中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050417

牽制數列

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高一 吳孟甄 高一 蔡睿珊	楊玉星

關鍵詞：費氏數列、盧卡斯數列、遞迴關係式

摘要

本研究探討「**a** 平方－**h** 是 **b** 的倍數，**b** 平方－**h** 是 **a** 的倍數」→「**a** 平方＋**h** 是 **b** 的倍數，**b** 平方＋**h** 是 **a** 的倍數」，發現若將前者的首項設為 **h－1**，第二項為首項的平方－**h**，則其正整數解(**a**，**b**)會構成一數列且滿足遞迴式「第 **n＋2** 項=(**h－2**)*第 **n＋1** 項－第 **n** 項」；若將後者的首項設為**1**，第二項為 **h＋1**，則其正整數解(**a**，**b**)會構成一數列且滿足遞迴式「第 **n＋2** 項=(**h＋2**)*第 **n＋1** 項－第 **n** 項」。在探討「**a** 平方±**nh** 是 **b** 的倍數，**b** 平方±**nh** 是 **a** 的倍數」時，發現其解數列也滿足遞迴式「第 **n＋2** 項=(**h±2**)*第 **n＋1** 項－第 **n** 項」，其中新第 **n** 項=(**n** 的正平方根)*原第 **n** 項。

壹、前言

一、研究動機

在「科學研習月刊」有定期刊出「森棚教官的數學題」，老師推薦我們研究其中一道數學題目--互相牽制，我們很感興趣，著手試算後，我們決定繼續推廣他們的研究，看能否有更多不一樣的發現。

二、研究目的

(一)將「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的正整數解$(\boldsymbol{a,b})$寫成數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$。

(二)將「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的正整數解$(\boldsymbol{a,b})$寫成數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$。

(三)找出「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的解數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$對應的廣義費氏數列$\langle \boldsymbol{b_n} \rangle$。

(四)找出「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的解數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$對應的廣義費氏數列$\langle \boldsymbol{b_n} \rangle$。

(五)找出「$\boldsymbol{b|(a^2\pm h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2\pm h^2)}$」的解數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$之間的關係。

(六)找出「$\boldsymbol{b|(a^2\pm nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2\pm nh)}$」的解數列$\langle \boldsymbol{a_n} \rangle$之間的關係。

三、名詞定義

為了研究進行，我們做了以下名詞定義

定義 1.3.1. 符號 $\boldsymbol{m|n}$：$\boldsymbol{n}$為$\boldsymbol{m}$的倍數

定義 1.3.2. 二階遞迴關係式：$\boldsymbol{a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0}$

定義 1.3.3. 廣義費氏數列：$\boldsymbol{b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n}$

定義 1.3.4. 數列$\langle \boldsymbol{a_n}\rangle$：「$\boldsymbol{b|(a^2\pm h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2\pm h)}$」的解$(\boldsymbol{a,b})$所對應的解數列

定義 1.3.5. 數列$\langle \boldsymbol{b_n}\rangle$：「$\boldsymbol{b|(a^2\pm h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2\pm h)}$」的解數列$\langle \boldsymbol{a_n}\rangle$對應的廣義費氏數列

定義 1.3.6. 數列$\langle \boldsymbol{c_n}\rangle$：「$\boldsymbol{b|(a^2+nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+nh)}$」的解$(\boldsymbol{a,b})$所對應的解數列

定義 1.3.7. 數列$\langle \boldsymbol{d_n}\rangle$：「$\boldsymbol{b|(a^2-nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-nh)}$」的解$(\boldsymbol{a,b})$所對應的解數列

四、研究流程圖

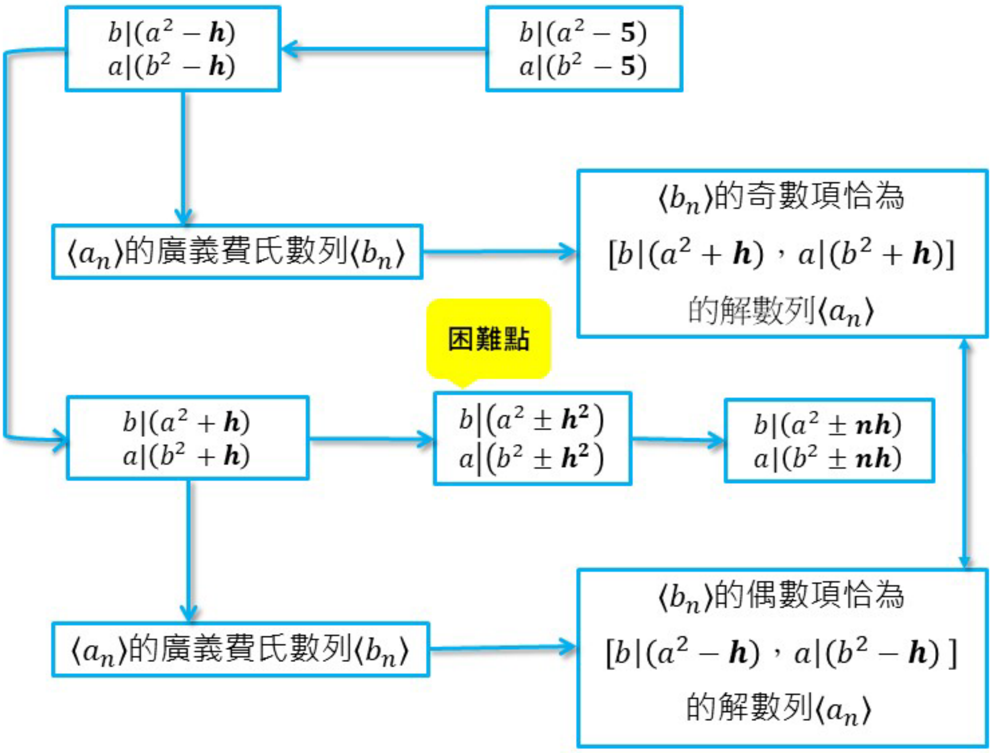


圖 1.4.1. 研究流程圖

五、本研究特色

本研究在探討「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的正整數解(a,b)，成功地證出

若「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的解數列為$\langle a_n \rangle$，則「$b|(a^2 \pm nh)$，$a|(b^2 \pm nh)$」的解數列$\langle c_n \rangle$之遞迴關係式與$\langle a_n \rangle$相同，其中$c_n = \sqrt{n}a_n$。

貳、文獻探討

文獻 2.1. 參[1].

森棚教官的數學題：小智跟小定在抽上台報告的順序，一個抽到 4 號，另一個抽到 11 號。小定說：「這兩個數字很有趣，你看，4^2-5是 11 的倍數，而且11^2-5是 4 的倍數」小智說：「你也想太多了吧？這種數應該非常多才對，一點都不奇怪啊。」

那你可以找到多少組正整數對(a,b)滿足$\begin{cases} a^2-5\text{是}b\text{的倍數} \\ b^2-5\text{是}a\text{的倍數} \end{cases}$？

文獻 2.2. 費氏數列 參[3].

費氏數列$\langle F_n \rangle$：費氏數列$\langle F_n \rangle$：$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$，前兩項相加會等於下一項

即 $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \ge 1) \end{cases}$，其一般項為 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

文獻 2.3. Lucas(盧卡斯)數列 參[3].

Lucas(盧卡斯)數列$\langle L_n \rangle$：Lucas(盧卡斯)數$\langle L_n \rangle$：$2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,\cdots$，

與費氏數列$\langle F_n \rangle$相似，前兩項相加會等於下一項，即 $\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n (n \ge 0) \end{cases}$，

其一般項為 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。

文獻 **2.4.** 李妙芸等。 參**[2].**

(1)滿足「a^2-5是b的倍數，b^2-5是a的倍數」的正整數解(a,b)恰為**Lucas**(盧卡斯)數列$\langle L_n\rangle$的部分項，即$(a,b)=(L_{2n},L_{2n+2})$，其中n為自然數。

(2)利用 **Lucas**(盧卡斯)數列$\langle L_n\rangle$與斐波那契數列$\langle F_n\rangle$有關，我們加以證明。

(i) $L_n{}^2-5=\begin{cases} L_{n-2}\cdot L_{n+2}，n=2k+1 \\ L_{n-1}\cdot L_{n+1}，n=2k \end{cases}$，$k$為自然數

(ii) 對於任意自然數n，$L_{n-1}+L_{n+1}=5F_n$。其中，斐波那契數列$\langle F_n\rangle$

(iii) $L_n^2-L_{n-2}^2=5\cdot F_{2n-2}$，其中$n\geq 2$且$n$為自然數

(3)將原題的 **5** 改成完全平方數h^2 $(h$為自然數$)$，討論並將滿足「a^2-h^2是b的倍數，b^2-h^2是a的倍數」的正整數對$(a,b)=(b_i,b_{i+1})$寫成數列 $\langle b_n\rangle$，其中$i\geq 1$。

證明得到滿足條件的數列$\langle b_n\rangle$為等差數列，且$b_n=k+(n-1)h$，其中

$k+h>k>h>0$，且 n 、h 、k 為自然數，以及此數列$\langle b_n\rangle$有 h 組。

文獻 **2.5.** 二階遞迴關係式的解法 參**[4].**

二階遞迴關係式$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$的解法

滿足遞迴關係式$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$、$a_1=a,a_2=b$

的數列$< a_n >$的一般項為**(1)**當$\alpha\neq\beta$時，$a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$

(2)當$\alpha=\beta$時，$a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}$

其中，α,β為的特徵方程式 $x^2+px+q=0$ 的兩根。

參、a^2-h是b的倍數，b^2-h是a的倍數

事實 3.1. 將「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$，並觀察其規律性

(h為任意正整數)。我們發現了一些規律：

(1)$a_n{}^2-h=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$($h\geq 4$才能找到相應的數列)。

(2)因為$a_1{}^2-h=1\cdot a_2$，所以我們假設$a_0=1$，如此一來，只需要再找一項a_1，就能推出後面的數字，但因為$a_0^2-h=1-h$是負數，不排入數列中，所以首項a_1可以是$h-1$的因數(1 除外)，當數列的首項a_1為$h-1$。得到，

定理 3.2. 若數列$\langle a_n\rangle$滿足 (1)$a_0=1$，$a_1=h-1$；(2)$a_2=a_1^2-h=h^2-3h+1$； (3)$a_n^2-h=a_{n-1}\times a_{n+1}(h\geq 4,n\geq 1)$ 且a_1,a_2,h為正整數時，則$\begin{cases}a_{n+1}\|(a_n^2-h)\\a_n\|(a_{n+1}^2-h)\end{cases}(n\geq 0)$

[證明]

(1)因為$a_0=1$，$a_1=h-1$，則$a_0^2-h=1-h=-(h-1)$，所以$a_1|(a_0^2-h)$。

又因為$1|(a_1^2-h)$，從而$a_0|(a_1^2-h)$。

(2)因為$a_2=a_1^2-h$，所以$a_2|(a_1^2-h)$。

又$a_2^2-h=(a_1^2-h)^2-h=a_1^4-2ha_1^2+h^2-h=a_1^4-2ha_1^2+ha_1$，

從而$a_1|(a_2^2-h)$。

(3)因為$a_n^2-h=a_{n-1}\times a_{n+1}$，所以$a_{n+1}|(a_n^2-h)$。又因為$a_{n+1}^2-h=a_n\times a_{n+2}$，

所以$a_n|(a_{n+1}^2-h)$，故$\begin{cases}a_{n+1}|(a_n^2-h)\\a_n|(a_{n+1}^2-h)\end{cases}$，Q.E.D。

另外，我們找到數列a_n、a_{n+1}、a_{n+2} 之間的遞迴關係為

$$\boldsymbol{a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n \cdots (3.3.)}$$

而有以下的定理：

定理 3.4. 若數列$\langle a_n \rangle$滿足(1)$\boldsymbol{a_0 = 1}$，$\boldsymbol{a_1 = h-1}$；(2)$\boldsymbol{a_2 = a_1^2 - h = h^2 - 3h + 1}$；

(3)$\boldsymbol{a_n^2 - h = a_{n-1} \times a_{n+1} (n \geq 1)}$，則 $\boldsymbol{a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n (h \geq 4, n \geq 0)}$。

[證明]

(1)當$n=0$時，$a_2 = (h-2)a_1 - a_0 = (h-2)(h-1) - 1 = h^2 - 3h + 1$，原式成立。

(2)設當$n \leq k$時，$a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n$ 成立。

則 $a_{k+2} = (h-2)a_{k+1} - a_k$，$a_{k+1} = (h-2)a_k - a_{k-1}$

且 $a_{k+2}^2 - h = a_{k+1} \times a_{k+3}$

$\Longrightarrow [(h-2)a_{k+1} - a_k]^2 - h = a_{k+1} \times a_{k+3}$

$\Longrightarrow (h-2)^2 a_{k+1}^2 - 2(h-2)a_k a_{k+1} + a_k^2 - h = a_{k+1} \times a_{k+3}$

$\Longrightarrow (h-2)^2 a_{k+1}^2 - 2(h-2)a_k a_{k+1} + a_{k-1} a_{k+1} = a_{k+1} \times a_{k+3}$

$\Longrightarrow a_{k+3} = (h-2)^2 a_{k+1} - 2(h-2)a_k + a_{k-1}$

$= (h-2)^2 a_{k+1} - 2(h-2)a_k + (h-2)a_k - a_{k+1}$

$= [(h-2)^2 - 1]a_{k+1} - (h-2)a_k$

又 $(h-2)a_{k+2} - a_{k+1} = (h-2)[(h-2)a_{k+1} - a_k] - a_{k+1}$

$= [(h-2)^2 - 1]a_{k+1} - (h-2)a_k$，

從而 $a_{k+3} = (h-2)a_{k+2} - a_{k+1}$，所以當$n = k+1$時，原式也成立。

故由數學歸納法可知：$a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n (h \geq 4, n \geq 0)$恆成立，Q.E.D。

又可得，

定理 3.5. 若數列$\langle a_n\rangle$滿足

$$(1)a_1=h-1\text{；}(2)a_2=a_1^2-h\text{；}(3)a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n(h\ge 4,n\ge 1)\text{，}$$

則 $a_n^2-h=a_{n-1}\times a_{n+1}(n\ge 2)$，推知$\begin{cases}a_{n+1}|(a_n^2-h)\\ a_n|(a_{n+1}^2-h)\end{cases}$，$a_{n+1}>a_n(n\ge 1)$。

[證明]

(1)當 $h=4$ 時，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，其特徵方程式為$x^2-2x+1=0$，

兩根$\alpha=\beta=1$。又$a_1=h-1=3$，$a_2=a_1^{\ 2}-h=3^2-4=5$，所以$b-a\alpha=5-3\times 1=2$。

從而$a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}=3\times 1^{n-1}+(n-1)\times 2\times 1^{n-2}=2n+1$。

推知$a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$，$a_{n-1}=2(n-1)+1=2n-1$。

因此$a_n^{\ 2}-4=(2n+1)^2-4=4n^2+4n-3=(2n-1)(2n+1)=a_{n-1}\times a_{n+1}$。

所以$a_n^{\ 2}-4=a_{n-1}\times a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}\left|(a_n^{\ 2}-4)\right.$，同理$a_{n+1}^{\ 2}-4=a_n\times a_{n+2}\Rightarrow a_n\left|(a_{n+1}^{\ 2}-4)\right.$。

又因為$a_{n+1}-a_n=(2n+3)-(2n+1)=2(n\ge 1)$，所以$a_{n+1}>a_n(n\ge 1)$。

(2)當 $h\ge 4$ 時，$a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_{n+2}-(h-2)a_{n+1}+a_n=0$

其特徵方程式為$x^2-(h-2)x+1=0$，兩根$\alpha=\dfrac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2},\beta=\dfrac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}$，

推知$\alpha-\beta=\sqrt{h^2-4h}$。又$a_1=h-1$，$a_2=a_1^{\ 2}-h=(h-1)^2-h=h^2-3h+1$，

所以$b-a\beta=(h^2-3h+1)-(h-1)\times\dfrac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}$

$$=(h^2-3h+1)-\frac{(h^2-3h+2)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2}=\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2}\text{，}$$

$$b-a\alpha=(h^2-3h+1)-(h-1)\times\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}$$

$$=(h^2-3h+1)-\frac{(h^2-3h+2)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2}=\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2}\text{。}$$

從而

$$a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}=\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}$$
$$-\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}$$

推知

$$a_{n+1}=\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n}-\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n}$$

$$a_{n-1}=\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-2}-\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-2}$$

因此

$$a_n{}^2-h=\{\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}$$
$$-\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}\}^2-h$$

$$=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$+[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$-2\times\frac{(h^2-3h)^2-(h-1)^2(h^2-4h)}{4(h^2-4h)}\times[\frac{(h-2)^2-(h^2-4h)}{4}]^{n-1}-h$$

$$=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$+[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}-2\times\frac{1}{h-4}\times 1^{n-1}-h$$

$$=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$+[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}-\frac{1}{h-4}(h^2-4h+2)$$

又

$$
\begin{aligned}
&a_{n-1}\times a_{n+1}\\
&=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}\\
&\qquad+[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}\\
&\qquad-\frac{1}{h-4}\times 1^{n-2}\times\{[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^2+[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}\\
&\qquad+[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}]^2[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{2n-2}-\frac{1}{h-4}(h^2-4h+2)
\end{aligned}
$$

所以$a_n{}^2-h=a_{n-1}\times a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}\left|(a_n{}^2-h)\right.$，同理$a_{n+1}{}^2-h=a_n\times a_{n+2}\Rightarrow a_n\left|(a_{n+1}{}^2-h)\right.$。

又因為

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n&=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}][\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}-1]\\
&\quad-[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}][\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}-1]\\
&=[\frac{(h^2-3h)+(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}][\frac{(h-2)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h-4)+\sqrt{h^2-4h}}{2}]\\
&\quad-[\frac{(h^2-3h)-(h-1)\sqrt{h^2-4h}}{2\sqrt{h^2-4h}}][\frac{(h-2)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h-4)-\sqrt{h^2-4h}}{2}]>0
\end{aligned}
$$

且$h\geq 4$，此時這兩個分式分母相同，前者分子顯然大於後者，所以 $a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n(n\geq 1)$，Q.E.D。

肆、廣義費氏數列

問題 4.1.1. 依據$h=5$時的數列為盧卡斯數列的間隔項，找出與其它數列$\langle a_n\rangle$相對應的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$及其關聯性。

已知：表 4.1.2.中，$b_8=b_7+b_6=2b_6+b_5=3b_6-b_4$，則$a_3=3a_2-a_1$。所以我們得知$h=5$ 符合公式：$a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n$，代表只有$h=5$的數列$\langle a_n\rangle$，可以從前兩項相加等於後一項的盧卡斯數列中，間隔地找到數列$\langle a_n\rangle$的值。

表 4.1.2.

$h=5$的數列$\langle a_n\rangle$		a_0		a_1		a_2		a_3
廣義費氏數列	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
(盧卡斯) $\langle b_n\rangle$	2	1	3	4	7	11	18	29

考慮表 4.1.3.，數列$\langle a_n\rangle$會與廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$有關：當$h=5$時，$b_8=1\cdot b_7+b_6$，

若$b_8=2\cdot b_7+b_6$是否會符合h等於其它數字的數列？

表 4.1.3.

h=? 的數列$\langle a_n\rangle$		a_0		a_1		a_2		a_3
廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8

$b_8=2b_7+b_6=5b_6+2b_5=6b_6-b_4$，則 $a_3=6a_2-a_1$，得 $h=8$，代表$h=8$可以從兩倍前一項加前前項等於後一項的遞迴數列中，間隔地找到數列$\langle a_n\rangle$的值。那麼h等於其它數值時，相對應數列$\langle b_n\rangle$的規律性為何？

表 4.1.4.

數列$\langle a_n\rangle$		a_0		a_1		a_2		a_3
廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8

假設 $b_{n+2}=x\cdot b_{n+1}+b_n$，可得

定理 4.2. **若數列$\langle \boldsymbol{b_n}\rangle$從第四項開始的偶數項形成一數列$\langle \boldsymbol{a_n}\rangle$，且**

(1)$\boldsymbol{b_4=a_1=h-1}$；(2)$\boldsymbol{b_6=a_2=a_1^2-h}$；(3)$\boldsymbol{a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n}$，

則 $\boldsymbol{b_{n+2}=\sqrt{h-4}\,b_{n+1}+b_n}$且$\boldsymbol{b_1=\frac{2}{\sqrt{h-4}}(h\geq 5,n\geq 1)}$。

[證明]

(1)設 $b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(n\geq 4)$，

則 $b_8=xb_7+b_6$，$b_7=xb_6+b_5$，$b_6=xb_5+b_4$，

推得 $b_8=x(xb_6+b_5)+b_6=(x^2+1)b_6+xb_5=(x^2+1)b_6+(b_6-b_4)$，

所以 $b_8=(x^2+2)b_6-b_4$，即 $a_3=(x^2+2)a_2-a_1$，又 $a_3=(h-2)a_2-a_1$，

比較係數得 $x^2+2=h-2\Longrightarrow x^2=h-4$，故 $x=\sqrt{h-4}(h\geq 5)$。

(2)欲證 若$b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(n\geq 4)$，則$x=\sqrt{h-4}(h\geq 5)$。

設$n\leq k$時，$b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(n\geq 4)$，且$x=\sqrt{h-4}(h\geq 5)$成立。

(i)若k為偶數$(k\geq 6)$，同(1)可得 $b_{k+2}=(x^2+2)b_k-b_{k-2}=(h-2)b_k-b_{k-2}$，

又$b_{k+3}=xb_{k+2}+b_{k+1}$，$b_{k+2}=xb_{k+1}+b_k$，$b_{k+1}=xb_k+b_{k-1}$，

同(1)可得$b_{k+3}=(x^2+2)b_{k+1}-b_{k-1}=(h-2)b_{k+1}-b_{k-1}$，所以 $x=\sqrt{h-4}$。

因此 $b_{k+3}=xb_{k+2}+b_{k+1}=\sqrt{h-4}b_{k+2}+b_{k+1}$，

故 $n=k+1$時，$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n$也成立。

(ii)若k為奇數$(k\geq 5)$，同(1)可得 $b_{k+2}=(x^2+2)b_k-b_{k-2}$，$b_{k+1}=(x^2+2)b_{k-1}-b_{k-3}$

因為 $b_{k+1}=(x^2+2)b_{k-1}-b_{k-3}=(h-2)b_{k-1}-b_{k-3}$，

又 $b_{k+3}=(x^2+2)b_{k+1}-b_{k-1}=(h-2)b_{k+1}-b_{k-1}$，所以 $x=\sqrt{h-4}$。

因此 $b_{k+3}=xb_{k+2}+b_{k+1}=\sqrt{h-4}b_{k+2}+b_{k+1}$，

故 $n=k+1$時，$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n$也成立。

由數學歸納法可知：$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n(h\geq 5,n\geq 4)$恆成立。

(3)當$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n(h\geq 5,n\geq 1)$也成立時，因為 $b_3=(\sqrt{h-4})b_2+b_1$，

$b_4=(\sqrt{h-4})b_3+b_2$，所以 $b_3=\frac{b_4-b_2}{\sqrt{h-4}}$，推知 $\frac{b_4-b_2}{\sqrt{h-4}}=(\sqrt{h-4})b_2+b_1$，

將 $b_2=a_0=1$、$b_4=a_1=h-1$ 代入公式，得

$\frac{(h-1)-1}{\sqrt{h-4}}=(\sqrt{h-4})+b_1 \Longrightarrow h-2=(\sqrt{h-4})^2+b_1\sqrt{h-4}$，故$b_1=\frac{2}{\sqrt{h-4}}$，Q.E.D。

演算方法 4.3. (計算$\langle b_n\rangle$的方法)

第一步驟：給定$h\in\mathbb{N}$，若$h\geq 5$，則進入第二步驟。

第二步驟：$a_0=1$，$a_1=h-1$，$a_2=a_1^2-h$，進入第三步驟。

第三步驟：$a_{n+2}=(\frac{a_0+a_2}{a_1})a_{n+1}-a_n(n\geq 1)$，進入第四步驟。

第四步驟：$b_{2n}=a_{n-1}(n\geq 1)$，進入第五步驟。

第五步驟：$b_{2n+1}=\frac{b_{2n+2}-b_{2n}}{\sqrt{\frac{a_0+a_2}{a_1}-2}}(n\geq 1)$，進入第六步驟。

第六步驟：$b_1=b_3-\sqrt{\frac{a_0+a_2}{a_1}-2}\times b_2$，我們會得到計算$\langle b_n\rangle$的方法。

伍、a^2+h是b的倍數，b^2+h是a的倍數

事實 5.1. 將「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$，並觀察其規律性(h為任意正整數)。我們發現了一些規律：

(1)$a_n{}^2+h=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$($h\geq 1$就能找到相應的數列)。

(2)$a_1=1$，a_2為$h+1$除了 1 的任一因數，因此若$h+1$有n個因數，則該數會有 $n-1$ 個由 1 開頭的數列。

當$a_1=1$，$a_2=h+1$時，我們也找到數列a_n、a_{n+1}、a_{n+2}之間的遞迴關係為 $\boldsymbol{a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n}\cdots(5.2.)$，而有以下的定理：

定理 5.3. 若數列$\langle a_n\rangle$滿足(1)$a_1=1$；(2)$a_2=a_1^2+h=1+h$；(3)$a_n^2+h=a_{n-1}\times a_{n+1}(n\geq 2)$，則 $a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n(h\geq 1,n\geq 1)$。

[證明]

(1)當$n=1$時，$(h+2)a_2-a_1=(h+2)(h+1)-1=h^2+3h+1$。

又$a_2^2+h=a_1\times a_3\Longrightarrow(h+1)^2+h=a_3\Longrightarrow a_3=h^2+3h+1$，

所以$a_3=(h+2)a_2-a_1$，原式成立。

(2)設當$n\leq k$時，$a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n$ 成立。

則 $a_{k+2}=(h+2)a_{k+1}-a_k$，$a_{k+1}=(h+2)a_k-a_{k-1}$

且 $a_{k+2}^2+h=a_{k+1}\times a_{k+3}$

$\Longrightarrow[(h+2)a_{k+1}-a_k]^2+h=a_{k+1}\times a_{k+3}$

$\Longrightarrow(h+2)^2a_{k+1}^2-2(h+2)a_ka_{k+1}+a_k^2+h=a_{k+1}\times a_{k+3}$

$\Longrightarrow(h+2)^2a_{k+1}^2-2(h+2)a_ka_{k+1}+a_{k-1}a_{k+1}=a_{k+1}\times a_{k+3}$

$\Longrightarrow a_{k+3}=(h+2)^2a_{k+1}-2(h+2)a_k+a_{k-1}$

$=(h+2)^2a_{k+1}-2(h+2)a_k+(h+2)a_k-a_{k+1}$

$=[(h+2)^2-1]a_{k+1}-(h+2)a_k$

又 $(h+2)a_{k+2}-a_{k+1}=(h+2)[(h+2)a_{k+1}-a_k]-a_{k+1}$

$$=[(h+2)^2-1]a_{k+1}-(h+2)a_k,$$

從而 $a_{k+3}=(h+2)a_{k+2}-a_{k+1}$，所以當$n=k+1$時，原式也成立。

故由數學歸納法可知：$a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n(h\geq 1,n\geq 1)$恆成立，Q.E.D。

又可得，

> **定理 5.4.** 若數列$\langle a_n\rangle$滿足
>
> $$\textbf{(1)}\boldsymbol{a_1=1}\text{；}\textbf{(2)}\boldsymbol{a_2=a_1^2+h=1+h}\text{；}\textbf{(3)}\boldsymbol{a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n}$$
>
> **則**$\boldsymbol{a_n^2+h=a_{n-1}\times a_{n+1}(n\geq 2)}$，**推知**$\boldsymbol{\begin{cases}a_{n+1}\mid(a_n^2+h)\\a_n\mid(a_{n+1}^2+h)\end{cases}}$，$\boldsymbol{a_{n+1}>a_n(h\geq 1,n\geq 1)}$

[證明]

(1)當$h=1$時，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$，

其特徵方程式為 $x^2-3x+1=0$，兩根$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，推知$\alpha-\beta=\sqrt{5}$。

又 $a_1=1$，$a_2=1^2+1=2$，

所以 $b-a\beta=2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b-a\alpha=2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

從而 $a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

$$=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

推知 $a_{n+1}=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$，

$a_{n-1}=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$。

因此 $a_n^2+1=[(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\Big]^2+1$

$$=(\frac{3+\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+(\frac{3-\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+2\times\frac{1}{5}\times 1^{n-1}+1$$

$$=(\frac{3+\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+(\frac{3-\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+\frac{7}{5}$$ 。

又 $a_{n-1}\times a_{n+1}$

$$=\left[(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]\left[(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$$=(\frac{3+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}+(\frac{3-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}+\frac{1}{5}\times 1^{n-2}\times\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$=(\frac{3+\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+(\frac{3-\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+\frac{1}{5}\left[\frac{14+6\sqrt{5}}{4}+\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\right]$$

$$=(\frac{3+\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+(\frac{3-\sqrt{5}}{10})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n-2}+\frac{7}{5}$$ 。

所以 $a_n^2+1=a_{n-1}\times a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}|(a_n^2+1)$，

同理 $a_{n+1}^2+1=a_n\times a_{n+2}\Rightarrow a_n|(a_{n+1}^2+1)$。

又因為 $a_{n+1}-a_n=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1\right]-(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1\right]$

$$=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0$$

所以 $a_{n+1}>a_n(n\geq 1)$。

(2)當 $h\geq 1$ 時，$a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_{n+2}-(h+2)a_{n+1}+a_n=0$

其特徵方程式為 $x^2-(h+2)x+1=0$，兩根 $\alpha=\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2},\beta=\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}$，

推知 $\alpha-\beta=\sqrt{h^2+4h}$。又 $a_1=1$，$a_2=a_1^2+h=1+h$，

所以 $b-a\beta=(h+1)-\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}=\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2}$，

$b-a\alpha=(h+1)-\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}=\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2}$。

從而

$$a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}=\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}-\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}$$

推知

$$a_{n+1}=\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n}-\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n}$$

$$a_{n-1}=\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-2}-\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-2}$$

因此

$$a_n{}^2+h=\{\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}-\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}\}^2+h$$

$$=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$-2\times\frac{h^2-(h^2+4h)}{4(h^2+4h)}\times[\frac{(h+2)^2-(h^2+4h)}{4}]^{n-1}+h$$

$$=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+\frac{2}{h+4}\times1^{n-1}+h$$

$$=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+\frac{h^2+4h+2}{h+4}$$

又

$$a_{n-1}\times a_{n+1}$$
$$=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}$$
$$+\frac{1}{h+4}\times1^{n-2}\times\{[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^2+[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^2\}$$

$$=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}]^2[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{2n-2}+\frac{h^2+4h+2}{h+4}$$

所以 $a_n{}^2+h=a_{n-1}\times a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}\left|(a_n{}^2+h)\right.$，同理 $a_{n+1}{}^2+h=a_n\times a_{n+2}\Rightarrow a_n\left|(a_{n+1}{}^2+h)\right.$。

又因為 $a_{n+1}-a_n=[\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}][\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}-1]$

$$-[\frac{h-\sqrt{h^2+4h}}{2\sqrt{h^2+4h}}][\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}[\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}-1]$$

$$=[\frac{\sqrt{h^2+4h}+h}{2\sqrt{h^2+4h}}][\frac{(h+2)+\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}[\frac{\sqrt{h^2+4h}+h}{2}]$$

$$-[\frac{\sqrt{h^2+4h}-h}{2\sqrt{h^2+4h}}][\frac{(h+2)-\sqrt{h^2+4h}}{2}]^{n-1}[\frac{\sqrt{h^2+4h}-h}{2}]>0$$

且$h\geq 4$，此時這兩個分式分母相同，前者分子顯然大於後者，所以 $a_{n+1}-a_n>0$，

即$a_{n+1}>a_n(n\geq 1)$，Q.E.D。

陸、$a^2\pm nh$是b的倍數，$b^2\pm nh$是a的倍數

事實 6.1. 我們觀察到「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的解數列中，當$h=4$或8時，會有一個首項為2的數列，其中 $4=2^2$與$1=1^2$，前者底數正好是後者的 2 倍；而$8=(2\sqrt{2})^2$與$2=(\sqrt{2})^2$，前者底數也正好是後者的 2 倍。

[證明] 設$h=k$有一個數列 $<a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots>$為「$b|(a^2+h^2)$，$a|(b^2+h^2)$」的解數列，

則 $a_2=a_1^2+k^2$，$a_1a_3=a_2^2+k^2$，$a_2a_4=a_3^2+k^2$，⋯，$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2+k^2$，⋯

現在將上述$a_1a_3=a_2^2+k^2$之後的各等式兩邊同乘以d^2，可得

$da_1\times da_3=(da_2)^2+(dk)^2$，$da_2\times da_4=(da_3)^2+(dk)^2$，⋯，

$da_n\times da_{n+2}=(da_{n+1})^2+(dk)^2$，

可推知$h=dk$有一個首項為d的數列$<da_1,da_2,da_3,da_4,\cdots,da_n,da_{n+1},da_{n+2},\cdots>$

也滿足「$b|(a^2+h^2)$，$a|(b^2+h^2)$」，Q.E.D。

而「$\boldsymbol{b|(a^2+nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+nh)}$」的解數列與「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的解數列會不會存在著倍數關係呢？

讓我們先觀察下列實例：已知當$n=1$，$h=2$時，有一解數列$\langle 1,3,11,41,153,571,\cdots\rangle$，那當$n=2$，$h=2$時，可找出一解數列$\langle\sqrt{2},3\sqrt{2},11\sqrt{2},41\sqrt{2},153\sqrt{2},571\sqrt{2},\cdots\rangle$，發現同樣的$h$值，當$n=2$時，其解數列為$n=1$時的$\sqrt{2}$倍。

若「$\boldsymbol{b|(a^2+Nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+Nh)}$」之解數列為$\langle c_n\rangle$，則可得

> **定理 6.2.** 若數列$\langle \boldsymbol{c_n}\rangle$滿足 **(1)**$\boldsymbol{c_1=\sqrt{N}}$；**(2)**$\boldsymbol{c_2=\sqrt{N}(1+h)}$；
>
> **(3)**$\boldsymbol{c_{n+2}=(h+2)c_{n+1}-c_n(h\geq 1,n\geq 1)}$
>
> 則$\boldsymbol{c_n^2+Nh=c_{n-1}\times c_{n+1}(n\geq 2)}$，推知$\boldsymbol{\begin{cases}c_{n+1}|(c_n^2+Nh)\\ c_n|(c_{n+1}^2+Nh)\end{cases}}$，$\boldsymbol{c_{n+1}>c_n}$

[證明] 由「$\boldsymbol{b|(a^2+h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h^2)}$」的證明結果，我們得知$h=dk$之解數列為$h=k$之解數列的d倍，從而「$\boldsymbol{b|(a^2+Nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+Nh)}$」之解數列$\langle c_n\rangle$為「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」之解數列$\langle a_n\rangle$的$\sqrt{N}$倍，即$c_n=\sqrt{N}a_n$。

由**定理 5.4.**得知「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的解數列$\langle a_n\rangle$滿足

(1)$a_1=1$；(2)$a_2=a_1^2+h=1+h$；(3)$a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n$；(4)$a_{n+1}>a_n$；

(5)$a_n^2+h=a_{n-1}\times a_{n+1}$

將上述前四個等式的左右兩邊同乘以$\sqrt{N}$，最後一個等式的左右兩邊同乘以N

推得 (1)$\sqrt{N}a_1=\sqrt{N}$；(2)$\sqrt{N}a_2=\sqrt{N}(1+h)$；(3)$\sqrt{N}a_{n+2}=(h+2)\sqrt{N}a_{n+1}-\sqrt{N}a_n$

(4)$\sqrt{N}a_{n+1}>\sqrt{N}a_n$；(5)$Na_n^2+Nh=Na_{n-1}\times a_{n+1}$

即 (1)$c_1=\sqrt{N}$；(2)$c_2=\sqrt{N}(1+h)$；(3)$c_{n+2}=(h+2)c_{n+1}-c_n$；(4)$c_{n+1}>c_n$；

(5)$c_n^2+Nh=c_{n-1}\times c_{n+1}$，故$\begin{cases}c_{n+1}|(c_n^2+Nh)\\ c_n|(c_{n+1}^2+Nh)\end{cases}$，Q.E.D。

演算方法 6.3. (計算$\langle c_n\rangle$的方法)

第一步驟：給定n，$h\in\mathbb{N}$，若$n=1$，則進入第二步驟，否則進入第四步驟。

第二步驟：$c_1=1$，$c_2=h+1$，$c_3=c_2^2+h$，進入第三步驟。

第三步驟：$c_{n+2}=(\frac{c_1+c_3}{c_2})c_{n+1}-c_n(n\geq 2)$，我們會得到計算$\langle c_n\rangle$的方法。

第四步驟：$c_1=\sqrt{n}$，$c_2=(h+1)\sqrt{n}$，$c_3=\frac{c_2^2+nh}{c_1}$，進入第三步驟。

另外，「$\boldsymbol{b|(a^2-Nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-Nh)}$」的解數列與「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的解數列會不會也存在著倍數關係呢？讓我們先觀察下列實例：

已知當$n=1$，$h=4$時，有一解數列$\langle 3,5,7,9,11,13,\cdots\rangle$，那當$n=2$，$h=4$時，可找出一解數列$\langle 3\sqrt{2},5\sqrt{2},7\sqrt{2},9\sqrt{2},11\sqrt{2},13\sqrt{2},\cdots\rangle$，也發現同樣的$h$值，當$n=2$時，其解數列為$n=1$時的$\sqrt{2}$倍。可得，

事實 6.4. 我們觀察到「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的解數列中，當$\boldsymbol{h=8}$時，會有一首項為 $3\sqrt{2}$的解數列，其中 $\boldsymbol{4=2^2}$與$\boldsymbol{8=(2\sqrt{2})^2}$，後者底數正好是前者的$\sqrt{2}$倍。

[證明] 設$h = k$有一個數列 $< a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots >$為「$\boldsymbol{b|(a^2 - h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - h^2)}$」的解數列，

則 $a_2 = a_1^2 - h^2$，$a_1 a_3 = a_2^2 - k^2$，$a_2 a_4 = a_3^2 - k^2$，$\cdots$，$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 - k^2$，$\cdots$

現在將上述$a_1 a_3 = a_2^2 - k^2$之後的各等式兩邊同乘以d^2，可得

$da_1 \times da_3 = (da_2)^2 - (dk)^2$，$da_2 \times da_4 = (da_3)^2 - (dk)^2$，$\cdots$，

$da_n \times da_{n+2} = (da_{n+1})^2 - (dk)^2$，

因此可推知$h = dk$有一個首項為da_1的數列

$< da_1, da_2, da_3, da_4, \cdots, da_n, da_{n+1}, da_{n+2}, \cdots >$也滿足「$\boldsymbol{b|(a^2 - h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - h^2)}$」，Q.E.D。

若「$\boldsymbol{b|(a^2 - Nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - Nh)}$」之解數列為$\langle d_n \rangle$，則可得

定理 6.5. 若數列$\langle d_n \rangle$滿足 (1)$\boldsymbol{d_1 = (h-1)\sqrt{N}}$；(2)$\boldsymbol{d_2 = (h^2 - 3h + 1)\sqrt{N}}$；

(3)$\boldsymbol{d_{n+2} = (h-2)d_{n+1} - d_n (h \geq 4, n \geq 1)}$，

則 $\boldsymbol{d_n^2 - Nh = d_{n-1} \times d_{n+1} (n \geq 2)}$，推知$\boldsymbol{\begin{cases} d_{n+1} | (d_n^2 - Nh) \\ d_n | (d_{n+1}^2 - Nh) \end{cases}}$，$\boldsymbol{d_{n+1} > d_n}$

[證明]

由「$\boldsymbol{b|(a^2 - h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - h^2)}$」的證明結果，我們得知$h = dk$之解數列為$h = k$之解數列的$d$倍，從而「$\boldsymbol{b|(a^2 - Nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - Nh)}$」之解數列$\langle d_n \rangle$為「$\boldsymbol{b|(a^2 - h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - h)}$」之解數列$\langle a_n \rangle$的$\sqrt{N}$倍，即$d_n = \sqrt{N} a_n$。

由**定理 3.5.**得知「$\boldsymbol{b|(a^2 - h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 - h)}$」的解數列$\langle a_n \rangle$滿足

(1)$a_1 = h - 1$；(2)$a_2 = a_1^2 - h = h^2 - 3h + 1$；(3)$a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n$；

(4)$a_{n+1} > a_n$；(5)$a_n^2 - h = a_{n-1} \times a_{n+1}$

將上述前四個等式的左右兩邊同乘以$\sqrt{N}$，最後一個等式的左右兩邊同乘以N

推得 (1)$\sqrt{N}a_1 = \sqrt{N}(h-1)$；(2)$\sqrt{N}a_2 = \sqrt{N}(h^2-3h+1)$；

(3)$\sqrt{N}a_{n+2} = (h-2)\sqrt{N}a_{n+1} - \sqrt{N}a_n$

(4)$\sqrt{N}a_{n+1} > \sqrt{N}a_n$；(5)$Na_n^2 - Nh = Na_{n-1} \times a_{n+1}$

即 (1)$d_1 = \sqrt{N}(h-1)$；(2)$d_2 = \sqrt{N}(h^2-3h+1)$；(3)$d_{n+2} = (h-2)d_{n+1} - d_n$

(4)$d_{n+1} > d_n$；(5)$d_n^2 - Nh = d_{n-1} \times d_{n+1}$，故$\begin{cases} d_{n+1} | (d_n^2 - Nh) \\ d_n | (d_{n+1}^2 - Nh) \end{cases}$，Q.E.D。

演算方法 6.6. (計算$\langle d_n \rangle$的方法)

第一步驟：給定n，$h \in \mathbb{N}$，若$n=1$，$h \geq 4$，則進入第二步驟，若$n \geq 2$，$h \geq 4$，則進入第四步驟。

第二步驟：$d_0 = 1$，$d_1 = h-1$，$d_2 = d_1^2 - h$，進入第三步驟。

第三步驟：$d_{n+2} = (\frac{d_0+d_2}{d_1})d_{n+1} - d_n (n \geq 1)$，我們會得到計算$\langle d_n \rangle$的方法。

第四步驟：$d_0 = \sqrt{n}$，$d_1 = (h-1)\sqrt{n}$，$d_2 = \frac{d_1^2 - nh}{d_0}$，進入第三步驟。

柒、研究討論

性質 7.1. **我們觀察到「$\boldsymbol{b|(a^2+5)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+5)}$」的一組解數列$\langle\mathbf{2,3,7,18,47,\cdots}\rangle$**

與盧卡斯數列$\langle \boldsymbol{b_n}\rangle=\langle\mathbf{2,1,3,4,7,11,18,29,47,\cdots}\rangle$的奇數項相符。

已知盧卡斯數列$\langle b_n\rangle$的奇數項正好是「$\boldsymbol{b|(a^2+5)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+5)}$」的一組解數列，而偶數項則為「$\boldsymbol{b|(a^2-5)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-5)}$」的一組解數列，那麼根據**定理 4.2.**找出其它h所滿足的遞迴式$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n(h\ge 5,n\ge 1)$之完整數列，是否也有相同的情形呢？我們試著列舉說明如下：

(1)當 h=8 時，其完整的數列為 $\langle 1,1,3,7,17,41,99,239,577,\cdots\rangle$，而奇數項數列正好是

「$\boldsymbol{b|(a^2+8)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+8)}$」的一組整數解數列$\langle 1,3,17,99,577,3363,\cdots\rangle$。

(2)當 h=13 時，其完整的數列為 $\langle\frac{2}{3},1,\frac{11}{3},12,\frac{119}{3},131,\frac{1298}{3},1429,\cdots\rangle$，

$a=\frac{2}{3}$ $(\frac{2}{3})^2+13=(\frac{11}{3})(\frac{11}{3})$ $b=\frac{11}{3}$ $(\frac{11}{3})^2+13=(\frac{2}{3})(\frac{119}{3})$

$a=\frac{11}{3}$ $b=\frac{119}{3}$ $(\frac{119}{3})^2+13=(\frac{11}{3})(\frac{1298}{3})$

$a=\frac{119}{3}$ $b=\frac{1298}{3}$ $(\frac{1298}{3})^2+13=(\frac{119}{3})(\frac{14159}{3})\cdots$

而奇數項數列$\langle\frac{2}{3},\frac{11}{3},\frac{119}{3},\frac{1298}{3},\frac{14159}{3},\cdots\rangle$恰為「$\boldsymbol{b|(a^2+13)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+13)}$」的一組有理數解數列。

(3)當 h=6 時，其完整的數列為$\langle\sqrt{2},1,2\sqrt{2},5,7\sqrt{2},19,26\sqrt{2},71,97\sqrt{2},\cdots\rangle$，

$a=\sqrt{2}$ $(\sqrt{2})^2+6=(2\sqrt{2})(2\sqrt{2})$ $b=2\sqrt{2}$ $(2\sqrt{2})^2+6=(\sqrt{2})(7\sqrt{2})$

$a=2\sqrt{2}$ $b=7\sqrt{2}$ $(7\sqrt{2})^2+6=(2\sqrt{2})(26\sqrt{2})$

$a=7\sqrt{2}$ $b=26\sqrt{2}$ $(26\sqrt{2})^2+6=(7\sqrt{2})(97\sqrt{2})\cdots$

而奇數項數列$\langle\sqrt{2},2\sqrt{2},7\sqrt{2},26\sqrt{2},97\sqrt{2},\cdots\rangle$恰為「$\boldsymbol{b|(a^2+6)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+6)}$」的一組無理數解數列。

結論 7.2. **從「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」推算出的完整數列中，奇數項數列恰為「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的整數、有理數或無理數解數列**

問題 7.3. **將「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的正整數解$\boldsymbol{(a,b)}$寫成數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$，並找出數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$分別相對應的廣義費氏數列$\boldsymbol{\langle b_n\rangle}$及其關聯性。**

我們仿照**定理 4.2.**的證明可得：$a_3=(x^2+2)a_2-a_1$，套入當$a_1=1$，$a_2=h+1$時的遞迴關係式 $a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n$，推得$x^2+2=h+2$，$x=\sqrt{h}$，因此我們一樣能找出屬於加法的完整數列，即$b_{n+2}=\sqrt{h}b_{n+1}+b_n(h\geq 1,n\geq 1)$。可得，

定理 7.4. **若數列$\boldsymbol{\langle b_n\rangle}$奇數項形成一數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$，且**

(1)$\boldsymbol{b_1=a_1=1}$；(2)$\boldsymbol{b_3=a_2=a_1^2+h=1+h}$；

(3)$\boldsymbol{a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n(h\geq 1,n\geq 1)}$，則 $\boldsymbol{b_{n+2}=\sqrt{h}b_{n+1}+b_n}$且$\boldsymbol{b_1=1}$。

[證明]

(1)設 $b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(h\geq 1,n\geq 1)$，

則 $b_5=xb_4+b_3$，$b_4=xb_3+b_2$，$b_3=xb_2+b_1$，

推得 $b_5=x(xb_3+b_2)+b_3=(x^2+1)b_3+xb_2=(x^2+1)b_3+(b_3-b_1)$，

所以 $b_5=(x^2+2)b_3-b_1$，即$a_3=(x^2+2)a_2-a_1$，又 $a_3=(h+2)a_2-a_1$，

比較係數得 $x^2+2=h+2\Rightarrow x^2=h$，故 $x=\sqrt{h}(h\geq 1)$。

(2)欲證 若$b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(n\geq 3)$，則$x=\sqrt{h}(h\geq 1)$。

設 $n\leq k$時，$b_{n+2}=xb_{n+1}+b_n(n\geq 3)$，且$x=\sqrt{h}(h\geq 1)$成立。

(i)若k為偶數$(k \geq 4)$，同(1)可得 $b_{k+1} = (x^2+2)b_{k-1} - b_{k-3} = (h+2)b_{k-1} - b_{k-3}$，

又 $b_{k+3} = (x^2+2)b_{k+1} - b_{k-1} = (h+2)b_{k+1} - b_{k-1}$，所以 $x = \sqrt{h}$。

因此 $b_{k+3} = xb_{k+2} + b_{k+1} = \sqrt{h}b_{k+2} + b_{k+1}$，

故 $n = k+1$時，$b_{n+2} = \sqrt{h}b_{n+1} + b_n$也成立。

(ii)若k為奇數$(k \geq 3)$，同(1)可得 $b_{k+2} = (x^2+2)b_k - b_{k-2} = (h+2)b_k - b_{k-2}$，

又 $b_{k+3} = (x^2+2)b_{k+1} - b_{k-1} = (h+2)b_{k+1} - b_{k-1}$，所以 $x = \sqrt{h}$。

因此 $b_{k+3} = xb_{k+2} + b_{k+1} = \sqrt{h}b_{k+2} + b_{k+1}$，

故 $n = k+1$時，$b_{n+2} = \sqrt{h}b_{n+1} + b_n$也成立。

由數學歸納法可知：$b_{n+2} = \sqrt{h}b_{n+1} + b_n (h \geq 1, n \geq 3)$恆成立。

(3)當 $b_{n+2} = \sqrt{h}b_{n+1} + b_n (h \geq 1, n \geq 1)$也成立時，

因為 $b_3 = \sqrt{h}b_2 + b_1$，且$b_1 = a_1 = 1$，$b_2 = 1+h$，所以 $b_3 = \sqrt{h}(1+h)+1$。

推知 $b_4 = \sqrt{h}b_3 + b_2 = \sqrt{h}\left[\sqrt{h}(1+h)+1\right] + 1 + h = h^2 + 2h + \sqrt{h} + 1$，Q.E.D。

演算方法 7.5. (計算$\langle b_n \rangle$的方法)

第一步驟：給定$h \in \mathbb{N}$，則進入第二步驟。

第二步驟：$a_1 = 1$，$a_2 = h+1$，$a_3 = a_2^2 + h$，進入第三步驟。

第三步驟：$a_{n+2} = (\frac{a_1+a_3}{a_2})a_{n+1} - a_n (n \geq 2)$，進入第四步驟。

第四步驟：$b_{2n-1} = a_n (n \geq 1)$，進入第五步驟。

第五步驟：$b_{2n} = \frac{b_{2n+1} - b_{2n-1}}{\sqrt{\frac{a_1+a_3}{a_2} - 2}} (n \geq 1)$，我們會得到計算$\langle b_n \rangle$的方法。

另外，此時的完整數列之間隔項是否也有**結論 7.2.**的相同情形呢？我們試著列舉說明如下：

(1)當$h=1$時，$\langle a_n\rangle =< 1,2,5,13,34,89,\ldots >$，$b_{n+2}=\sqrt{1}b_{n+1}+b_n$得完整的數列為

$\langle b_n\rangle =< 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots >$，$\langle b_n\rangle$恰為費氏數列，且根據之前的推論，我們檢驗使其構成完整數列的這些間隔項，是否也為「$\boldsymbol{b|(a^2-1)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-1)}$」之解數列：

a=1　$(1)^2-1=(0)(3)$　　b=3　$(3)^2-1=(1)(8)$

a=3　　　　　　　　　b=8　$(8)^2-1=(3)(21)$

a=8　　　　　　　　　b=21　$(21)^2-1=(8)(55)$

藉由計算結果得知：偶數項數列$\langle 1,3,8,21,55,\cdots\rangle$恰為「$\boldsymbol{b|(a^2-1)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-1)}$」的一組整數解數列。

(2)當 h=2 時，$\langle a_n\rangle =< 1,3,11,41,153,\ldots >$，$b_{n+2}=\sqrt{2}b_{n+1}+b_n$得完整的數列為

$\langle b_n\rangle=\langle 1,\sqrt{2},3,4\sqrt{2},11,15\sqrt{2},41,56\sqrt{2},153,209\sqrt{2},\cdots\rangle$，

$a=\sqrt{2}$　　$(\sqrt{2})^2-2=(0)(4\sqrt{2})$　　$b=4\sqrt{2}$　$(4\sqrt{2})^2-2=(\sqrt{2})(15\sqrt{2})$

$a=4\sqrt{2}$　　　　　　　　　　$b=15\sqrt{2}$　$(15\sqrt{2})^2-2=(4\sqrt{2})(56\sqrt{2})$

$a=15\sqrt{2}$　　　　　　　　　　$b=56\sqrt{2}$　$(56\sqrt{2})^2-2=(15\sqrt{2})(209\sqrt{2})$ ⋯

藉由計算結果得知：偶數項數列$\langle\sqrt{2},4\sqrt{2},15\sqrt{2},56\sqrt{2},209\sqrt{2},\cdots\rangle$恰為「$\boldsymbol{b|(a^2-2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-2)}$」的一組無理數解數列。

結論 7.6. **從「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」推算出的完整數列中，偶數項恰為「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的整數或無理數解數列**

演算方法 7.7. 找出「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的解數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$與遞迴式

$\boldsymbol{a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n}$的關係

根據**定理 5.3.**，在「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」解數列中，若$a_1=1$，$a_2=h+1$ 則公式為 $a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n$。除此之外，我們還找到了許多解數列都有 $a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$這種類型的遞迴式，並找出h 與x的關係，其過程如下：

已知$a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$，則 $a_3=(h+x)a_2-a_1$，推知 $\frac{a_2^2+h}{a_1}=(h+x)a_2-a_1$，

又因為 $a_1=1$，所以可得 $a_2^2+h=(h+x)a_2-1$，從而 $a_2^2-(h+x)a_2+(h+1)=0$，會得到以a_2為未知數的一元二次方程式，因此若假設其兩個正整數根為α,β，則由根與係數的關係：$\alpha\beta=h+1$， $\alpha+\beta=h+x$，可推得：$x=\alpha+\beta-h$，所以數列遞迴式的x值，除了α,β一個是 1，另一個是$h+1$時，可得$x=2$，解出其數列的遞迴關係式為 $a_{n+2}=(h+2)a_{n+1}-a_n$外，還可以找a_2的其它解α或β，從而式中的x值也可推導得出。

接著，我們找出「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」所有的解數列及其對應的遞迴式，當兩個解數列的首兩項a_1、a_2均相同，且其h值正好相差a_2時，兩者的遞迴關係式會有以下的關係：

結論 7.8. 在「$\boldsymbol{b|(a^2+h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2+h)}$」的解數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$中，若兩數列中的$\boldsymbol{a_1}$、$\boldsymbol{a_2}$均相同時$\boldsymbol{(a_1=1)}$，且$\boldsymbol{h}$值正好相差$\boldsymbol{a_2}$，則其遞迴關係式 $\boldsymbol{a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n}$的$\boldsymbol{x}$值會相差$\boldsymbol{a_2-1}$

[證明] 設$a_3=(h+x)a_2-a_1$，則 $x=\frac{a_1+a_3}{a_2}-h$，

因為$x_1=\frac{a_1+(a_2^2+h)}{a_2}-h$，所以$x_2=\frac{a_1+(a_2^2+h+a_2)}{a_2}-(h+a_2)$，

推知$x_1-x_2=\left[\frac{a_1+(a_2^2+h)}{a_2}-h\right]-\left[\frac{a_1+(a_2^2+h+a_2)}{a_2}-(h+a_2)\right]=\frac{-a_2}{a_2}+a_2=a_2-1$，

Q.E.D。

演算方法 7.9. 找出「$\boldsymbol{b|(a^2-h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2-h)}$」的解數列$\boldsymbol{\langle a_n\rangle}$與遞迴式

$\boldsymbol{a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n}$的關係

根據**定理 3.4.**，在「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」解數列中，若$a_0=1$，$a_1=h-1$則公式為 $a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n$。除此之外，我們還找到了許多解數列都有$a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$這種類型的遞迴式，並找出h 與x的關係，其過程如下：

已知$a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$，則 $a_2=(h+x)a_1-a_0$，推知 $\frac{a_1^2-h}{a_0}=(h+x)a_1-a_0$，又因為 $a_0=1$，所以可得 $a_1^2-h=(h+x)a_1-1$，從而 $a_1^2-(h+x)a_1+(-h+1)=0$，會得到以a_1為未知數的一元二次方程式，因此若假設其兩個整數根為α,β，則由根與係數的關係：$\alpha\beta=-h+1$， $\alpha+\beta=h+x$，可推得：$x=\alpha+\beta-h$，所以數列遞迴式的x值，除了α,β一個是-1，另一個是$h-1$時，可得$x=-2$，解出其數列的遞迴關係式為 $a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n$外，還可以找a_1的其它解α或β，但必須滿足$a_1^2-h>2$，從而式中的x值也可推導得出。

捌、研究結果

一、將「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$，($a^2>h$，$h\geq 4$且 $a\neq b$，$0<a_1<a_2<a_3$)，若此數列的a_0項皆為 1，首項a_1皆為$h-1$或是$h-1$的因數(1 除外)，且滿足$a_2=a_1^2-h>2$，則第三項以後的數字可由遞迴式 $a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$導出，此時$x=\frac{a_0+a_2}{a_1}-h$。

二、滿足「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」且$a_0=1$，$a_1=h-1$，其解數列$\langle a_n\rangle$是由廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$的隔項所組成，且$\langle b_n\rangle$的遞迴式為$b_{n+2}=\sqrt{h-4}b_{n+1}+b_n$，其中$h\geq 5, n\geq 1$，$b_1=\frac{2}{\sqrt{h-4}}$。此時原問題的解數列$\langle a_n\rangle$正好是$\langle b_n\rangle$的偶數項數列。

三、將「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$，若設此數列的首項a_1皆為1，第二項a_2皆為$h+1$或是$h+1$的因數(1 除外)，$a_3=a_2^2+h$，則第四項以後的數字可由遞迴式$a_{n+2}=(h+x)a_{n+1}-a_n$導出，此時$x=\frac{a_1+a_3}{a_2}-h$。

四、滿足「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」且$a_1=1$，$a_2=h+1$，其解數列$\langle a_n\rangle$是由廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$的隔項所組成，且$\langle b_n\rangle$的遞迴式為$b_{n+2}=\sqrt{h}b_{n+1}+b_n$，其中$h\geq 1, n\geq 1$，$b_1=1$。此時原問題的解數列$\langle a_n\rangle$正好是$\langle b_n\rangle$的奇數項數列。

五、從「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」推算出的完整數列中，奇數項數列恰為「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的整數、有理數或無理數解數列。

六、從「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」推算出的完整數列中，偶數項數列恰為「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」的整數或無理數解數列。

七、若$h=k$有一個解數列 $<a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots>$滿足「$b|(a^2\pm h^2)$，$a|(b^2\pm h^2)$」，則同時會存在一個 $h=dk$，且首項為 da_1的解數列

$< da_1, da_2, da_3, da_4, \cdots, da_n, da_{n+1}, da_{n+2}, \cdots >$ 也滿足「$b|(a^2 \pm h^2)$，$a|(b^2 \pm h^2)$」。

八、若「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的解數列為$\langle a_n \rangle$，則「$b|(a^2 \pm nh)$，$a|(b^2 \pm nh)$」的解數列$\langle c_n \rangle$之遞迴關係式與$\langle a_n \rangle$相同，其中$c_n = \sqrt{n} a_n$。

玖、結論

一、「$b|(a^2 - h)$，$a|(b^2 - h)$」的正整數解(a, b)，若設$a_1 = h - 1$，$a_2 = {a_1}^2 - h$，則其解恰為遞迴數列 $a_{n+2} = (h-2)a_{n+1} - a_n$的任意相鄰兩項，即$(a, b) = (a_n, a_{n+1})$。

二、「$b|(a^2 - h)$，$a|(b^2 - h)$」的一組解(a, b)，恰為廣義費氏數列$\langle b_n \rangle$：

$b_{n+2} = \sqrt{h-4}\, b_{n+1} + b_n$的偶數項中任意相鄰兩項，即$(a, b) = (b_{2n}, b_{2n+2})$。

三、「$b|(a^2 + h)$，$a|(b^2 + h)$」的正整數解(a, b)，若設$a_1 = 1$，$a_2 = h + 1$，則其解恰為遞迴數列 $a_{n+2} = (h+2)a_{n+1} - a_n$的任意相鄰兩項，即$(a, b) = (a_n, a_{n+1})$。

四、「$b|(a^2 + h)$，$a|(b^2 + h)$」的一組解(a, b)，恰為廣義費氏數列$\langle b_n \rangle$：

$b_{n+2} = \sqrt{h}\, b_{n+1} + b_n$的奇數項中任意相鄰兩項，即$(a, b) = (b_{2n-1}, b_{2n+1})$。

五、「$b|(a^2 \pm nh)$，$a|(b^2 \pm nh)$」的一組解(a, b)，恰為「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的一組解(a, b)的$\sqrt{n}$倍。

六、將「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的正整數解(a, b)寫成數列$\langle a_n \rangle$，則$\langle a_n \rangle$可由遞迴式 $a_{n+2} = (h+x)a_{n+1} - a_n$導出，此時$x = \frac{a_1 + a_3}{a_2} - h$。

七、滿足「$b|(a^2 \pm h)$，$a|(b^2 \pm h)$」的解數列$\langle a_n \rangle$是由廣義費氏數列$\langle b_n \rangle$的隔項所組成，且$\langle b_n \rangle$的遞迴式為$b_{n+2} = \sqrt{\frac{a_1 + a_3}{a_2} - 2} \times b_{n+1} + b_n$。

拾、參考資料

[1]. 森棚教官的數學題。國立台灣科學教育館--科學研習月刊。第 **56** 卷第 **12** 期。

56-12-10 互相牽制_3479.pdf 上網日期：**110** 年 **1** 月 **23** 日

[2]. 李妙芸、張愷庭、李沛蓁。互相牽制—原來與 **Lucas(**盧卡斯**)**數列有關

https://www.shs.edu.tw/works/essay/2019/10/2019102910001095.pdf

上網日期：**110** 年 **1** 月 **23** 日

[3]. 數學大觀念：從數字到微積分，全面理解數學的 **12** 大觀念。取自

https://reurl.cc/k5rXxG 上網日期：**110** 年 **1** 月 **23** 日

[4]. 涌井良幸著。陳識中譯。大人的數學教室。東販出版社，**P184~185**。

[5]. 許志農。**108** 課綱 普通高級中學 數學 **A** 冊。龍騰出版社，**P2~23**。

#【評語】050417

此作品聚焦討論推廣原動機問題，得到許多觀察，從而證得不少結果，包括 Cassini 等式、遞增性質、h 的唯一性等等。接著試著改變 h 的的值，從而得到解的變化.整體作品有清晰的脈絡，而且思考自然.原題的解不止僅有 Lucas 數列的項，還包含一些解沒有找出，這些解亦會有一些好的數學隱藏其中，建議可以往這個方向作更細緻的分析。改變 h 從而觀察解的變化有數學味道，是相當不錯的想法，亦可以往這個方向做更進一步的理論探討。整體來說是一個不錯的作品。

作品簡報

牽制數列

高中組　數學科

$$\begin{cases} b\mid(a^2-h) \\ a\mid(b^2-h) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b\mid(a^2+h) \\ a\mid(b^2+h) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b\mid(a^2\pm h^2) \\ a\mid(b^2\pm h^2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b\mid(a^2\pm nh) \\ a\mid(b^2\pm nh) \end{cases}$$

壹、研究動機

「森棚教官的數學題」原題

可以找到多少組正整數對(a,b)滿足

$$\begin{cases} a^2-5\text{是}b\text{的倍數} \\ b^2-5\text{是}a\text{的倍數} \end{cases}$$

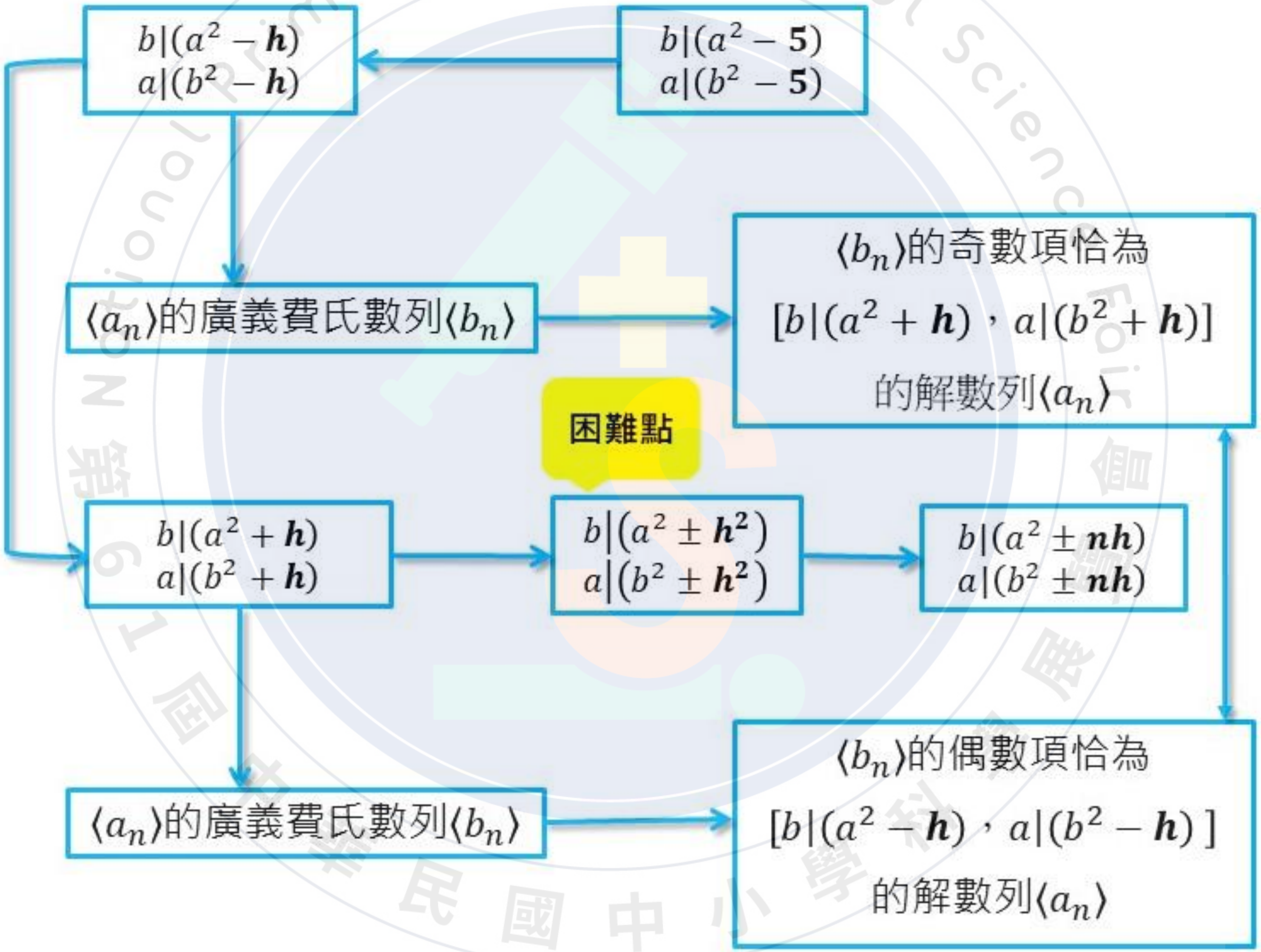
貳、研究目的

一、將$\begin{cases} b|(a^2-h) \\ a|(b^2-h) \end{cases}$、$\begin{cases} b|(a^2+h) \\ a|(b^2+h) \end{cases}$、$\begin{cases} b|(a^2\pm h^2) \\ a|(b^2\pm h^2) \end{cases}$、$\begin{cases} b|(a^2\pm nh) \\ a|(b^2\pm nh) \end{cases}$

的解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$，並觀察其規律性。(h為任意正整數)

二、找出「$b|(a^2\pm h)$，$a|(b^2\pm h)$」的解數列$\langle a_n\rangle$對應的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$。

參、研究架構



$b|(a^2-\boldsymbol{h})$
$a|(b^2-\boldsymbol{h})$
$b|(a^2-\mathbf{5})$
$a|(b^2-\mathbf{5})$
$\langle a_n\rangle$的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$
$\langle b_n\rangle$的奇數項恰為
$[b|(a^2+\boldsymbol{h})，a|(b^2+\boldsymbol{h})]$
的解數列$\langle a_n\rangle$
困難點
$b|(a^2+\boldsymbol{h})$
$a|(b^2+\boldsymbol{h})$
$b|(a^2\pm\boldsymbol{h}^2)$
$a|(b^2\pm\boldsymbol{h}^2)$
$b|(a^2\pm\boldsymbol{nh})$
$a|(b^2\pm\boldsymbol{nh})$
$\langle a_n\rangle$的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$
$\langle b_n\rangle$的偶數項恰為
$[b|(a^2-\boldsymbol{h})，a|(b^2-\boldsymbol{h})]$
的解數列$\langle a_n\rangle$

肆、a^2-h是b的倍數，b^2-h是a的倍數

$$a_n{}^2-h=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$$

h值	$a_1=h-1$	數列
4	$a_0=1$	$\langle 3,5,7,9,11,13\cdots\rangle$
5	1	$\langle 4,11,29,76,199,521,\cdots\rangle$

$h=5$的數列$\langle a_n\rangle$		a_0		a_1		a_2		a_3
廣義費氏數列	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
(盧卡斯)$\langle b_n\rangle$	2	1	3	4	7	11	18	29

$$a_3=3a_2-a_1$$

$$a_{n+2}=(h-2)a_{n+1}-a_n$$

$$\boxed{b_{n+2}=x\cdot b_{n+1}+b_n}$$

$$\boxed{a_3=(x^2+2)a_2-a_1}$$

$$x=\sqrt{h-4}$$

伍、廣義費氏數列(一)

$$b_{n+2} = x \cdot b_{n+1} + b_n \longrightarrow x = \sqrt{h-4}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = h - 1$

	x	廣義費氏數列規律
$h = 5$	$x = 1$	$b_{n+2} = 1b_{n+1} + b_n$
$h = 6$	$x = \sqrt{2}$	$b_{n+2} = \sqrt{2}b_{n+1} + b_n$
$h = 7$	$x = \sqrt{3}$	$b_{n+2} = \sqrt{3}b_{n+1} + b_n$
$h = 8$	$x = 2$	$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$
$h = 9$	$x = \sqrt{5}$	$b_{n+2} = \sqrt{5}b_{n+1} + b_n$
$h = 10$	$x = \sqrt{6}$	$b_{n+2} = \sqrt{6}b_{n+1} + b_n$
$h = 11$	$x = \sqrt{7}$	$b_{n+2} = \sqrt{7}b_{n+1} + b_n$

陸、a^2+h是b的倍數，b^2+h是a的倍數

$$a_n{}^2 + h = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$h=1 \rightarrow a_3 = 3a_2 - a_1$

$h=2 \rightarrow a_3 = 4a_2 - a_1$

$h=3 \rightarrow a_3 = 5a_2 - a_1$

$h=4 \rightarrow a_3 = 6a_2 - a_1$

$h=5 \rightarrow a_3 = 7a_2 - a_1$

$$a_{n+2} = (h+2)a_{n+1} - a_n$$

h值	數列
1	$\langle 1,2,5,13,34,89\cdots \rangle$
2	$\langle 1,3,11,41,153,571\cdots \rangle$
3	$\langle 1,4,19,91,436,2089\cdots \rangle$
	a_2 $\langle 1,2,7,26,97,362\cdots \rangle$
4	$\langle 1,5,29,169,985,5741\cdots \rangle$
5	$\langle 1,6,41,281,1926,13201\cdots \rangle$
	a_2 $\langle 1,2,9,43,206,987\cdots \rangle$
	$\langle 1,3,14,67,321,1538\cdots \rangle$

柒、$a^2 \pm h$是b的倍數，$b^2 \pm h$是a的倍數

$$a_{n+2} = (h+x)a_{n+1} - a_n \longrightarrow x = \frac{a_1 + a_3}{a_2} - h$$

h值	數列	x值
1	$\langle 1,2,5,13,34,89\cdots\rangle$	2
2	$\langle 1,3,11,41,153,571\cdots\rangle$	2
3	$\langle 1,4,19,91,436,2089\cdots\rangle$	2
	$\langle 1,2,7,26,97,362\cdots\rangle$	1
4	$\langle 1,5,29,169,985,5741\cdots\rangle$	2
5	$\langle 1,6,41,281,1926,13201\cdots\rangle$	2
	$\langle 1,2,9,43,206,987\cdots\rangle$	0
	$\langle 1,3,14,67,321,1538\cdots\rangle$	0

a_2

$a_2 - 1$

「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」

數列
$h = 11$ $\langle 10,89,791,7030,\cdots\rangle$ $\langle 5,14,37,97,254,\cdots\rangle$
$h = 13$ $\langle 12,131,1429,15588,\cdots\rangle$ $\langle 6,23,86,321,1198,\cdots\rangle$

$a_1^2 - h > 2$

捌、廣義費氏數列(二)

$b_{n+2} = x \cdot b_{n+1} + b_n$ → $a_3 = (x^2+2)a_2 - a_1$

$a_{n+2} = (h+2)a_{n+1} - a_n$

$a_1 = 1$，
$a_2 = h+1$

→ $x = \sqrt{h}$

當$h = 1$時，其完整的數列$\langle b_n \rangle = <1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89\ldots>$，

恰好為費波那契數列，且公式為$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$

$b_{n+2} = x \cdot b_{n+1} + b_n$ → $a_3 = (x^2+2)a_2 - a_1$

$a_{n+2} = (h+x)a_{n+1} - a_n$ → $a_{n+2} = \left(\frac{a_1+a_3}{a_2}\right)a_{n+1} - a_n$

→ $x = \sqrt{\frac{a_1+a_3}{a_2} - 2}$

玖、$a^2 \pm nh$是b的倍數，$b^2 \pm nh$是a的倍數

h值	解數列
1	$\langle 1,2,5,13,34,89,233,\cdots\rangle$
2	$\langle 1,5,29,169,985,5741,\cdots\rangle$
	$\langle 2,4,10,26,68,178,466,\cdots\rangle$
3	$\langle 1,10,109,1189,12970,141481,\cdots\rangle$
	$\langle 1,2,13,89,610,4181,\cdots\rangle$
	$\langle 1,5,34,233,1597,10946,\cdots\rangle$
	$\langle 3,6,15,39,102,267,699,\cdots\rangle$
4	$\langle 1,17,305,5473,98209,172289,\cdots\rangle$
	$\langle 2,10,58,338,1970,11482,\ldots\rangle$
	$\langle 4,8,20,52,136,356,932,\cdots\rangle$

「$\boldsymbol{b|(a^2 \pm h^2)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 \pm h^2)}$」的解數列$\langle a_n\rangle$

「$\boldsymbol{b|(a^2 \pm h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 \pm h)}$」之解數列$\langle a_n\rangle$

$\sqrt{\boldsymbol{n}}$倍

「$\boldsymbol{b|(a^2 \pm nh)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 \pm nh)}$」之解數列$\langle c_n\rangle$

拾、$\langle c_n \rangle$演算方法

第一步驟：給定n，$h \in \mathbb{N}$，若$n = 1$，則進入第二步驟，否則進入第四步驟。

第二步驟：$c_1 = 1$，$c_2 = h + 1$，$c_3 = c_2^2 + h$，進入第三步驟。

第三步驟：$c_{n+2} = (\frac{c_1+c_3}{c_2})c_{n+1} - c_n (n \geq 2)$，我們會得到計算$\langle c_n \rangle$的方法。

第四步驟：$c_1 = \sqrt{n}$，$c_2 = (h+1)\sqrt{n}$，$c_3 = \frac{c_2^2+nh}{c_1}$，進入第三步驟。

拾壹、研究討論

「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」

盧卡斯數列 $\langle b_n \rangle$		$\langle 2$	1	3	4	7	11	18	29	$\cdots \rangle$
$-h$	6	$\langle \sqrt{2}$	1	$2\sqrt{2}$	5	$7\sqrt{2}$	19	$26\sqrt{2}$	71	$\cdots \rangle$
	8	$\langle 1$	1	3	7	17	41	99	239	$\cdots$
	13	$\langle \frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	12	$\frac{119}{3}$	131	$\frac{1298}{3}$	1429	$\cdots \rangle$
$+h$	3	$\langle 1$	$\sqrt{3}$	4	$5\sqrt{3}$	19	$24\sqrt{3}$	91	$115\sqrt{3}$	$\cdots \rangle$

「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」

拾貳、結論

一、$\begin{cases} b|(a^2-h) \\ a|(b^2-h) \end{cases}$

$\boldsymbol{a_0 = 1}$

$\boldsymbol{a_1 = h-1}$**或**$\boldsymbol{h-1}$**的因數**

$\begin{cases} b|(a^2+h) \\ a|(b^2+h) \end{cases}$

$\boldsymbol{a_1 = 1}$

$\boldsymbol{a_2 = h+1}$**或**$\boldsymbol{h+1}$**的因數**

$$\boxed{\boldsymbol{a_{n+2} = (h+x)a_{n+1} - a_n}\text{，其中 }\boldsymbol{x = \frac{a_1+a_3}{a_2} - h}}$$

$\begin{cases} b|(a^2 \pm nh) \\ a|(b^2 \pm nh) \end{cases}$

$\boldsymbol{b|(a^2 \pm h)}$，$\boldsymbol{a|(b^2 \pm h)}$ **的一組解**$\boldsymbol{(a,b)}$**的**$\boldsymbol{\sqrt{n}}$**倍**

$$\boxed{b_{n+2} = x \cdot b_{n+1} + b_n}$$

二、$\begin{cases} b|(a^2 \pm h) \\ a|(b^2 \pm h) \end{cases}$ 廣義的費氏數列

$$\boxed{\boldsymbol{b_{n+2} = \sqrt{\frac{a_1+a_3}{a_2} - 2} \cdot b_{n+1} + b_n}}$$