為三個基本的 Qubit 門，兩個 QFT 操作和 CZ 門，如圖示



圖(五) CX 閘拆分為兩個 QFT 與一個 CZ 閘

而 CZd 可以表示為

$$CZ_N |x\rangle |y\rangle = e^{i2\pi xy/N} |x\rangle |y\rangle$$

當  $|x\rangle |y\rangle$  經過此電路可表示為

$$|x\rangle |y\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi ky}{N}} |x\rangle |k\rangle \xrightarrow{CZ_N} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi ky}{N}} e^{i\frac{2\pi xk}{N}} |x\rangle |k\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k(x+y)}{N}} |x\rangle |k\rangle$$

$$\xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k(x+y)}{N}} e^{i\frac{2\pi kl}{N}} |x\rangle |l\rangle = |x\rangle |-x-y\rangle$$

若以單量子位元為例則  $n=1$  且  $N=2^n=2$ ，當輸入量子狀態為  $|x\rangle = x_0|0\rangle + x_1|1\rangle$  經過 QFT

$$\text{後: } y_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i\frac{2\pi n(0)}{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+x_1), \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i\frac{2\pi n(1)}{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0-x_1)$$

量子狀態的結果為:

$$\text{QFT } |x\rangle = y_0|0\rangle + y_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+x_1)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0-x_1)|1\rangle$$

此結果相當於 H 閘。

### (二) 交叉共振作用(Cross-Resonance Interaction)

CR 閘是兩個量子的微波糾纏器，用微波脈衝驅動 Control Qubit 在 Target Qubit 上激發 ZX 互動來發展哈密頓量，其中 Z 跟 X 分別對應到驅動的 Control Qubit 和 Target Qubit。可在用一個與時間相關的哈密頓量  $H_{CR}(t)$  來描述 CR 脈衝驅動的二次變換系統。在沒雜訊干擾的情況下，導致整體成為  $U_{CR}$ 。我們可以將  $U_{CR}$  近似為時間無關的  $H_{CR}$ ，此與參考文獻[1]中介紹的方法中的 CR 閘吻合，此技術使控制量子位的驅動脈衝有著接近不變的振幅， $U_{CR} \approx \ln(-it_{CR}H_{CR})$  使 CR 演變為:

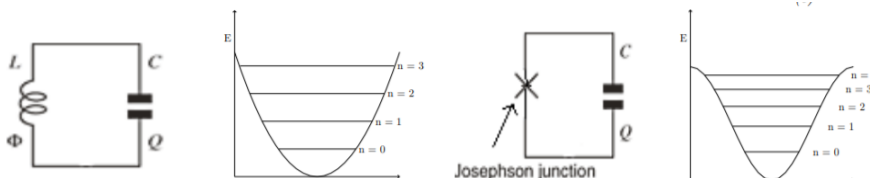
$$\underline{H}_{CR} = \frac{Z \otimes B}{2} + \frac{I \otimes C}{2}$$

$$B = \omega_Z I + \omega_{ZX} X + \omega_{ZY} Y + \omega_{ZZ} Z$$

$$C = \omega_{IX} X + \omega_{IY} Y + \omega_{IZ} Z$$

### (三) 超導量子電路與脈衝的關係

在我們的實驗裡，需要多層結構完成實驗， transmon Qubit 這是約瑟夫遜結量子位的一種特殊類型。而要解釋 transmon 量子位的本質，我們要從簡單量子 LC 電路開始說明。LC 電路是一種由電感器 (L) 和電容器 (C) 所組成的電路。該系統的量化方法與具有拋物線勢能的諧波振盪器相同。量子 LC 電路具有均勻間隔的能級，如圖六 b 所示。這種情況對於量子位來說不是最佳的狀態，它會同時將所有能級以相同的頻率分開，因此對所有能級來說都有可能會被激發。問題解決方案是用另一個組件（即約瑟夫森結）替換電感器 L。包含約瑟夫森結的新電路如圖六 c。約瑟夫森結使勢能轉變成非拋物線形。新系統是一個非諧振盪器，具有較高能量間隔（圖六 d）。



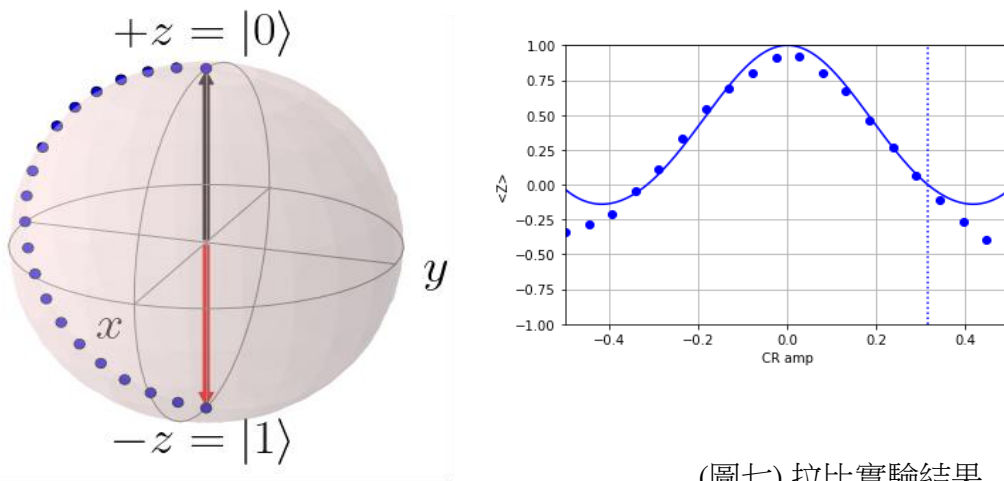
(a) (b) (c) (d)

(圖六) LC 電路 (a) 具有相等間距的能級的能譜(b). 將電感換成約瑟夫森結 (c) 改約瑟夫森結後的非線性能階(d)

#### (四) 拉比實驗

##### 1. 校準 $\pi$ 脈衝

量子比特是一個兩級系統， $\pi$  脈衝使 $|0\rangle$ 到 $|1\rangle$ 。也稱為 X 或者 X180 度門或狀態翻轉運算符。下圖(八)在布洛赫 (Bloch Sphere) 球體上顯示所需的旋轉-您可以看到  $\pi$  脈衝在布洛赫球上掃過。

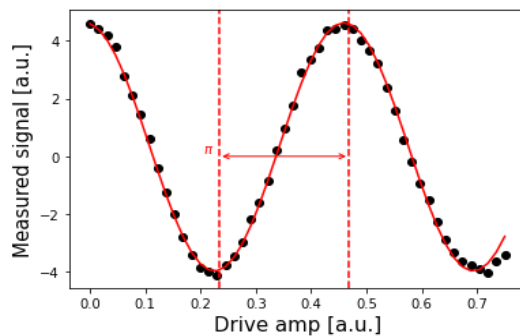


(圖七) 拉比實驗結果

$$cr\_pi2\_amp=0.31573000485802394$$

(圖八)在 Bloch 球上表示  $\pi$  脈衝作用

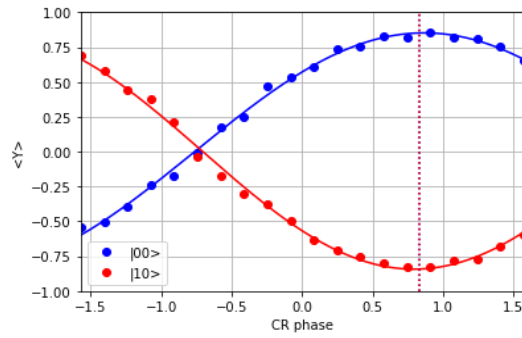
以較小的增量更改驅動幅度，每次更改驅動幅度時測量 Qubit 的狀態，隨著 Qubit 從  $|0\rangle$  到  $|1\rangle$  然後回來。



(圖九) 驅動振幅擬合圖

對於以下結果，對選擇的驅動幅度範圍提取數值並擬合成正弦曲線。

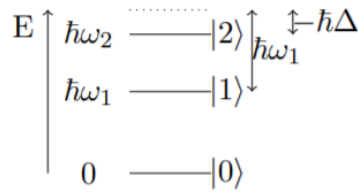
##### 2. 校準相位差



圖(十) 相位差  $\text{phi\_opt}=0.833476$  (取道小數點下的六位)

### (五) 量子位元模型

一個真正的量子位只有兩個能級，分別對應於經典位元的 0 和 1 狀態。實際上，物理系統具有無限數量的能量狀態。通常操縱量子的溫度（能量）遠低於主要改變能量頻率，所以我們僅能使用具有三個不同能級  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  和  $|2\rangle$  的非諧振盪器的簡單模型，我們將基態能量設為零，而第一次和第二次激發的能量狀態是  $\hbar\omega_1$  和  $\sim\hbar\omega_2$ ，並可以寫成  $\omega_2=2\omega_1+\Delta$ ，其能階可表示



(圖十一) 能級躍遷表示圖

對一個靜止系統，這三個能級是本徵態。一旦系統處於這些本徵狀態之一，它將保持該狀態。在外部電磁場的影響下，這種情況不再成立，其可在不同級別之間切換。

電場的存在改變了哈密頓量變為：

$$\hat{H} = \hat{H}_0(t) + \hbar\Omega(t) (\sigma_1^+ + \sigma_1^- + \lambda(\sigma_2^+ + \sigma_2^-))$$

其矩陣表示為

$$\hat{H}^{RF} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega(t) & 0 \\ \Omega(t) & \omega_1 & \lambda\Omega(t) \\ 0 & \lambda\Omega(t) & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  是指從 0 到 1 與從 1 到 2 的比較，而  $\Omega(t)$  是應用於系統的脈衝定義為以下形式，

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega^x(t)\cos(\omega_d t) + \Omega^y(t)\sin(\omega_d t) & : 0 \leq t \leq T \\ 0 & : \text{elsewhere} \end{cases}$$

$\Omega^x$  控制稱為同相正交，而  $\Omega^y$  控制稱為異相正交， $T$  是總時間，為簡化計算，我們通過以下與時間有關的 Unit 變換來完成



$$\hat{U}(t) = \Pi_0 + e^{i\omega_1 t} \Pi_1 + e^{i\omega_2 t} \Pi_2.$$

哈密頓量可換為

$$\hat{H}^{RF} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \dot{\hat{U}} \hat{U}^\dagger.$$

變換用於在旋轉框架中找到哈密頓量時，我們得到應用旋轉波逼近（RWA）後的以下結果：

$$\hat{H}^{RF} = \frac{\hbar}{2} \left[ \Omega_C^\dagger(t) e^{-i\delta_1 t} \sigma_1^+ + \lambda \Omega_C^\dagger(t) e^{-i\delta_2 t} \sigma_2^+ \right] + \text{h.c.},$$

其中 h.c. 代表厄米特共軛：

$$\begin{aligned} \Omega_C &= \Omega^x + i\Omega^y \\ \delta_j &= \omega_j - \omega_d. \end{aligned}$$

用矩陣表示為：

$$\hat{H}^{RF} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_C^\dagger(t) e^{-i(\omega_1 - \omega_d)t} & 0 \\ \Omega_C(t) e^{i(\omega_1 - \omega_d)t} & 0 & \lambda \Omega_C^\dagger(t) e^{-i(\omega_1 + \Delta - \omega_d)t} \\ 0 & \lambda \Omega_C(t) e^{i(\omega_1 + \Delta - \omega_d)t} & 0. \end{pmatrix}$$

施加電磁驅動脈衝時，量子位經歷變化。這時間變化可以用時間傳播器  $U(t, t_0)$  來描述，它滿足以下微分方程：

$$\frac{d}{dt} U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0), \quad U(t = t_0) = 1.$$

其中：

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t H^{RF} dt' \right]$$

此式亦可用戴森級數來表達：

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_2 H(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_3 H(t_3) \int_{t_0}^{t_3} dt_2 H(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) + \dots \\ &= U_0(t, t_0) + U_1(t, t_0) + U_2(t, t_0) + U_3(t, t_0) + \dots \end{aligned}$$

為了解哪些驅動脈衝可用來執行某個量子門理想的起點，我們計劃是簡化哈密頓量。假設驅動頻率  $\omega_d$  和量子比特頻率  $\omega_1$  之間存在共振，這意味著  $\omega_1 = \omega_d$ ，帶入  $\lambda = 0$ 。從物理上講，這意味著不考慮第二個激發態，並且只考慮了量子位的兩個計算態。使用  $\sigma_{j,k}^x = |k\rangle\langle j| + |j\rangle\langle k|$  和  $\sigma_{j,k}^y = i|k\rangle\langle j| - i|j\rangle\langle k|$  來代替之前定義的  $\sigma_1^+$  和  $\sigma_1^1$  可以使上式變成

$$\hat{H}^{RF}(t) = \frac{\hbar}{2} (\Omega^x(t)\sigma_{0,1}^x + \Omega^y(t)\sigma_{0,1}^y)$$

而  $\sigma_{0,1}^+$  可以等同於 X 閘，因此整體相位對量子位並不重要，在洩漏電平(leakage level)上允許附加的相移，這使量子閘有了完整的系統

$$U_{ideal} = e^{i\phi_1} \begin{pmatrix} |0\rangle & |1\rangle & |2\rangle \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |2\rangle \end{matrix}$$

若  $\Omega^y = 0$   $\Omega^x = \Omega_\pi$   $\Omega_\pi$  (t) 可以是滿足以下式子的任何脈衝

$$\int_0^{t_g} \Omega_\pi(t') dt' = \pi$$

在不同的時間下，t1 and t2，Hamiltonians 都是對易(commute)

$$[H^{RF}(t_1), H^{RF}(t_2)] = 0.$$

由此可以得出，在這種特定情況下，可以將時間排序運算符 T 放到公式 (2.9) 中。如下：

$$\begin{aligned} U_{final} &= \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_0^T H^{RF} dt' \right] \\ &= \exp \left[ \frac{-i}{2} \pi \sigma_{0,1}^x \right] \\ &= iX \end{aligned}$$

### 三、實驗設計

(一) 變因一: 使用有輔助位元的量子 SWAP 閘脈衝

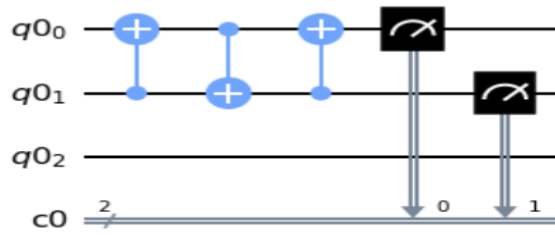
1. 實驗設計: 不同組合的 CNOT 閘觀察其誤差
2. 實驗目的: 找出能降低誤差的最佳脈衝組合

(1) 實驗一

數學模型:

$$\begin{aligned} |x\rangle |y\rangle &\xrightarrow{CNOT\ 0,1} |x\rangle |y \oplus x\rangle \\ |x\rangle |y \oplus x\rangle &\xrightarrow{CNOT\ 1,0} |x \oplus y \oplus x\rangle |y \oplus x\rangle = |y\rangle |y \oplus x\rangle \\ |y\rangle |y \oplus x\rangle &\xrightarrow{CNOT\ 0,1} |y\rangle |y \oplus x \oplus y\rangle = |y\rangle |x\rangle \end{aligned}$$

量子電路表示法:



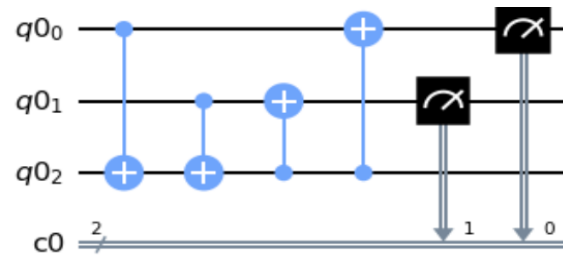
(圖十二) 初始 SWAP 閘為三個 CX 閘組成

## (2) 實驗二

數學模型:

$$\begin{aligned}
 |x\rangle |y\rangle |z\rangle &\xrightarrow{CNOT0, 2} |x\rangle |Y\rangle |Z\oplus X\rangle \\
 |x\rangle |Y\rangle |Z\oplus X\rangle &\xrightarrow{CNOT1, 2} |x\rangle |Y\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle \\
 |x\rangle |Y\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle &\xrightarrow{CNOT2, 1} |x\rangle |Y\oplus Z\oplus X\oplus Y\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle = |x\rangle |Z\oplus X\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle \\
 |x\rangle |Z\oplus X\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle &\xrightarrow{CNOT2, 0} |x\oplus Z\oplus X\oplus Y\rangle |Z\oplus X\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle \\
 &= |Z\oplus Y\rangle |Z\oplus X\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle = |Y\rangle |X\rangle |Z\oplus X\oplus Y\rangle
 \end{aligned}$$

量子電路表示法:



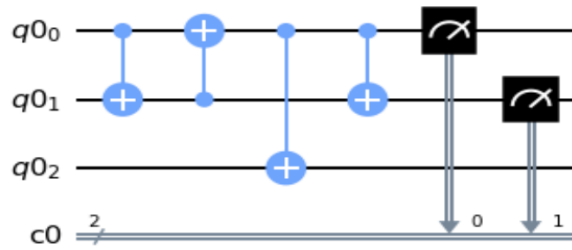
圖(十三) 帶輔助位元的 SWAP 閘，由四個 CX 閘組成，第一個 CX 閘為零控制二，第二個 CX 閘為一控制二，第三個 CX 閘為二控制一，第四個 CX 閘為二控制零，最後測量。

## (3) 實驗三

數學模型:

$$\begin{aligned}
 |X\rangle |Y\rangle |Z\rangle &\xrightarrow{CNOT0, 1} |X\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\rangle \\
 |X\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\rangle &\xrightarrow{CNOT1, 0} |X\oplus Y\oplus X\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\rangle = |Y\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\rangle \\
 |Y\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\rangle &\xrightarrow{CNOT0, 2} |Y\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\oplus Y\rangle \\
 |Y\rangle |Y\oplus X\rangle |Z\oplus Y\rangle &\xrightarrow{CNOT0, 1} |Y\rangle |Y\oplus X\oplus Y\rangle |Z\oplus Y\rangle = |Y\rangle |X\rangle |Z\oplus Y\rangle
 \end{aligned}$$

量子電路表示法:



圖(十四) 有輔助位元的 SWAP 閘，由四個 CX 閘組成，第一個 CX 閘為零控制一，第二個 CX 閘為一控制零，第三個 CX 閘為零控制二，第四個 CX 閘為零控制一，最後測量。

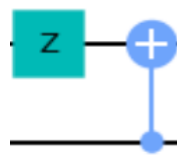
(二) 變因二:以 GXOR 閘，CZ 閘為主體，利用量子的等效性建立不同的 SWAP 閘脈衝

1. 實驗設計:利用相位翻轉的脈衝實現 SWAP 閘的等效性
2. 實驗目的:找出較小誤差的組合
3. 定義 GXOR 閘:

數學模型:

$$GXOR|X\rangle|Y\rangle=|X\rangle|X-Y\rangle$$

量子電路表示:



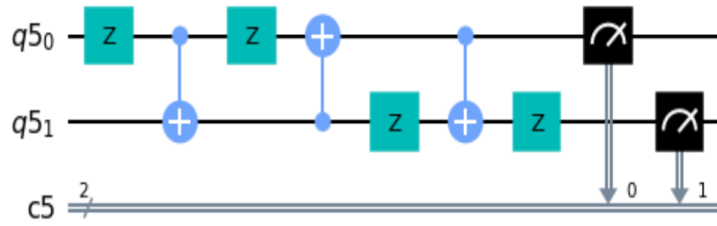
圖(十五) 一個 GXOR 閘

(1) 實驗四

數學模型:

$$\begin{aligned}
 |X\rangle|Y\rangle &\xrightarrow{z_0} |X\rangle|Y\rangle|X\rangle|Y\rangle \xrightarrow{CNOT_{0,1}} |X\rangle|Y\oplus X\rangle \\
 |X\rangle|Y\oplus X\rangle &\xrightarrow{z_0} |X\rangle|Y\oplus X\rangle \\
 |X\rangle|Y\oplus X\rangle &\xrightarrow{CNOT_{1,0}} |X\oplus Y\oplus X\rangle|Y\oplus X\rangle=|Y\rangle|Y-X\rangle \\
 |Y\rangle|Y-X\rangle &\xrightarrow{z_1} |Y\rangle|X-Y\rangle \\
 |Y\rangle|X-Y\rangle &\xrightarrow{CNOT_{0,1}} |Y\rangle|X-Y\oplus X\rangle=|Y\rangle|X\rangle
 \end{aligned}$$

量子電路表示法:



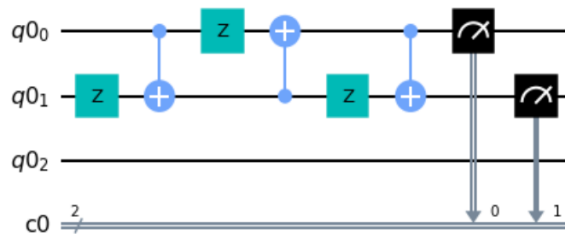
圖(十六)有 GXOR 閘的 SWAP 閘，先由一個在零位置的 Z 閘加上一個零控制一的 CX 閘之後放上兩個互為反邊的 GXOR 閘，最後在位置一放上一個 Z 閘後測量。

### (2) 實驗五

數學模型:

$$|X\rangle |Y\rangle \xrightarrow{GXOR\ 0,1} |X\rangle |X-Y\rangle, |X\rangle |X-Y\rangle \xrightarrow{GXOR\ 1,0} |Y\rangle |X-Y\rangle, |Y\rangle |X-Y\rangle \xrightarrow{GXOR\ 0,1} |Y\rangle |X\rangle$$

量子電路表示法:



(圖十七)帶有 GXOR 閘的 SWAP 閘，由三個 GXOR 閘所組成，最後進行測量。

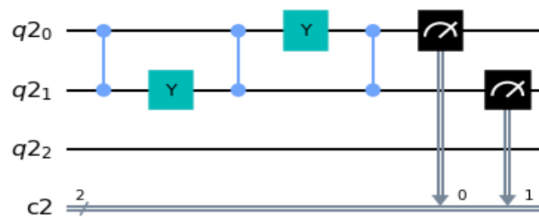
### (3) 實驗六

數學模型:

(表四) 實驗六理論真值表

	$cz(0, 1)$	$y(1)$	$cz(1, 0)$	$y(0)$	$cz(0, 1)$
$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  i1\rangle$	$ 0\rangle  -i1\rangle$	$ 1\rangle  -i1\rangle$	$ 1\rangle  -i1\rangle$
$ 1\rangle  0\rangle$	$ 1\rangle  0\rangle$	$ 1\rangle  i1\rangle$	$ 1\rangle  i1\rangle$	$ -i0\rangle  i1\rangle$	$ -i0\rangle  i1\rangle$

量子電路表示法:



(圖十八)有 CZ 閘的 SWAP 閘，由零控制一的 CZ 閘加上一個在位置一的 Y 閘，

再由一個一控制零的 CZ 閘加上一個在位置零的 Y 閘，最後加上一個由零控制一的 CZ 閘後測量。

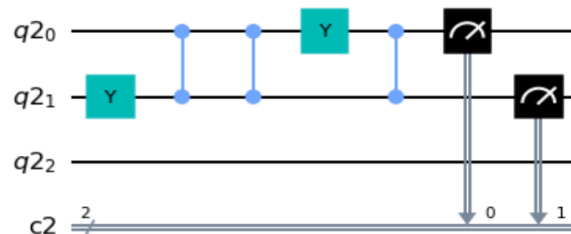
#### (4) 實驗七

數學模型:

(表五) 實驗七理論真值表

	y(1)	cz(0, 1)	cz(1, 0)	y(0)	cz(0, 1)
$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle -i 0\rangle$	$ 0\rangle -i 0\rangle$	$ 0\rangle -i 0\rangle$	$i 1\rangle -i 0\rangle$	$i 1\rangle -i 0\rangle$
$ 1\rangle  0\rangle$	$ 1\rangle i 1\rangle$	$ 1\rangle -i 1\rangle$	$- 1\rangle -i 1\rangle$	$i 0\rangle -i 1\rangle$	$i 0\rangle -i 1\rangle$

量子電路表示法:



(圖十九) 帶有 CZ 閘的 SWAP 閘，先在位置一的 Y 閘加上一個零控制一的 CZ 閘，再由一個一控制零的 CZ 閘加上一個在位置一的 Y 閘，最後加一個由零控制一的 CZ 閘後進行測量。

### (三) 變因三:以 CY 閘，QFT 閘以及特殊型 CZ 閘建構與量子的等效性建立不同的 SWAP 閘脈衝

1. 實驗設計:利用相位翻轉的脈衝實現 SWAP 閘的等效性
2. 實驗目的:找出較小誤差的組合

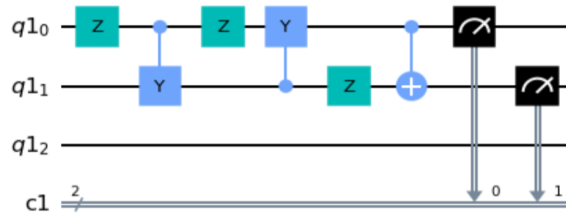
#### (1) 實驗八

數學模型:

(表六) 實驗八理論真值表

	z(0)	cy(0, 1)	z(0)	cy(1, 0)	z(1)	CX(0, 1)
$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle - 1\rangle$	$i 1\rangle - 0\rangle$
$ 1\rangle  0\rangle$	$- 1\rangle i 0\rangle$	$- 1\rangle -i 1\rangle$	$ 1\rangle i 1\rangle$	$-i 0\rangle i 1\rangle$	$-i 0\rangle -i 1\rangle$	$-i 0\rangle -i 1\rangle$

量子電路表示法:



(圖二十) 帶有 CY 閘的 SWAP 閘，先是在零的位置放上 Z 閘再加上一個零控制一的 CY 閘，之後在零的位置放上一個 Z 閘加上一個一控制零的 CY 閘，最後，在一的位置放上 Z 閘加上一個零控制一的 CX 閘後進行測量。

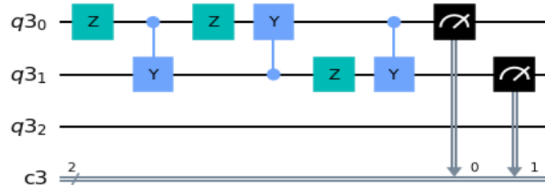
### (2) 實驗九

數學模型:

(表七) 實驗九理論真值表

	$z(0)$	$cy(0, 1)$	$z(0)$	$cy(1, 0)$	$z(1)$	$cy(0, 1)$
$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle  -1\rangle$	$i 1\rangle  i0\rangle$
$ 1\rangle  0\rangle$	$- 1\rangle  i0\rangle$	$- 1\rangle  -i 1\rangle$	$ 1\rangle  i1\rangle$	$-i 0\rangle  i1\rangle$	$-i 0\rangle  -i1\rangle$	$-i 0\rangle  -i1\rangle$

量子電路表示法:



(圖二十一) 帶 CY 閘的 SWAP 閘，先在零的位置放上 Z 閘再加上一個零控制一的 CY 閘，之後，在零的位置放上 Z 閘再加上一個一控制零的 CY 閘，最後在一的位置放上 Z 閘再加上一個零控制一的 CY 閘後測量。

### (3) 實驗十

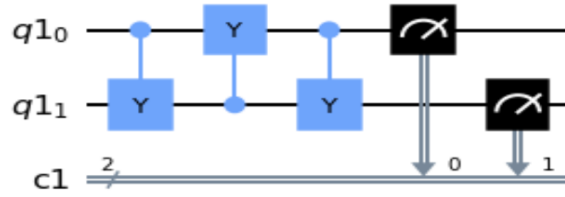
數學模型:

(表八) 實驗十理論真值表

	$cy(0, 1)$	$cy(1, 0)$	$cy(0, 1)$
$ 0\rangle  1\rangle$	$ 0\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle  1\rangle$	$i 1\rangle  -i 0\rangle$

$ 1\rangle 0\rangle$	$ 1\rangle 1\rangle$	$-i 0\rangle i 1\rangle$	$-i 0\rangle i 1\rangle$
----------------------	----------------------	--------------------------	--------------------------

量子電路表示法:



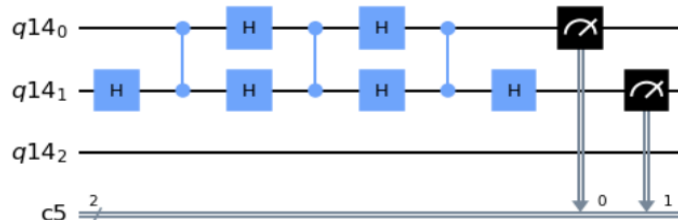
(圖二十二) 由三個 CY 閘組成的 SWAP 閘，先放上由零控制一的 CY 閘後再放上一控制零的 CY 閘，最後放上零控制一的 CY 閘後測量。

#### (4) 實驗十一

數學模型: 理論(一)說明在單量子位元的條件下，QFT 等值於 H，此實驗等同於以 QFT 形式來表達經典 SWAP 閘。

$$\begin{aligned}
 |x\rangle|y\rangle &\xrightarrow{QFT1} |x\rangle|y\oplus x\rangle \\
 |x\rangle|y\oplus x\rangle &\xrightarrow{QFT0} |x\oplus y\oplus x\rangle|y\oplus x\rangle = |y\rangle|y\oplus x\rangle \\
 |y\rangle|y\oplus x\rangle &\xrightarrow{QFT1} |y\rangle|y\oplus x\oplus y\rangle = |y\rangle|x\rangle
 \end{aligned}$$

量子電路表示法:



圖(二十四) 由 CZ 閘組成的 SWAP 閘，先放上由 0 控制 1 的 CZ 閘後再 0 號位元和 1 號位元放上 Z 閘

#### (四) 變因四:調整交叉共振作用降低 SWAP 閘脈衝誤差

1. **實驗原理:** 由於建立 SWAP 閘脈衝會有多餘的電磁波產生，因此用回音技術，產生破壞性干涉，消除系統的噪音誤差。
2. **實驗目的:** 準確找出量子電腦的位元誤差。
3. **實驗設計:** 以不同的脈衝作用時間，觀察其與誤差的關係。

#### (1) 實驗十二

(表十) 實驗的重點程式碼-改變定義參數 “duration”



```
cr_params = {'duration': 53 * alignment, 'amp': var_amp, 'phi': var_phi,
            'sigma': 2 * alignment, 'rise_fall': 4 * alignment}
```

#### 4. 分析方式

##### Randomized Benchmarking (RB)

隨機基準測試，構建量子信息處理器的主要挑戰之一是無法通過過程中的分析成像來完全表徵影響量子系統的噪音，因完整的過程分析成像對於大型的量子系統是不可行的，所以用隨機取部分數值並通過單個參數對整個 Clifford 閘進行隨機基準測試，取出整個系統的保真度或是將不同長度的閘的隨機序列應用在標準初始的狀態，每個序列以隨機測量結果來確定是否獲得正確的最終狀態，在雜訊的干擾下，隨機基準測試會產生計算相關的誤差，最終的數據結果還是取決於硬體的真實情況。

(1) 我們做 RB 實驗需要的參數：

- nseeds：種子數。對每個種子，會在 Rb\_circs 序列中獲得一個單獨的輸出電路列表。
- length\_vector：Clifford 長度的長度向量必須依照升冪排列。長度增加的 RB 序列會在先前的序列中的首數後。
- rb\_pattern：會以[[i, j], [k], ...]形式的列表，它將會同時做出 RB 序列，其中 Qi, Qj 是雙量子位元的 RB 序列，而 Qk 是單量子位元的序列。對於“常規”RB, Qubit\_pattern 僅為[[0]], [[0, 1]]。
- length\_multiplier：一個數組，它將按乘數縮放每組 RB 序列。

(2) RB 的步驟

**步驟一：**生成 RB 序列，RB 序列是由 Clifford 組統一選擇的隨機 Clifford 元素所組成  $\tilde{n}$ -Qubits，包括計算的反轉元素，使 Qubits 返回到初始狀態。我們選擇 RB 序列  $K_m$ ，每個序列包含  $m$  個隨機元素  $C_{ij}$ ， $C_{ij}$  定義為

$$C_{i_{m+1}} = (C_{i_1} \cdot \dots \cdot C_{i_m})^{-1}.$$

**步驟二：**建立 RB 電路且定義 RB 實驗需要的參數

**步驟三：**定義交錯元素，輸入實驗一到十二的 SWAP 閘電路

**步驟四：**在實際量子電腦上執行 RB 序列並且輸出 seed 模擬的結果， $C_{ij}$  被假設有一些誤差

$\Lambda_{ij,j}$ ，每個序列可以表示為：

$$S_{im} = \bigcirc_{j=1}^{m+1} (\Lambda_{ij,j} \circ C_{ij})$$

**步驟五** 獲取生存概率，每個  $K_m$  生存概率表示為  $Tr[E\psi Sim(\rho\psi)]$ ，其中  $\rho\psi$  是初始狀態準備工作發生的錯誤，而  $E_{\psi}$  是測量工作發生的誤差。

**步驟六** 找到平均保真度

$$F_{seq}(m, |\psi\rangle) = Tr[E_{\psi} S_{K_m}(\rho\psi)]$$

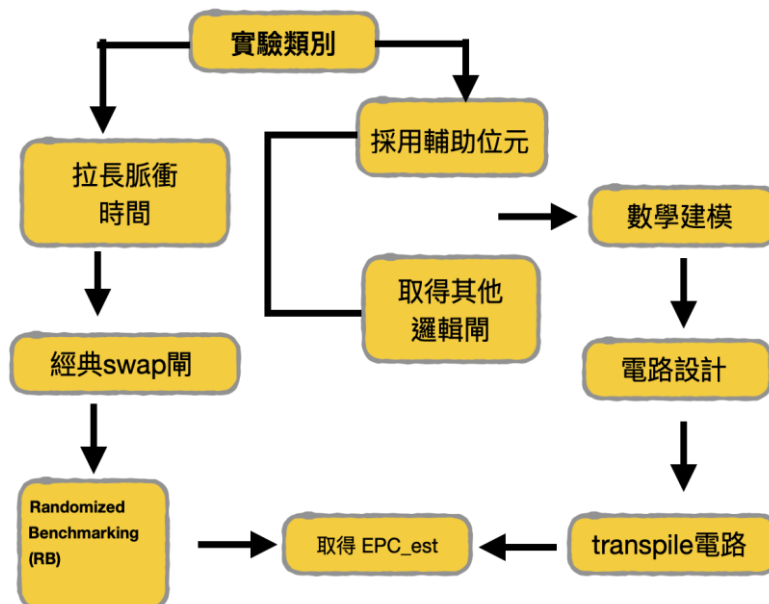
**步驟七** 將所有模擬種子擬合並繪製成結果(EPC)，並且計算每個 RB 序列的平均序列保真度，將結果擬合到指數曲線  $A \times \alpha^m + B$ ，合併計算參數  $\alpha$  和 EPC。

而 result\_list 所得到的結果應適合指數衰減函數其中  $m$  是 Clifford 的長度而可以從參數  $\alpha$  計算每個 Clifford 的錯誤 (EPC)。

$$EPC = \frac{2^n - 1}{2^n} (1 - \alpha)$$

## 伍、研究結果

### 一、實驗流程



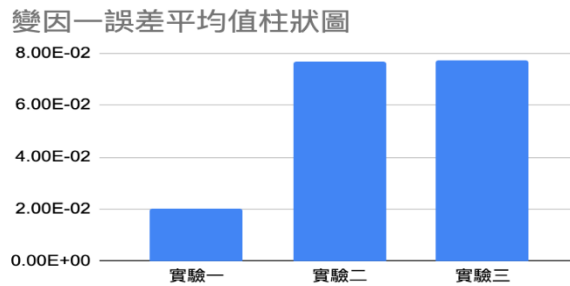
圖(二十五)測量誤差實驗設計流程圖

### 二、數據分析

(一) 變因一: 使用具有輔助位元的量子 SWAP 閘脈衝

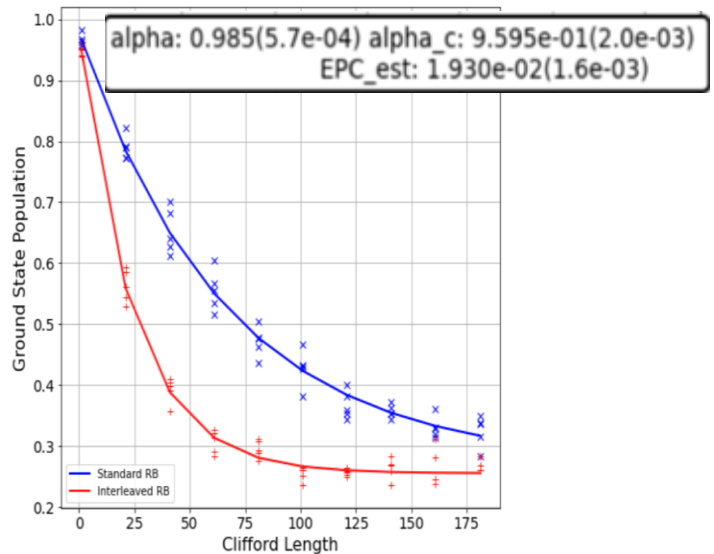
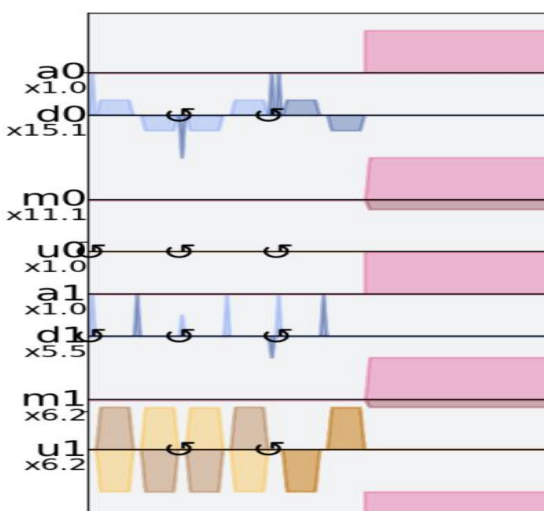
(表十一) 利用輔助位元進行實驗，控制變因如下:

變因	用位元 0, 1 實現 SWAP 閘	將 1, 2 位元設計一個新的 CNOTrol 閘	把訊號傳至 2 號後把訊號傳回
電路分解的圖形	<p>(圖二十六)</p>	<p>(圖二十七)</p>	<p>(圖二十八)</p>
平均誤差值	2.003%	7.68%	7.72%



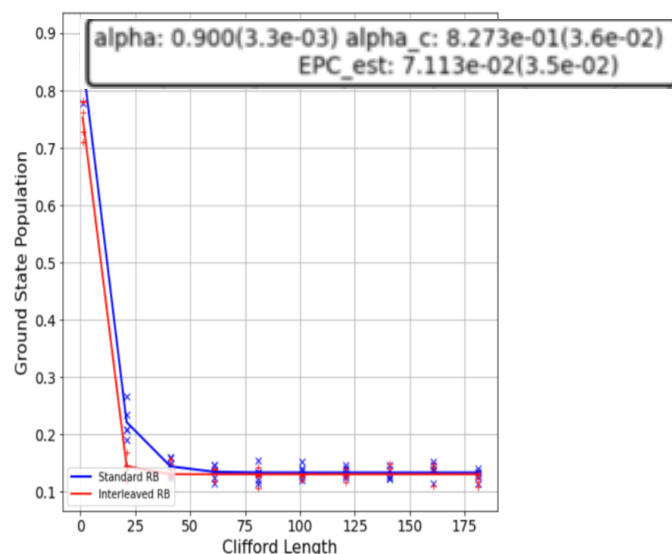
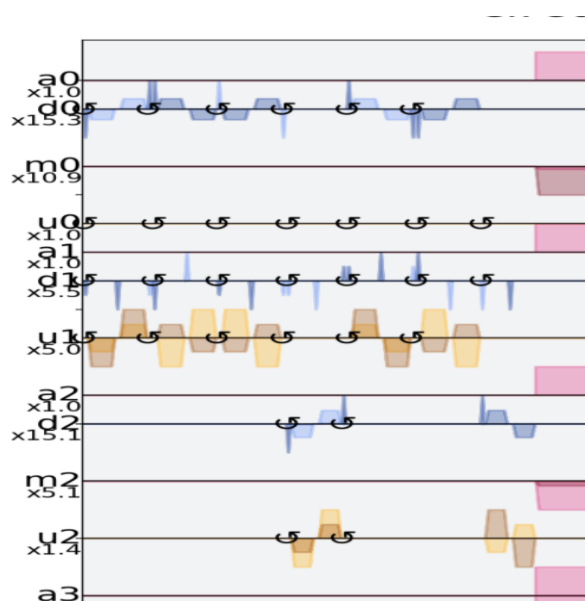
(圖二十九) 從上圖中變因一的三個實驗中與經典量子 SWAP 閘(實驗一)的比較來看，實驗二和實驗三的平均誤差與經典量子 SWAP 閘(實驗一)的平均誤差還大，可見變因一中的實驗二和實驗三都沒有成功的降低誤差值。

1. 實驗一



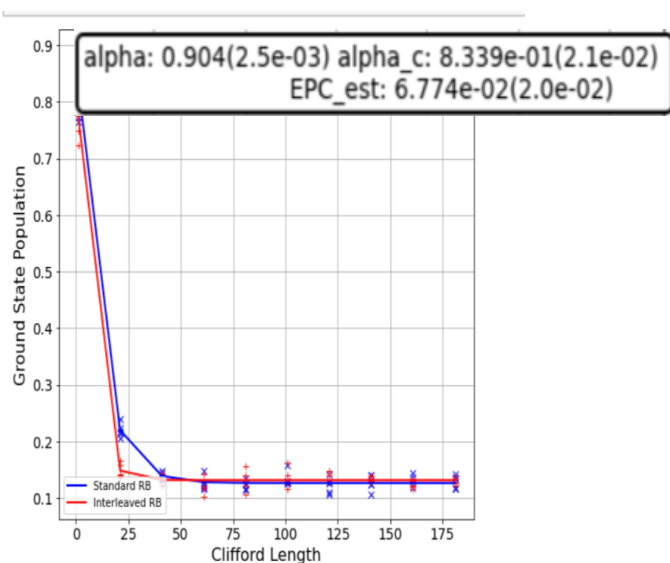
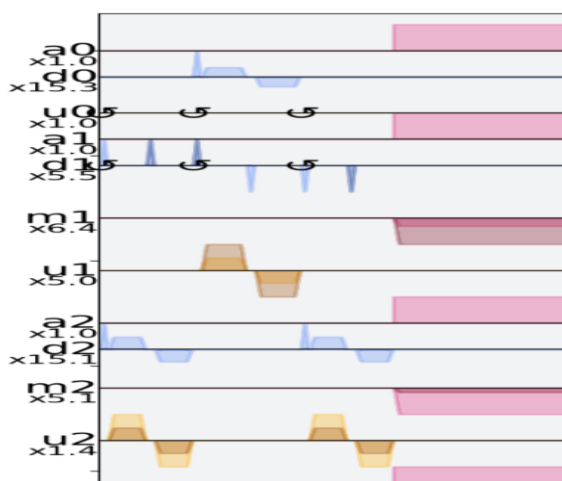
(圖三十) 經典量子 SWAP 閘隨機基準測量實驗結果，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此經典量子 SWAP 閘的誤差為 2.003%。

## 2. 實驗二



(圖三十一) 隨機基準測量實驗結果(左圖)，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構雖能實現 SWAP 閘，因誤差為 7.113% 大於實驗一的誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構不適合成為新的 SWAP 閘。

## 3. 實驗三

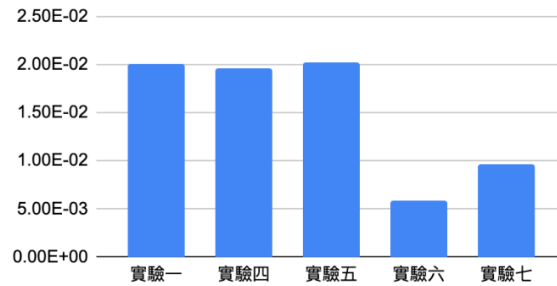


(圖三十二) 隨機基準測量實驗結果(左圖)，可從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出新設計之量子脈衝結構雖能實現 SWAP 閘，但誤差為 6.774%(右圖) 大於實驗一的平均誤差值 2.003% 因此這種脈衝結構不適合成為新的 SWAP 閘。

(二) 變因二:以 GXOR 閘，CZ 閘為主體，利用量子的等效性建立不同的 SWAP 閘脈衝 (表十二)使用不同的脈衝操作途徑進行實驗，控制變因如下：

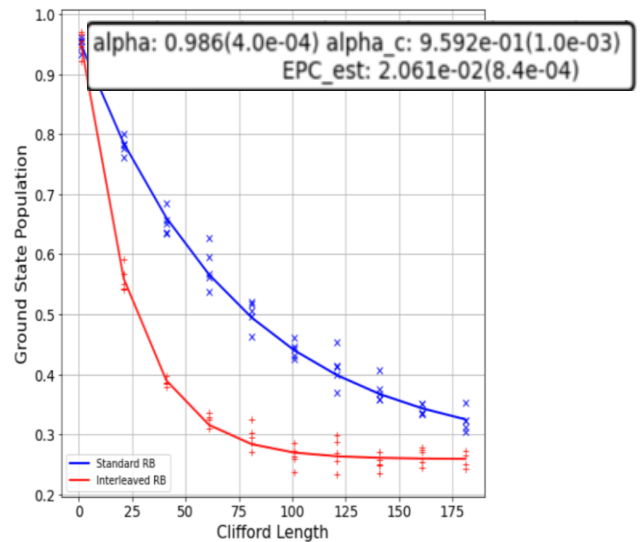
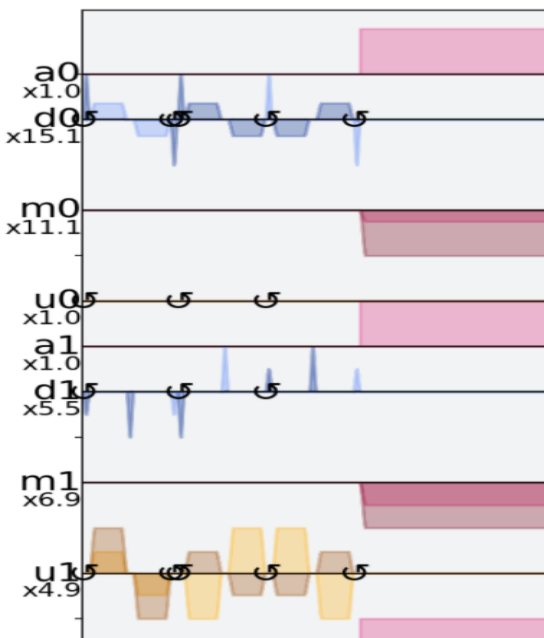
變因	CZ 加兩個 GXOR 閘做 SWAP 閘	三個 GXOR 閘做 SWAP 閘
平均誤差值	2.03%	2.01%
變因	CZ 閘加 Y 閘做 SWAP 閘(一)	CZ 閘加 Y 閘做 SWAP 閘(二)
平均誤差值	0.593%	0.958%

變因二誤差平均值柱狀圖



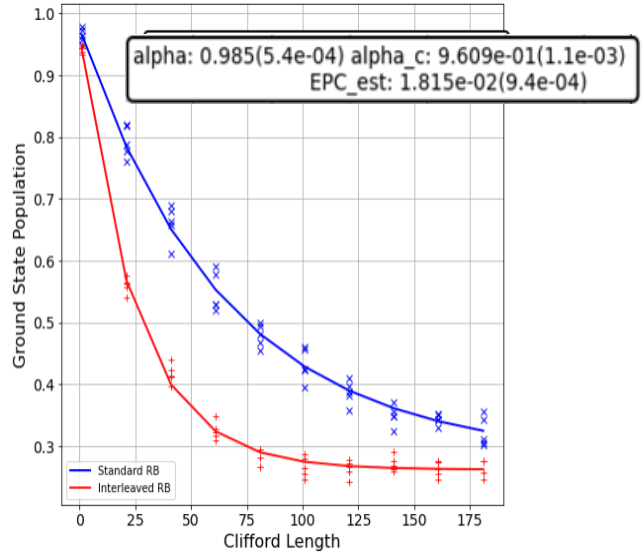
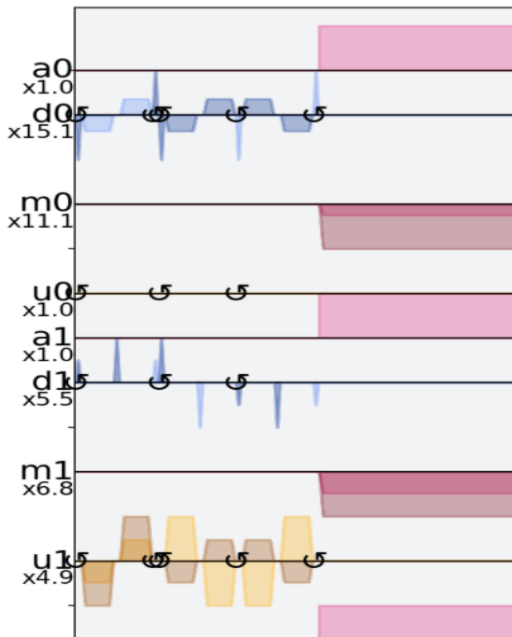
(圖三十三) 從上圖中變因二的四個實驗與經典量子 SWAP 閘(實驗一)的比較來看，實驗六的平均誤差比其他變因二的三個實驗的平均誤差來的小是變因二的實驗中最成功的一個，而實驗四、六、七的實驗與實驗一做比較都成功地降低誤差值。

### 1. 實驗四



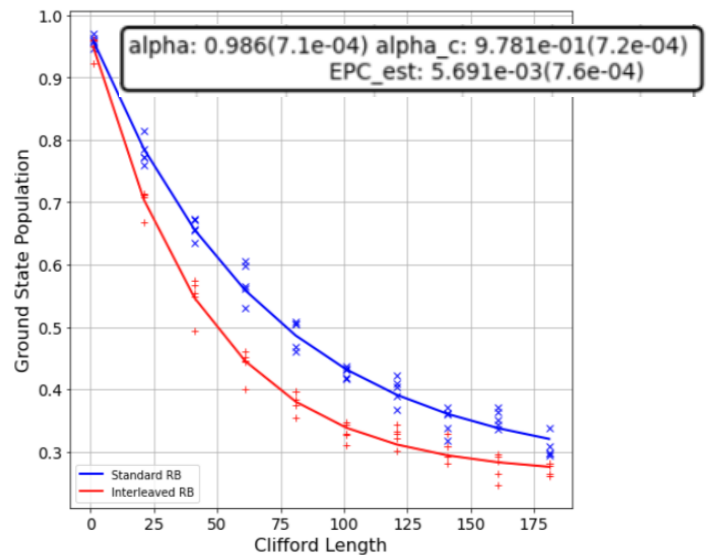
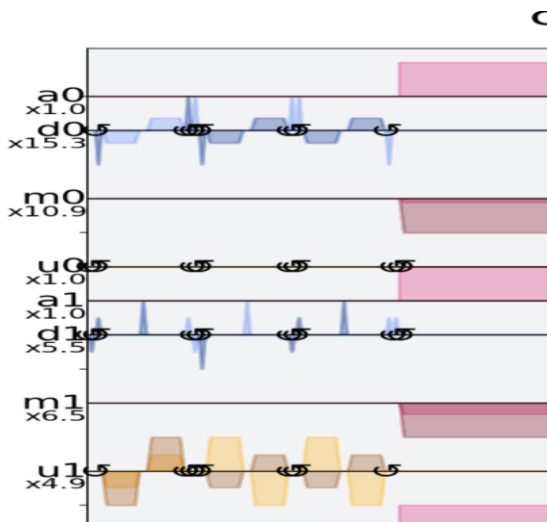
(圖三十四) 隨機基準測量實驗結果(左圖)，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構雖能實現 SWAP 閘，但因誤差為 2.061%(右圖)大於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構不適合成為新的 SWAP 閘。

## 2. 實驗五



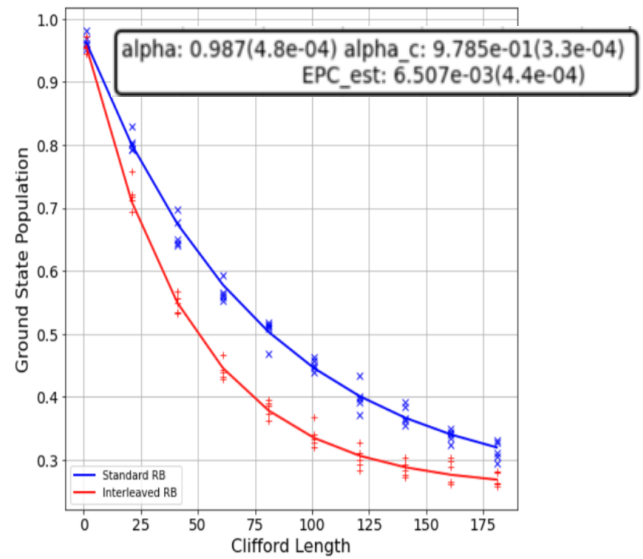
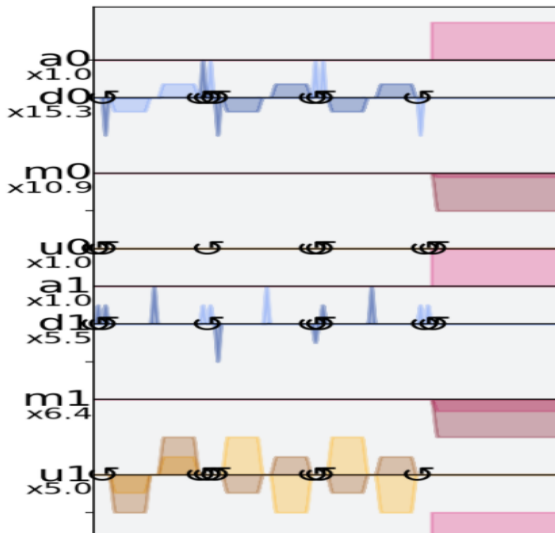
(圖三十五) 隨機基準測量實驗結果 (左圖)，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構不但實現 SWAP 閘，還因誤差只有 1.815% (右圖) 小於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

## 3. 實驗六



(圖三十六) 隨機基準測量實驗結果 (左圖)，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構不但能實現 SWAP 閘，還因為誤差只有 0.5691% (右圖) 遠小於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

## 4. 實驗七



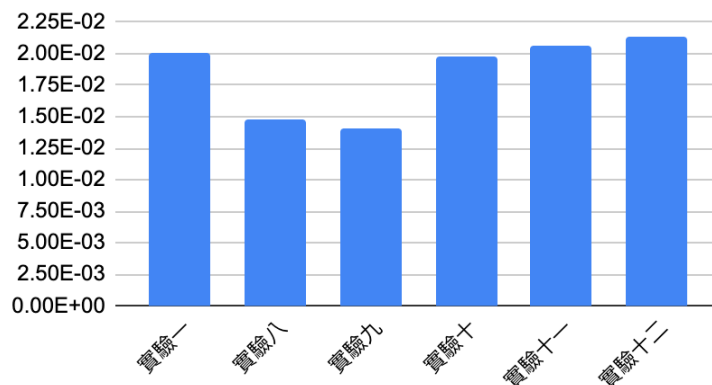
(圖三十七) 隨機基準測量實驗結果 (左圖)，可以從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構不但能高效的實現 SWAP 閘，還因誤差只有 0.657% (右圖) 遠小於實驗一的平均誤差值 2.003% 因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

(三) 變因三:以 CY 閘，QFT 閘以及特殊型的 CZ 閘，利用量子的等效性建立不同的 量子電路

(表十三) SWAP 閘脈衝改變進行實驗，控制變因如下：

實驗	CY 閘加 Z 閘做 SWAP 閘(一)	CY 閘加 Z 閘做 SWAP 閘(二)
平均誤差值	1.48%	1.40%
實驗	三個 CY 閘做 SWAP 閘	QFT
平均誤差值	1.98%	2.06%

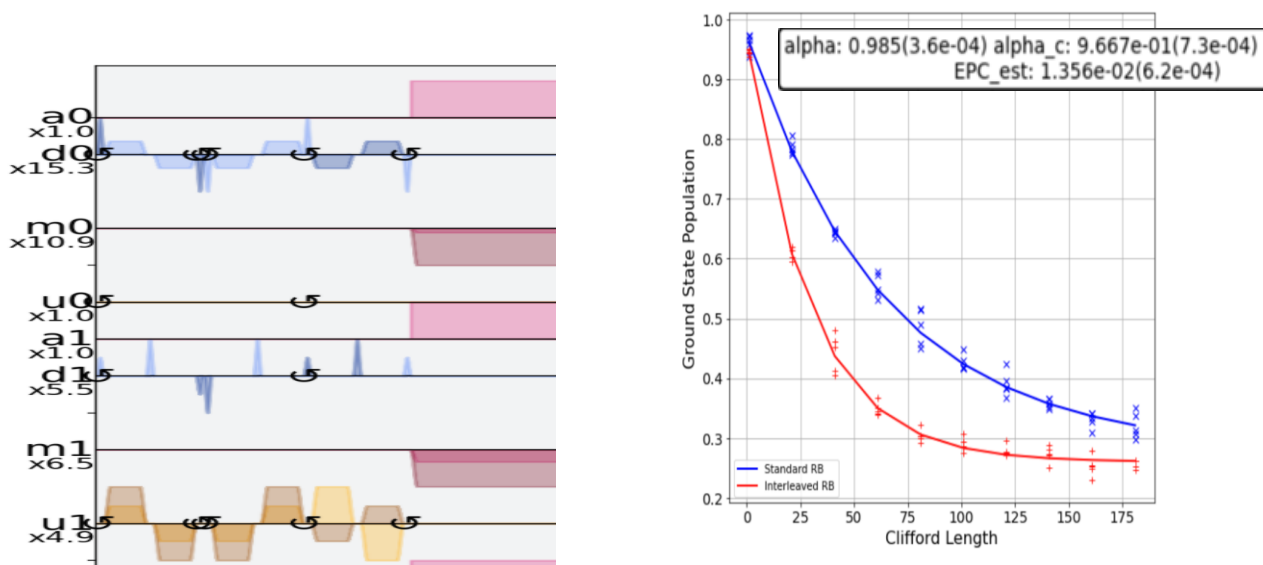
變因三誤差平均值柱狀圖





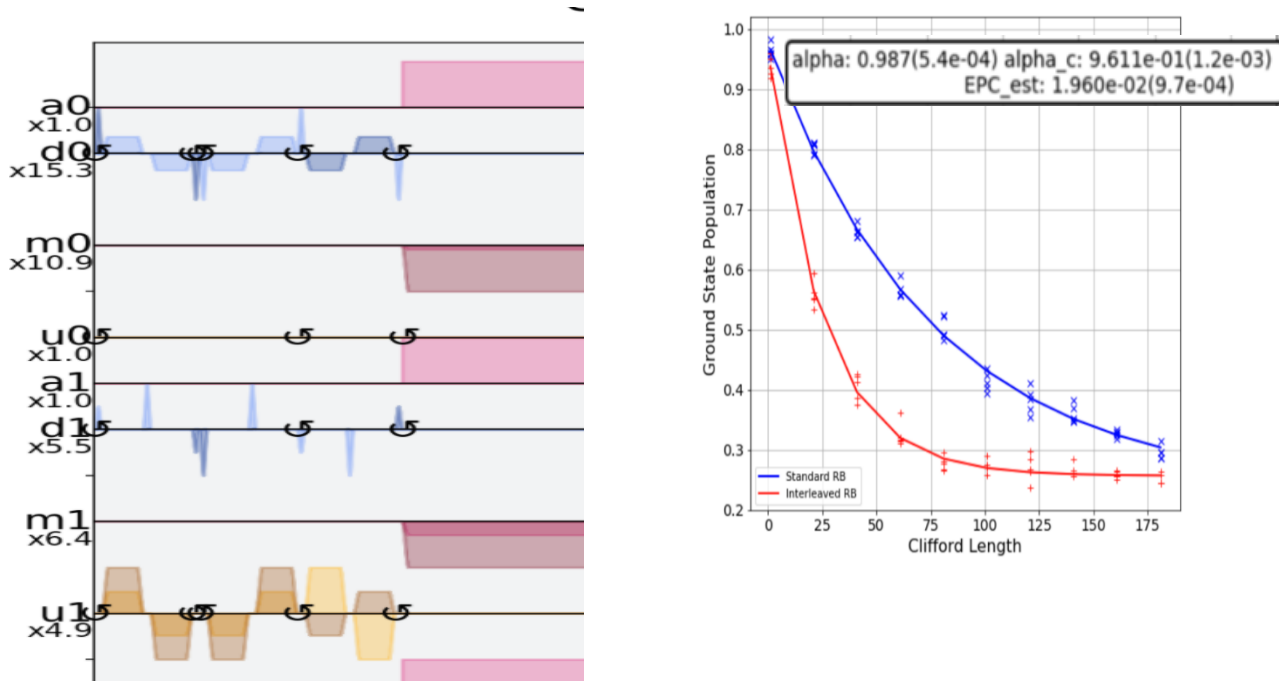
(圖三十八) 從上圖中變因三的五個實驗與實驗一的比較來看，除了實驗十一和實驗十二的平均誤差值比實驗一)來的大以外，其他三個實驗與實驗一的誤差值比較都成功地降低了誤差值。

## 1. 實驗八



(圖三十九) 隨機基準測量實驗結果 (左圖)，可從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構不但能實現 SWAP 閘，因誤差只有 1.356% (右圖) 小於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

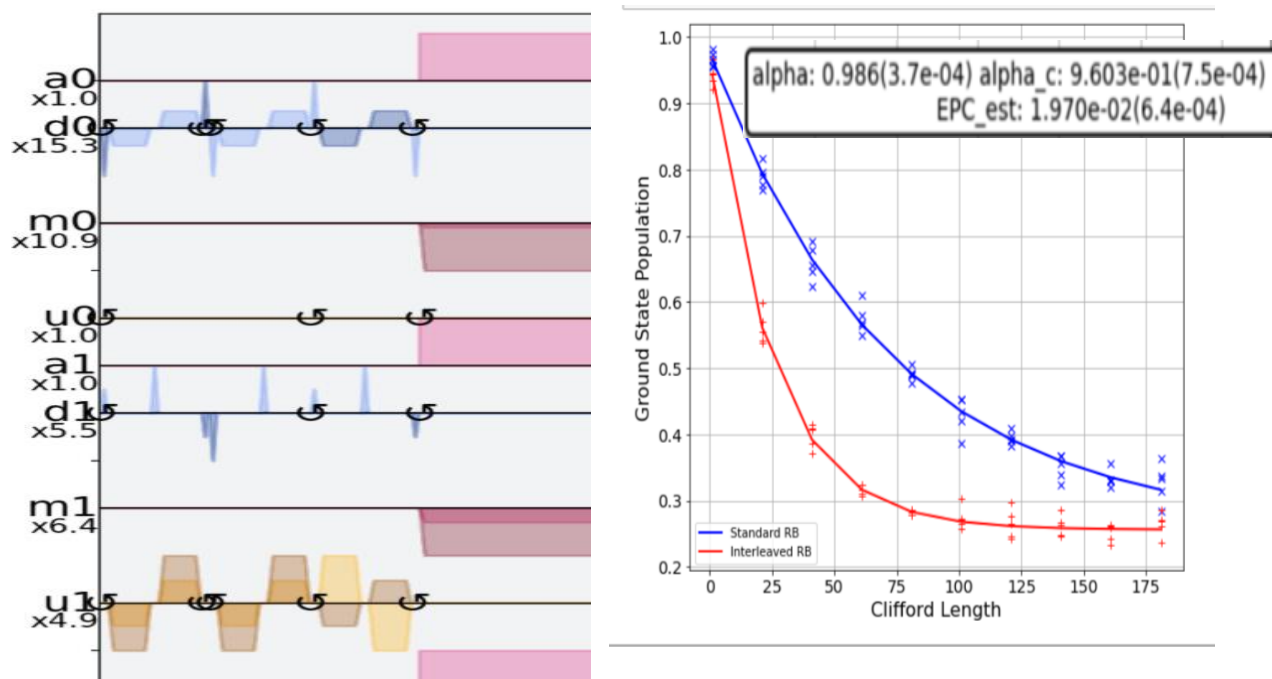
## 2. 實驗九



(圖四十) 隨機基準測量實驗結果 (左圖)，可從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構不但實現 SWAP 閘，因為誤差只有 1.960% (右圖) 小於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

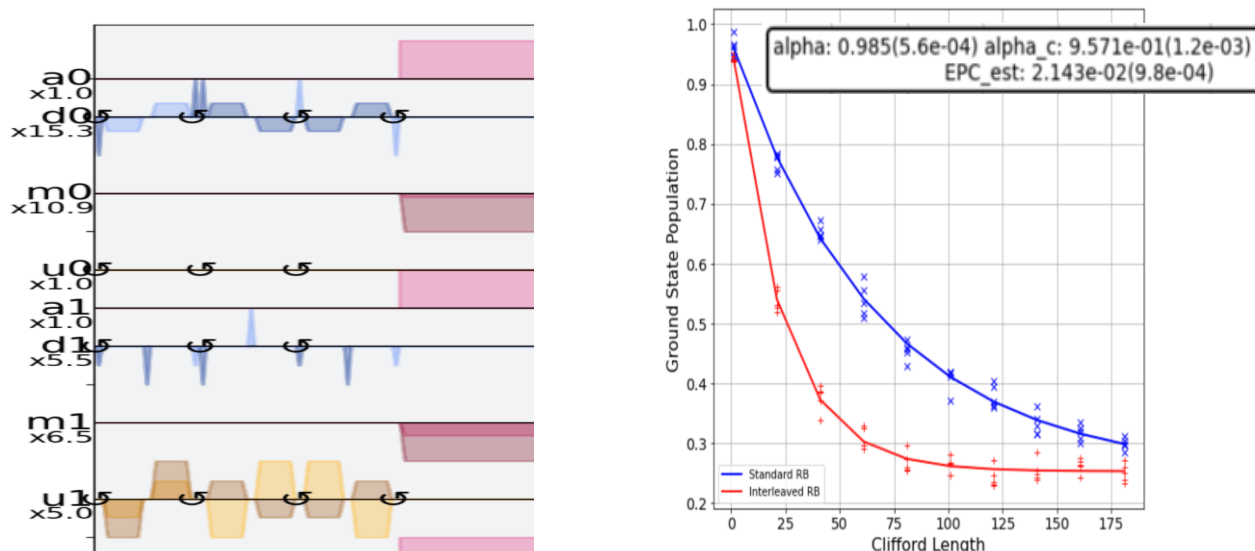


### 3. 實驗十



(圖四十一) 隨機基準測量實驗結果(左圖)，可從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構能實現 SWAP 閘，因誤差只有 1.970% (右圖) 小於實驗一的平均誤差值 2.003%，因此這種脈衝結構很適合成為新的 SWAP 閘。

### 4. 實驗十一

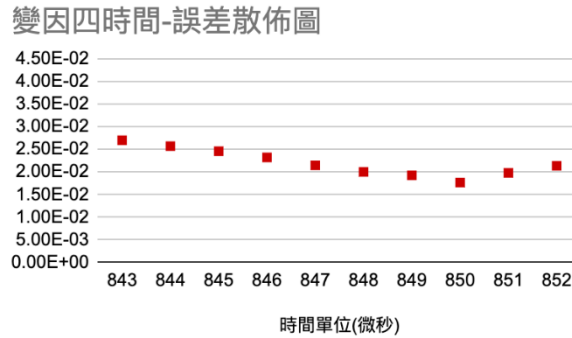


(圖四十二) 隨機基準測量實驗結果(左圖)，可從 EPC\_est(error per clifford) 數值中看出此新設計之量子脈衝結構雖能實現 SWAP 閘，但因誤差為 2.143%(右圖)大於實驗一的平均誤差值 2.003% 因此這種脈衝結構不適合成為新的 SWAP 閘。

### (四) 實驗十二: 調整交叉共振作用降低 SWAP 閘脈衝誤差

(表十四)改變脈衝持續時間進行實驗，控制變因如下：

時間 (微秒)	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852
平均 誤差 值	2.70%	2.57%	2.46%	2.32%	2.14%	2.00%	1.92%	1.77%	1.98%	2.13%



(圖四十三) 從上圖中變因四(實驗十三)的誤差散佈圖可以發現，原始 IBM 系統的 848 微秒並非具有最小的誤差值，反而是出現在 850 微秒，因此可從中了解到 IBM 系統給出的誤差值不一定是正確的。

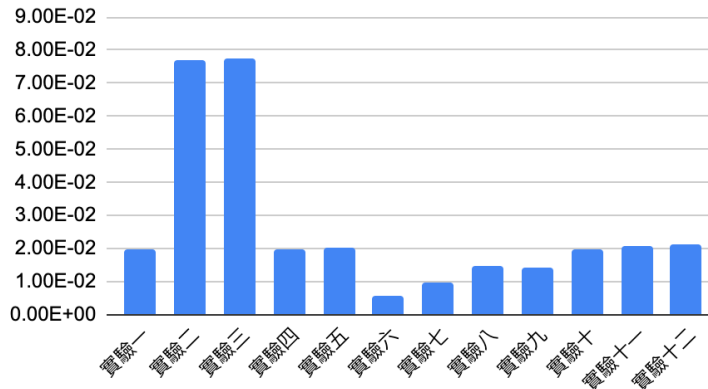
## 陸、討論

### 一、 誤差分析

本實驗使是用實際量子電腦，其誤差數值使用 `ibmq_casablanca` (7 qubit) 目前的誤差狀態來做計算，量子電腦會因為不同時間硬體狀態不同，數值亦不同，實驗當天誤差值雖為 2.003%，但實際測量多次後會有些許的狀態誤差。因此我們期望目標時間控制在 30 分鐘內做完，以達到能降低因時間而改變的誤差值。另外，本實驗只有使用 `ibmq_casablanca`，在變因一的輔助位元中，有可能因為使用不同電腦而有不同的效果，每台量子電腦有不同的超導位元電路連結，以 `ibmq_casablanca` 為例，當二號位元需要與三號位元產生糾纏，需先以一號為媒介，交換資訊後才能執行，此過程將加大誤差，因此當使用不同的電腦，對應到不同的超導位元電路連結時，變因一的結果有可能會產生改變。

### 二、 綜合探討

實驗平均誤差柱狀圖



(圖四十四) 上圖為各個實驗平均誤差柱狀圖，可以很明顯看出實驗二和實驗三遠大於經典量子 SWAP 閘(實驗一)所以從這兩個實驗可以得知把 SWAP 閘擴充到三個位元是不可行的，實驗五、十一、十二稍微大於經典量子 SWAP 閘(實驗一)的誤差，但在理論上也是失敗的，而實驗四、六、七、八、九、十誤差值都是比經典量子 SWAP 閘(實驗一)的誤差小，有效地降低誤差，所以這六個實驗是可行的。

綜觀整體的實驗，不管有沒有考慮到相位翻轉誤差的話，實驗七都是實驗裡最成功的一個，誤差降低了 67.2%比我們實驗預期的 50%還要多，但是有相位翻轉誤差的實驗六也降低 71.6%與實驗七的比率 67.2%相差僅 4.4%，推測可能是當時實際量子電腦環境與我們將  $\delta$  送進實際量子電腦的時間差有關，故而造成 4.4%的微差距。

其中效能最佳的實驗七降了 67.2%，推測是因為利用了 Z 的 Control gate 因為位元之間的誤差大部分來自於兩兩之間溝通的通道，它只使用了 CZ 閘的建構就可以達到 SWAP 閘的效果，因為沒有使用到 CX 閘，所以花費的電路成本較少，故誤差降低的比例最為明顯，達到我們降低誤差的實驗目的。

### 三、 變因一探討

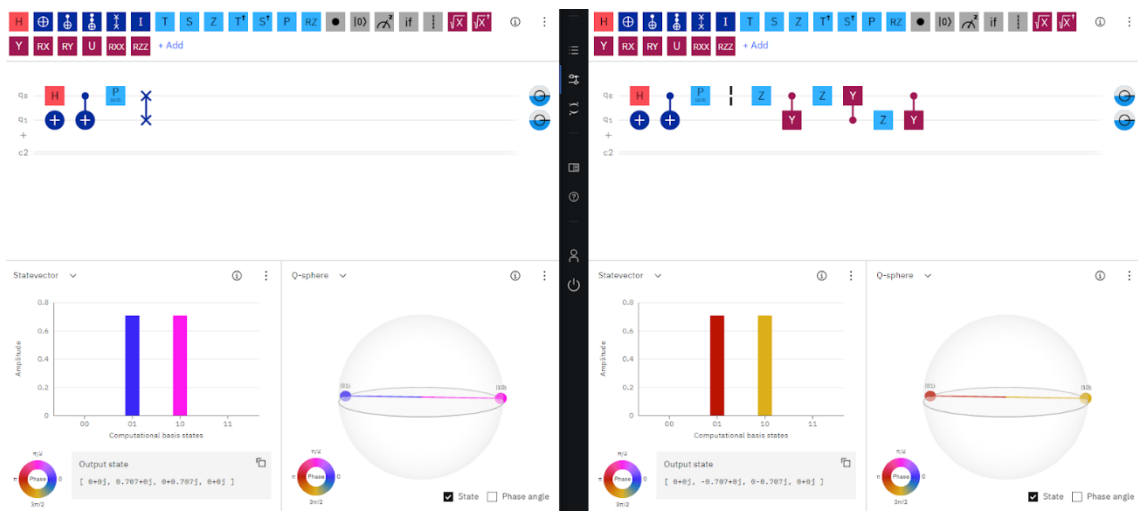
與其他變因誤差明顯較大，其原因在於量子電腦並不會依照我們的要求發送訊號，而是把量子電路分解成實際上量子電腦能實現的結構，其原因在於量子位元的位置及連接方式是被限制的[圖三]，可以發現到 0 號位元和 2 號位元之間並沒有通道連接，也就是說當我們要進行 0 控制 2 的操作時，必須先經過 1 後在讓 1 去控制 2，確保能再實際量子電路上達到相同效果。

在其他變因中，電路分解圖形都是以三個 CX 閘為基礎，再加上其他可以減少誤差的波(產生破壞性干涉)，然而變因一中的電路分解圖形中由多個 CX 閘組成，這造成了其誤差加大，無法達到減少誤差的目的。

#### 四、變因二與變因三探討

變因二以 GXOR 閘、CZ 閘為主體，故會產生較多的相位翻轉，造成結果有相位差，不適用於疊加態中的量子位元。由於 Z 閘、CZ 閘的電路成本較小所以誤差值較小。在此變因的所有實驗中，實驗六擁有最好的誤差改善但產生了相位誤差，而實驗七擁有正確的相位且有較好的誤差改善，是一個可行性高的電路。

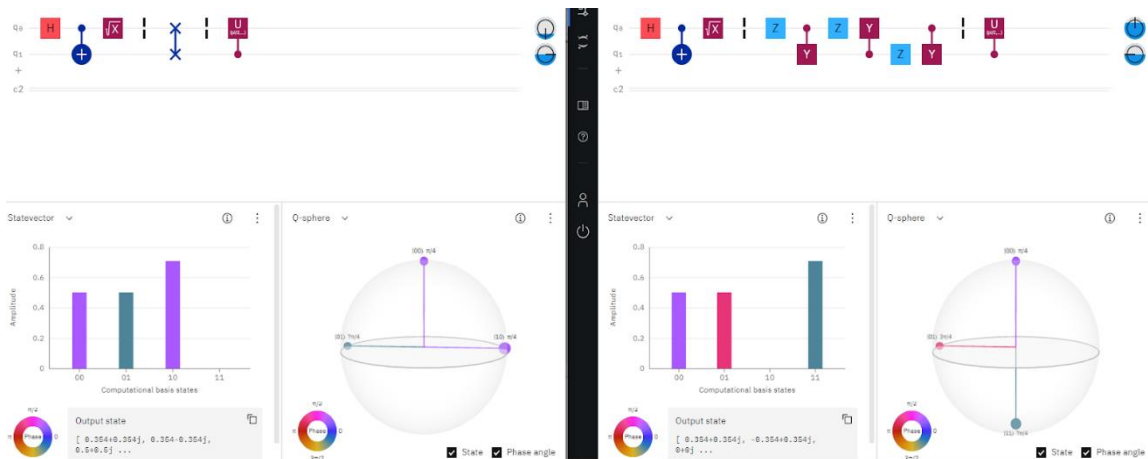
變因三以 CY 閘、QFT 閘以及特殊型的 CZ 閘建構並利用量子的等效性建立不同的量子電路，在此變因的所有實驗中，實驗七擁有正確的相位並且有極佳的誤差改善，其原因在於使用閘數非常少，且沒有使用 CX 閘，故電路成本最小。實驗十一使用三個 QFT 組合閘，為經典量子 SWAP 閘的分解電路(理論一)，故與經典量子 SWAP 閘沒有明顯差距。



(圖四十五)左方為經典量子 SWAP 閘，右方為變因設計，可以發現兩者相位差了 90 度。

#### 五、相位翻轉對於系統的影響

設計量子電路使用 IBM Quantum Experiences，可以發現特定實驗並不能完整實現真正的 SWAP 閘。由於相位翻轉有可能因特例而不變，若測試多個相位就可發現不符合實際，我們發現如果使用非完整 SWAP 閘並在後面加上相位翻轉閘，效果與經典量子 SWAP 閘不同。



(圖四十六) 左方為經典量子 SWAP 閘，右方為變因設計，兩者的相位相差了 180 度，可以發現到雖然同樣具有 SWAP 閘的翻轉功能，但當進行 Control Phase 的操作時，輸出的結果不會是想要的結果，因此可以得知相位翻轉後未校正的電路，不能再進行有關相位操作的實驗，反之則不會有經典量子 SWAP 的結果。

(表十五) 與經典量子 SWAP 閘不同的電路與其像相位差距及誤差。

粉紅色:相位翻轉 180 度 黃色:相位翻轉 270 度 綠色:最佳電路結構

	相位差(0 號)(rad)	相位差(1 號)(rad)	與實驗一誤差比較	誤差降低比率
實驗一	0	0	0	100%
實驗二	0	0	+5.110	-255.1%
實驗三	0	0	+4.771	-238.2%
實驗四	0	$\pi$	+0.058	-2.9%
實驗五	0	0	-0.188	9.4%
實驗六	$\pi$	0	-1.434	71.6%
實驗七	0	0	-1.346	67.2%
實驗八	$3\pi/2$	$\pi$	-0.658	32.3%
實驗九	$\pi$	$\pi$	-0.043	2.1%
實驗十	0	0	-0.033	1.6%
實驗十一	0	0	+0.140	-7.0%

## 六、 未來展望

- (一) 有了實驗七的電路結構，可以更準確的操作量子演算法。
- (二) 希望可以解決相位翻轉問題，提高新型 SWAP 閘的使用範圍。
- (三) 希望能夠建構方波取代高斯波型進行 SWAP 設計，藉此比較不同波型對於誤差值的比較。
- (四) 利用最佳控制理論尋找脈衝的最佳控制解，重新建構交叉共振實驗。
- (五) 因為能量會因為時間而不斷的衰減，希望能夠在測量之前計算出散失的能量，再次利用脈衝打入相符振幅的脈衝，藉此補足缺失的能量降低計算誤差。

## 柒、結論

- 一、就實驗結果而言，此研究成功的幫助幫助現有的量子 SWAP 閘 GATE 降低誤差 67.2%，是一個非常良好的結果。
- 二、此研究成功的利用實驗六與實驗七的電路結構降低了現今量子學界在軟體開發上的有太多雜訊干擾的困擾，建立的新 SWAP 閘能夠在未來取代現有的量子 SWAP 閘，使得演算法的準確度更高。
- 三、調整脈衝持續時間也能有效降低誤差，因此 IBM 的脈衝持續時間精準度可以更好。
- 四、除了實驗四外，還有五種脈衝結構也能有效降低誤差，也是具有潛力的脈衝設計，但是實驗四、六、八、九有相位誤差需在使用後校準相位。實驗六雖然造成相位翻轉，但投影在 Z 軸後結果不變，因此可使用性還是很高。
- 五、提供了客製化的 SWAP 閘的選擇，在需要極低誤差的時候只需要校準相位即可以使用我們所設計出來的電路結構。

## 捌、參考資料與其他

- [1] Easwar Magesan and Jay M. Gambetta(2018)，Effective hamiltonian models of the cross-resonance gate.
- [2] Jean Dieudonné，*Foundations of Modern Analysis*，Academic Press(1960)，希爾伯特空間，
- [3] Franco Nori (2014)，Various Constructions of Qubit SWAP Gate
- [4] Juan Carlos Garcia-Escartin (2014)，A SWAP gate for Qubits
- [5] Thomas Alexander(2020)，Qiskit Pulse: Programming Quantum Computers Through the Cloud with Pulses
- [6] M. Guha Majumdar(2018)，Harnessing the Exchange Interaction for Quantum Information Processing
- [7] S.Balakrishnan(2014)，Equivalence of Qubit Gate Operations
- [8] Colin M Wilmott(2019)，Towards an optimal generalized SWAP gate
- [9] Sarah Sheldon(2016).Procedure for systematically tuning up crosstalk in the cross resonance gate
- [10] Neereja Sundaresan(2020)，Reducing unitary and spectator errors in cross resonance with optimized rotary echoes
- [11] IBM textbook . H. Abraham (2018)，Unit 6 -Investigating Quantum Hardware Using Microwave Pulses.

<https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/calibrating-Qubits-pulse.html>

[12] IBM textbook , Qiskit Terra API Reference , Qiskit.pulse.channels

<https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.pulse.channels.html>

[13] IBM textbook , Randomized Benchmarking .

<https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/randomized-benchmarking.html#CNOTents>

[14] IBM textbook , M. Nielsen (2020).Quantum Fourier Transform .

<https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/quantum-fourier-transform.html>

## 【評語】 051816

微波脈衝應用在量子閘，以模擬量子電腦的運作，有值得探討空間。作品以 IBM 提供的模擬量子電腦運作的軟體，輸入該軟體所允許的參數運算範圍，而能尋找降低誤差的較佳參數。作品聚焦在所允許的參數範圍運算，較少運算流程的創意設計。建議可就各運算參數的配合，與相互調控，建立新穎運算流程，對參數做細微調控的運算，以顯現新穎物理現象。



## 作品簡報

# 量力而微

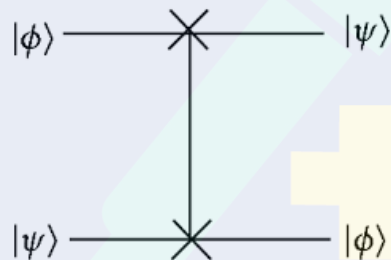
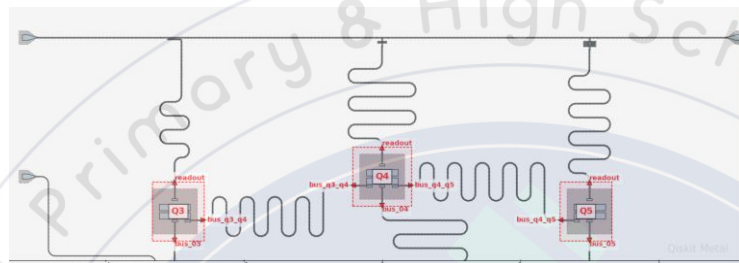
## 微波脈衝分析降低量子閘誤差

組別：高級中等學校組

科別：物理與天文學科

# 動機

# 研究設備



## Version Information

Qiskit Software	Version
Qiskit	0.23.1
Terra	0.16.1
Aer	0.7.1
Ignis	0.5.1
Aqua	0.7.3
IBM Q Provider	0.7.2
System information	
Python	3.7.6 (default, Jan 8 2020, 20:23:39) [MSC v.1916 64 bit (AMD64)]
OS	Windows
CPUs	4
Memory (Gb)	7.818538665771484
Fri Dec 11 14:58:37 2020 φDxφD_?DjPCRE?!	

# 目的

- 一、建立能優化經典 SWAP 閘的脈衝結構
- 二、建立多種能替代 IBMQ SWAP閘的脈衝結構
- 三、探討不同超導量子電路脈衝交換位元狀態後的相位影響
- 四、探討不同超導量子電路脈衝交換位元狀態後誤差影響



7  
Qubits

32  
Quantum Volume

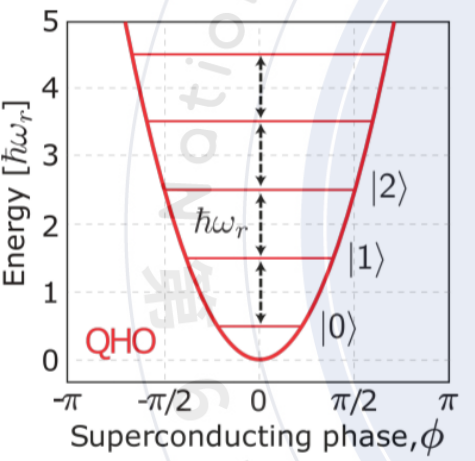
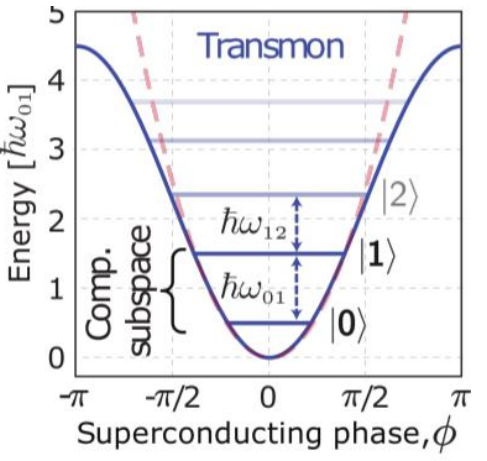
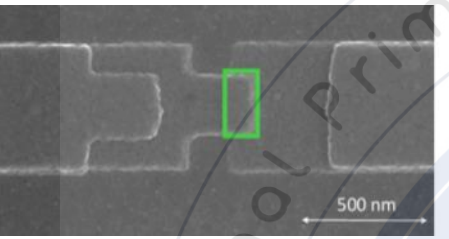
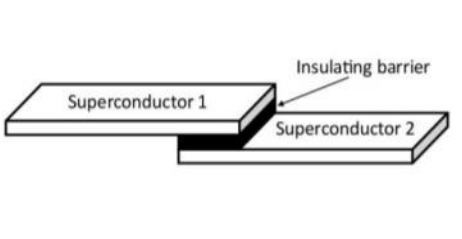
## IBMQ QISKIT軟體版本

Status:	● Paused - In use	Avg. CNOT Error:	8.563e-3
Total pending jobs:	322 jobs	Avg. Readout Error:	1.817e-2
Processor type ①:	Falcon	Avg. T1:	86.85 us
Version:	1.1.8	Avg. T2:	109.95 us
Basis gates:	CX, ID, RZ, SX, X	Providers with access:	1 Providers ↓
Your usage:	1 job (1 pending)		

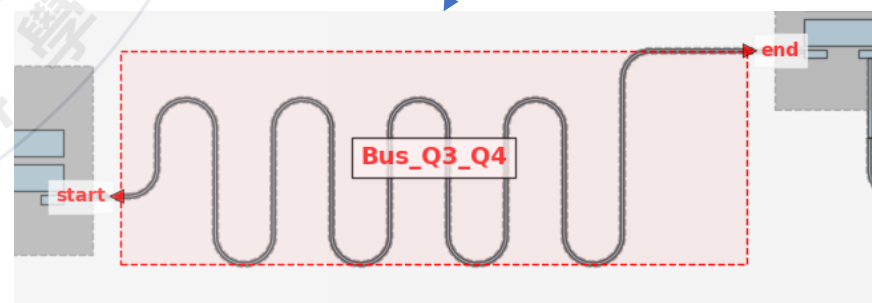
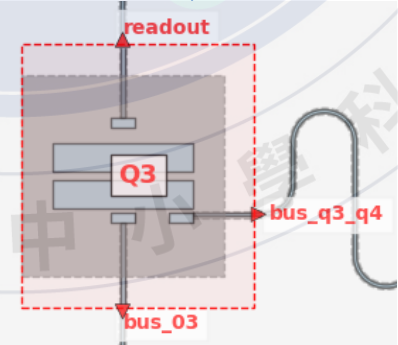
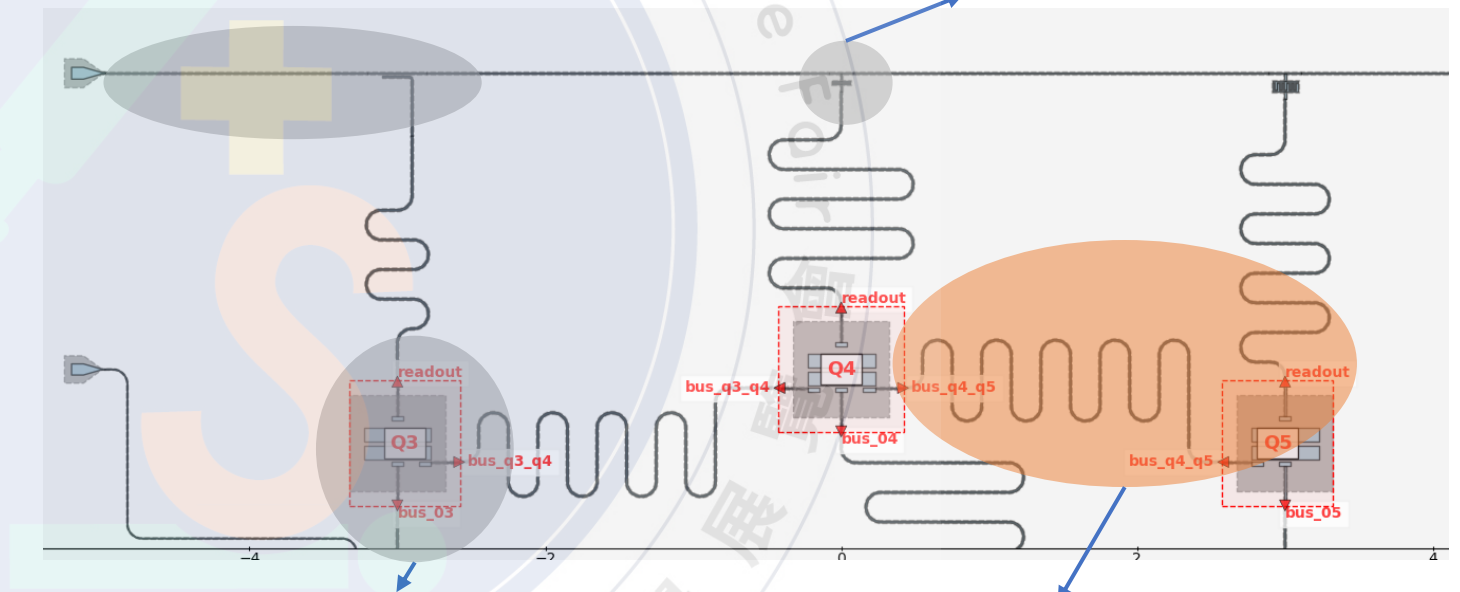
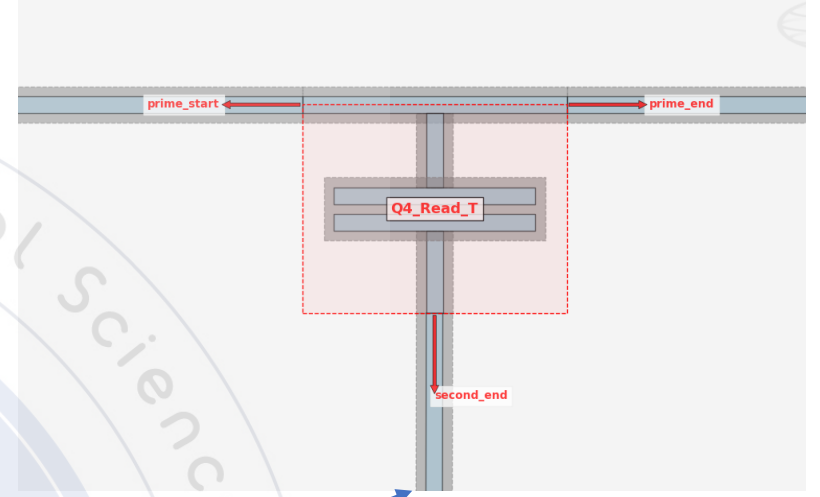
IBMQ 量子電腦-ibmq\_casablanca

# 壹、研究方法-怎麼交換訊號？

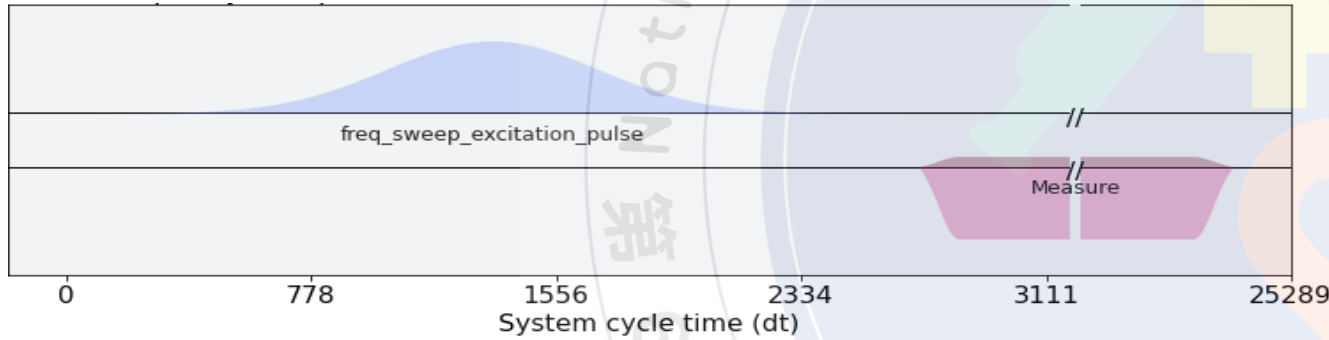
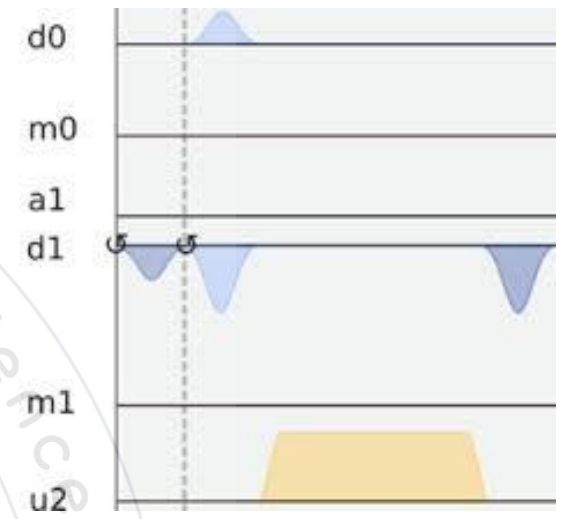
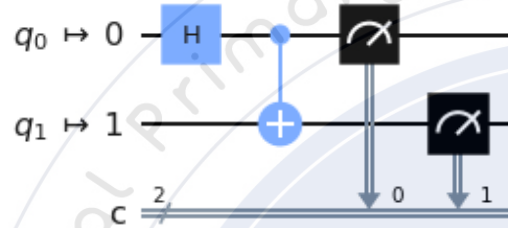
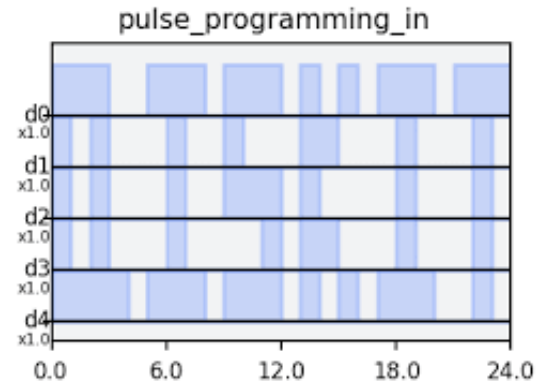
## Josephson Junction



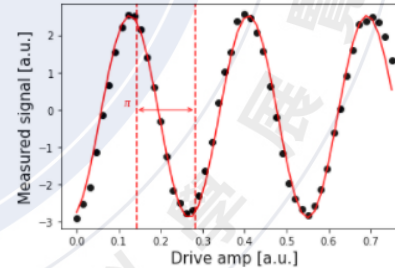
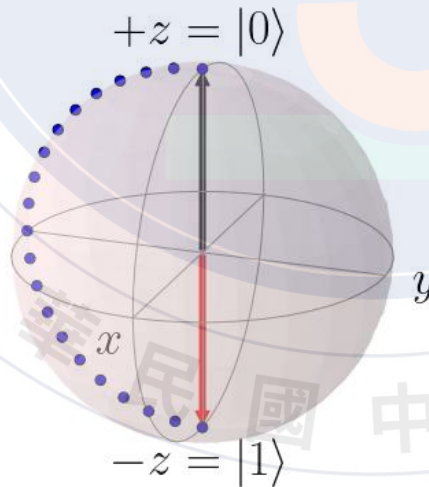
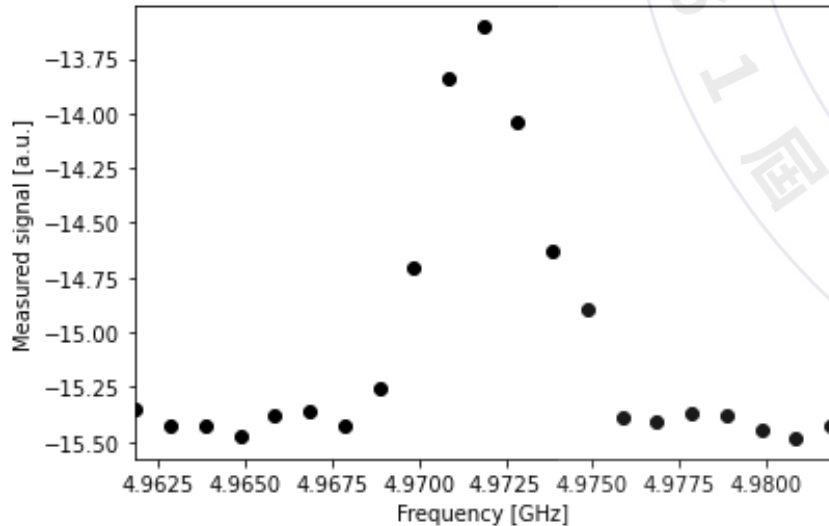
$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{j=0}^1 \left[ \omega_j b_j^\dagger b_j + \frac{\delta_j}{2} b_j^\dagger b_j (b_j^\dagger b_j - 1) \right] + J(b_0^\dagger b_1 \\
 &+ b_0 b_1^\dagger) + \Omega \cos(\omega_d t + \phi_C)(b_0^\dagger + b_0)
 \end{aligned}$$



# 壹、研究方法-Rabi實驗



```
In [117]: M
1 fit_params, y_fit = fit_function(drive_amps,
2     rabi_values,
3     lambda x, A, B, drive_period, phi: (A*np.cos(2*np.pi*x/drive_period - phi) + B),
4     [4, -4, 0.4, 2*np.pi])
5
6 plt.scatter(drive_amps, rabi_values, color='black')
7 plt.plot(drive_amps, y_fit, color='red')
8
9 drive_period = fit_params[2] # get period of rabi oscillation
10
11 plt.axvline(drive_period/2, color='red', linestyle='--')
12 plt.axvline(drive_period, color='red', linestyle='--')
13 plt.annotate("", xy=(drive_period, 0), xytext=(drive_period/2,0), arrowprops=dict(arrowstyle="<->", color='red'))
14 plt.annotate("$\pi$S", xy=(drive_period/2-0.03, 0.1), color='red')
15
16 plt.xlabel("Drive amp [a.u.]", fontsize=15)
17 plt.ylabel("Measured signal [a.u.]", fontsize=15)
18 plt.show()
```



```
In [120]: M
1 pi_amp_01 = abs(drive_period / 2)
2 print(f"Pi Amplitude = {pi_amp_01}")
Pi Amplitude = 0.1412759586993819
```

Pi Amplitude = 0.1412759586993819

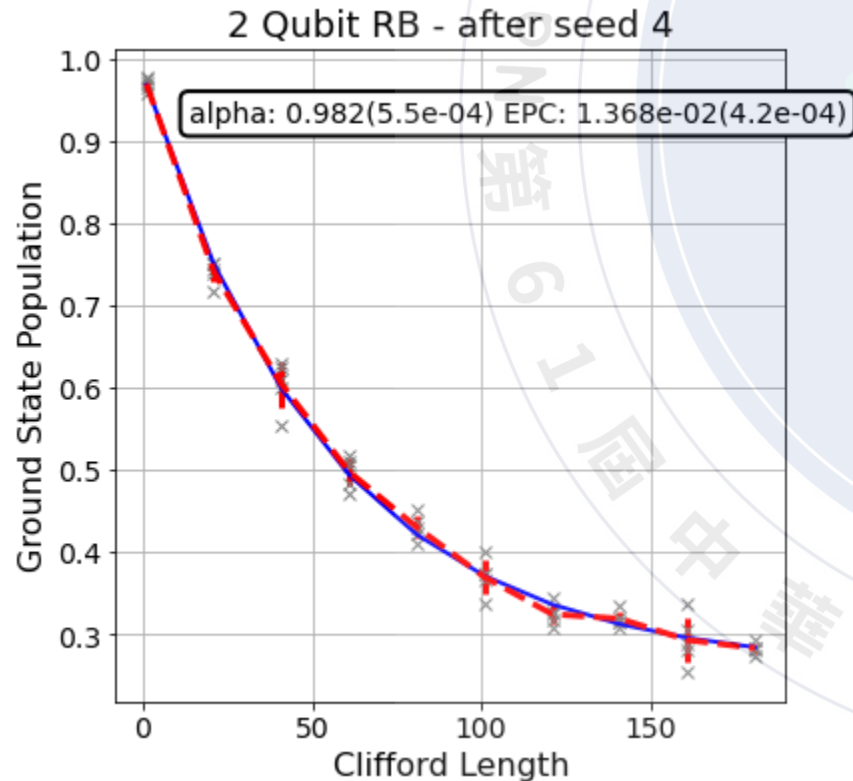


# 貳、分析方法—隨機基準測量 Randomized Benchmarking (RB)

我們做RB實驗需要的參數：

- **nseeds**：種子數。對每個種子，會在Rb\_circls序列中獲得一個單獨的輸出電路列表。

- **length\_vector**：Clifford長度的長度向量必須依照升冪排列。長度增加的RB序列會在先前的序列中的首數後



**步驟一** 生成RB序列，我們選擇RB序列 $K_m$ ，每個序列包含 $m$ 個隨機元素 $C_{ij}$ ， $C_{ij}$ 定義為

$$C_{i_{m+1}} = (C_{i_1} \cdots C_{i_m})^{-1}$$

**步驟二** 建立RB電路且定義RB實驗需要的參數

**步驟三** 定義交錯元素，輸入實驗一到十二的 SWAP 閘電路

**步驟四** 在實際量子電腦上執行RB序列並且輸出seed模擬的結果，每個序列可以表示為：

$$S_{i_m} = \bigcirc_{j=1}^{m+1} (\Lambda_{i_j, j} \circ C_{i_j})$$

**步驟五** 獲取生存概率，每個 $K_m$ 生存概率表示為 $\text{Tr}[E \phi \text{Sim}(\rho \phi)]$ ，其中 $\rho \phi$ 是初始狀態準備工作發生的錯誤，而 $E \phi$ 是測量工作發生的誤差。

**步驟六** 找到平均保真度  $F_{seq}(m, |\psi\rangle) = \text{Tr}[E_\psi S_{K_m}(\rho_\psi)]$

**步驟七** 將所有模擬種子擬合並繪製成結果(EPC)  
其數學可表示為：

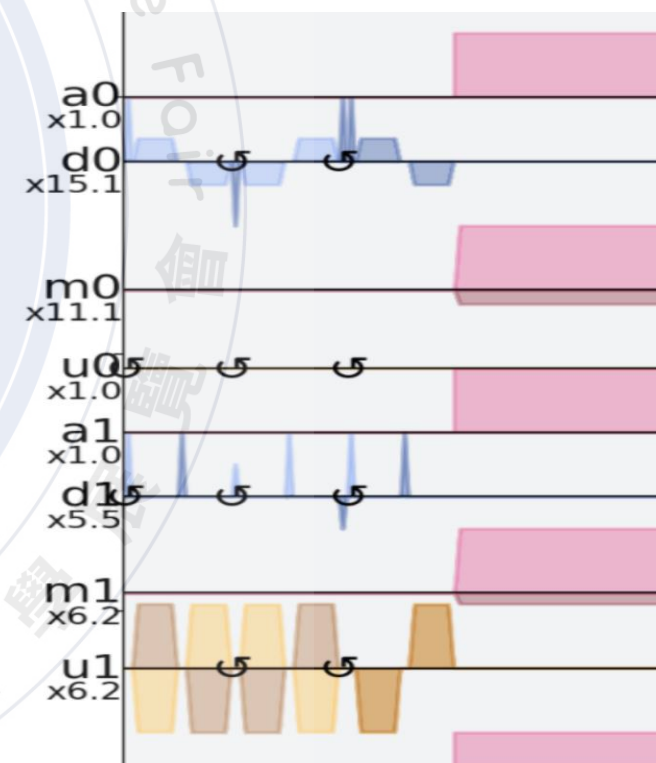
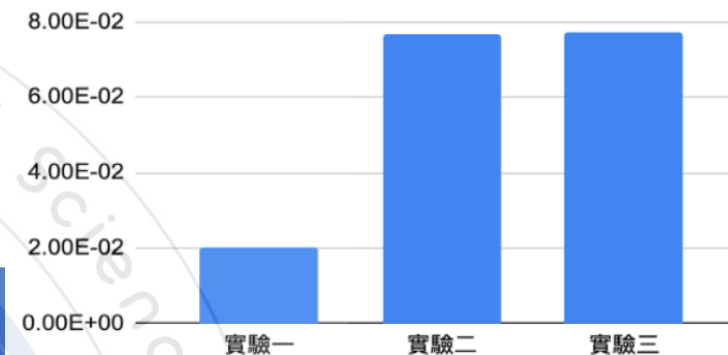
$$\text{EPC} = \frac{2^n - 1}{2^n} (1 - \alpha)$$

# 參、研究結果與討論(一)

## (一)變因一：使用具有輔助位元的量子 SWAP 開脈衝

變因	位元0、1實現 SWAP 開	將1、2位元設計新的 Control開	把訊號傳至2號後把訊號傳回
電路分解的圖形	<p> <math>q_0 \mapsto 0</math>  <math>q_1 \mapsto 1</math>  <math>q_2 \mapsto 2</math> </p>	<p> <math>q_2 \mapsto 0</math>  <math>q_1 \mapsto 1</math>  <math>q_0 \mapsto 2</math>  <math>ancilla_0 \mapsto 3</math> </p>	<p> <math>q_2 \mapsto 0</math>  <math>q_1 \mapsto 1</math>  <math>q_0 \mapsto 2</math>  <math>ancilla_0 \mapsto 3</math> </p>
平均誤差值	2.01% $\pm 0.08\%$	7.68% $\pm 0.12\%$	7.72% $\pm 0.25\%$

變因一誤差平均值柱狀圖



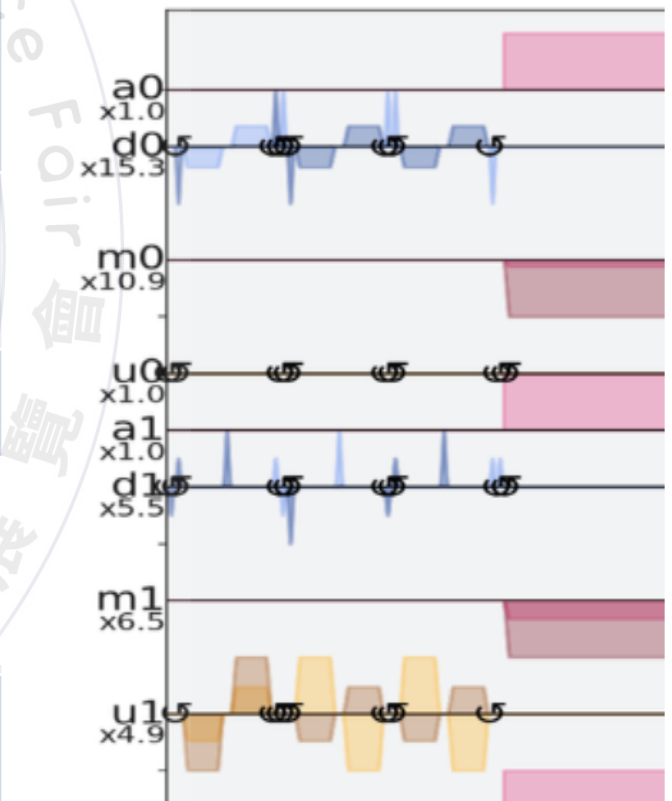
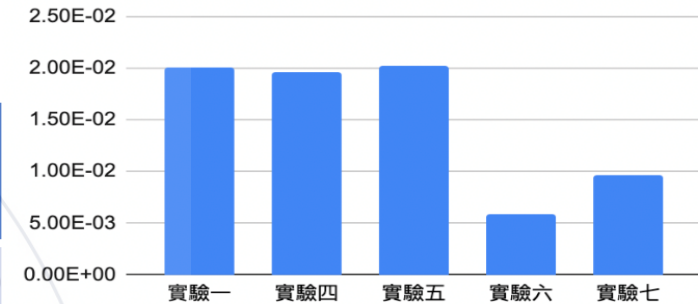
經典SWAP開的波圖

# 參、研究結果與討論(二)

(二)變因二:以 GXOR 閘，CZ 閘為主體，利用量子的等效性建立不同的 SWAP 閘脈衝

變因	CZ加兩個GXOR閘做 SWAP 閘	三個GXOR閘做 SWAP 閘
量子電路圖		
平均誤差值	2.03% ±0.02%	2.01% ±0.08%
變因	CZ閘加Y閘做 SWAP 閘(一)	CZ閘加Y閘做 SWAP 閘(二)
量子電路圖		
平均誤差值	0.593% ±0.12%	0.958% ±0.03%

變因二誤差平均值柱狀圖



CZ閘加Y閘做SWAP閘(一)的波圖

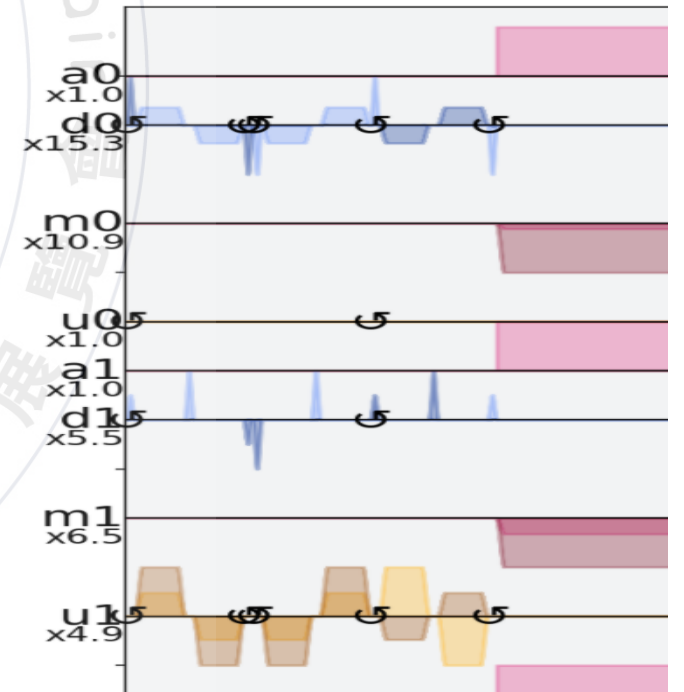
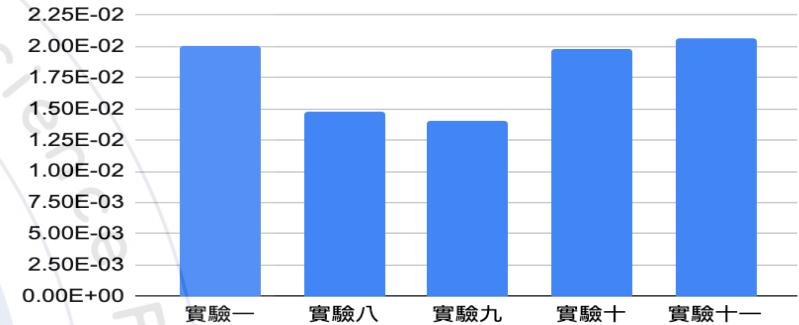


# 參、研究結果與討論(三)

(三)變因三:以 CY 開QFT 開以及特殊型的 CZ 開為主體利用量子的等效性建立不同的 SWAP 開脈衝

實驗	CY開加Z開做 SWAP 開(一)	CY開加Z開做 SWAP 開(二)
量子電路圖		
平均誤差值	1.48% ±0.36%	1.40% ±0.41%
實驗	CY開加Z開做 SWAP 開(三)	QFT
量子電路圖		
平均誤差值	1.98% ±0.24%	2.06% ±0.12%

變因三誤差平均值柱狀圖



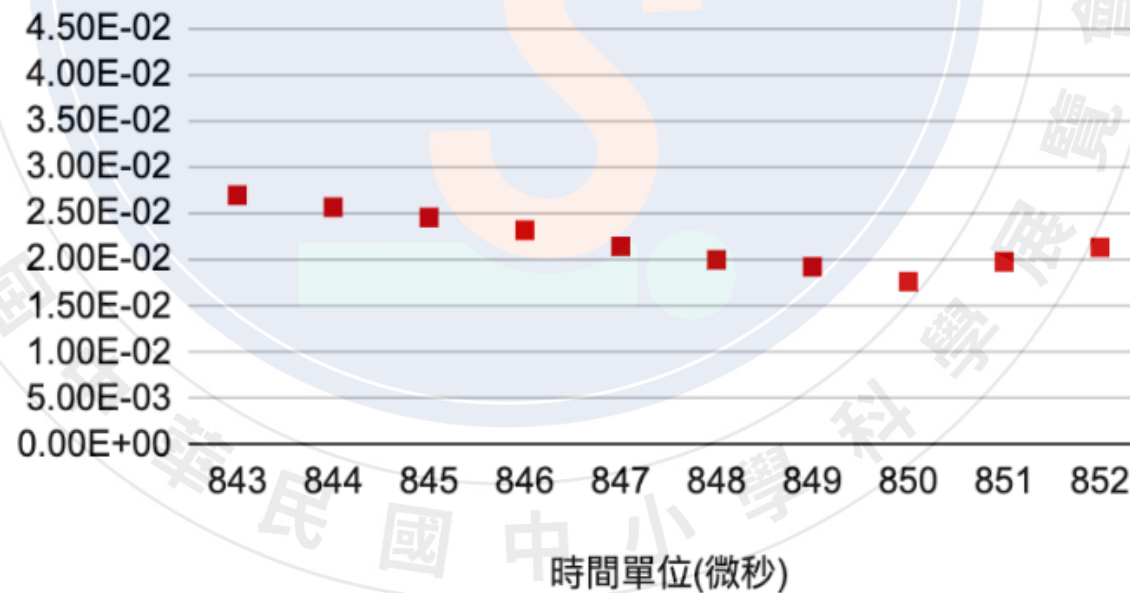
CY開加Z開做 SWAP 開(一)的波圖

# 參、研究結果與討論(四)

(四)變因四:調整交叉共振作用降低 SWAP 閘脈衝誤差

時間(微秒)	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852
平均誤差	2.70%	2.57%	2.46%	2.32%	2.14%	2.00%	1.92%	1.77%	1.98%	2.13%
差值	$\pm 0.01\%$	$\pm 0.26\%$	$\pm 0.11\%$	$\pm 0.04\%$	$\pm 0.07\%$	$\pm 0.03\%$	$\pm 0.12\%$	$\pm 0.03\%$	$\pm 0.09\%$	$\pm 0.21\%$

變因四時間-誤差散佈圖



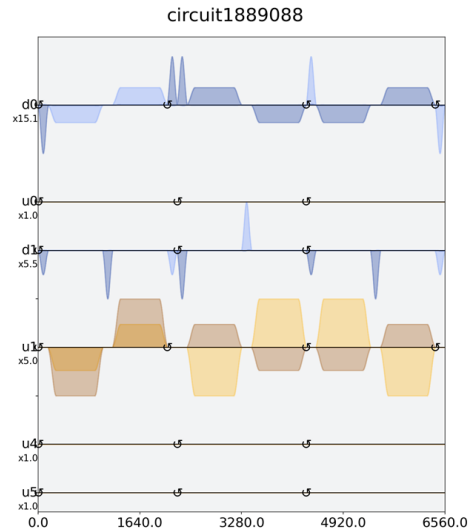
# 討論

## 一、誤差分析-實際量子電腦的執行

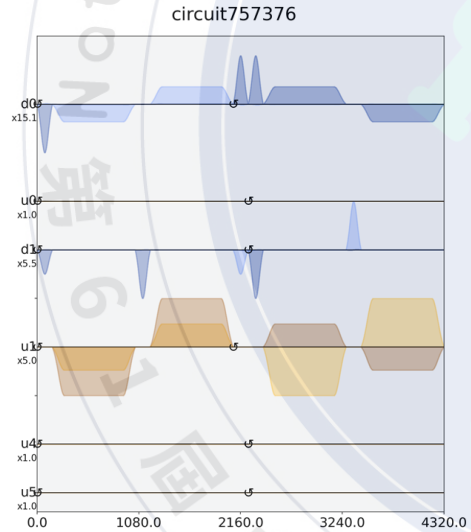
本實驗使是用實際量子電腦，誤差數值使用 `ibmq_casablanca` (7 qubit) 目前的誤差狀態來做計算，量子電腦會因為不同時間硬體狀態不同，數值亦不同，實驗當天誤差值雖為2.003%，但實際測量多次後會有些許的狀態誤差。因此我們期望目標時間控制在30分鐘內做完，以達到能降低因時間而改變的誤差值。另外，本實驗只有使用 `ibmq_casablanca`，在變因一的輔助位元中，有可能因為使用不同電腦而有不同的效果，每台量子電腦有不同的超導位元電路連結，對應到不同的超導位元電路連結時，變因一的結果有可能會產生改變。

## 二、綜合探討

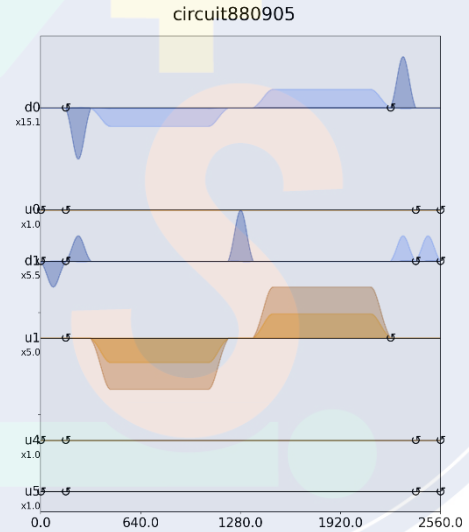
### 兩個CZ加二個Y



### 兩個CX



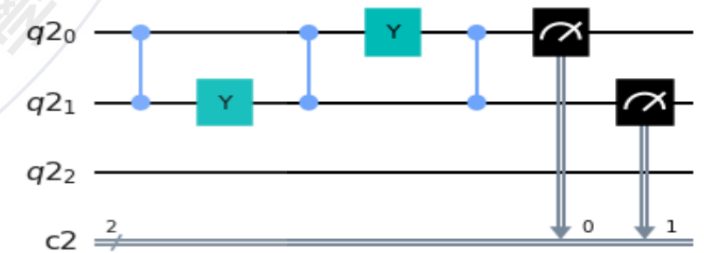
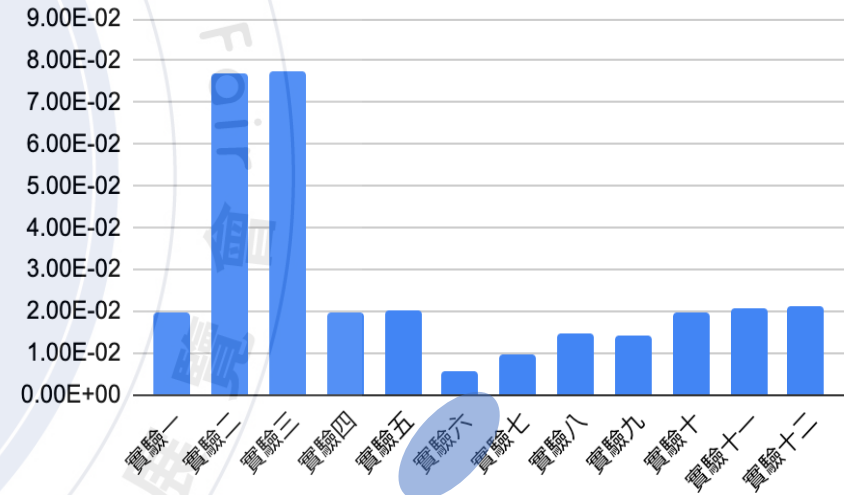
### 1個CZ



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

么正矩陣

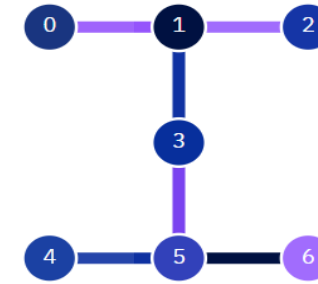
實驗平均誤差柱狀圖



# 綜合討論

## 變因一

量子位元的位置及連接方式是被限制的，如右圖可以發現到0號位元和2號位元之間並沒有通道連接，這造成了其誤差加大，無法達到減少誤差的目的。



## 變因二

產生較多的相位翻轉，不適用於疊加態中的量子位元。由於Z閘、CZ閘的電路成本較小所以誤差值較小。在此變因的所有實驗中，實驗六擁有最好的誤差改善但產生了相位誤差，而實驗七擁有正確的相位且有較好的誤差改善，是一個可行性高的電路。

## 變因三

以CY閘、QFT閘以及特殊型的CZ閘建構並利用量子的等效性建立不同的量子電路，在此變因的所有實驗中，實驗七擁有正確的相位並且有極佳的誤差改善，其原因在於使用閘數非常少，且沒有使用CX閘，故電路成本最小。實驗十一使用三個QFT組合閘，為經典量子SWAP閘的分解電路(理論一)，故與經典量子SWAP閘沒有明顯差距。

## 實驗的相位差

粉紅色:相位翻轉180度

黃色:相位翻轉270度

綠色:最佳電路結構

	相位差(0號)(rad)	相位差(1號)(rad)	與實驗一誤差比較	誤差降低比率
實驗一	0	0	0	100%
實驗二	0	0	+5.110	-255.1%
實驗三	0	0	+4.771	-238.2%
實驗四	0	$\pi$	+0.058	-2.9%
實驗五	0	0	-0.188	9.4%
實驗六	$\pi$	0	-1.434	71.6%
實驗七	0	0	-1.346	67.2%
實驗八	$3\pi/2$	$\pi$	-0.658	32.3%
實驗九	$\pi$	$\pi$	-0.043	2.1%
實驗十	0	0	-0.033	1.6%
實驗十一	0	0	+0.140	-7.0%



# 結論

- 一、就實驗結果而言，此研究**成功的**幫助現有的量子 SWAP 閘 GATE **降低誤差67.2%**。
- 二、建立的新SWAP 閘能夠在未來取代現有的量子 SWAP 閘，使得演算法的**準確度更高**。
- 三、調整脈衝持續時間也能**有效降低誤差**，因此 IBM 的脈衝持續時間精準度可以更好。
- 四、提供**客製化**的 SWAP 閘的選擇，在需要極低誤差的時候只需要校準相位即可以用我們所設計出來的電路結構。

# 未來展望

- 一. 利用最佳控制理論尋找脈衝的**最佳控制解**，重新建構交叉共振實驗。
- 二. 能量希望能夠**建構方波取代高斯波型**進行 SWAP 設計，比較不同波型對於誤差值的影響。
- 三. 因時間而不斷衰減，希望能夠在**測量之前計算出散失的能量**，再次用脈衝打入相符振幅脈衝，補足缺失的能量降低計算誤差。

# 參考資料

- [1] Easwar Magesan and Jay M. Gambetta(2018), Effective hamiltonian models of the cross-resonance gate.
- [2] Jean Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press(1960), 希爾伯特空間,
- [3] Franco Nori (2014), Various Constructions of Qubit SWAP Gate
- [4] Juan Carlos Garcia-Escartin (2014), A SWAP gate for Qubits
- [5] Thomas Alexander(2020), Qiskit Pulse: Programming Quantum Computers Through the Cloud with Pulses
- [6] M. Guha Majumdar(2018), Harnessing the Exchange Interaction for Quantum Information Processing
- [7] S. Balakrishnan(2014), Equivalence of Qubit Gate Operations
- [8] Colin M Wilmott(2019), Towards an optimal generalized SWAP gate
- [9] Sarah Sheldon(2016). Procedure for systematically tuning up crosstalk in the cross resonance gate