

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 數學科

佳作

050415

遠近高低皆相同—圓錐曲線的等視角軌跡研究

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者： 高二 林郁晴 高二 徐舒庭	指導老師： 張寶文
-------------------------	--------------

關鍵詞：圓錐曲線、視角、密切圓

摘要

本研究旨在探討圓錐曲線的等視角軌跡。我們利用幾何方法和過曲線外一點的兩切線夾角之 $\cot \theta$ 值恆等的條件求得：線段的等視角軌跡為兩對稱圓弧；圓的等視角軌跡為圓；拋物線的為單支雙曲線，且視角互補的軌跡恰為一雙曲線，視角 90° 時軌跡為其準線。

由於不同觀測點位置對雙曲線作切線的情況不同，只有在漸近線同號區能定義等視角軌跡，故我們擴充視角的定義，並提出等切線夾角軌跡來研究雙曲線的軌跡。橢圓的等視角軌跡和雙曲線等切線夾角軌跡皆為含根式的二次曲線，視角 90° 時軌跡為兩者的準圓。我們討論兩圖形的相似特徵：找出圖形凹向改變的條件，並以實驗數據說明軌跡的兩側近似於軌跡與 y 軸交點的密切圓(*Osculating Circle*)。期待能以研究結果解決一些視覺問題。

壹、研究動機

生活中，我們在拍攝或觀看一物體時，視角會因觀測點的位置遠近不同而變化，而視角的大小決定了成像及視野範圍，尤其攝影器材的視角是固定的，若我們隨便選一個位置拍攝，影像很可能會如同蘇軾著名的詩句：「橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同」一般，視角並不固定。因此我們思考到觀測點沿著什麼軌跡移動時，視角會恆等。於是我們以圓錐曲線為研究對象，探討其等視角軌跡。

貳、研究目的

研究線段、圓、拋物線、橢圓、雙曲線的等視角軌跡及軌跡圖形特性。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、數學繪圖軟體 GGB

肆、研究過程或方法

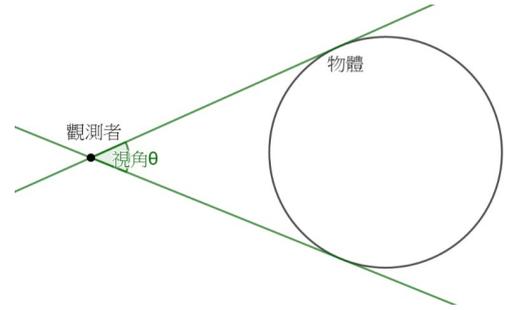
一、基本假設與名詞定義

(一)基本假設：光線在均勻介質中以直線傳播。

(二)名詞定義：

1. 視角 θ ：物體兩端所發出的光在觀測者眼中匯聚的夾角為 $\theta(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ ，如圖。

倘若觀測點能完整觀測物體，則視角會等於觀測點對物體所作的兩切線夾角之一。兩直線的夾角有兩個： θ 及 $(180^\circ - \theta)$ ，但實際上我們只要 θ 一解，因此在研究過程中我們會以兩切線的關係來判斷視角 θ 。



2. 等視角軌跡：平面上，曲線外所有對該曲線視角相等的點所形成的軌跡。

二、研究方法

對於固定長度的線段和圓的等視角軌跡可用直觀的幾何方法證明；對拋物線、橢圓及雙曲線，我們以曲線的等視角軌跡上的點對其所作的兩切線夾角皆相等的想法找出軌跡方程式。

一般求兩直線夾角 θ 會利用 $\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ ，其中 m_1, m_2 分別為兩直線斜率，但 $\cot \theta$ 在視角

範圍內 ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) 才皆有定義且為一對一函數，故我們採用 $\cot \theta = \pm \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$ 來計算。

我們利用陳一理[5]書中已知切線斜率的切線方程式(p.104、p.190、p.279)假設過曲線外一點的兩條切線方程式，再參考羅美音、蘇映竹[6]討論橢圓切線夾定角的方式，先找出兩斜率

滿足的關係式，再代入 $\cot \theta = \pm \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$ 化簡得到等視角軌跡並畫圖討論。

陳一理[5]書中提到當兩切線垂直時，拋物線的切線交點軌跡為其準線(p.107)，橢圓、雙曲線的切線交點軌跡則為一圓(p.191、p.281)。羅美音、蘇映竹[6]提出橢圓切線交點軌跡，但沒有特別區別何者為切線夾角是銳角或鈍角時的軌跡圖形；文中亦提及當切線夾角愈接近直角或橢圓長、短軸長度愈接近時，切線交點軌跡會愈接近一圓。

(一)線段的等視角軌跡

在研究圓錐曲線的等視角軌跡前，我們先從一固定長度的線段開始研究。剛開始我們

是以兩方向向量的夾角為定值著手，試著以代數的方式推論出軌跡。用 GGB 畫出圖形後，才發現這其實是四點共圓的一個應用。

我們定義觀測點對於線段的視角為觀測點到線段兩端點的連線之夾角。

【定理一】：平面上線段 \overline{AB} ，其等視角 θ 的軌跡為以 \overline{AB} 為對稱軸的兩圓弧，而圓弧所在的圓半徑為 $\frac{\overline{AB}}{2} \csc \theta$ 。

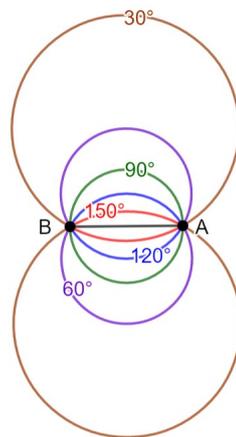
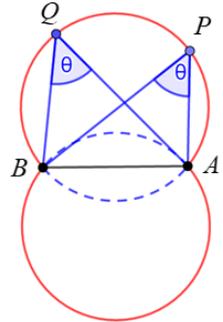
【證明】：

如圖，令平面上 \overline{AB} 的同側有兩點 P 、 Q ，

$\angle APB = \angle AQB = \theta$ 且兩者同對應至 \overline{AB} 另一側的弧 AB ，其中弧 AB 為 A 、 B 、 P 、 Q 四點共圓上的圓弧，即圖中的虛線。

同理， \overline{AB} 的另一側亦同。

因此，對 \overline{AB} 的等視角 θ 軌跡為一以 \overline{AB} 為對稱軸的兩對稱圓弧，即圖中的兩紅色實線圓弧，且根據正弦定理，該圓弧所在的圓半徑為 $\frac{\overline{AB}}{2} \csc \theta$ 。



圖(一)：線段的等視角軌跡

(二)圓的等視角軌跡

【定理二】：平面上半徑為 r 的圓，其等視角 θ 的軌跡是半徑為 $r \csc \frac{\theta}{2}$ 的同心圓。

【證明】：

如圖，設平面上圓心為 O ，半徑為 r 。並設圓外相異兩點 P 、 Q 對圓的視角皆為 θ ，且 P 、 Q 對圓作切線的切點分別為 A 、 B 和 C 、 D 。

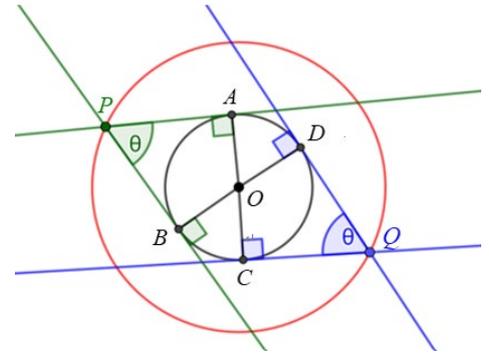
$\therefore \angle APB = \angle CQD = \theta$ ，且 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 分別為 $\angle APB$ 、 $\angle CQD$ 的角平分線。

$$\therefore \angle OPA = \angle OPB = \angle OQC = \angle OQD = \frac{\theta}{2}$$

又 $\square OPA$ 和 $\square OQC$ 中， $\angle OPA = \angle OQC = \frac{\theta}{2}$ ，

$$\angle OAP = \angle OCQ = 90^\circ, \overline{OA} = \overline{OC} = r,$$

$\therefore \square OPA \cong \square OQC (AAS)$ ，故 $\overline{OP} = \overline{OQ} = r \csc \frac{\theta}{2}$



因此所有滿足對圓的視角為 θ 的點與圓心 O 的距離皆為 $r \csc \frac{\theta}{2}$ ，故平面上半徑為 r

的圓，其等視角 θ 軌跡是半徑為 $r \csc \frac{\theta}{2}$ 的同心圓，即上圖紅色的圓。

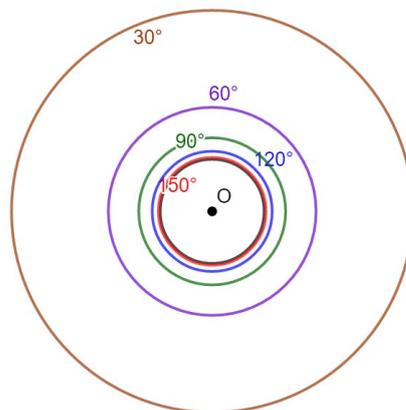


由【定理二】知視角愈大，軌跡半徑愈小，愈接近觀測物體，結論合乎我們的想像。

我們於表(一)列出圓半徑 $r=1$ 時，不同視角 θ 下的等視角軌跡半徑 r_θ ，並繪圖於圖(二)。

表(一)： $r=1$ 時，不同視角 θ 下的等視角軌跡半徑 r_θ

視角大小 θ	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 150^\circ$
軌跡半徑 r_θ	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$



圖(二)：表(一)中不同視角下的等視角軌跡

(三)拋物線的等視角軌跡

不失一般性，我們僅考慮開口向上的拋物線 $\Gamma_1: x^2 = 4ky, k > 0$ 的等視角軌跡。

【定理三】：平面上，開口向上拋物線 $\Gamma_1: x^2 = 4ky, k > 0$ 的等視角 θ 軌跡

(i) $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡為拋物線 Γ_1 的準線： $y = -k$ ；

(ii) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 時，軌跡為上下開的雙曲線的下半支，其方程式為

$$-\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta + 1)} + \frac{(y + k(2\cot^2 \theta + 1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta + 1))} = 1, \text{ 其中 } y < -k ;$$

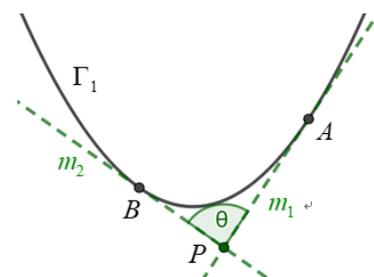
(iii) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 時，軌跡為上下開的雙曲線的上半支，其方程式為

$$-\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta + 1)} + \frac{(y + k(2\cot^2 \theta + 1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta + 1))} = 1, \text{ 其中 } y > -k .$$

【證明】：

1° 令拋物線 Γ_1 外一點 $P(x_0, y_0)$ ，其中 $y_0 < \frac{1}{4k}x_0^2$ 。

如圖，過 P 對 Γ_1 作兩條切線 \overline{PA} 及 \overline{PB} ，其中 A 、 B 為切點，並令 \overline{PA} 的斜率為 m_1 ， \overline{PB} 的斜率為 m_2 ，且 $m_1 > m_2$ 。令視角 θ 為 \overline{PA} 和 \overline{PB} 的夾角。



2° 已知 $\Gamma_1: x^2 = 4ky$ 上斜率為 m 的切線公式為 $y = mx - km^2$ 。

又兩切線 $\overline{PA}: y = m_1x - km_1^2$ 及 $\overline{PB}: y = m_2x - km_2^2$ 交於 $P(x_0, y_0)$ ，

故 m_1 、 m_2 為 m 的二次方程式 $y_0 = mx_0 - km^2$ 的兩根。

又 $y_0 = mx_0 - km^2 \Rightarrow km^2 - x_0m + y_0 = 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} m_1 + m_2 = \frac{x_0}{k} \\ m_1 m_2 = \frac{y_0}{k} \end{cases} \Rightarrow m_2 - m_1 = -\sqrt{\left(\frac{x_0}{k}\right)^2 - 4 \cdot \frac{y_0}{k}} = -\frac{1}{k} \sqrt{x_0^2 - 4ky_0} \quad (\because m_1 > m_2)$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1} = \frac{k + y_0}{-\sqrt{x_0^2 - 4ky_0}} .$$

3° (i) $\theta = 90^\circ$ 時， $\cot \theta = 0 \Rightarrow k + y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -k$ 。

此時的等視角軌跡為拋物線 Γ_1 的準線： $y = -k$ 。

$$(ii) \theta \neq 90^\circ \text{ 時, } \cot \theta = \frac{k+y}{-\sqrt{x^2-4ky}} \Rightarrow k+y = -\cot \theta \sqrt{x^2-4ky}$$

$$\Rightarrow \cot^2 \theta x^2 - y^2 - 4k \cot^2 \theta y - 2ky = k^2$$

$$\Rightarrow -\cot^2 \theta x^2 + (y+k(2\cot^2 \theta+1))^2 = 4k^2 \cot^2 \theta (\cot^2 \theta+1)$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta+1)} + \frac{(y+k(2\cot^2 \theta+1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta+1))} = 1$$

$$\text{當 } 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ 時, } \cot \theta = \frac{k+y}{-\sqrt{x^2-4ky}} > 0 \Rightarrow k+y < 0 \Rightarrow y < -k,$$

$$\text{故此時的等視角軌跡為 } -\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta+1)} + \frac{(y+k(2\cot^2 \theta+1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta+1))} = 1, y < -k;$$

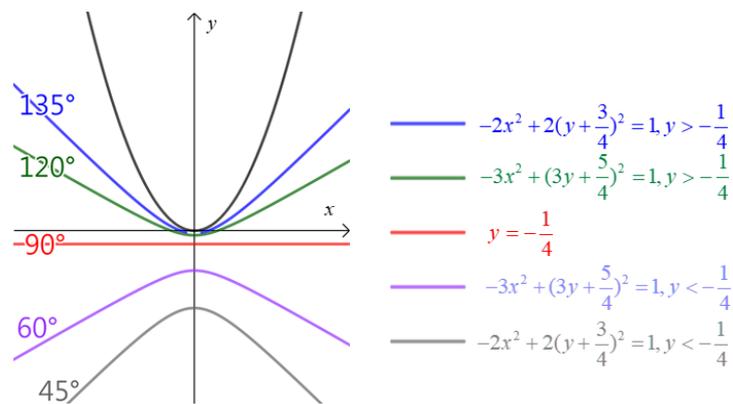
即為上下開的雙曲線的下半支。

$$\text{當 } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ 時, } \cot \theta = \frac{k+y}{-\sqrt{x^2-4ky}} < 0 \Rightarrow k+y > 0 \Rightarrow y > -k,$$

$$\text{故此時的等視角軌跡為 } -\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta+1)} + \frac{(y+k(2\cot^2 \theta+1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta+1))} = 1, y > -k,$$

即為上下開的雙曲線的上半支。

■



圖(三)：拋物線 $y = x^2$ 的等視角軌跡

(四) 橢圓的等視角軌跡

不失一般性，我們考慮橢圓 $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的等視角軌跡。

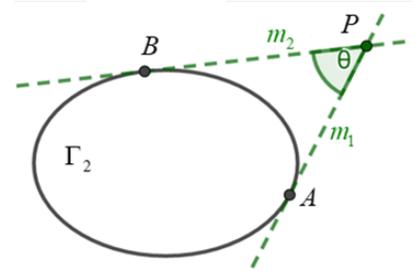
【定理四】：平面上，橢圓 $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} .$$

在 $\theta = 90^\circ$ 時，該軌跡為橢圓 Γ_2 的準圓： $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。

【證明】：

1° 令過 Γ_2 外一點 $P(x_0, y_0)$ (即 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$) 對其作兩條切線 \overline{PA} 及 \overline{PB} ，其中 A 、 B 為切點，並分別令斜率為 m_1 、 m_2 且 $m_1 > m_2$ ；若其中一條切線為鉛直線，則令其為 $\overline{PB}: x = x_0$ 且該直線斜率不存在。



而視角 θ 即為 \overline{PA} 和 \overline{PB} 的夾角，且 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。

2° 已知 $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上斜率為 m 的切線公式為 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ 。

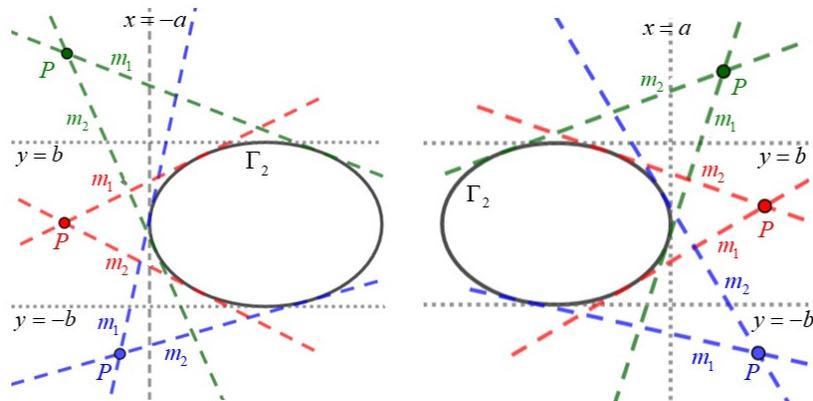
因兩切線交於點 $P(x_0, y_0)$ ，故 m_1 、 m_2 為 m 的方程式 $(y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 + b^2$ 的根。

$$\text{又 } (y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 + b^2 \Rightarrow (x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0 y_0 m + (y_0^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}, m_1 m_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}, \text{ 又 } m_1 > m_2$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = \sqrt{\left(\frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}\right)^2 - 4\left(\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}\right)} = \frac{2\sqrt{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2}}{|x_0^2 - a^2|}$$

(i) 當 $|x_0| > a$ 時， $\cot \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$ ，如下圖。



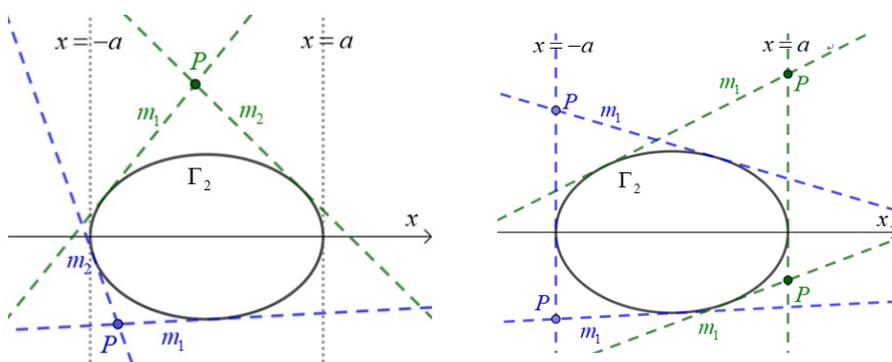
$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2} = \frac{1+\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}}{\frac{2\sqrt{a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2}}{x_0^2-a^2}} = \frac{x_0^2-a^2+y_0^2-b^2}{2\sqrt{a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2}}$$

故 $|x| > a$ 時的等視角軌跡為 $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}$ 。

(ii) 當 $|x_0| < a$ 時， $\cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_2-m_1}$ ，如下圖左。

$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_2-m_1} = \frac{1+\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}}{\frac{2\sqrt{a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2}}{-(x_0^2-a^2)}} = \frac{x_0^2-a^2+y_0^2-b^2}{2\sqrt{a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2}}$$

故 $|x| < a$ 時的等視角軌跡亦為 $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}$ 。



(iii) 當 $|x_0| = a$ 時，如上圖右。

此時 m_2 不存在，但 m_1 仍會滿足 $(y_0 - m_1x_0)^2 = a^2m_1^2 + b^2$ 。

又 $|x_0| = a$ ，化簡上式： $y_0^2 - 2m_1x_0y_0 + \cancel{m_1^2x_0^2} = \cancel{a^2m_1^2} + b^2 \Rightarrow m_1 = \frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0}$ 。

故 $x_0 = a, y_0 > 0$ 時， $\cot \theta = m_1 = \frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0} = \frac{y_0^2 - b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 - b^2 = 2a \cot \theta y_0$ ；

$x_0 = -a, y_0 > 0$ 時， $\cot \theta = -m_1 = -\frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0} = \frac{y_0^2 - b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 - b^2 = 2a \cot \theta y_0$ ；

$x_0 = a, y_0 < 0$ 時， $\cot \theta = -m_1 = -\frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0} = -\frac{y_0^2 - b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 - b^2 = -2a \cot \theta y_0$ ；

$x_0 = -a, y_0 < 0$ 時， $\cot \theta = m_1 = \frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0} = -\frac{y_0^2 - b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 - b^2 = -2a \cot \theta y_0$ 。

綜合以上可得： $|x_0| = a$ 時， $y_0^2 - b^2 = 2a \cot \theta |y_0|$ 。

故 $|x|=a$ 時的等視角軌跡為 $y^2 - b^2 = 2a \cot \theta |y|$ ，此亦為

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} \text{ 在 } |x|=a \text{ 時的特例。}$$

由(i)~(iii)的討論可知：橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0, a \neq b)$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} \text{。}$$

而當 $\theta = 90^\circ$ 時，上式可整理為 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，此為橢圓 $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的準圓。

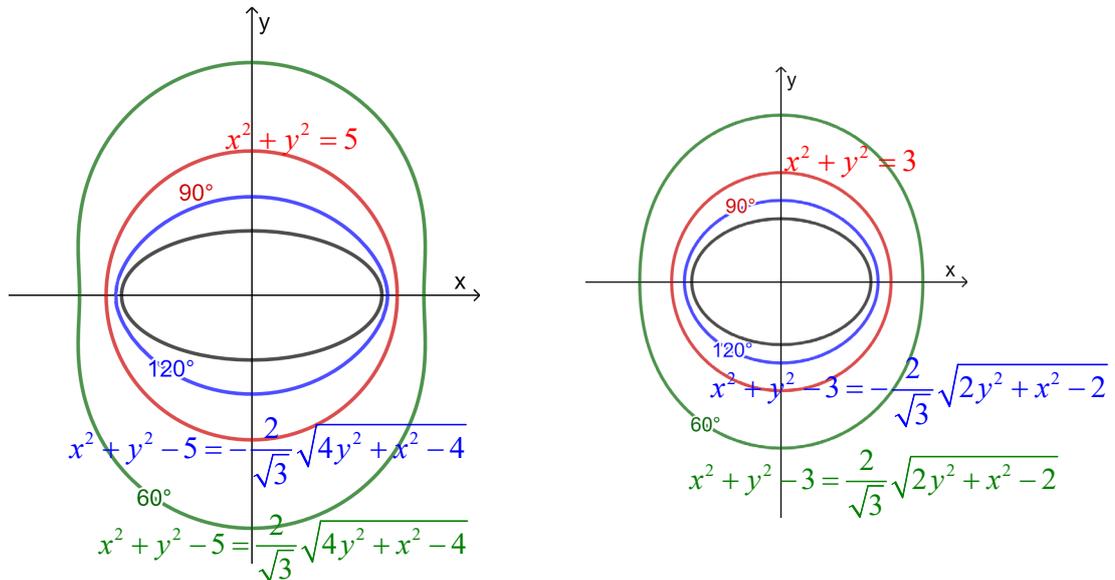
■

上述【定理四】中的證明當 $a=b$ 時亦成立，即 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - 2a^2 = 2a \cot \theta \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \text{。令 } t = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \text{，則 } t \text{ 滿足 } t^2 - 2a \cot \theta \cdot t - a^2 = 0 \text{。}$$

$$\text{又 } t > 0 \text{，故 } t = a(\cot \theta + \csc \theta) = a \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = a \cot \frac{\theta}{2} \Rightarrow t^2 = a^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \therefore x^2 + y^2 = a^2 \csc^2 \frac{\theta}{2} \text{。}$$

此結果與【定理三】中圓的等視角軌跡吻合。

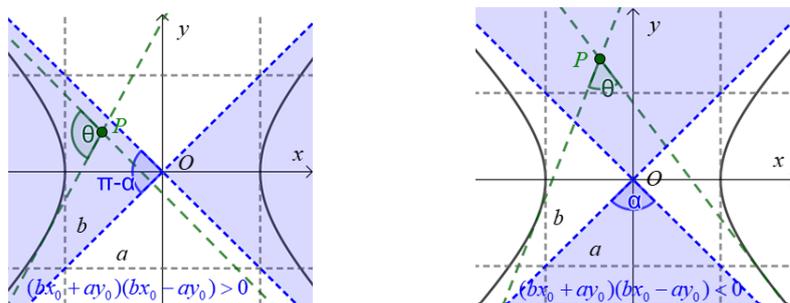


圖(四)：左為橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，右為橢圓 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 於 $\theta = 60^\circ$ 、 90° 及 120° 的等視角軌跡

我們觀察到不同橢圓的等視角軌跡有些許不同，如圖(四)左圖中 $\theta = 60^\circ$ 的軌跡於 $y=0$ 附近向內凹，而 $\theta = 120^\circ$ 時則無此現象，但右圖中皆無此現象。而我們也想進一步瞭解軌跡上、下兩部份的曲線有多接近圓弧，因此將於陸、討論中一併分析。

(五)雙曲線的視角

過雙曲線 $\Gamma_3: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 外一點 $P(x_0, y_0)$ 對其作兩條切線有兩種情況：



圖(五)：雙曲線的兩條切線

1. 若 $(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) > 0$ ，兩切線僅與雙曲線其中一支相切於兩點 A, B ，如圖(五)

左圖，我們定義視角 θ 為 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 的夾角，並藉此討論雙曲線一支的等視角軌跡。

當 P 點愈接近雙曲線的對稱中心 O 時， θ 愈小，故 θ 的下界為圖中兩漸近線夾角

$$(\pi - \alpha), \text{ 又 } \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha = \frac{1 + (-\frac{b}{a}) \cdot \frac{b}{a}}{-\frac{b}{a} - \frac{b}{a}} = \frac{a^2 - b^2}{2ab} \quad \therefore \cot^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right) < \theta < \pi.$$

2. 若 $(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) < 0$ ，兩切線分別與雙曲線左右兩支相切於點 A, B ，如圖(五)

右圖。此時兩切線夾角 θ 並不是對雙曲線的視角，無法以此定義視角，反而可看成不受雙曲線遮擋的視域夾角，而當 P 點愈接近雙曲線的對稱中心 O 時， θ 愈大，

故 θ 的上界為圖中兩漸近線夾角 α ，故 $0 < \theta < \cot^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab}\right)$ 。

(六)單支雙曲線的等視角軌跡

不失一般性，我們僅討論左右開雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的右半支 $x > 0$ 的等視角軌跡，左半支會與其對稱 y 軸。

【定理五】：平面上，單支雙曲線 $\Gamma_4: x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} (a, b > 0)$ 的等視角 θ 軌跡為

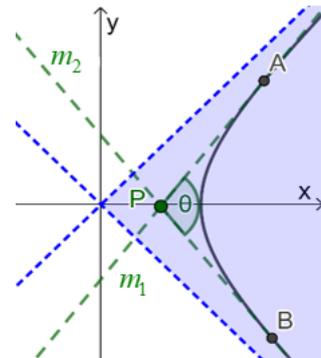
$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}, x > 0,$$

其中 $bx + ay > 0 \wedge bx - ay > 0$ 且 $\cot^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab}\right) < \theta < \pi$ 。

【證明】：

1° 令過 Γ_4 外一點 $P(x_0, y_0)$ ($\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1, (bx_0 + ay_0) > 0, (bx_0 - ay_0) > 0$)

對其作兩條切線 \overline{PA} 及 \overline{PB} ，其中 A 、 B 為切點，並分別令斜率為 m_1 、 m_2 且 $m_1 > m_2$ ；若其中一條切線為鉛直線，則令其為 $\overline{PB}: x = x_0$ 且該直線斜率不存在。



令視角 θ 即為 \overline{PA} 和 \overline{PB} 的夾角，其中

$$\cot^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab}\right) < \theta < \pi。$$

2° 已知雙曲線上斜率為 m 的切線公式為 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ 。

因兩切線交於點 $P(x_0, y_0)$ ，故 m_1 、 m_2 為 m 的方程式 $(y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 - b^2$ 的根。

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 - b^2 \Rightarrow (x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0 y_0 m + (y_0^2 + b^2) = 0$$

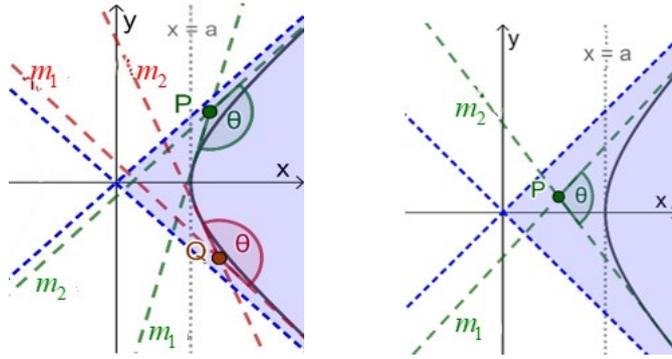
$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}, m_1 m_2 = \frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2}, \text{ 又 } m_1 > m_2$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = \sqrt{\left(\frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}\right)^2 - 4\left(\frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2}\right)} = \frac{2\sqrt{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + a^2 b^2}}{|x_0^2 - a^2|}$$

(i) 當 $x_0 > a$ 時， $\cot \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$ ，如下圖左。

$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1} = \frac{1 + \frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2}}{\frac{2\sqrt{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + a^2 b^2}}{x_0^2 - a^2}} = -\frac{x_0^2 - a^2 + y_0^2 + b^2}{2\sqrt{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + a^2 b^2}}$$

因此等視角軌跡在 $x > a$ 時為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$ 。



(ii) 當 $0 < x_0 < a$ 時， $\cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$ ，如上圖右。

$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2} = \frac{1+\frac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2}}{\frac{1+\frac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2}}{-(x_0^2-a^2)}} = -\frac{x_0^2-a^2+y_0^2+b^2}{2\sqrt{a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2}}$$

等視角軌跡在 $0 < x < a$ 時為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}。$$

(iii) 當 $x_0 = a$ 時，如右圖。此時 m_2 不存在，

但 m_1 仍會滿足 $(y_0 - m_1x_0)^2 = a^2m_1^2 - b^2$ 。

又 $x_0 = a$ ，化簡上式：

$$y_0^2 - 2m_1x_0y_0 + \cancel{m_1^2x_0^2} = \cancel{a^2m_1^2} - b^2 \Rightarrow m_1 = \frac{y_0^2 + b^2}{2x_0y_0}。$$

故 $x_0 = a, y_0 > 0$ 時 $\cot \theta = -m_1 = -\frac{y_0^2 + b^2}{2x_0y_0} = -\frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = -2a \cot \theta y_0$ ；

$x_0 = a, y_0 < 0$ 時， $\cot \theta = m_1 = \frac{y_0^2 + b^2}{2x_0y_0} = \frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = 2a \cot \theta y_0$ 。

綜合以上可得： $x_0 = a$ 時， $y_0^2 + b^2 = -2a \cot \theta |y_0|$ 。

故 $x = a$ 時的等視角軌跡為 $y^2 + b^2 = -2a \cot \theta |y|$ ，此亦為

$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}$ 在 $x = a$ 時的特例。

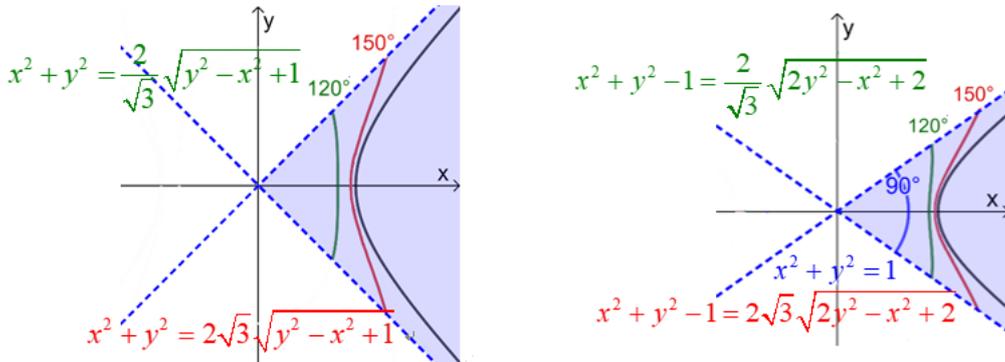
由(i)~(iii)的討論可知：雙曲線 $\Gamma_3: x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} (a, b > 0)$ θ 軌跡為

$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}$ ，其中 $bx + ay > 0 \wedge bx - ay > 0$ 且

$$\cot^{-1}\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right) < \theta < \pi。$$



以單支雙曲線 $x = \sqrt{y^2 + 1}$ 及 $x = \sqrt{2y^2 + 2}$ 為例，在視角 θ 分別滿足 $90^\circ \approx \cot^{-1}(0) < \theta < 180^\circ$ 及 $70.53^\circ \approx \cot^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) < \theta < 180^\circ$ 時軌跡存在，等視角軌跡圖形如下圖(六)。



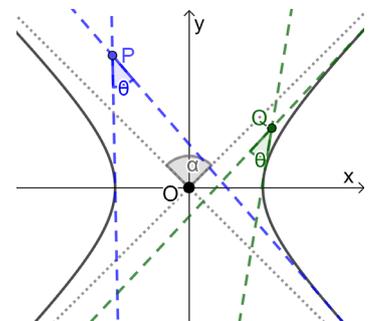
圖(六)：左為單支雙曲線 $x = \sqrt{y^2 + 1}$ 在視角為 120° 、 150° 的等視角軌跡

右為單支雙曲線 $x = \sqrt{2y^2 + 2}$ 在視角為 90° 、 120° 、 150° 的等視角軌跡

(七)雙曲線的等切線夾角軌跡

受限左右開雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 僅在漸近線同號才能對單支雙曲線進行完整觀測，而其他圓錐曲線的等視角軌跡亦為該曲線的等切線夾角軌跡，因此我們進一步討論雙曲線的等切線夾角軌跡。

如右圖，根據切線交點位置，在漸近線同號區取切線夾角 θ 為線外一點對兩切點的方向向量之夾角；在漸近線異號區則為先前對單支雙曲線視角的補角；而漸近線上的點沒有切線。當切線交點位置點愈接近雙曲線的對稱中心 O 時， θ 愈



大，故 θ 的上界為圖中兩漸近線夾角 α ，又 $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{-2ab} \therefore 0 < \theta < \cot^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab}\right)$ 。

【定理六】：平面上，雙曲線 $\Gamma_3: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的等切線夾角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2} ,$$

其中 $(bx + ay)(bx - ay) \neq 0$ 且 $0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$ 。

當 $\theta = 90^\circ$ 且 $a > b$ 時，軌跡為雙曲線 Γ_3 的準圓： $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ，但

$(bx + ay)(bx - ay) \neq 0$ 。

【證明】：

由於切線交點在漸近線同號區所取的夾角為視角的補角，故由【定理五】可知同號區等切線夾角 θ 的軌跡方程式為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$ 。

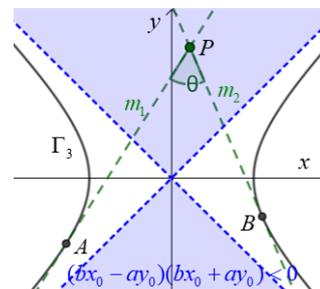
以下討論切線交點在漸近線異號區的情況：

1° 令過 Γ_3 外一點 $P(x_0, y_0)$ ($\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1, (bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) < 0$) 對其作兩條切線

\overline{PA} 及 \overline{PB} ，其中 A 、 B 為切點，並分別令斜率為 m_1 、 m_2

且 $m_1 > m_2$ ；若其中一條切線為鉛直線，則令其為

$\overline{PB}: x = x_0$ 且該直線斜率不存在。



切線夾角 θ 即為 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 的夾角，其中 $0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$ 。

2° 已知 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上斜率為 m 的切線公式為 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ 。

因切線交於點 $P(x_0, y_0)$ ，故 m_1 、 m_2 為 m 的方程式 $(y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 - b^2$ 的根。

$$\text{又 } (y_0 - mx_0)^2 = a^2 m^2 - b^2 \Rightarrow (x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0 y_0 m + (y_0^2 + b^2) = 0$$

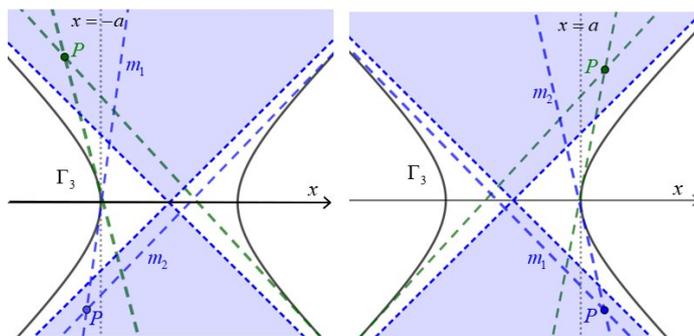
$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}, m_1 m_2 = \frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2}, \text{ 又 } m_1 > m_2$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = \sqrt{\left(\frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2} \right)} = \frac{2\sqrt{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + a^2 b^2}}{|x_0^2 - a^2|} .$$

(i) 當 $|x_0| > a$ 時， $\cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$ ，如下頁圖。

$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2} = \frac{1+\frac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2}}{\frac{2\sqrt{a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2}}{x_0^2-a^2}} = \frac{x_0^2-a^2+y_0^2+b^2}{2\sqrt{a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2}}。$$

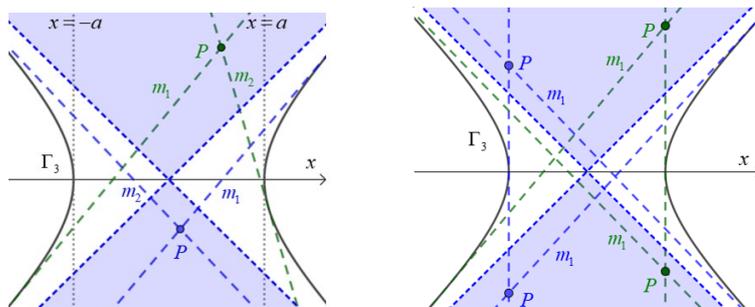
故等切線夾角軌跡在 $|x| > a$ 時為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}$ 。



(ii) 當 $|x_0| < a$ 時， $\cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_2-m_1}$ ，如下圖左。

$$\text{此時 } \cot \theta = \frac{1+m_1m_2}{m_2-m_1} = \frac{1+\frac{y_0^2+b^2}{x_0^2-a^2}}{\frac{2\sqrt{a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2}}{-(x_0^2-a^2)}} = \frac{x_0^2-a^2+y_0^2+b^2}{2\sqrt{a^2y_0^2-b^2x_0^2+a^2b^2}}。$$

故等切線夾角軌跡在 $|x| < a$ 時為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}$ 。



(iii) 當 $|x_0| = a$ 時，如上圖右。

此時 m_2 不存在，但 m_1 仍會滿足 $(y_0 - m_1x_0)^2 = a^2m_1^2 - b^2$ 。

又 $x_0 = a$ ，化簡上式： $y_0^2 - 2m_1x_0y_0 + \cancel{m_1^2x_0^2} = \cancel{a^2m_1^2} - b^2 \Rightarrow m_1 = \frac{y_0^2 + b^2}{2x_0y_0}$ 。

故 $x_0 = a, y_0 > 0$ 時， $\cot \theta = m_1 = \frac{y_0^2 + b^2}{2x_0y_0} = \frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = 2a \cot \theta y_0$ ；

$$x_0 = -a, y_0 > 0 \text{ 時, } \cot \theta = -m_1 = -\frac{y_0^2 + b^2}{2x_0 y_0} = \frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = 2a \cot \theta y_0 ;$$

$$x_0 = a, y_0 < 0 \text{ 時, } \cot \theta = -m_1 = -\frac{y_0^2 + b^2}{2x_0 y_0} = -\frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = -2a \cot \theta y_0 ;$$

$$x_0 = -a, y_0 < 0 \text{ 時, } \cot \theta = m_1 = \frac{y_0^2 + b^2}{2x_0 y_0} = -\frac{y_0^2 + b^2}{2ay_0} \Rightarrow y_0^2 + b^2 = -2a \cot \theta y_0 .$$

綜合以上可得： $|x_0| = a$ 時， $y_0^2 + b^2 = 2a \cot \theta |y_0|$ 。

故等切線夾角軌跡在 $|x| = a$ 時為 $y^2 + b^2 = 2a \cot \theta |y|$ ，此亦為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2} \text{ 在 } |x| = a \text{ 時的特例。}$$

由【定理五】及(i)~(iii)的討論可知：雙曲線 $\Gamma_4: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的等切線

夾角 θ 軌跡為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$ ，其中 $(bx + ay)(bx - ay) \neq 0$

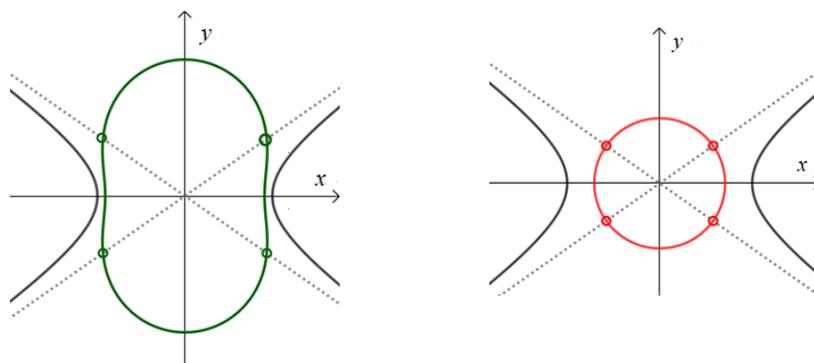
$$\text{且 } 0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right) .$$

當 $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡方程式可整理為 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ；而 $a \leq b$ 時，此圖形不存在。



以雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在 $\theta = 60^\circ$ 及 $\theta = 90^\circ$ 時的等切線夾角軌跡為例，軌跡在漸近線上

不連續，見下圖(七)。



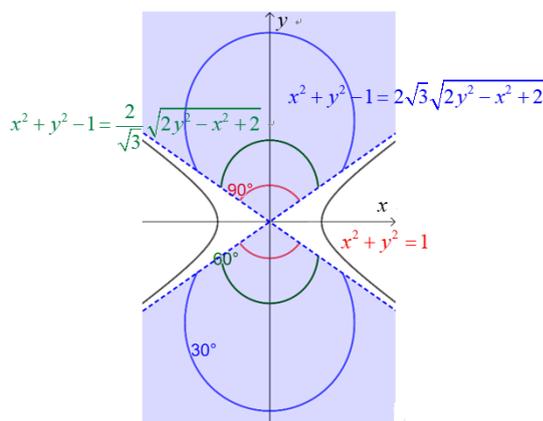
圖(七)左圖：雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在 $\theta = 60^\circ$ 的等切線夾角軌跡

右圖：雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在 $\theta = 90^\circ$ 的等切線夾角軌跡

觀察雙曲線的等切線軌跡，發現與橢圓情況類似，不同情況下軌跡向內凹的情形也

不同，且軌跡的上、下兩側亦近似圓弧。我們將於陸、討論中探討這兩點。

此外，等切線夾角 θ 軌跡在漸近線同號區的部分為分別對左右兩支雙曲線所做的等視角 $(\pi - \theta)$ 軌跡；在漸近線異號區， θ 所對應的區域為不受雙曲線遮擋的部分，即視域夾角，我們稱之為雙曲線的等視域夾角 θ 軌跡。以雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 為例，與雙曲線兩支相切的等視域夾角 θ 軌跡存在於 $0 < \theta < \cot^{-1}\left(\frac{1}{-2\sqrt{2}}\right) \approx 109.47^\circ$ ， $(x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y) < 0$ ，圖形如下圖(八)。

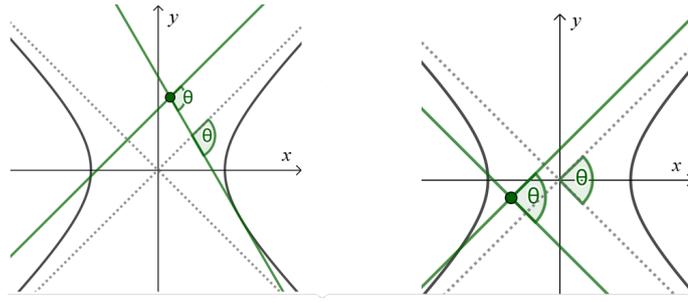


圖(八)：雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在 $(x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y) < 0$ 的等視域夾角軌跡

(八)擴充視角定義下，單支雙曲線的等視角軌跡

我們原先對於視角的定義為：倘若觀測點能完整觀測物體，則視角會等於觀測點對物體所作的兩切線夾角之一；因此當觀測點在雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的漸近線異號區時，無法定義其對其中一支雙曲線的視角。但現實生活中，只要觀測點 $P(x_0, y_0)$ 滿足 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ ，則不論觀測點在何處，觀看雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一支也有其相應的視角。為了更全面地討論等視角問題，我們擴充對單支雙曲線的視角定義。延續前述(六)的討論，我們考慮左右開雙曲線的右半支 $\Gamma_4 : x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ ($a, b > 0$)。

當 P 位於 $(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) < 0$ 時，定義 P 對 Γ_4 的視角為 P 對 Γ_4 的切線與過 P 且平行其中一條漸近線的直線之其中一夾角，意即切線與其中一條漸近線夾角，如下圖左。



當 P 位於 $(bx_0 + ay_0) > 0 \wedge (bx_0 - ay_0) > 0$ 時的部份，視角維持原定義；當 P 位於 $(bx_0 + ay_0) < 0 \wedge (bx_0 - ay_0) < 0$ 時，定義 P 對 Γ_4 的視角為過 P 且和兩漸近線平行的兩直線的夾角之一，如前頁上圖右。

令漸近線上有一點 Q ，且其對 Γ_4 的切線為 L ，則 Q 對 Γ_4 的視角為 L 與漸近線的夾角之一，而滿足 $(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) < 0$ 且在 L 上的任意點 P 對 Γ_4 的視角亦相同，故可知 $(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0) \leq 0$ 的等切線夾角軌跡為射線 \overline{QP} 。

而直線 \overline{QP} 即為切線 L ，令其斜率為 m ，則 m 可由以下推得：

若 P 滿足 $y_0 > 0$ ，則視角 θ 為 L 與 $bx = ay$ 的夾角，分為 $x_0 \neq a$ 、 $x_0 = a$ 兩部分討論。

$$(i) x_0 \neq a \text{ 時, } \cot \theta = \frac{1 + m \cdot \frac{b}{a}}{m - \frac{b}{a}} \Rightarrow \cot \theta \cdot (m - \frac{b}{a}) = 1 + \frac{b}{a} m \Rightarrow m = \frac{a + b \cot \theta}{a \cot \theta - b}。$$

L 過 Q 點，在擴充定義下，對 Γ_4 視角為 θ 的 Q 點應為 Γ_3 的等切線夾角 $(\pi - \theta)$ 軌跡

上的不連續點， Q 滿足 $bx = ay$ 、 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$ ，由

$$\text{此推得 } Q \text{ 點坐標為 } (a \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}}, b \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}})。$$

$$(ii) x_0 = a \text{ 時, } \tan(\theta - 90^\circ) = \frac{b}{a} \Rightarrow \cot \theta = -\frac{b}{a}。$$

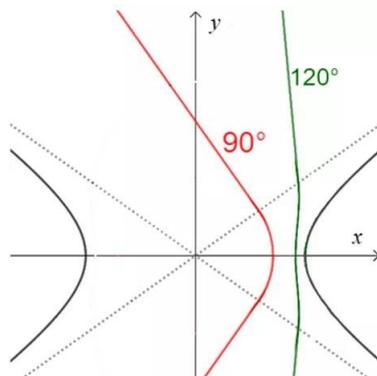
當 θ 滿足 $\cot \theta = -\frac{b}{a}$ 時，此部分的等視角 θ 軌跡為 $x = a, (bx + ay)(bx - ay) \leq 0$ 。

若 P 滿足 $y_0 < 0$ ，則等視角 θ 軌跡可由對稱性推得。綜上所述，對於單支雙曲線 Γ_4 ，在擴充定義下的等視角 θ 軌跡為

$$\begin{cases} y - b\sqrt{\frac{a^2 - b^2 + 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}} = \frac{a + b \cot \theta}{a \cot \theta - b} \left(x - a\sqrt{\frac{a^2 - b^2 + 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}} \right), bx + ay \geq 0 \wedge bx - ay \leq 0 \\ x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}, (bx + ay)(bx - ay) < 0 \\ y + b\sqrt{\frac{a^2 - b^2 + 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}} = -\frac{a + b \cot \theta}{a \cot \theta - b} \left(x + a\sqrt{\frac{a^2 - b^2 + 2ab \cot \theta}{a^2 + b^2}} \right), bx + ay \leq 0 \wedge bx - ay \geq 0 \end{cases}$$

而在 $\theta = \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$ 時，因為對 Γ_4 的視角為兩漸近線或其平行線的夾角，等視角軌跡

為平面上滿足 $\{(x, y) | (bx + ay < 0 \wedge bx - ay < 0) \vee (0, 0)\}$ 的區域。



圖(九)：擴充視角定義下，對單支雙曲線 $x = \sqrt{2y^2 + y}$ 視角為 90° 、 120° 的等視角軌跡

伍、研究結果

在平面上，給定一曲線，曲線外對曲線作切線夾角相同的點所形成的軌跡為等視角軌跡。

【定理一】：平面上線段 \overline{AB} ，其等視角 θ 的軌跡為以 \overline{AB} 為對稱軸的兩圓弧，而圓弧所在的圓半徑為 $\frac{\overline{AB}}{2} \csc \theta$ 。

【定理二】：平面上半徑為 r 的圓，其等視角 θ 的軌跡是半徑為 $r \csc \frac{\theta}{2}$ 的同心圓。

【定理三】：平面上，開口向上拋物線 $\Gamma_1: x^2 = 4ky, k > 0$ 的等視角 θ 軌跡

(i) $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡為拋物線 Γ_1 的準線： $y = -k$ ；

(ii) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 時，軌跡為上下開的雙曲線的下半支，其方程式為

$$-\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta + 1)} + \frac{(y + k(2\cot^2 \theta + 1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta + 1))} = 1, y < -k;$$

(iii) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 時，軌跡為上下開的雙曲線的上半支，其方程式為

$$-\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta + 1)} + \frac{(y + k(2\cot^2 \theta + 1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta + 1))} = 1, y > -k。$$

【定理四】：平面上，橢圓 $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2\cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}。$$

在 $\theta = 90^\circ$ 時，該等視角軌跡為橢圓 Γ_2 的準圓： $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。

【定理五】：平面上，單支雙曲線 $\Gamma_4: x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} (a, b > 0)$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2\cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}, x > 0,$$

其中 $bx + ay > 0 \wedge bx - ay > 0$ 且 $\cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right) < \theta < \pi$ 。

【定理六】：平面上，雙曲線 $\Gamma_3: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的等切線夾角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2\cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2},$$

其中 $(bx + ay)(bx - ay) \neq 0$ 且 $0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$ 。

當 $\theta = 90^\circ$ 且 $a > b$ 時，該等視角軌跡為雙曲線 Γ_4 的準圓： $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 。

視角接近 180° 時軌跡會貼近原曲線，此點亦可由軌跡方程式看出。

陸、討論

一、橢圓等視角軌跡的凹處探討

前述【定理四】中橢圓 Γ_2 的等視角 θ 軌跡為 $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2\cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}$ ，並由圖(四)觀察到有些橢圓在 $y = 0$ (即長軸所在直線)附近的等視角軌跡凹向改變，我們想瞭解橢圓滿足何種條件下會有如此現象。因軌跡圖形對稱，我們僅需討論 $x > 0$ 的部分圖形，並視其為 y 的函數藉以探討等視角軌跡在 $y = 0$ 時的凹向：

對 y 微分 $\Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} + 2y = \frac{\cot \theta (2a^2 y + 2b^2 x \frac{dx}{dy})}{\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 \cot \theta y - y \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}}{x \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} - b^2 \cot \theta x}$ ，則

$\frac{dx}{dy}$ 在 $y=0$ 的取值為 0；而 $\frac{d^2 x}{dy^2}$ 在 $y=0$ 的取值為

$$\frac{(a^2 \cot \theta - b\sqrt{x^2 - a^2})(bx\sqrt{x^2 - a^2} - b^2 \cot \theta x)}{b^2 x^2 (\sqrt{x^2 - a^2} - b \cot \theta)^2} = \frac{-(a^2 \cot \theta - b\sqrt{x^2 - a^2})(b^2 \cot \theta - b\sqrt{x^2 - a^2})}{b^2 x (\sqrt{x^2 - a^2} - b \cot \theta)^2}$$

上式分母恆正，若分子 $-(a^2 \cot \theta - b\sqrt{x^2 - a^2})(b^2 \cot \theta - b\sqrt{x^2 - a^2}) > 0$ 時則凹向右。

又等視角軌跡在 $y=0$ 處的 x 值滿足 $x^2 - a^2 - b^2 = 2b \cot \theta \sqrt{x^2 - a^2}$ 。令 $t = \sqrt{x^2 - a^2}$ ，則 t 滿

足 $t^2 - 2b \cot \theta \cdot t - b^2 = 0$ ；又 $t > 0$ ，故 $t = b(\cot \theta + \csc \theta)$ ，即 $\sqrt{x^2 - a^2} = b(\cot \theta + \csc \theta)$ 。此

時分子為 $-(a^2 \cot \theta - b^2(\cot \theta + \csc \theta))[b^2 \cot \theta - b^2(\cot \theta + \csc \theta)]$

$$= b^2 \csc \theta [a^2 \cot \theta - b^2(\cot \theta + \csc \theta)] = b^2 \csc^2 \theta [(a^2 - b^2) \cos \theta - b^2]，$$

故當 $\cos \theta > \frac{b^2}{a^2 - b^2}$ 時，亦即 $\cot \theta > \sqrt{\frac{b^4}{a^4 - 2a^2 b^2}}$ 時，圖形在 $y=0$ 時凹向右。

對照圖(四)左圖中 $\cos 60^\circ > \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$ ，故 $\theta = 60^\circ$ 的軌跡於 $y=0$ 時凹向右；但其右圖中

$\cos 60^\circ < \frac{1}{2-1} = 1$ ，故 $\theta = 60^\circ$ 的軌跡於 $y=0$ 時沒有凹向改變的現象。

二、雙曲線等切線夾角軌跡的凹處探討

【定理六】中雙曲線 Γ_3 的等切線夾角 θ 軌跡為 $x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$ ，

我們觀察到有些雙曲線的等切線夾角 θ 軌跡在 $y=0$ 附近凹向改變，如圖(七)左圖，我們想了

解雙曲線在滿足什麼樣的條件下會有此現象。因軌跡圖形與橢圓相似，同樣我們只需考慮

$x > 0$ 的部份圖形，並視其為 y 的函數以探討等切線夾角軌跡在 $y=0$ 時的凹向：

假定 $0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$ ，軌跡存在。因雙曲線的等切線夾角 θ 軌跡在漸近線上不連續，

為計算一階、二階導數的方便性，我們定義軌跡和漸近線相交的點為

$$\left(a \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cot^2 \theta}{a^2 + b^2}}, b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cot^2 \theta}{a^2 + b^2}} \right)，使軌跡上處處連續。$$

$$\text{對 } y \text{ 微分} \Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} + 2y = \frac{\cot \theta (2a^2 y - 2b^2 x \frac{dx}{dy})}{\sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 \cot \theta y - y \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}}{b^2 \cot \theta x + x \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}},$$

$\frac{dx}{dy}$ 在 $y=0$ 的取值為 0；而 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 在 $y=0$ 的取值為

$$\frac{(a^2 \cot \theta - b\sqrt{a^2 - x^2})(b^2 \cot \theta x + bx\sqrt{a^2 - x^2})}{(b^2 \cot \theta x + bx\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{(a^2 \cot \theta - b\sqrt{a^2 - x^2})(b^2 \cot \theta + b\sqrt{a^2 - x^2})}{(b^2 \cot \theta x + bx\sqrt{a^2 - x^2})^2},$$

因上式分母恆正，若分子 $(a^2 \cot \theta - b\sqrt{a^2 - x^2})(b^2 \cot \theta + b\sqrt{a^2 - x^2}) > 0$ 時則凹向右。

又等切線夾角軌跡在 $y=0$ 處的 x 值滿足 $x^2 - a^2 + b^2 = 2b \cot \theta \sqrt{a^2 - x^2}$ 。令 $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ ，

則 t 滿足 $t^2 + 2b \cot \theta \cdot t - b^2 = 0$ ；又 $t > 0$ ，故 $t = b(\csc \theta - \cot \theta)$ ，即 $\sqrt{a^2 - x^2} = b(\csc \theta - \cot \theta)$ 。

此時分子為 $[a^2 \cot \theta - b^2(\csc \theta - \cot \theta)][b^2 \cot \theta + b^2(\csc \theta - \cot \theta)]$

$$= b^2 \csc \theta [a^2 \cot \theta - b^2(\csc \theta - \cot \theta)] = b^2 \csc^2 \theta [(a^2 + b^2) \cos \theta - b^2],$$

故當 $\cos \theta > \frac{b^2}{a^2 + b^2}$ 時，亦即 $\cot \theta > \sqrt{\frac{b^4}{a^4 + 2a^2 b^2}}$ 時，圖形在 $y=0$ 時凹向右。

例如，雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在切線夾角 θ 滿足 $\cot \theta > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ，即 $\theta < \cot^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx 71.5^\circ$ 時軌跡

在 $y=0$ 時凹向右，圖(七)左圖 $\theta = 60^\circ$ 即是如此。

三、橢圓等視角軌跡近似圓弧的分析

圖(四)中橢圓的等視角軌跡對稱 x 軸且上、下兩部份軌跡近似圓弧，經由嘗試不同軌跡作圖，我們推測軌跡與 y 軸交點處的密切圓(*Osculating Circle*)會最接近原軌跡，因此我們計算該點的曲率半徑及中心以求出此密切圓的方程式，並畫圖看其適切性。

1° 在 C. H. Edwards[9](p.679)提到，對於函數 $f(x)$ 的曲率半徑公式為 $\left| \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \right|$ 。因軌

跡的對稱性，僅考慮橢圓 Γ_2 的等視角 θ 軌跡 $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}$

的上半部(即 $y > 0$)在 $x=0$ 時的曲率半徑，與上述討論凹向時的過程類似：

對 x $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cot \theta x - x \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}}{y \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} - a^2 \cot \theta y}$ ，則 $\frac{dy}{dx}$ 在 $x=0$ 0；而 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 在

$$x=0 \text{ 的取值為 } \frac{(b^2 \cot \theta - a\sqrt{y^2 - b^2})(ay\sqrt{y^2 - b^2} - a^2 \cot \theta y)}{(ay\sqrt{y^2 - b^2} - a^2 \cot \theta y)^2} = -\frac{b^2 \cot \theta - a\sqrt{y^2 - b^2}}{a^2 \cot \theta y - ay\sqrt{y^2 - b^2}}。$$

又等視角軌跡在 $x=0$ 處的 y 值滿足 $y^2 - a^2 - b^2 = 2a \cot \theta \sqrt{y^2 - b^2}$ ，令 $t = \sqrt{y^2 - b^2}$ ，則 t

滿足 $t^2 - 2a \cot \theta t - a^2 = 0$ ；又 $t > 0$ ，故 $t = a(\cot \theta + \csc \theta)$ ，即 $\sqrt{y^2 - b^2} = a(\cot \theta + \csc \theta)$ 且

$y = \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}$ 。將此關係式代入上述 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 在 $x=0$ 的取值並化簡

$$\frac{(b^2 - a^2) \cot \theta - a^2 \csc \theta}{a^2 \csc \theta y} = \frac{(b^2 - a^2) \cos \theta - a^2}{a^2 y} = \frac{(b^2 - a^2) \cos \theta - a^2}{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}。又 $a > b$ ，故在$$

$$x=0 \text{ 時的曲率半徑為 } \left| \frac{1}{\frac{(b^2 - a^2) \cos \theta - a^2}{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}} \right| = \frac{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2}。$$

2° 密切圓會過軌跡與 y 軸的交點 $(0, \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2})$ ，故密切圓圓心為

$$\begin{aligned} & \left(0, \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2} - \frac{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right) \\ & = \left(0, \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right)。 \end{aligned}$$

由 1°~2° 得橢圓等視角軌跡過 $(0, \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2})$ 的密切圓方程式為

$$x^2 + \left(y - \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2 = \left(\frac{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2。$$

由上述方程式可知：當視角 $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡與密切圓重合，即橢圓的準圓 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。

因此將該密切圓視為軌跡上半部的近似圓應屬合理，而當視角 $\theta > 90^\circ$ 時密切圓圓心 y 坐標小於 0，視角 $\theta < 90^\circ$ 時密切圓圓心 y 坐標大於 0，與我們觀察到的現象相符。

同理可得，過 $(0, -\sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2})$ 的密切圓方程式為

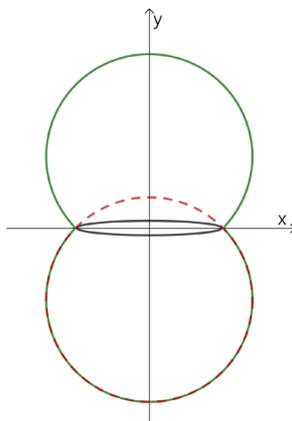
$$x^2 + \left(y + \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2 = \left(\frac{a^2 \sqrt{b^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2}}{(a^2 - b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2。$$

此外，上述密切圓方程式在 $a = b$ 時 $x^2 + y^2 = a^2 + a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2$ ，化簡其半徑可得

$a\sqrt{2\csc^2\theta + 2\cot\theta\cos\theta} = a\sqrt{\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}} = a\sqrt{\frac{2(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}} = a\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} = a\csc\frac{\theta}{2}$ ，與圓的等視角軌跡相同。

在繪製不同橢圓在不同視角下的等視角軌跡圖形時，我們發現長、短軸長度相差越大時，軌跡會更近似於圓弧。以橢圓 $x^2 + \frac{y^2}{100} = 1$ ，視角為 45° 的等視角軌跡

$x^2 + y^2 - 101 = 2\sqrt{100y^2 + x^2 - 100}$ 為例，如下圖(十)，綠色實線為原軌跡，紅色虛線為下半部的密切圓，上、下兩側的密切圓會對稱於 x 軸。



圖(十)：橢圓 $x^2 + \frac{y^2}{100} = 1$ 在視角為 45° 的等視角軌跡與 $x = 0$ 時的下側密切圓

我們推測是因為橢圓的兩軸長度相差較大時，從曲線外一點對橢圓作兩切線會近似於對長軸做兩切線，對照【定理一】線段的等視角軌跡結論，可知此時的軌跡會更近似於圓弧是合理的。而從代數式中也可以觀察到，當橢圓兩軸的長度相差較大時，即 $a \gg b$ 時，上述密切圓半徑 $\frac{a^2\sqrt{b^2 + a^2(\cot\theta + \csc\theta)^2}}{(a^2 - b^2)\cos\theta + a^2} \approx \frac{a^2\sqrt{a^2(\cot\theta + \csc\theta)^2}}{a^2\cos\theta + a^2} = a\frac{\cot\theta + \csc\theta}{\cos\theta + 1} = a\csc\theta$ ，此即對長軸所作的等視角軌跡之圓弧半徑。

四、雙曲線等切線夾角軌跡近似圓弧的分析

圖(七)左圖中雙曲線的等切線夾角軌跡對稱 x 軸且上、下兩部份軌跡近似圓弧，經由嘗試不同軌跡作圖，我們推測軌跡與 y 軸交點處的密切圓會最接近原軌跡，因此我們計算該點的曲率半徑及中心以求出此密切圓的方程式，並畫圖看其適切性。

1° 因軌跡的對稱性，僅考慮雙曲線 Γ_3 的等切線夾角 θ 軌跡

$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2\cot\theta\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}$ 的上半部(即 $y > 0$)在 $x = 0$ 時的曲率半徑，與

上述討論凹向時的過程類似：

對 x 微分可得 $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cot \theta x + x \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}}{a^2 \cot \theta y - y \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}}$ ，則 $\frac{dy}{dx}$ 在 $x=0$ 的取值為 0 ；而 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 在

$$x=0 \text{ 的取值為 } \frac{(a^2 \cot \theta y - ay \sqrt{y^2 + b^2})(b^2 \cot \theta + a \sqrt{y^2 + b^2})}{(a^2 \cot \theta y - ay \sqrt{y^2 + b^2})^2} = \frac{b^2 \cot \theta + a \sqrt{y^2 + b^2}}{a^2 \cot \theta y - ay \sqrt{y^2 + b^2}}。$$

又等視角軌跡在 $x=0$ 處的 y 值滿足 $y^2 - a^2 + b^2 = 2a \cot \theta \sqrt{y^2 + b^2}$ ，令 $t = \sqrt{y^2 + b^2}$ ，則 t

滿足 $t^2 - 2a \cot \theta t - a^2 = 0$ ；又 $t > 0$ ，故 $t = a(\cot \theta + \csc \theta)$ ，即 $\sqrt{y^2 + b^2} = a(\cot \theta + \csc \theta)$ 且

$y = \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}$ 。將此關係式代入上述 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 在 $x=0$ 的取值並化簡

$$\frac{(a^2 + b^2) \cot \theta + a^2 \csc \theta}{-a^2 \csc \theta y} = \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2}{-a^2 y} = \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2}{-a^2 \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}。故在 $x=0$ 時$$

$$\text{的曲率半徑為 } \left| \frac{1}{\frac{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2}{-a^2 \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}} \right| = \frac{a^2 \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2}。$$

2° 密切圓會過軌跡與 y 軸交點 $(0, \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2})$ ，

$$\begin{aligned} \text{則密切圓圓心為 } & (0, \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2} - \frac{a^2 \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2}) \\ & = (0, \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2})。 \end{aligned}$$

由 1°~2° 得雙曲線等切線夾角軌跡過 $(0, \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2})$ 的密切圓方程式為：

$$x^2 + (y - \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2})^2 = (\frac{a^2 \sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2})^2。$$

由上述方程式可知：當視角 $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡與密切圓重合，即雙曲線準圓 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 。

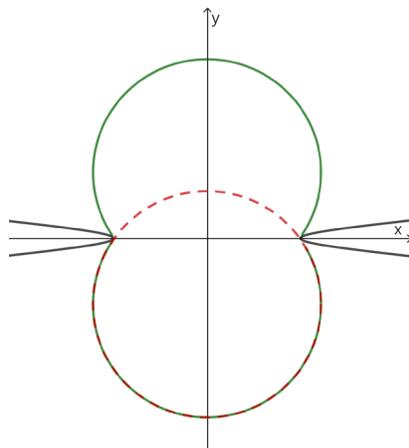
因此將該密切圓視為軌跡上半部的近似圓應屬合理，而當視角 $\theta > 90^\circ$ 時密切圓圓心 y 坐標小於 0 ，視角 $\theta < 90^\circ$ 時密切圓圓心 y 坐標大於 0 ，與我們觀察到的現象相符。

同理可得，過 $(0, -\sqrt{a^2(\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2})$ 的密切圓方程式為

$$x^2 + \left(y + \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta \sqrt{a^2 (\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2 = \left(\frac{a^2 \sqrt{a^2 (\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{(a^2 + b^2) \cos \theta + a^2} \right)^2。$$

在觀察不同軌跡時，我們發現當雙曲線的貫軸長遠大於共軛軸長時，軌跡會更近似圓弧。

以雙曲線 $\frac{x^2}{100} - y^2 = 1$ 且切線夾角為 45° 為例，如下圖(十一)，其中軌跡為綠色實線，下側密切圓為紅色虛線。



圖(十一)：雙曲線 $\frac{x^2}{100} - y^2 = 1$ 在切線夾角為 45° 時的等視角軌跡及其下側密切圓

我們推測是因為雙曲線的貫軸長遠大於共軛軸長時，從曲線外一點對雙曲線作兩切線會近似於對貫軸做兩切線，此與橢圓的現象類似，對照【定理一】線段的等視角軌跡結論，可知此時的軌跡會更近似於圓弧是合理的。從代數式中也可以觀察到，當雙曲線貫軸長遠大於共軛軸長，即 $a \gg b$ 時，上述密切圓半徑

$$\frac{a^2 \sqrt{a^2 (\cot \theta + \csc \theta)^2 - b^2}}{a^2 + (a^2 + b^2) \cos \theta} \approx \frac{a^2 \sqrt{a^2 (\cot \theta + \csc \theta)^2}}{a^2 + a^2 \cos \theta} = a \frac{\cot \theta + \csc \theta}{\cos \theta + 1} = a \csc \theta，此即對貫軸所作的等$$

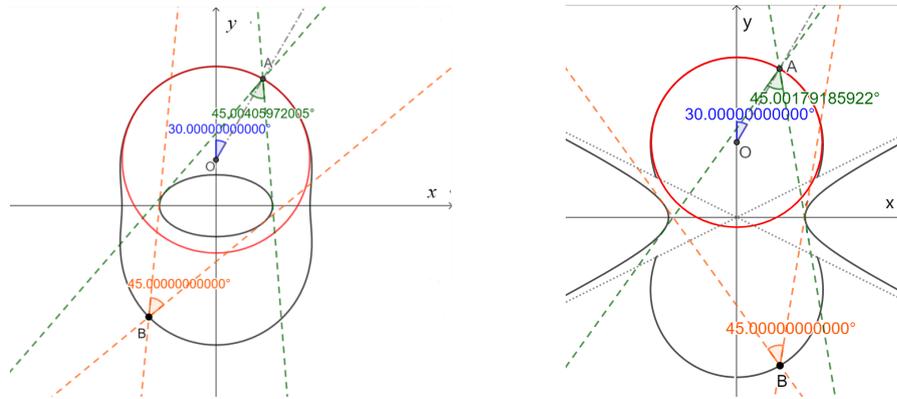
視角軌跡之圓弧半徑。

五、近似圓弧的實驗驗證

由於橢圓等視角軌跡及雙曲線等切線夾角軌跡的一階、二階導數較複雜，我們無法計算出軌跡的曲率函數藉以探討軌跡的上、下兩部份曲線近似密切圓的程度。因此我們利用 GGB，讓觀測點在前述計算出的密切圓上移動，觀察各自密切圓上的點對橢圓的視角及雙曲線的切線夾角的變化，以實驗的方式感受軌跡的上、下兩部份曲線的確會很近似密切圓圓弧。

考慮軌跡在 x 軸的上方曲線，我們將一通過密切圓圓心的直線以密切圓圓心為中心，自 y 軸順時針旋轉 α 角，並令直線與密切圓的交點為 A ， ϕ_α 為點 A 對橢圓的視角或雙曲線的切線

夾角， θ 為直線與軌跡交點對橢圓的視角或雙曲線的切線夾角。若比值 $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 愈接近 1，表示軌跡愈接近密切圓圓弧。如下圖(十二)左圖為橢圓 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ， $\theta = 45^\circ$ 且 $\alpha = 30^\circ$ ；右圖為雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ， $\theta = 45^\circ$ 且 $\alpha = 30^\circ$ 。



圖(十二)

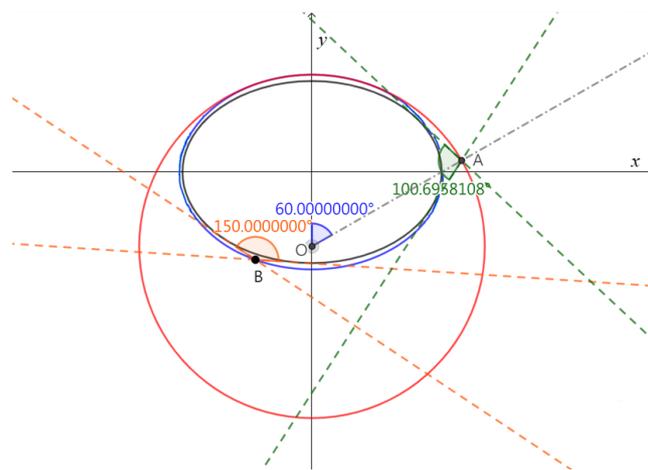
我們分別針對橢圓及雙曲線各兩條比例不一的曲線，計算在不同視角(或切線夾角) θ 下的不同 α 位置所求出的 $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值，結果見表(二)及表(三)。

表(二)

$\frac{\phi_\alpha}{\theta}$	橢圓 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$			橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$		
	α			α		
視角 θ	30°	45°	60°	30°	45°	60°
15°	1.0002530	1.0014162	1.0051707	1.0000524	1.0002988	1.0017149
30°	1.0002595	1.0014163	1.0054021	1.0000553	1.0003189	1.0018485
45°	1.0002657	1.0015179	1.0057136	1.0000597	1.0003506	1.0020714
60°	1.0002588	1.0015090	1.0058506	1.0000631	1.0003825	1.0023330
75°	1.0002035	1.0012214	1.0049353	1.0000562	1.0003574	1.0022968
90°	1	1	1	1	1	1
105°	0.9993664	0.9958341	0.9814862	0.9997239	0.9978098	0.9850168
120°	0.9975084	0.9827351	0.9254310	0.9983554	0.9750244	0.8583659
135°	0.9922806	0.94607766	0.8100944	0.9904679	0.8742657	0.5512214
150°	0.9785814	0.8696352	0.6713054	0.9400884	0.5556020	0.3651231
165°	0.9471821	0.7720866	0.5629735	0.7672091	0.3616825	0.2688145

自表(二)中觀察橢圓等視角軌跡與密切圓之間近似情形有下列幾點現象：

1. 視角 θ 愈接近 $0^\circ \vee 90^\circ$ ， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 的值愈接近 1，即近似效果愈好；此係因 θ 愈接近 0° 時相當於對線段觀測，由【定理一】的結果可知軌跡是圓弧；而 $\theta = 90^\circ$ 的軌跡本就是圓。
2. 整體而言， $\theta < 90^\circ$ 的近似效果較 $\theta > 90^\circ$ 好。前者 $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆大於 1，且應有最大值，意即可預期最差的近似效果；而後者 $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆小於 1，且 θ 愈大，近似效果愈差。
3. 橢圓的長、短軸差距愈大， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值愈接近 1，即軌跡愈接近密切圓，符合我們先前推測。
4. 固定視角 θ 下， α 愈大，近似程度愈差，因為軌跡與密切圓在 $\alpha = 0^\circ$ 時相交。
5. $\theta > 90^\circ$ 時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值可能遠小於 1，即軌跡會出現與密切圓極為不相近的情況。以橢圓 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 在 $\theta = 150^\circ$ 且 $\alpha = 60^\circ$ 時為例，如圖(十三)，此時軌跡與密切圓已明顯分離。



圖(十三)

表(三)

$\frac{\phi_\alpha}{\theta}$	雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$			雙曲線 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$		
	α			α		
視角 θ	30°	45°	60°	30°	45°	60°
15°	1.0001014	1.0005760	1.0021545	1.0000323	1.0001844	1.0006969
30°	1.0001107	1.0006343	1.0024068	1.0000351	1.0002025	1.0007781
45°	1.0001266	1.0007375	1.0028707	1.0000398	1.0002344	1.0009298
60°	1.0001467	1.0008751	1.0035387	1.0000457	1.0002778	1.0011625
75°	1.0001482	1.0009114	1.0038579	1.0000462	1.0002950	1.0013480
90°	1	1	1	1	1	1
105°	0.9994439	軌跡不存在		0.9996324	0.8219025	軌跡不存在

120°	軌跡不存在	軌跡不存在
135°		
150°		
165°		

自表(三)中觀察雙曲線等切線夾角軌跡與密切圓之間近似情形有下列幾點現象：

1. $\theta < 90^\circ$ 時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆大於 1，且 θ 愈小，近似效果愈好。此與橢圓情形同理，係因 θ 愈接近 0° 時相當於對線段觀測，由【定理一】的結果可知軌跡是圓弧。
2. $\theta > 90^\circ$ 時，有些 θ 沒有等切線夾角軌跡，且當其軌跡存在時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆小於 1，近似效果也較差，僅在 α 較小的情形下近似效果較好。
3. 雙曲線的兩軸長度差距愈大， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值愈接近 1，即軌跡愈接近密切圓，符合先前推測。
4. 固定視角 θ 下， α 愈大，近似程度愈差，因為軌跡與密切圓在 $\alpha = 0^\circ$ 時相交。

六、等視角軌跡的應用

同一鏡頭的相機其拍攝視角也會固定。而從固定高度的不同觀測點拍攝一物體時，如果沿著該物體在此高度下的橫切面圖形之等視角軌跡移動，則觀測點對物體橫切面的視角恆等，且橫切面投射在底片上的成像等長，此結果可以相似性驗證。

此外，我們發現對於橫橢圓，其上、下兩側的等視角軌跡可以以密切圓圓弧近似，因而能協助簡化對於實際應用上等視角軌跡的計算。

柒、結論與未來展望

綜合以上的分析與討論，我們得出不同圓錐曲線的等視角軌跡或等切線夾角軌跡並分析軌跡圖形。比較線段及不同圓錐曲線的等視角軌跡，可以發現對於線段與兩封閉圖形：圓及橢圓的等視角軌跡皆為封閉圖形，且視角越小，軌跡圖形越大；對於兩開放圖形：拋物線及雙曲線的等視角軌跡同為開放圖形。

此外，我們討論並分析橢圓等視角軌跡和雙曲線等切線夾角軌跡，得出產生軌跡凹處的條件，並利用 GGB 驗證軌跡的上、下兩側曲線會接近其與 y 軸交點的密切圓。

未來我們想更進一步的探討以下幾點：

- 一、反曲點上的曲率值為 0，因此我們想討論反曲點的位置與軌跡近似密切圓的程度之關聯。
- 二、定義軌跡的近似並計算出軌跡近似密切圓圓弧的部分占整體的比例。
- 三、以不同的方式更精確地說明軌跡會近似密切圓圓弧並驗證實驗結果和觀察。
- 四、將等視角軌跡的概念提升至三維討論，以期實際應用在生活中。
- 五、提出除了單支雙曲線的視角擴充以外，其他情況下視角定義的擴充並求出其等視角軌跡，以解決生活中其他觀測、攝影的問題，例如無法看到觀測物全貌的情況。
- 六、求出更符合日常生活中的物體形狀的正多邊形之等視角軌跡。

捌、參考資料

- [1]許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2019）。*高中數學 1 課本*。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
- [2]許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2019）。*高中數學 2 課本*。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
- [3]許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2020）。*高中數學 3A 課本*。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
- [4]陳一理（2019）。*新觀念叢書 10 圓與直線*。新北市：建興文化事業有限公司。
- [5]陳一理（2019）。*新觀念叢書 11 圓錐曲線*。新北市：建興文化事業有限公司。
- [6]羅美音、蘇映竹（1998）。橢圓切線交點軌跡的探討。《*數學傳播*》，22(3)，83-88。
- [7]張國男（2005）。軌跡問題誤解多。《*數學傳播*》，29(2)，12-25。
- [8]Hunt. A. Richard(1988).*Calculus with Analytic Geometry*. New York: Harpercollins College Div.
- [9]C. H. Edwards, Jr. David E. Penney(1986).*Calculus with Analytic Geometry*. 台北市：新智出版社有限公司。

【評語】 050415

這件作品最主要是研究線段以及圓錐曲線(拋物線、橢圓、雙曲線)的等視角軌跡及它的圖形特性。在這件作品中，作者對於固定長度的線段和圓，它們的等視角軌跡只需要用直觀的幾何方法證明。然而對於圓錐曲線，則需要推導等視角軌跡的代數方程式。為得到此代數方程式，作者展現了繁複計算的能力與熟練度。有趣的是，橢圓和雙曲的等視角軌跡，發生一些不連續點以及類似凹部的擾動，這個現象值得進一步探討。議題的趣味性不錯，數學的深度也在平均之上，算是一件不錯的作品。

作品簡報

遠近高低皆相同—— 圓錐曲線的等視角軌跡

組別：高級中等學校組

科別：數學科

研究目的、文獻探討與研究方法

- 研究目的
- 研究線段、圓、拋物線、橢圓、雙曲線的等視角軌跡及軌跡圖形特性。
- 文獻探討
- 羅美音、蘇映竹(民87)曾做過橢圓等切線夾角軌跡的相關研究，並發表於〈橢圓切線交點軌跡的探討〉，《數學傳播》。
- 文中得出橢圓的等切線夾角軌跡，並提及當夾角接近 90° 或橢圓的長短軸相近時，軌跡會接近圓。因為兩切線夾角有 θ 、 $(180^\circ - \theta)$ 兩個，所得到的軌跡有內外兩圈。
- 我們參考他們的研究方法，定義視角為點對曲線所作兩切線的夾角，並使用 $\cot\theta$ 處理等視角軌跡問題，但我們透過分區得到所求視角的等視角軌跡。
- 研究方法
- 等視角軌跡上任一點對曲線的切線夾角恆等。
- 證明流程

線段、圓

直觀的幾何方法

等視角軌跡

拋物線、橢圓、雙曲線

假設切線

代兩切線夾角 $\cot\theta$ 的差角公式

等視角或等切線夾角軌跡

線段與圓的等視角軌跡

• 定理一

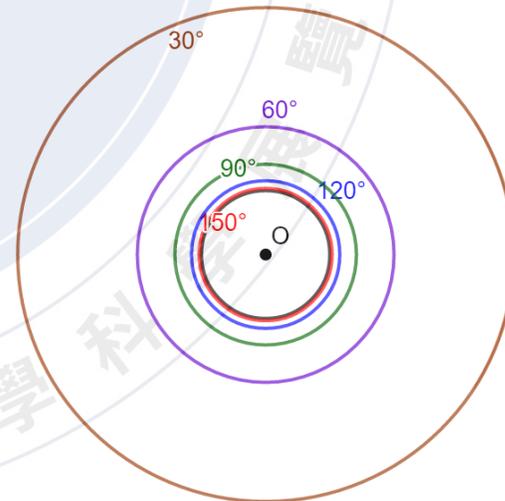
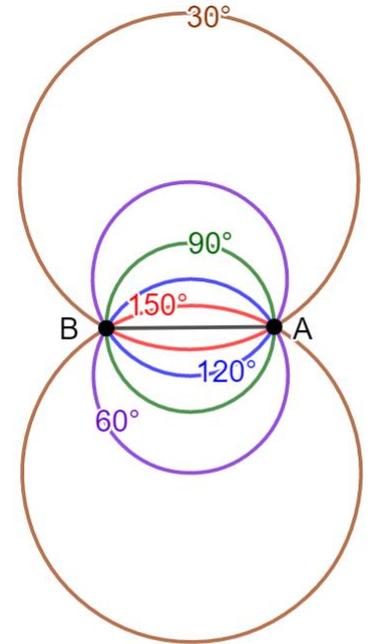
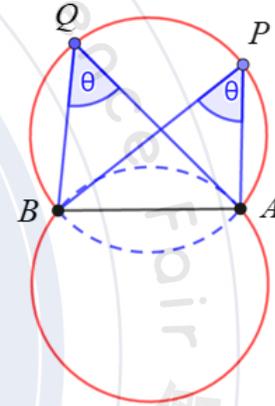
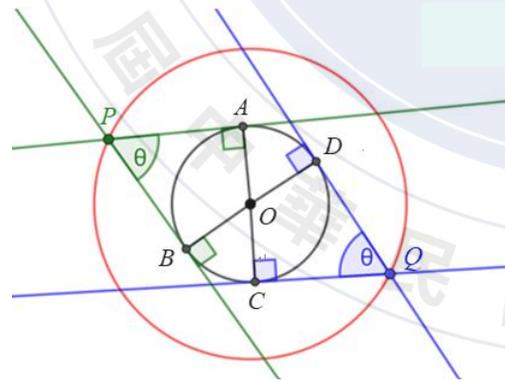
平面上一長度為 d 的線段 \overline{AB} ，其等視角 θ 軌跡為以 \overline{AB} 為對稱軸的兩對稱圓弧，圓弧所在的圓半徑為 $\frac{d}{2} \csc \theta$ 。

- 由對稱性和四點共圓、等圓周角對等弧等性質證得。
- 亦可由 $\cot \theta$ 的差角公式驗證。

• 定理二

平面上半徑為 r 的圓的等視角 θ 軌跡是半徑為 $r \csc \frac{\theta}{2}$ 的同心圓。

- 由相似三角形證得。



拋物線的等視角軌跡

定理三

平面上，開口向上拋物線 $x^2 = 4ky$ 的等視角 θ 軌跡為

(i) $\theta = 90^\circ$ 時，軌跡為拋物線之準線 $y = -k$ ；

(ii) $\theta > 90^\circ$ 時，軌跡為下列雙曲線的上半支；

(iii) $\theta < 90^\circ$ 時，軌跡為下列雙曲線的下半支。

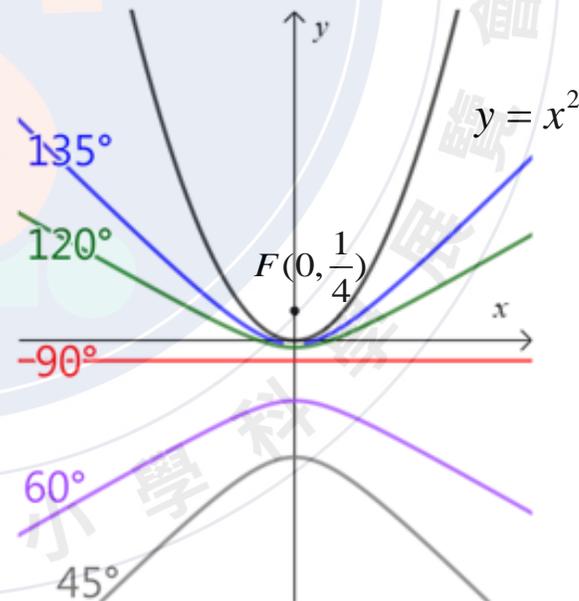
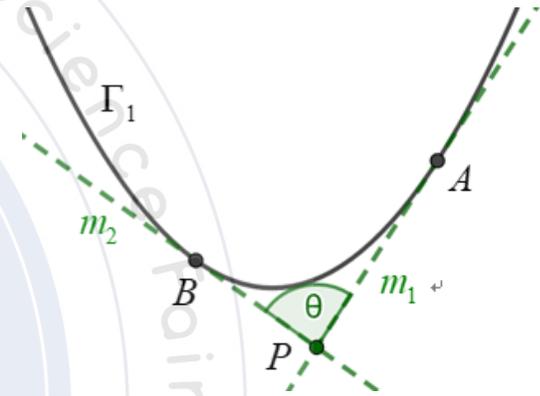
$$-\frac{x^2}{4k^2(\cot^2 \theta + 1)} + \frac{(y + k(2\cot^2 \theta + 1))^2}{4k^2(\cot^2 \theta(\cot^2 \theta + 1))} = 1$$

• 由 $\cot \theta$ 的差角公式證得。

圖形特徵

• 視角互補的兩軌跡為一雙曲線。

• 視角為鈍角的軌跡為一和拋物線同焦點的單支雙曲線；銳角的等視角軌跡焦點則隨視角變化。



- $-2x^2 + 2(y + \frac{3}{4})^2 = 1, y > -\frac{1}{4}$
- $-3x^2 + (3y + \frac{5}{4})^2 = 1, y > -\frac{1}{4}$
- $y = -\frac{1}{4}$
- $-3x^2 + (3y + \frac{5}{4})^2 = 1, y < -\frac{1}{4}$
- $-2x^2 + 2(y + \frac{3}{4})^2 = 1, y < -\frac{1}{4}$

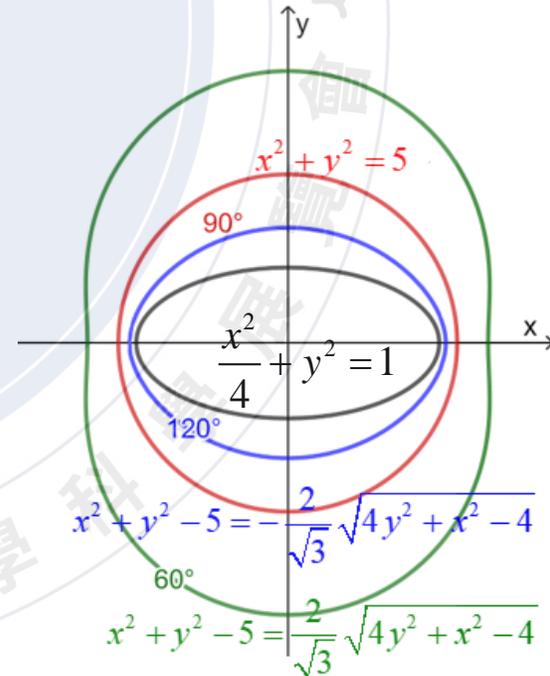
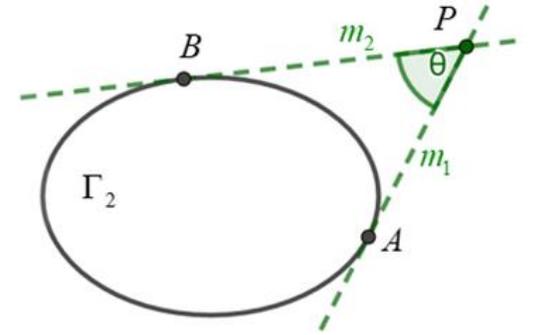
橢圓的等視角軌跡

• 定理四

平面上，橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的等視角 θ 軌跡為 $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2}$

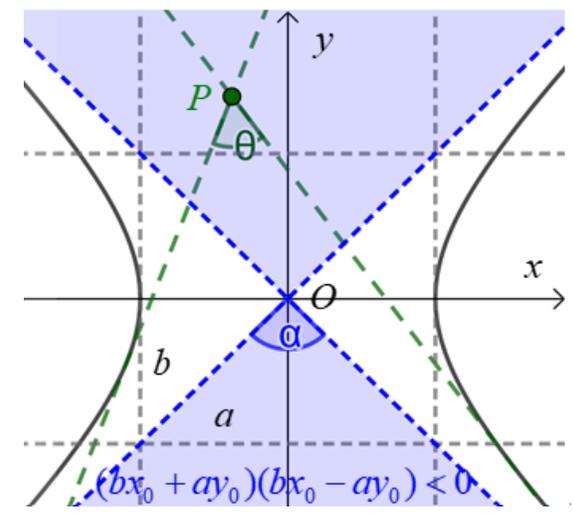
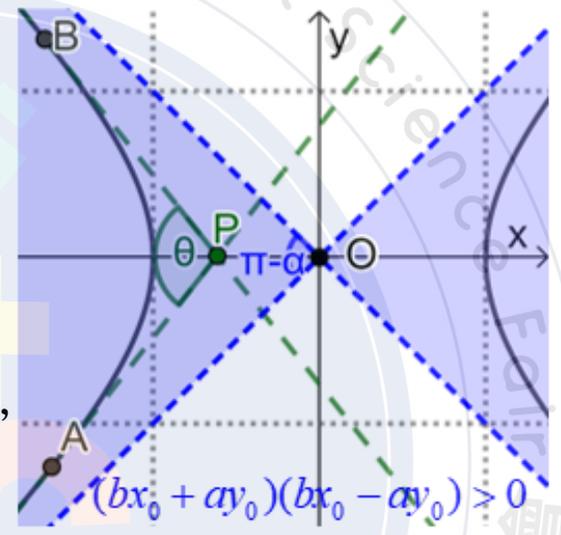
$\theta = 90^\circ$ 時，軌跡為橢圓的準圓 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。

- 依切線與視角的關係分為 $x > a$ 、 $x < a$ 、 $x = a$ 三部分討論，並由 $\cot \theta$ 的差角公式證得，
- 軌跡在 $a = b$ 時，軌跡為圓的等視角軌跡。
- 圖形特徵
- 視角越大，軌跡越接近原橢圓。
- 橫橢圓的等視角軌跡在某些情況下與 x 軸交點處有明顯的凹向改變。
- 軌跡的上下兩側很接近圓弧。



雙曲線的分區、單支雙曲線的等視角軌跡

- 曲線外一點 P 對雙曲線做切線的情況
- P 在漸近線同號區時，對雙曲線的一支作兩切線，切點分別為 A 、 B ，定義視角為 \overrightarrow{PA} 、 \overrightarrow{PB} 的夾角 θ ，在此區可討論單支雙曲線的等視角軌跡， θ 有下限。
- P 在漸近線異號區時，對雙曲線的兩支各作一切線，此時 θ 並非對雙曲線的視角，但可視為對雙曲線的視域夾角， θ 有上限。
- 定理五

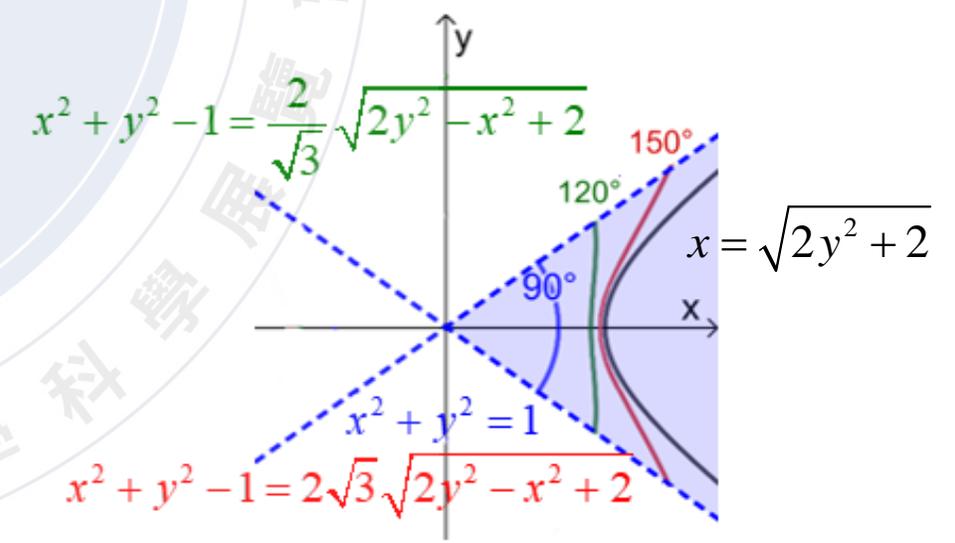


平面上，單支雙曲線 $x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$ 的等視角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$$

$$bx + ay > 0 \wedge bx - ay > 0, \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab} \right) < \theta < \pi$$

- 依切線與視角的關係分為 $x > a$ 、 $x < a$ 、 $x = a$ 三部分討論，並由 $\cot \theta$ 的差角公式證得，。



雙曲線的等切線夾角軌跡

• 定理六

平面上，雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的等切線夾角 θ 軌跡為

$$x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}$$

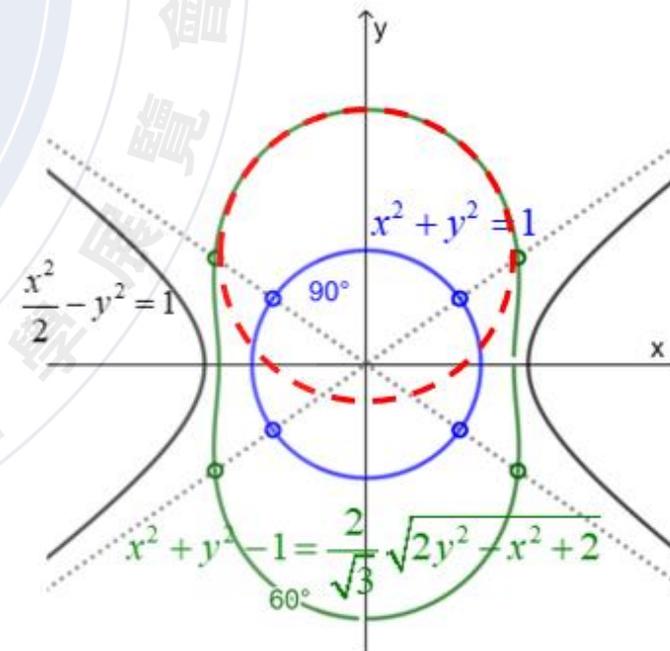
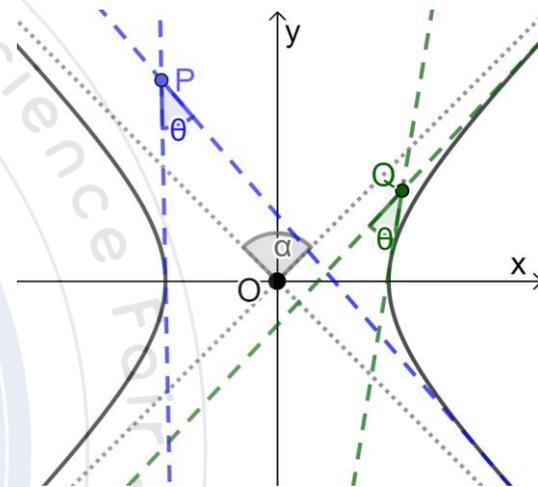
$$(bx + ay)(bx - ay) \neq 0, \quad 0 < \theta < \cot^{-1} \left(\frac{a^2 - b^2}{-2ab} \right)$$

$\theta = 90^\circ$ 時，軌跡為 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，即雙曲線的準圓。

- 依切線與視角的關係分為 $x > a$ 、 $x < a$ 、 $x = a$ 三部分討論，並由 $\cot \theta$ 的差角公式證得。

• 圖形特徵

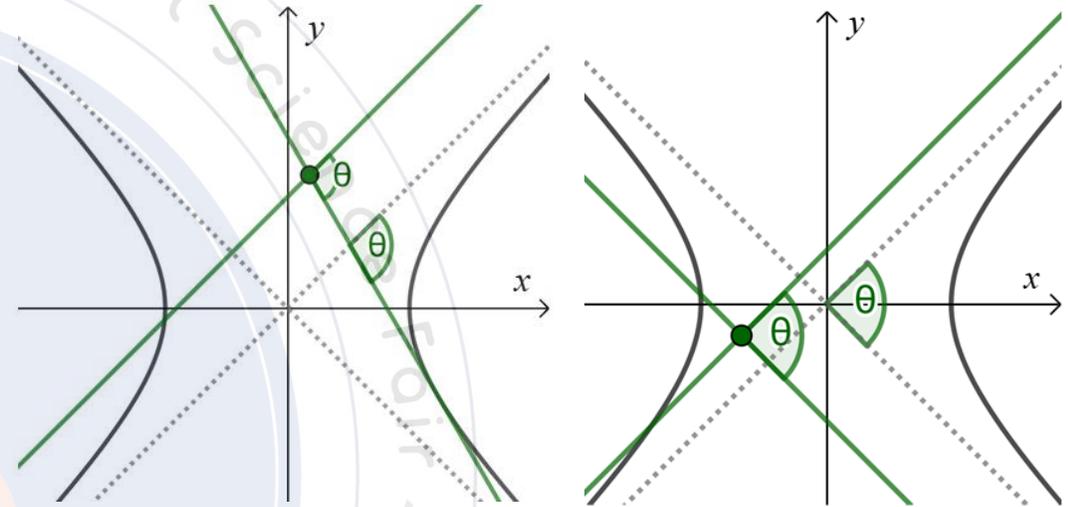
- 雙曲線等切線角軌跡在某些情況下與 x 軸交點處有明顯的凹向改變。
- 軌跡的上下兩側很接近圓弧。



擴充定義下單支雙曲線的等視角軌跡

- 擴充原因

- 我們原先對於視角的定義為：觀測點對物體所做的兩切線夾角之一。因此當觀測點在漸近線異號區時，無法定義其對其中一支雙曲線的視角。但在日常生活中，只要觀測點在雙曲線內，則不論觀測點在何處，觀看雙曲線的一支也有相應的視角。



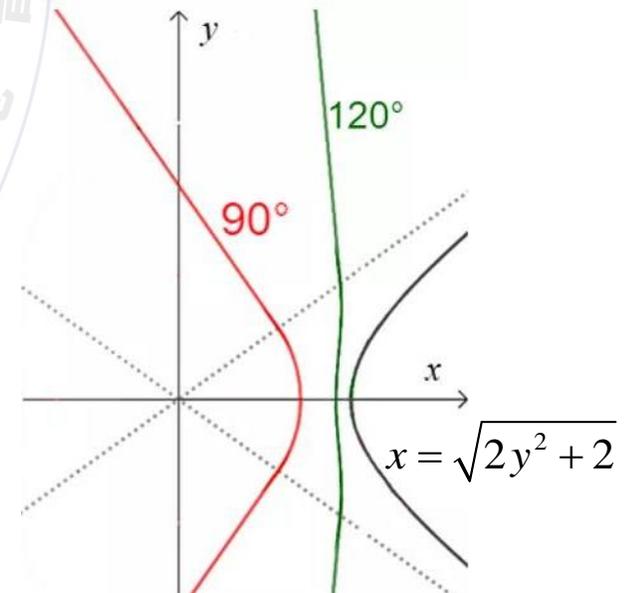
- 擴充定義

- 定義對單支雙曲線的視角為兩切線夾角、一切線與一漸近線的夾角(圖左)、兩漸近線夾角(圖右)。

- 定理七

- 對於單支雙曲線，在擴充定義下的等視角 θ 軌跡為

$$\begin{cases} (a + b \cot \theta)x - (a \cot \theta - b)y = \sqrt{a^4 - b^4 + 2a^3b \cot \theta + 2ab^3 \cot \theta}, bx + ay \geq 0 \wedge bx - ay \leq 0 \\ x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = -2 \cot \theta \sqrt{a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2}, (bx + ay)(bx - ay) < 0 \\ (a + b \cot \theta)x + (a \cot \theta - b)y = \sqrt{a^4 - b^4 + 2a^3b \cot \theta + 2ab^3 \cot \theta}, bx + ay \leq 0 \wedge bx - ay \geq 0 \end{cases}$$



橢圓及雙曲線的等切線夾角軌跡凹向探討

• 方法

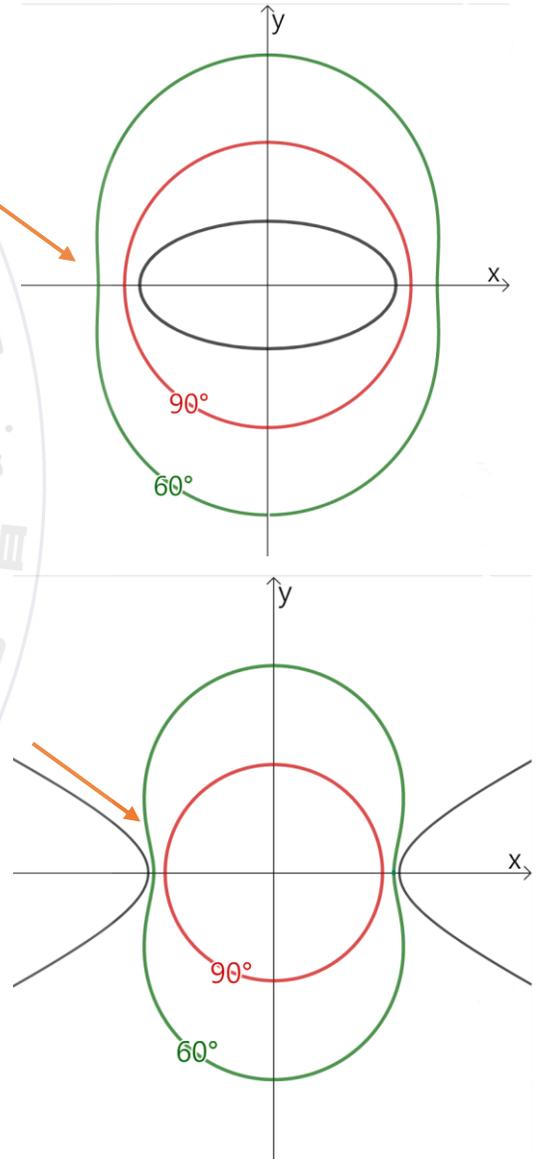
- 觀察到有些橢圓的等視角軌跡及雙曲線的等切線夾角軌跡在與x軸的交點處附近凹向會改變，因此我們想瞭解滿足何種條件下會有如此現象。因軌跡圖形對稱，我們僅需討論 $x > 0$ 的部分圖形，並視其為 y 的函數藉以探討其在 $y = 0$ 時的凹向。

• 橢圓

- 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的等視角軌跡在滿足 $\cot \theta > \sqrt{\frac{b^4}{a^4 - 2a^2b^2}}$ 時，圖形在 $y = 0$ 時凹向右。

• 雙曲線

- 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的等切線夾角軌跡在滿足 $\cot \theta < -\sqrt{\frac{b^4}{a^4 - 2a^2b^2}}$ 時，圖形在 $y = 0$ 時凹向右。



橢圓及雙曲線的等切線夾角軌跡近似圓弧探討

• 方法

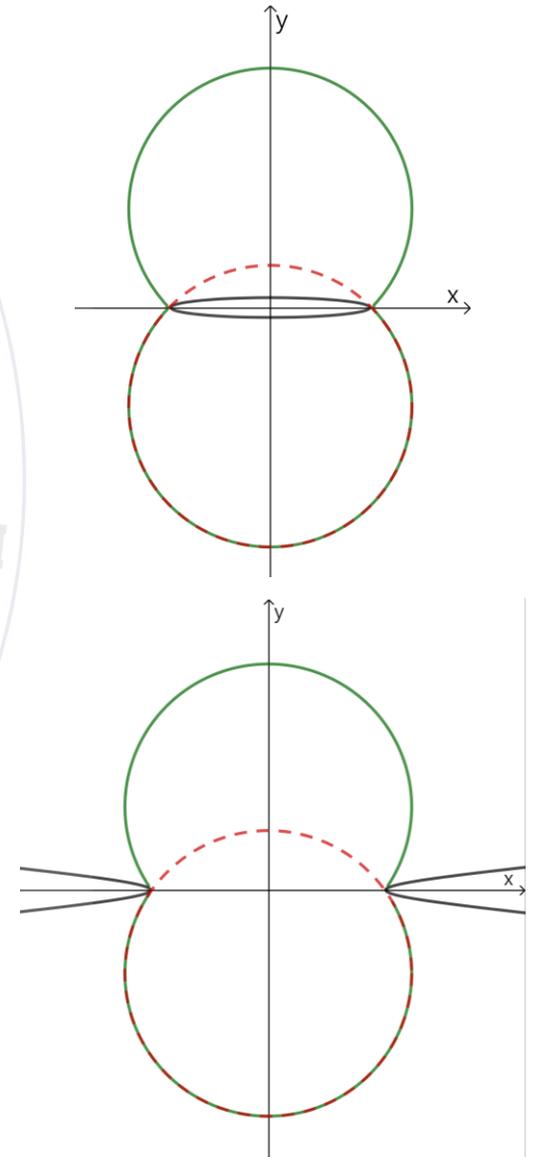
- 我們推測軌跡與y軸交點處的密切圓會最接近原軌跡，因此我們計算該點的曲率半徑及中心以求出此密切圓的方程式，並畫圖(圖中紅色虛線即為下側密切圓)看其適切性。

• 橢圓近似圓弧探討

- 當長、短軸長度相差越大時，軌跡會更近似於圓弧。推測是因為橢圓的兩軸長度相差較大時，從曲線外一點對橢圓作兩切線會近似於對長軸做兩切線，對照【定理一】的結論，可知此時的軌跡會更近似於圓弧是合理的。代數式中也可以觀察到，當橢圓兩軸的長度相差較大時，即 $a \gg b$ 時，密切圓半徑可化簡為 $a \csc \theta$ ，此即對長軸所作的等視角軌跡之圓弧半徑。

• 雙曲線近似圓弧探討

- 雙曲線的貫軸長遠大於共軛軸長時，軌跡更近似圓弧。推測是因為雙曲線的貫軸長遠大於共軛軸長時，從曲線外一點對雙曲線作兩切線會近似於對貫軸做兩切線，對照【定理一】的結論，可知此時的軌跡會更近似於圓弧是合理的。代數式中也可以觀察到，當雙曲線貫軸長遠大於共軛軸長，即 $a \gg b$ 時，密切圓半徑可化簡為 $a \csc \theta$ ，此即對貫軸所作的等視角軌跡之圓弧半徑。



近似圓弧實驗驗證

方法

以密切圓圓心為中心，將一過圓心直線自y軸旋轉 α 度，並求直線與密切圓的交點對橢圓視角 ϕ_α 及雙曲線的切線夾角與軌跡對橢圓的視角 θ 、對雙曲線的切線夾角的比值 $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ ，比值越接近1，表示軌跡的上、下兩部份曲線越接近密切圓圓弧。

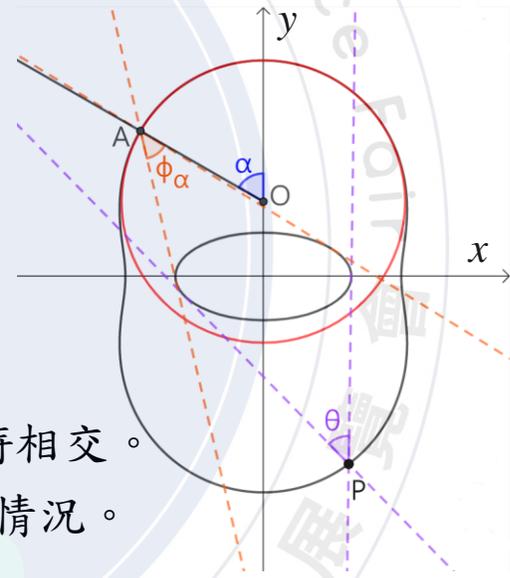
觀察

橢圓實的驗驗證結果

- 視角愈接近 $0^\circ \vee 90^\circ$ ， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 的值愈接近1，即近似效果愈好。
- 整體而言，銳角的近似效果較鈍角好。
- 橢圓的長、短軸差距愈大， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值愈接近1，即軌跡愈接近密切圓。
- 固定視角下， α 愈大，近似程度愈差，因為軌跡與密切圓在 $\alpha = 0^\circ$ 時相交。
- $\theta > 90^\circ$ 時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值可能遠小於1，軌跡會出現與密切圓極為不相近的情況。

雙曲線的驗驗證結果

- 銳角時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆大於1，且 θ 愈小，近似效果愈好。
- 鈍角時，有些 θ 沒有等切線夾角軌跡，且當其軌跡存在時， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值皆小於1，近似效果也較差，僅在 α 較小的情形下近似效果較好。
- 雙曲線的兩軸長度差距愈大， $\frac{\phi_\alpha}{\theta}$ 值愈接近1，即軌跡愈接近密切圓。
- 固定視角下， α 愈大，近似程度愈差，因為軌跡與密切圓在 $\alpha = 0^\circ$ 時相交。



$\frac{\phi_\alpha}{\theta}$	橢圓 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$		
	α		
視角 θ	30°	45°	60°
15°	1.0002530	1.0014162	1.0051707
30°	1.0002595	1.0014163	1.0054021
45°	1.0002657	1.0015179	1.0057136
60°	1.0002588	1.0015090	1.0058506
75°	1.0002035	1.0012214	1.0049353
90°	1	1	1
105°	0.9993664	0.9958341	0.9814862
120°	0.9975084	0.9827351	0.9254310
135°	0.9922806	0.94607766	0.8100944
150°	0.9785814	0.8696352	0.6713054
165°	0.9471821	0.7720866	0.5629735

$\frac{\phi_\alpha}{\theta}$	雙曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$		
	α		
視角 θ	30°	45°	60°
15°	1.0001014	1.0005760	1.0021545
30°	1.0001107	1.0006343	1.0024068
45°	1.0001266	1.0007375	1.0028707
60°	1.0001467	1.0008751	1.0035387
75°	1.0001482	1.0009114	1.0038579
90°	1	1	1
105°	0.9994439	軌跡不存在	
120°	軌跡不存在		
135°			
150°			
165°			

結論、未來展望與參考資料

• 結論

- 綜合以上的分析與討論，我們得出不同圓錐曲線的等視角軌跡或等切線夾角軌跡並分析軌跡圖形。比較線段及不同圓錐曲線的等視角軌跡，可以發現對於線段與兩個封閉圖形：圓及橢圓，三者的等視角軌跡為封閉圖形，且視角越小，軌跡圖形越大；對於兩開放圖形：拋物線及雙曲線，兩者的等視角軌跡為開放圖形。此外，我們討論並分析橢圓的等視角軌跡和雙曲線的等切線夾角軌跡，得出軌跡凹向改變的條件，並利用GGB測試說明軌跡的上下兩側會接近其過y軸交點的密切圓。

• 未來展望

- 反曲點上的曲率值為0，因此我們想討論反曲點的位置與軌跡近似密切圓的程度之關聯。
- 定義近似，並計算出軌跡近似密切圓弧的部分占整體的比例。
- 將等視角軌跡的概念提升至三維討論，以實際應用在生活中。
- 求更符合日常生活中的物體形狀的正多邊形之等視角軌跡。

• 參考資料

- 許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2020）• 高中數學3A 課本• 新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
- 陳一理（2019）• 新觀念叢書11圓錐曲線• 新北市：建興文化事業有限公司。
- 羅美音、蘇映竹（1998）• 橢圓切線交點軌跡的探討• 數學傳播，22(3)，83-88。
- C. H. Edwards, Jr. David E. Penney(1986).*Calculus with Analytic Geometry*. 台北市：新智出版社有限公司。