中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050413

列表著色可約構形之建構法

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高一 王嵐	楊宗穎
高一 李昀祐	

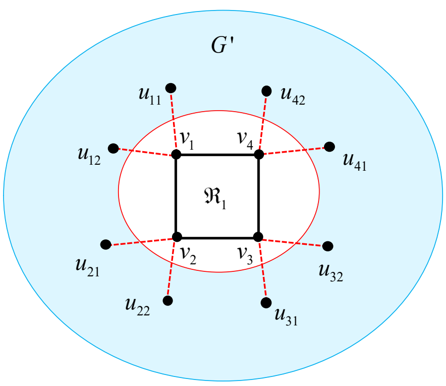
關鍵詞：鴿籠原理、可約構形、有向圖

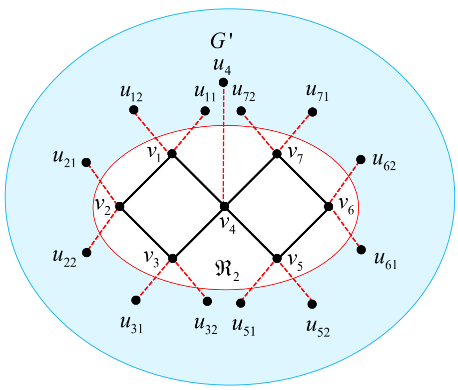
摘要

圖的著色問題為現代數學的一門學問，而列表著色為一般著色問題的推廣，許多研究皆致力在探討各式的充分條件，使得圖可以完成列表著色。在數學歸納法的證明過程中，經常需要利用『可約構形』的概念來化簡圖形，進而確保能完成圖的列表著色。若圖在邊上具有方向性，則稱此圖為有向圖。我們的研究是利用圖在邊上的定向關係，創造一個多變數的多項式，在代數式上運用鴿籠原理，藉著尋求多項式函數值為非零值的可能，證明列表著色方法的存在性，並能有程序性的設計一系列在列表著色中的可約構形與演算法。

壹、研究動機

在專題研究的課程中，專研老師介紹了許多離散數學相關的研究問題，從中我們習得了一些**『圖論 Graph Theory』**的基礎知識，其中有關**『著色問題』**更是讓我們感到印象深刻，從平面圖 G 的歐拉特徵數關係（$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$），可推得任意平面圖 G 的邊皆具有上界，關係式為 $|E(G)|\le 3|V(G)|-6$，其中 $V(G)$、$E(G)$ 與 $F(G)$ 分別代表平面圖 G 的點集合、邊集合與面集合。從中可得知任意平面圖 G 必存在一個點 $v\in V(G)$ 滿足 v 至多連 5 條邊（$d(v)\le 5$），由此得知平面圖的**『六色定理（任意平面圖皆可用六個顏色完成點著色）』**。接著透過數學歸納法與反證法，即可證明**『五色定理（任意平面圖皆可用五個顏色完成點著色）』**。然而最後登場的**『四色定理』**更是讓我們感到讚嘆，一個容易理解的命題，證明竟然是如此難以理解，以目前有的證明尚須仰賴計算機的幫助才能得證。這讓我們對著色問題產生極大的興趣。在文獻探討時，我們閱讀了 2017 年臺灣國際科學展覽會，數學科大會一等獎**『平面圖的四元列表著色』**的作品說明書〔參考文獻 1〕，從中瞭解了著色問題的進階版本，稱為**『列表著色』**，作品中指出若平面圖滿足（1）任意兩個 $3\text{-}cycle$ 最多共用一個點；（2）任意兩個 $4\text{-}cycle$ 最多共用一個點；（3）不存在一個圈，使得圈的各邊皆與 $3\text{-}cycle$ 相鄰；此三個條件為平面圖可四元列表著色的充分條件。其中在數學歸納法的證明過程中，最小反例不會包含下列兩種結構：





此兩種結構分別稱為$\Re_1$-*subgraph*與$\Re_2$-*subgraph*，兩者除了皆為原圖G的一個子圖以外，其中每個點所連出邊的數量亦有限制，當最小反例G將此結構的點刪除後，所得點數較小的圖形為G'，因為G'不是最小反例，因此G'必可完成列表著色，然而在獲得G'的列表著色後，將此兩種結構還原為原圖G中，在G'已獲得的列表著色狀態下，此兩種結構亦能完成列表著色，使得原圖G也存在列表著色的可能，此與G為最小反例矛盾，則表示最小反例不存在，進而完成定理的證明。我們特別將這樣特殊的結構稱為**『可約構形』**，因此可約構形不僅是圖的一種部分結構，其每個點的度數也是構形裡的重要資訊，方便我們在證明的過程中可以化簡圖形。我們本篇文章的研究重點是，希望可以有程序性的，能設計出一系列的可約構形，使得未來在探討著色問題時可以有足夠的資訊完成相關的證明。

貳、研究目的

給定n元k次複數系多項式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$為最高次項。運用鴿籠原理可知，『若$A_i \subseteq \mathbb{C}$，$|A_i| \geq k_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$，則必存在$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，使得函數值$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \neq 0$』。給定圖$G$，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，將邊賦予方向性則可得$G$的一個定向，稱為有向圖$D_G$，其中點$v_i$在有向圖$D_G$中指出去的箭頭數稱為外度數，記為$d^+_{D_G}(v_i)=d_i$，將$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$記為$D_G$的**『外度數序列』**。將$G$所有外度數序列所形成的集合記為$Out(G)$。定義$f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{(v_i,v_j)\in E(D_G)}(x_i-x_j)$，稱$f_{D_G}$為$D_G$的**『圖多項式』**、$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$為$f_{D_G}$的**『特殊項』**。考慮$D_G$中頂點集合相同的子圖$D_H$，若對任意$v \in V(D_H)$，皆滿足$d^+_{D_H}(v)=d^-_{D_H}(v)$，則稱$D_H$為**『歐拉有向子圖』**。根據$|E(D_H)|$的奇偶性，將$D_G$所有的歐拉有向子圖分成兩類，令$\varepsilon_{even}(D_G)$與$\varepsilon_{odd}(D_G)$分別為$D_G$中所有**『歐拉偶子圖』**與**『歐拉奇子圖』**所形成的集合。若$|\varepsilon_{even}(D_G)| \neq |\varepsilon_{odd}(D_G)|$，則稱$D_G$為$G$的一個**『歐拉定向』**。以下為我們的研究目的：

（1） 利用有向圖D_G的$\varepsilon_{even}(D_G)$與$\varepsilon_{odd}(D_G)$的數量，刻畫f_{D_G}中特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$的係數；

（2） 給定圖G，探討不同定向D_1與D_2，刻畫兩者在歐拉有向子圖數量上的定量關係；

（3） 利用圖G所有的外度數序列$Out(G)$，刻畫f_{D_G}展開式中每一項的係數；

（4） 利用圖G的定向D_G，設計各點的列表數量函數ℓ，使其能完成ℓ-列表著色；

（5） 令圖H與圖K皆存在歐拉定向，則研究如何透過H與K建構圖G的可約構形。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、文書與繪圖軟體（Word、Powerpoint、Mathtype）。

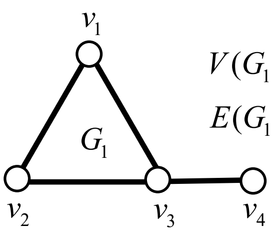
肆、研究過程或方法

一、基本概念、名詞解釋與先備知識

有關『可約構形』的設計，我們欲探討出具有程序性的建構方法，研究過程中，為了清楚的表達我們的成果，我們必須學習一些相關的數學知識，其中涉及到許多圖論的符號與基本概念，大多的記號方法我們參考了 Gary Chartrand 等人著作的《Graphs and Digraphs》與 Douglas B. West 著作的《Introduction to Graph Theory》這兩本圖論書籍〔參考文獻 2，5〕。為了能夠順暢的呈現論述的過程，我們亦需要設計一些數學符號來說明如何建構可約構形。以下我們將介紹研究題目以及所需的先備知識。

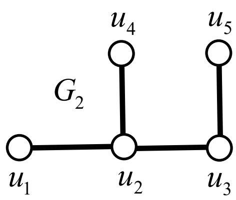
圖與圈的概念

給定若干點，若點與點之間有關係則用一條邊相連，由點與邊所組合而成的結構稱為一個**『圖』**，令集合 $V(G)$ 為圖 G 所有的頂點，集合 $E(G)$ 為圖 G 所有的邊，此外我們將點與邊的數量分別記為 $|V(G)|$ 與 $|E(G)|$。對於兩個不同的頂點 $u,v \in V(G)$，若頂點 u,v 之間有邊連結，則將此邊記為 uv，意即 $uv \in E(G)$。以左下圖 G_1 為例，G_1 的頂點集合為 $V(G_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，邊集合為 $E(G_1)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_1,v_3v_4\}$，其中 $|V(G_1)|=4$ 與 $|E(G_1)|=4$。以右下圖 G_2 為例，G_2 的頂點集合為 $V(G_2)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，邊集合為 $E(G_2)=\{u_1u_2,u_2u_3,u_2u_4,u_3u_5\}$，其中 $|V(G_2)|=5$ 與 $|E(G_2)|=4$。



$V(G_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

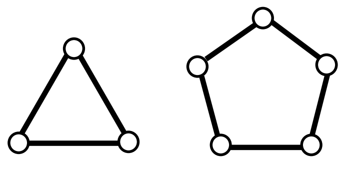
$E(G_1)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_1,v_3v_4\}$



$V(G_2)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$

$E(G_2)=\{u_1u_2,u_2u_3,u_2u_4,u_3u_5\}$

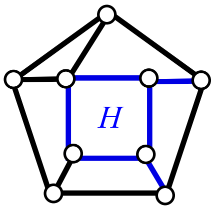
若一個圖 G 的頂點與邊恰好形成一個環狀圖形，我們特別將此類型的圖稱為**『圈（*cycle*）』**。

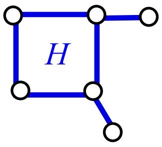


給定圖 G，若 $v \in V(G)$ 且 v 與自己有邊相連，則稱此邊為**『迴圈（*loop*）』**，記為 $vv \in E(G)$；若兩點 u,v 之間的邊稱為**『重邊（*multiple edges*）』**，則表示 u,v 兩點之間有兩條以上的邊。若圖 G 的結構中沒有迴圈與重邊，則稱 G 為**『簡單圖（*simple graph*）』**。以下我們研究中討論的圖皆為簡單圖。

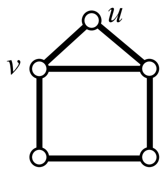
子圖 *subgraph* 與點的度數 *degree*

給定圖 G，若將圖 G 中某些點或某些邊刪除後可得另一個結構較小的圖 H，則稱 H 為 G 的**『子圖（*subgraph*）』**，意即 H 為 G 的內部子結構所形成的圖形。例如：參考左下圖 G，其中右下圖 H 即為 G 的一個子圖。

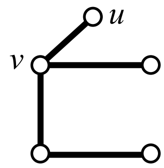
圖 G： 

子圖 H： 

對於一般簡單圖 G，考慮頂點 $v \in V(G)$，若 v 恰與 k 個點有邊相連，則稱頂點 v 的**『度數（*degree*）』**為 k，亦稱 v 為**『k-*vertex*』**，並記為**『$d_G(v)=k$』**。例如：考慮下圖 G，$d_G(u)=2$，$d_G(v)=3$；考慮下圖 H，$d_H(u)=1$，$d_H(v)=3$。

圖 G： 

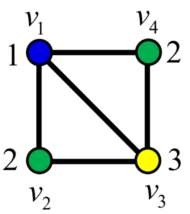
$\Rightarrow$ $d_G(u)=2$ $d_G(v)=3$

子圖 H： 

$\Rightarrow$ $d_H(u)=1$ $d_H(v)=3$

圖的著色數 *chromatic number*

給定圖 G，令 $V(G)$ 為頂點集合，給定函數 $c:V(G)\to\mathbb{N}$，若對任意的邊 $uv\in E(G)$，函數 c 皆滿足 $c(u)\neq c(v)$，則稱函數 c 為圖 G 的一個**『著色函數（*proper coloring*）』**。若圖 G 存在著色函數 $c:V(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，則稱 G 為**『可 k 著色（k-*colorable*）』**，我們亦稱函數 c 為**『k-著色函數（k-*coloring*）』**。不難得知，若圖 G 是 k-*colorable*，則 G 必然也為 $(k+1)$-*colorable*。對任意的圖 G，可知 G 必然為 $|V(G)|$-*colorable*。因此對於圖形的著色問題，研究的重點為：能使得 G 是 k-*colorable* 的最小自然數 k 為何？若 k 為最小自然數能使得圖 G 是 k-*colorable*，則稱 k 為 G 的**『著色數（*chromatic number*）』**，以符號記為**『$\chi(G)$』**。這表示 $\chi(G)=\min\{k\in\mathbb{N} : G是k\text{-}colorable\}$。



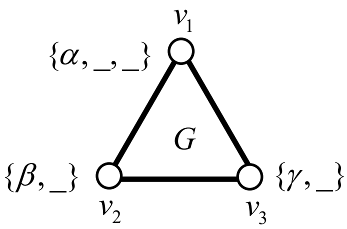
$\Rightarrow$ $c(v_1)=1$、$c(v_2)=2$
$c(v_3)=3$、$c(v_4)=2$

列表著色 ℓ-*choosable*

有關列表著色的相關知識，我們參考了『平面圖的四元列表著色』一文〔參考文獻 1〕。令 $2^{\mathbb{N}}$ 為所有自然數 $\mathbb{N}$ 的子集合所形成的集合，對於圖 G，考慮函數 $L:V(G)\to 2^{\mathbb{N}}$，我們稱函數 L 為圖 G 的**『顏色列表函數（*list assignment*）』**。對於 $v\in V(G)$，$L(v)$ 稱為頂點 v 的**『顏色列表（*color list*）』**。給定顏色列表函數 L，若圖 G 存在著色函數 $c:V(G)\to\mathbb{N}$，其中對任意頂點 $v\in V(G)$，皆滿足 $c(v)\in L(v)$，則稱此著色函數 c 為圖 G 的一個**『L-列表著色（L-*coloring*）』**。

給定圖G，若顏色列表函數L，對任意頂點$v \in V(G)$，皆滿足$|L(v)| = k$，則稱此顏色列表函數L為**『k元列表函數（k-list）』**。若對於任意k元列表函數L，圖G皆可存在L-coloring，則稱圖G為**『可k元列表著色（k-choosable）』**。若k為最小的自然數，使得圖G為k-choosable，則稱圖G的**『列表著色數（choosability）』**為k，並記為**『$\chi_\ell(G) = k$』**，意即$\chi_\ell(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G是k\text{-}choosable\}$。廣義的情況下，令$\ell : V(G) \to \mathbb{N}$，$\ell(v)$表示點$v$可使用的顏色數量，稱函數$\ell$為圖$G$的**『列表數量函數』**，特別情況下亦將列表數量函數記為**『ℓ_G』**。若顏色列表函數L，對任意頂點$v \in V(G)$，皆滿足$|L(v)| = \ell(v)$，則稱此顏色列表函數L為**『ℓ-列表（ℓ-list）』**。若對於任意ℓ-列表L，圖G皆可存在L-coloring，則稱圖G為**『可ℓ-列表著色（ℓ-choosable）』**。俄羅斯數學家 Vizing 首度提出列表著色的概念，同時 Erdős，Rubin 與 Taylor 等學者亦獨立發表列表著色的概念於期刊論文中〔參考文獻 3，5〕。

例如：參考下圖G，令ℓ-列表為$\ell(v_1) = 3$且$\ell(v_2) = \ell(v_3) = 2$。對任意$\ell$-列表$L$，令$\gamma \in L(v_3)$、$\beta \in L(v_2) \setminus \{\gamma\}$，因為$|L(v_1)| = 3$，所以$L(v_1) \setminus \{\beta, \gamma\} \neq \varnothing$，故存在$\alpha \in L(v_1) \setminus \{\beta, \gamma\}$。令$c(v_1) = \alpha$、$c(v_2) = \beta$與$c(v_3) = \gamma$，可知函數$c$必為$G$的$L$-coloring。因此$G$為可$\ell$-列表著色。



$$\ell(v_i) = \begin{cases} 3, & 當 i = 1; \\ 2, & 當 i = 2, 3. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c(v_1) = \alpha \in L(v_1) \\ c(v_2) = \beta \in L(v_2) \\ c(v_3) = \gamma \in L(v_3) \end{array}$$

二、圖多項式與列表著色

對於一個圖，其結構為點與邊的關係，若適當的將點與邊的關係代數化，利用一個代數式來表現圖的結構，在探討著色問題時，利用代數式則可幫助我們判斷是否為一個合理的著色方式。以下將介紹我們如何將一個圖轉換為一個多項式。

圖多項式

給定圖G，頂點集合為$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，邊集合為$E(G)$，其中$|V(G)| = n$與$|E(G)| = k$。將每一個頂點$v_i \in V(G)$對應一個變數$x_i$；若$v_i$與$v_j$有邊相連（$v_i v_j \in E(G)$），則將邊$v_i v_j$對應一個代數式$(x_i - x_j)$。將$G$所有的邊所對應的代數式全部相乘，則可得代數式$\prod_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)$。

令函數$c : V(G) \to \mathbb{N}$為圖G的一個著色函數，若$c(v_i) = \alpha_i \in \mathbb{N}$，則將變數$x_i$用$\alpha_i$的值代

入。因為對任意邊$v_iv_j \in E(G)$，可知$c(v_i)=\alpha_i \neq \alpha_j = c(v_j)$，所以將$x_i$與$x_j$分別用$\alpha_i$與$\alpha_j$的值代入$(x_i - x_j)$時，其值$(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$。由此可知，對任意$i = 1 \sim n$，將$x_i$用$\alpha_i$代入$\prod\limits_{v_iv_j \in E(G)} (x_i - x_j)$後其值非零，意即$\prod\limits_{v_iv_j \in E(G)} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$。

對於圖G，定義$f_G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{v_iv_j \in E(G)} (x_i - x_j)$，可知$f_G$為一個$n$元$k$次多項式，稱$f_G$為$G$的**『圖多項式』**，圖多項式$f_G$能直接反映$G$的結構，可視為圖$G$的一種代數表現。若存在$n$元序列$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \Box^n$能使得函數值$f_G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq 0$，則圖$G$存在一個著色函數$c: V(G) \to \Box$，其中$c(v_i) = \alpha_i$，$i = 1 \sim n$，反之亦然。

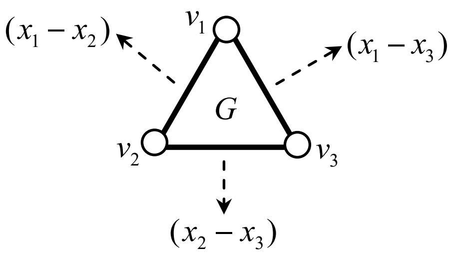
圖多項式的定義與著色函數

1. 給定圖G，$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，定義$G$的圖多項式為$f_G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{v_iv_j \in E(G)} (x_i - x_j)$。
2. 存在$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \Box^n$使得$f_G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq 0$

   $\Leftrightarrow$ 令$c(v_i) = \alpha_i$，$i = 1 \sim n$，$c: V(G) \to \Box$即為圖G的一個著色函數。

例如：給予圖G，其中頂點集合為$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$，邊集合為$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$。

每一條邊皆轉換成一個二元一次多項式，將v_1v_2、v_2v_3與v_1v_3這三條邊分別轉換為$(x_1 - x_2)$、$(x_2 - x_3)$與$(x_1 - x_3)$。圖G則可對應到一個三元三次多項式$f_G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$。其中變數$x_1, x_2, x_3$的值分別代表頂點$v_1, v_2, v_3$使用的顏色，因為有邊相連的兩點需著不同顏色，這表示這三個二元一次多項式的值需皆不為零。由此可知，『圖G有一個著色函數』與『存在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，使得$f_G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$』為等價的關係，其中$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$分別視為$v_1, v_2, v_3$所使用的顏色。



$\Leftrightarrow \quad f_G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$

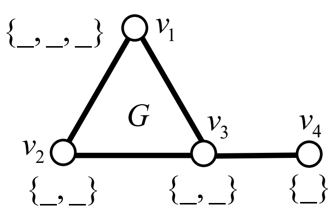
考慮函數值$f_G(1,2,3) = (1-2)(2-3)(1-3) \neq 0$，所以$c(v_1) = 1$、$c(v_2) = 2$、$c(v_3) = 3$即為圖$G$的一個著色函數。■

圖多項式與ℓ-列表的關係

給定圖G，$f_G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{v_iv_j\in E(G)}(x_i-x_j)$為圖多項式。令$\ell:V(G)\to\mathbb{N}$，考慮$\ell$-列表$L$，則自然數子集合$L(v_i)$表示點$v_i$可以使用的顏色列表，其中$|L(v_i)|=\ell(v_i)$，$i=1\sim n$。欲說明圖$G$存在$L$-$coloring$，則需表示存在$\alpha_i\in L(v_i)$，$i=1\sim n$，使得$f_G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。當我們想探討圖$G$是否為可$\ell$-列表著色時，以多項式的觀點來看，令$A_i$為自然數子集合，其中$|A_i|=\ell(v_i)$，若變數$x_i$的取值限制為集合$A_i$內的數，則我們希望圖多項式$f_G$的函數值有不等於零的可能性，因此我們欲探討$|A_i|$的數量下界該如何設計，方能保證存在一種變數$x_i$取值的方式，使得$f_G$的函數值不等於零。

圖G	點v_i	邊v_iv_j	點v_i的顏色列表$L(v_i)$	$\lvert L(v_i)\rvert=\ell(v_i)$
圖多項式f_G	變數x_i	二元一次式(x_i-x_j)	變數x_i取值於集合A_i	$\lvert A_i\rvert=\ell(v_i)$

對於一般的簡單圖G，令圖G的頂點集合為$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，邊集合為$E(G)$，共有$k$條邊。若$v_i$與$v_j$有邊相連，則將此邊$v_iv_j$轉換為$(x_i-x_j)$。將各邊所轉換的二元一次多項式相乘，則圖$G$可以對應到一個$n$元$k$次多項式$f_G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{v_iv_j\in E(G)}(x_i-x_j)$。若點$v_i$可使用的顏色列表為集合$A_i$，其中$i=1,2,\cdots,n$，則表示$x_i=\alpha_i\in A_i$。若函數值$f_G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$，則表示存在$v_iv_j\in E(G)$，使得$(\alpha_i-\alpha_j)=0$，意即$v_i$與$v_j$使用一樣的顏色，這並不符合著色問題的條件。由此可知，從列表著色問題的角度來看，我們關心的則是各頂點v_i可使用的顏色列表$L(v_i)$，是否存在一個好的著色；以多項式的角度來看，我們關心的則是各變數x_i可取值於集合A_i，是否存在$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$使得函數值$f_G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。



$f_G(x_1,x_2,x_3,x_4)$
$=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)(x_3-x_4)$

$\Leftrightarrow$

$$\ell(v_i)=\begin{cases}3, & \text{當}\ i=1;\\ 2, & \text{當}\ i=2,3;\\ 1, & \text{當}\ i=4.\end{cases}$$

G是可ℓ-列表著色

$\Leftrightarrow$

$$|A_i|=\begin{cases}3, & \text{當}\ i=1;\\ 2, & \text{當}\ i=2,3;\\ 1, & \text{當}\ i=4.\end{cases}$$

存在$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in A_1\times A_2\times A_3\times A_4$
使得$f_G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\neq 0$

鴿籠原理與代數基本定理的相遇

代數基本定理經推廣後可得知『任何複數系一元n次多項式方程式皆至多有n個相異的

複數根』。令集合 $\mathbb{C}$ 為所有複數，所有複數系一元多項式所成的集合記為 $\mathbb{C}[x]$，若 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$，則 $\deg\left(f(x)\right)$ 記為 $f(x)$ 中變數 x 的最高指數。當 A 為複數的子集合，以 $|A|$ 表示集合內的元素個數。給定 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg\left(f(x)\right)=n$，我們從鴿籠原理的角度，重新詮釋代數基本定理對於方程式根數量的解讀：

代數基本定理的推廣：方程式 $f(x)=0$ 至多有 n 個相異的複數根。

鴿籠原理觀點的詮釋：給定集合 $A\subseteq\mathbb{C}$，若 $|A|\geq n+1$，則必存在 $\alpha\in A$，使得 $f(\alpha)\neq 0$。

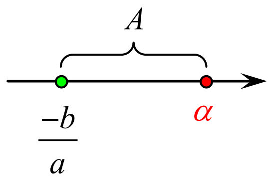
鴿籠原理的觀點意旨，因為多項式方程式的根的個數為有限，若集合 A 中的元素足夠多，根據鴿籠原理，可知 A 必然存在一個元素不為方程式的解。以組合的觀點延伸，我們可以從多項式的『次數』與『變數的個數』進行推廣，針對集合 A 探索元素數量的下界，使得 A 必存在非方程式的解。這是一種由代數的結果進行一個簡單的組合推論。以下我們先針對一次多項式進行探討，進一步將鴿籠原理的觀點推廣至 n 元 k 次多項式。

$\boldsymbol{n}$ 元一次多項式的充分條件

首先觀察 n 元一次多項式，首先考慮 $n=1,2,3$ 的情形，為了方便用幾何圖形觀察，我們在以下三個例子，將多項式的係數限制在實數 $\mathbb{R}$ 中。

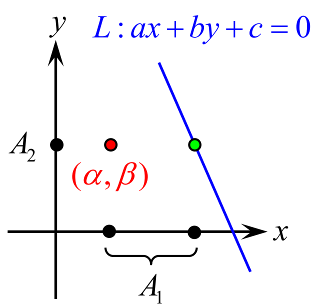
（一元一次多項式）

考慮 $f(x)=ax+b$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a\neq 0$。因為方程式 $ax+b=0$ 在數線上的圖形為一個點，因此給定任意集合 $A\subseteq\mathbb{R}$，其中 $|A|\geq 2$，則至少存在 $\alpha\in A$，使得 $f(\alpha)=a\alpha+b\neq 0$。

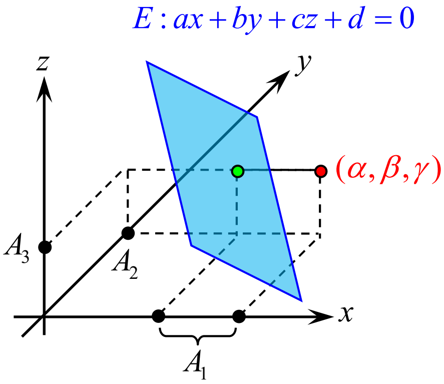


（二元一次多項式）

考慮 $f(x,y)=ax+by+c$，其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$。不失一般性，可假設 $a\neq 0$。因為方程式 $ax+by+c=0$ 在坐標平面上的圖形為一條非水平的直線 L，因此在坐標平面上給定左右相異兩點 (α_1,β) 與 (α_2,β)，其中必有一點不在直線 L 上。故給定任意兩集合 $A_1,A_2\subseteq\mathbb{R}$，其中 $|A_1|\geq 2$ 與 $|A_2|\geq 1$，則至少存在一組 $\alpha\in A_1$ 與 $\beta\in A_2$，使得 $f(\alpha,\beta)=a\alpha+b\beta+c\neq 0$。



（三元一次多項式）



考慮 $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$，其中 $a,b,c,d\in$□。不失一般性，可假設 $a\neq 0$。因為方程式 $ax+by+cz+d=0$ 在空間坐標上的圖形為一個非平行 x 軸的平面 E，因此在空間坐標上給定相異兩點 (α_1,β,γ) 與 (α_2,β,γ)，其中必有一點不在平面 E 上。故給定任意兩集合 $A_1,A_2,A_3\subseteq$□，其中 $|A_1|\geq 2$、$|A_2|\geq 1$ 與 $|A_3|\geq 1$，則至少存在一組 $\alpha\in A_1$、$\beta\in A_2$ 與 $\gamma\in A_3$，使得 $f(\alpha,\beta,\gamma)=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\neq 0$。

綜合上面的觀察，透過數學歸納法，我們可以有下列的引理：

Lemma 1：n 元一次多項式函數值不為零的充分條件

令 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b$ 為複係數 n 元一次多項式，其中 $a_j\neq 0$。

對於 $i=1,2,\cdots,n$，考慮複數子集合 $A_i\subseteq$□。

若 $|A_i|\geq\begin{cases}2, & 當 i=j;\\ 1, & 當 i\neq j\end{cases}$ 時，則對於 $i=1,2,\cdots,n$，存在 $\alpha_i\in A_i$，使得 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。

【證明】：

對於變數的個數進行數學歸納法。

當 $n=1$ 時，因為 $a_1\neq 0$，可知方程式 $f(x_1)=a_1x_1+b=0$ 恰有唯一解。因為 $|A_1|\geq 2$，所以必存在元素 $\alpha_1\in A_1$，使得 $f(\alpha_1)\neq 0$。對於 $n\geq 2$ 時，假設變數個數小於 n 時，命題皆成立。以下考慮 n 元一次多項式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

不失一般性，我們假設 $a_1\neq 0$。因為『$|A_1|\geq 2$，且當 $i\geq 2$ 時 $|A_i|\geq 1$』，所以存在元素 $\alpha_n\in A_n$。將 $x_n=\alpha_n$ 代入 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，則可得 $(n-1)$ 元一次多項式 $f'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\alpha_n)=a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}+(a_n\alpha_n+b)$。根據數學歸納法假設，可知對於 $i=1,2,\cdots,n-1$，存在 $\alpha_i\in A_i$，使得 $f'(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})\neq 0$，因此 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\neq 0$。根據數學歸納法得知原命題恆成立。 ■

此結論表示對於一次多項式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若某變數 x_j 的係數 a_j 不為零，則該變數相對應集合 A_j 的元素個數需大於 1，意即在『$|A_j|\geq 2$，且當 $i\neq j$ 時 $|A_i|\geq 1$』此限制之下，於複數子集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，必存在元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 能使得函數值 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 不為零。

n元k次多項式的充分條件

令$\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$為所有$n$元多項式所成的集合。若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$為一個$n$元多項式，其中某一項$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的係數不為零，則稱$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的『**度數**(***degree***)』為$k_1+k_2+\cdots+k_n$。將所有項中最高的度數定義為$\deg\left(f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)$。若$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的係數不為零且度數恰為$\deg\left(f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)$，則稱此項為$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一個『**最高次項**』。當$\deg\left(f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)=k$時，則稱$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$為『**$n$元$k$次多項式**』。

代數基本定理的鴿籠原理觀點，暗示著最高次項各變數的指數，決定集合內元素數量，方可存在函數值不為零的可能。對於n元k次多項式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令$A_1,A_2,\cdots,A_n\subseteq\mathbb{C}$且$A_1,A_2,\cdots,A_n$的積集合為$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。以下定理將利用數學歸納法，說明最高次項中各變數的指數如何用來制訂集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$內元素的數量限制作為充分條件，方能存在$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$使得$f$的函數值$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。透過多項式長除法的概念，利用除法原理進行商式跟餘式的討論，可得n元k次多項式函數值不為零的充分條件：

Theorem 1：組合零點定理 Combinatorial Nullstellensatz

令$f\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，其中$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$為最高次項，$A_1,A_2,\cdots,A_n\subseteq\mathbb{C}$。

若$|A_i|\geq k_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$，則必存在n元序列$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，使得函數值$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。

【證明】:

根據 Lemma 1 可知當$\deg\left(f\right)=1$時，命題成立。

假設存在n元多項式，$\deg\left(f\right)\geq 2$，使得命題不成立，則在眾多的反例中，必然存在度數為最小的反例f，我們將此反例f稱為最小反例。因為f為最小反例，所以存在複數子集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中$|A_i|\geq k_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$，使得對任意$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$皆滿足函數值$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$。

不失一般性，假設$k_1\geq 1$。從A_1中取一個固定元素α，利用除法原理可得$f=(x_1-\alpha)\cdot Q+R$，其中$Q\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$與$R\in\mathbb{C}[x_2,x_3,\cdots,x_n]$。此外可知$\deg\left(Q\right)=\deg\left(f\right)-1$且$x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$為$Q$的最高次項。

對任意$(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，因為函數值$f(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$恆成立，所以對任

意 $(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)\in A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$ ， $R(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$ 亦恆成立。

對任意 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\left(A_1-\{\alpha\}\right)\times A_2\times\cdots\times A_n$ ，可知 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$ 恆成立。因為 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1-\alpha)\cdot Q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+R(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$ 成立，其中 $(\alpha_1-\alpha)\neq 0$ 且 $R(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$，所以可知 $Q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$ 亦恆成立。又因為 $\deg(Q)=\deg(f)-1$，所以 Q 為度數更小的反例，此與 f 為最小反例的假設產生矛盾。意即最小反例 f 是不存在的，由此完成定理證明。 ■

Theorem 1 稱為**『組合零點定理』**，是由以色列數學家 Noga Alon 於 1999 年發表的論文中所提出的定理〔參考文獻 2〕。於 2010 年時，Mateusz Michałek 提出了一個簡單的證明版本〔參考文獻 4〕。以下我們透過範例來呈現組合零點定理在列表著色上的應用。

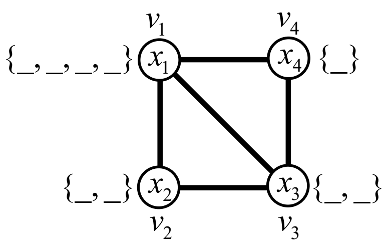
例如：考慮圖 G ，頂點集合為 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ ，邊集合為 $E(G)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4,v_1v_4,v_1v_3\}$ 。將每一條邊轉換成二元一次多項式 (x_1-x_2) 、(x_2-x_3) 、(x_3-x_4) 、(x_1-x_4) 與 (x_1-x_3) ，則圖 G 可得四元五次多項式 $f_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_1-x_4)(x_1-x_3)$ 。令 A_1,A_2,A_3,A_4 分別為 x_1,x_2,x_3,x_4 可取值的集合，由 Theorem 1 可知下列結論：

（1）考慮最高次項 $x_1^3\cdot x_2\cdot x_3$ 。

因為 $x_1^3\cdot x_2\cdot x_3$ 的係數不為零，可知當 $|A_1|\geq 4$ 、$|A_2|\geq 2$ 、$|A_3|\geq 2$ 、$|A_4|\geq 1$ 時，則存在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in A_1\times A_2\times A_3\times A_4$ 使得多項式 $f_G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\neq 0$ 。這表示若函數 $\ell:V(G)\to\mathbb{N}$ 定義為 $\ell(v_1)\geq 4$ 、$\ell(v_2)\geq 2$ 、$\ell(v_3)\geq 2$ 、$\ell(v_4)\geq 1$，則圖 G 為可 ℓ-列表著色（如下圖所示）。

$$f_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{v_iv_j\in E(G)}(x_i-x_j) \quad \Leftrightarrow \quad |A_i|\geq\begin{cases}4, & \text{當 } i=1;\\ 2, & \text{當 } i=2,3;\\ 1, & \text{當 } i=4.\end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

考慮最高次項 $x_1^3\cdot x_2\cdot x_3$



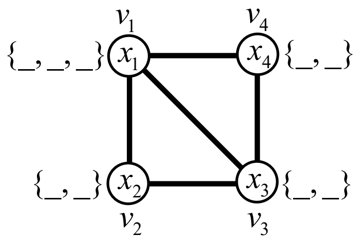
（2）考慮最高次項 $x_1^2\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ 。

因為 $x_1^2\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ 的係數不為零，可知當 $|A_1|\geq 3$ 、$|A_2|\geq 2$ 、$|A_3|\geq 2$ 、$|A_4|\geq 2$ 時，則存在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in A_1\times A_2\times A_3\times A_4$ 使得多項式 $f_G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\neq 0$ 。這表示若函數 $\ell:V(G)\to\mathbb{N}$ 定義為 $\ell(v_1)\geq 3$ 、$\ell(v_2)\geq 2$ 、$\ell(v_3)\geq 2$ 、$\ell(v_4)\geq 2$ ，則圖 G 亦為可 ℓ-列表著色（如下圖所示）。

$$f_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{v_iv_j\in E(G)}(x_i-x_j)$$

考慮最高次項 $x_1^{\ 2}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$

$$\Leftrightarrow\quad |A_i|\ge\begin{cases}3, & \text{當 } i=1;\\ 2, & \text{當 } i=2,3,4.\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$



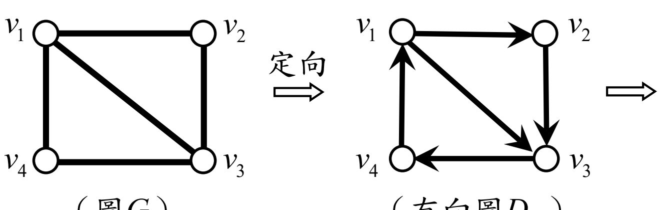
利用 Theorem 1 的結論，對於圖G，將鴿籠原理運用在代數式中的變數，我們可以透過圖多項式 f_G 的最高次項，觀察最高次項中各變數的指數，用以來設計列表數量函數 $\ell:V(G)\to\mathbb{N}$，使得G為可ℓ-列表著色。

三、有向圖與最高次項的係數關係

給定圖G，因為圖多項式 f_G 的一次因式皆沒有常數項，所以 f_G 以分配律展開後的每一項，若同類項的係數不為零，則必為最高次項。以下我們將說明，如何運用圖的定向關係來判斷 f_G 最高次項的係數，藉以確認該項的存在性，意即該項的係數不為零。

有向圖 *directed graph*

給定圖G，若將G所有的邊賦予方向性，則所得的圖形稱為**『有向圖』**。將此有向圖記為 D_G，或簡稱 D_G 為圖G的一個**『定向（*orientation*）』**，其中有向圖 D_G 的頂點 $V(D_G)=V(G)$。若 $u,v\in V(D_G)$，且在 D_G 中有向邊為u指向v，則將此有向邊記為序對**『$(u,v)\in E(D_G)$』**，而 $E(D_G)$ 即為 D_G 中有向邊所形成的集合。將 D_G 所有的邊交換方向後所形成的有向圖記為**『D_G^{-1}』**。此外，對於 $u\in V(D_G)$，在有向圖 D_G 中考慮所有u指出去的有向邊，其中將u指向的點所形成的點集合記為**『$N_{D_G}^{+}(u)$』**，意即 $N_{D_G}^{+}(u)=\{v\in V(D_G):(u,v)\in E(D_G)\}$。若點$u$指向外的有向邊共有$k$條，則稱$k$為$u$的**『外度數（*out-degree*）』**，記為**『$d_{D_G}^{+}(u)=k$』**；若指向點u的有向邊共有k條，則稱k為u的**『內度數（*in-degree*）』**，記為**『$d_{D_G}^{-}(u)=k$』**。不難得知，$\sum_{u\in V(D_G)}d_{D_G}^{+}(u)=\sum_{u\in V(D_G)}d_{D_G}^{-}(u)=|E(D_G)|$，也就是說所有點的外度數總和與內度數總和兩者皆為有向邊的數量。



（圖G）　　（有向圖D_G）

$$\Rightarrow\quad\begin{array}{ll}d_{D_G}^{+}(v_1)=2 & d_{D_G}^{-}(v_1)=1\\ d_{D_G}^{+}(v_2)=1 & d_{D_G}^{-}(v_2)=1\\ d_{D_G}^{+}(v_3)=1 & d_{D_G}^{-}(v_3)=2\\ d_{D_G}^{+}(v_4)=1 & d_{D_G}^{-}(v_4)=1\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{4}d_{D_G}^{+}(v_i)=\sum_{i=1}^{4}d_{D_G}^{-}(v_i)=5=|E(D_G)|$$

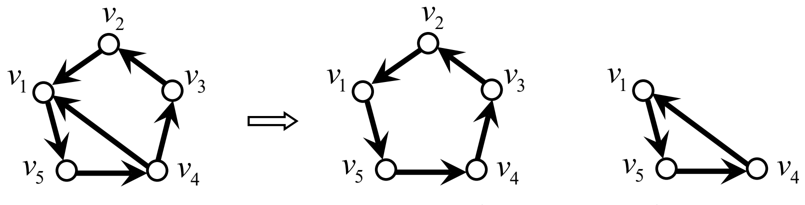
歐拉有向圖 *Eulerian directed graph*

若有向圖 D_G 的任意點 v 皆滿足 $d^+_{D_G}(v)=d^-_{D_G}(v)$，則稱 D_G 為**『歐拉有向圖』**。

$\Longrightarrow \quad d^+_{D_G}(v)=3\neq 1=d^-_{D_G}(v)$

（歐拉有向圖）　　　　（非歐拉有向圖）

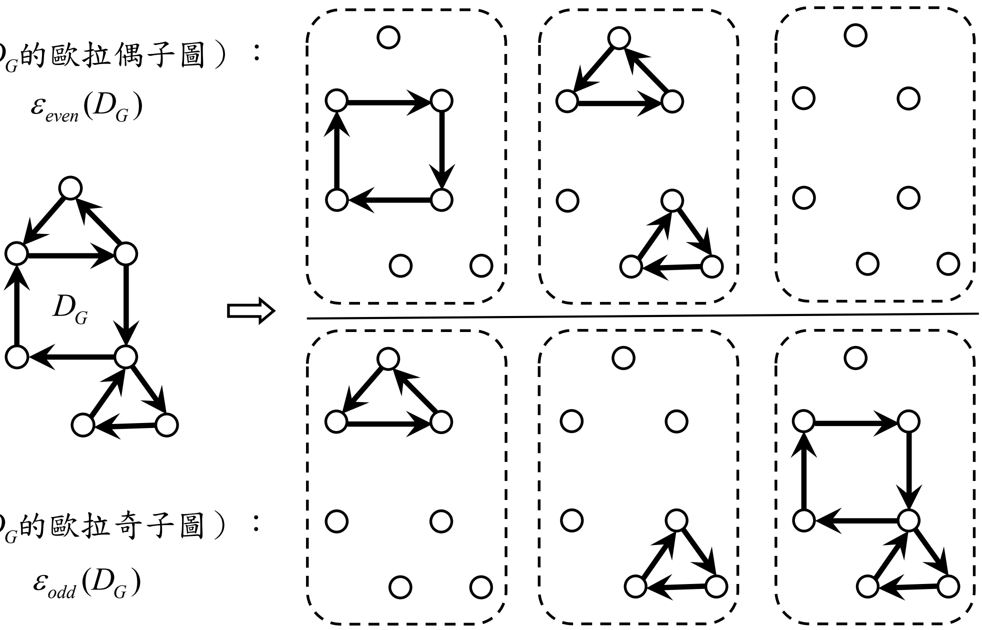
給定有向圖 D_G，令 $\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}\subseteq V(D_G)$ 為 k 個相異點，$k\geq 3$，其中 $\{(v_{i_p},v_{i_{p+1}}):p=1\sim k-1\}\cup\{(v_{i_k},v_{i_1})\}$ 皆為 $E(D_G)$ 中的有向邊，則將此 k 條有向邊所形成的圖形稱為**『有向圈（*directed cycle*）』**。



D_G　　　　（D_G的有向圈）

若 D_H 為歐拉有向圖，其中 $V(D_H)=V(D_G)$，$E(D_H)\subseteq E(D_G)$，則稱 D_H 為 D_G 的**『歐拉有向子圖』**，並將 D_G 所有歐拉有向子圖所形成的集合記為**『$\varepsilon(D_G)$』**。特別的，若 D_H 的有向邊數量 $|E(D_H)|$ 為偶數，則稱 D_H 為**『歐拉偶子圖』**；若 D_H 的有向邊數量 $|E(D_H)|$ 為奇數，則稱 D_H 為**『歐拉奇子圖』**。我們將所有歐拉偶子圖所形成的集合記為**『$\varepsilon_{even}(D_G)$』**；將所有歐拉奇子圖所形成的集合記為**『$\varepsilon_{odd}(D_G)$』**。下圖範例的 D_G 所有的子圖中，共有 6 個歐拉有向子圖，依照歐拉有向子圖邊數量的奇偶性，D_G 共有 3 個歐拉偶子圖與 3 個歐拉奇子圖，意即 $|\varepsilon_{even}(D_G)|=3$，$|\varepsilon_{odd}(D_G)|=3$。

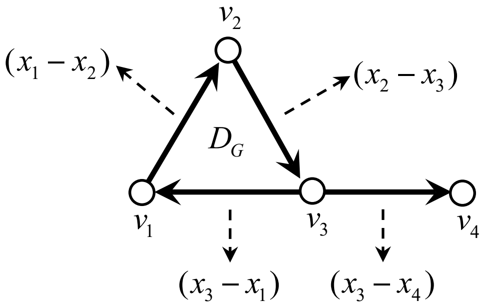
（D_G的歐拉偶子圖）：
$\varepsilon_{even}(D_G)$



（D_G的歐拉奇子圖）：
$\varepsilon_{odd}(D_G)$

有向圖多項式與特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數

給定有向圖 D_G，令頂點集合 $V(D_G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，將 D_G 中的有向邊 (v_i,v_j) 對應一個二元一次多項式 (x_i-x_j)，則考慮所有的有向邊，將所有對應的二元一次多項式相乘，可以將有向圖 D_G 對應一個 n 元多項式 $\boldsymbol{f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{(v_i,v_j)\in E(D_G)}(x_i-x_j)}$，我們稱 f_{D_G} 為 D_G 的**『有向圖多項式』**，亦可簡稱為圖多項式。因為 f_{D_G} 為 $|E(D_G)|$ 個二元一次多項式的乘積，故 f_{D_G} 即為 n 元 $|E(D_G)|$ 次多項式。我們可以將圖多項式 f_{D_G} 視為有向圖 D_G 的一種代數表現。

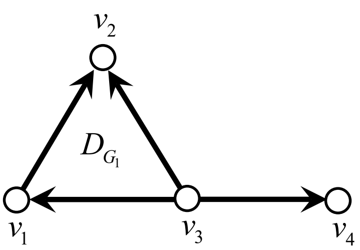


$\Longleftrightarrow f_{D_G}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)$

令 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 為相異 k 個數，若 $(x_{i_1}-x_{i_2})(x_{i_2}-x_{i_3})\cdots(x_{i_{k-1}}-x_{i_k})(x_{i_k}-x_{i_1})$ 為 f_{D_G} 的因式，則稱 $(x_{i_1}-x_{i_2})(x_{i_2}-x_{i_3})\cdots(x_{i_{k-1}}-x_{i_k})(x_{i_k}-x_{i_1})$ 為 f_{D_G} 的**『循環因式』**。

因為圖多項式 f_{D_G} 為齊次，所以 f_{D_G} 展開後的每一項皆為最高次項。對 $i=1,2,\cdots,n$，令點 v_i 的外度數 $d^+_{D_G}(v_i)=d_i$，我們稱 $\prod_{i=1}^{n}x_i^{d_i}=x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 為 f_{D_G} 的**『特殊項』**，欲考慮特殊項**『 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 』**在 f_{D_G} 展開式中的係數。因為一個圖的定向將決定各點的外度數序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，所以不同的定向，將決定不同的特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$，可以預期此特殊項在 f_{D_G} 中的係數應與此定向有密切的關聯性。以下我們透過幾個例子來觀察 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 在 f_{D_G} 中的係數，並試圖刻畫係數與定向的特徵。

例 1：令 D_{G_1} 如下圖所示，$V(D_{G_1})=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E(D_{G_1})=\{(v_1,v_2),(v_3,v_2),(v_3,v_1),(v_3,v_4)\}$。

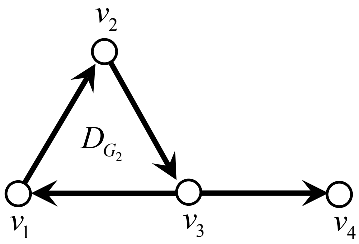


$\Longleftrightarrow f_{D_{G_1}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_4)$

特殊項 $x_1x_3^3$

由 $f_{D_{G_1}}$ 的展開式中，可知特殊項 $x_1x_3^3$ 的係數為 1。■

例 2：令 D_{G_2} 如下圖所示，$V(D_{G_2})=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ ，$E(D_{G_2})=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1),(v_3,v_4)\}$ 。

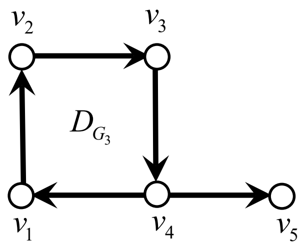


$$\Longleftrightarrow f_{D_{G_2}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)$$

特殊項 $x_1x_2x_3{}^2$

在 $f_{D_{G_2}}$ 的展開式中，觀察四個二元一次式，從分配律的過程中，依順序可得 $x_1x_2x_3x_3$ 與 $(-x_2)(-x_3)(-x_1)x_3$ ，因此特殊項 $x_1x_2x_3{}^2$ 的係數為 0 。■

例 3：令 D_{G_3} 如下圖，$V(D_{G_3})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E(D_{G_3})=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_1),(v_4,v_5)\}$ 。



$$\Longleftrightarrow f_{D_{G_3}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_4-x_5)$$

特殊項 $x_1x_2x_3x_4{}^2$

在 $f_{D_{G_3}}$ 的展開式中，觀察五個二元一次式，從分配律的過程中，依順序可得 $x_1x_2x_3x_4x_4$ 與 $(-x_2)(-x_3)(-x_4)(-x_1)x_4$ ，因此特殊項 $x_1x_2x_3x_4{}^2$ 的係數為 2 。■

由上述例 2 與例 3 中可發現，$f_{D_{G_2}}$ 有循環因式 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$，因此在分配律中，對特殊項 $x_1x_2x_3{}^2$ 將貢獻係數 1 與 $(-1)^3$ ，所以特殊項的係數為 0 ；

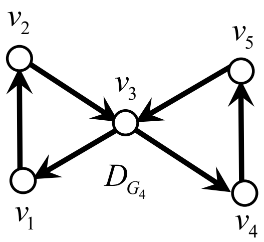
$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & \Longrightarrow \text{係數}+1 \\ \multicolumn{5}{c}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)} & \\ & -x_2 & & -x_3 & \quad -x_1 & \Longrightarrow \text{係數}(-1)^3 \end{array}$$

然而 $f_{D_{G_3}}$ 有循環因式 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)$ ，因此在分配律中，對特殊項 $x_1x_2x_3x_4{}^2$ 將貢獻係數 1 與 $(-1)^4$ ，所以特殊項的係數為 2 。

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & \Longrightarrow \text{係數}+1 \\ \multicolumn{7}{c}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_4-x_5)} & \\ & -x_2 & & -x_3 & & -x_4 & \quad -x_1 & \Longrightarrow \text{係數}(-1)^4 \end{array}$$

可以發現，圖多項式 f_{D_G} 中的循環因式，將是分配律過程裡貢獻特殊項係數的來源，然而循環因式中一次因式數量的奇偶性，將決定貢獻係數的值（1或-1），若為奇數，則貢獻係數有 $(-1)^{奇數}=-1$ ；若為偶數，則貢獻係數有 $(-1)^{偶數}=1$ 。

例 4：令 D_{G_4} 如下圖所示，其中 $f_{D_{G_4}}$ 共有兩個循環因式，分別為 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$ 與 $(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)$ 。這兩個沒有交集的循環因式，個別都會在分配律的過程當中影響著特殊項 $x_1x_2x_3^2x_4x_5$ 的係數。



$$\Longleftrightarrow \quad f_{D_{G_4}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)$$

特殊項 $x_1x_2x_3^2x_4x_5$

每一個循環因式在分配律中都有兩種變化，因此分配律中可得 4 回特殊項 $x_1x_2x_3^2x_4x_5$ ，其係數分別貢獻為兩個 1 與兩個 -1 ，所以 $f_{D_{G_4}}$ 中特殊項 $x_1x_2x_3^2x_4x_5$ 的係數則為 0 。■

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ (x_1-x_2) & (x_2-x_3) & (x_3-x_1) \\ -x_2 & -x_3 & -x_1 \end{array} \times \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_3-x_4) & (x_4-x_5) & (x_5-x_3) \\ -x_4 & -x_5 & -x_3 \end{array}$$

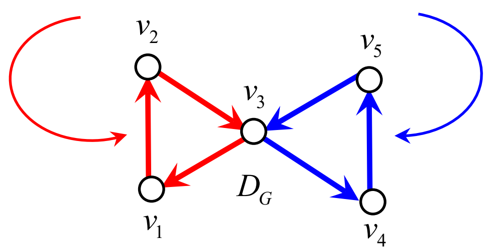
分配律可得特殊項	貢獻係數
⇨ $(x_1x_2x_3)(x_3x_4x_5)$	⇨ $+1$
⇨ $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3x_4x_5)$	⇨ -1
⇨ $(x_1x_2x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	⇨ -1
⇨ $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	⇨ $+1$

由上述例 4 中可發現，在圖多項式的展開式中，會影響到特殊項係數的因素有兩點，分別為『循環因式中一次式數量的奇偶性』與『不同循環因式的組合』。兩者之間仍須相互考量，即能分析出特殊項的係數。以下我們將進一步探討，並建立係數與定向的對應關係。

歐拉有向子圖決定 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數

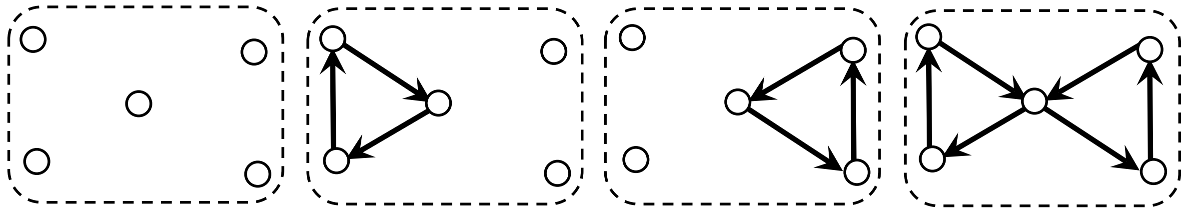
因為圖多項式 f_{D_G} 直接反應有向圖 D_G 的定向結構，可知 f_{D_G} 中的循環因式皆可對應 D_G 的一個歐拉有向圈。

$$f_{D_G}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)$$



由於 D_G 中各種有向圈的組合，將構成一個歐拉有向子圖，因此 f_{D_G} 中循環因式的各種組合，將可與 D_G 所有的歐拉有向子圖 $\varepsilon(D_G)$ 建立一一對應關係。

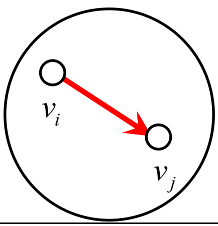
令 D_G 為例 4 的圖來說明，D_G 共有 4 個歐拉有向子圖，記為 $\{D_{H_i} : i=1,2,3,4\}$，其中 $D_{H_1}, D_{H_4} \in \varepsilon_{even}(D_G)$，$D_{H_2}, D_{H_3} \in \varepsilon_{odd}(D_G)$，如下圖所示：



D_{H_1} D_{H_2} D_{H_3} D_{H_4}

從中可發現 D_G 的一個歐拉偶子圖將對應 f_{D_G} 分配律中貢獻係數為 1 的情形；一個歐拉奇子圖將對應 f_{D_G} 分配律中貢獻係數為 -1 的情形。因為 $|\varepsilon_{even}(D_G)|=2$ 且 $|\varepsilon_{odd}(D_G)|=2$，所以特殊項 $x_1x_2x_3{}^2x_4x_5$ 的係數可視為 $1\times|\varepsilon_{even}(D_G)|+(-1)\times|\varepsilon_{odd}(D_G)|=0$。由此可知，『$f_{D_G}$ 特殊項的係數』可由『D_G 的歐拉有向子圖』來刻畫。

分配律可得特殊項		歐拉有向子圖		貢獻係數
$(x_1x_2x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_1} \in \varepsilon_{even}(D_G)$	$\Rightarrow$	$+1$
$(-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_2} \in \varepsilon_{odd}(D_G)$	$\Rightarrow$	-1
$(x_1x_2x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_3} \in \varepsilon_{odd}(D_G)$	$\Rightarrow$	-1
$(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_4} \in \varepsilon_{even}(D_G)$	$\Rightarrow$	$+1$

歐拉有向子圖 D_H		圖多項式 f_{D_G}		貢獻 $x_1{}^{d_1}x_2{}^{d_2}\cdots x_n{}^{d_n}$ 係數
	$\Leftrightarrow$	$(\ \ )(\ \ )\cdots(x_i \underset{\uparrow}{-x_j})\cdots(\ \ )$ with $-x_j$	$\Leftrightarrow$	$(-1)^{\lvert E(D_H)\rvert}=\begin{cases}1 & ,D_H \in \varepsilon_{even}(D_G)\\ -1 & ,D_H \in \varepsilon_{odd}(D_G)\end{cases}$

給定有向圖 D_G，對於 D_G 的一個歐拉有向子圖 D_H，若 $(v_i, v_j)\in E(D_H)$，則在圖多項式 f_{D_G} 的展開過程中，一次因式 $(x_i - x_j)$ 使用後項 $(-x_j)$ 作為分配律該式的乘法元素；反之，若

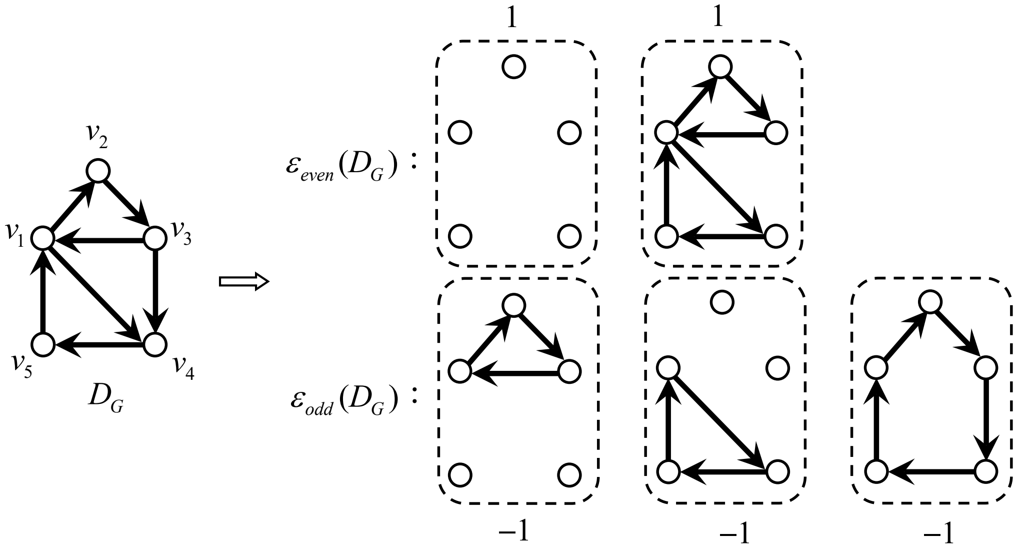
$(v_i,v_j)\notin E(D_H)$，則一次因式(x_i-x_j)使用前項(x_i)作為分配律該式的乘法元素。由此可知，D_G的每一個歐拉有向子圖D_H，將可對應f_{D_G}在分配律過程中對特殊項的貢獻係數，其中當$D_H\in\varepsilon_{even}(D_G)$時，則貢獻係數$1$；當$D_H\in\varepsilon_{odd}(D_G)$時，則貢獻係數$-1$。

利用歐拉有向子圖來刻畫f_{D_G}特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$係數，透過前面的推理得知以下定理：

Theorem 2：圖多項式的特殊項係數

給定有向圖D_G，點集合$V(D_G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其中點$v_i$的外度數$d^+_{D_G}(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$。圖多項式$f_{D_G}$中的特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$係數為$|\varepsilon_{even}(D_G)|-|\varepsilon_{odd}(D_G)|$。

例 5：令D_G如下圖所示，因為$|\varepsilon_{even}(D_G)|=2$，$|\varepsilon_{odd}(D_G)|=3$，所以根據上述定理可知$f_{D_G}$中的特殊項$x_1^{2}x_2x_3^{2}x_4x_5$的係數為$2-3=-1$。■



Theorem 2 說明著圖G的一個定向D_G，將可用歐拉子圖來刻畫f_{D_G}中的特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$的係數。由於不同的定向，在有向圖多項式中僅影響二元一次式中變數的相減關係，譬如兩頂點v_i與v_j，在不同的定向中有向邊可能為(v_i,v_j)或(v_j,v_i)，則在圖多項式對應的二元一次式即為(x_i-x_j)或(x_j-x_i)，兩者之間相差一個負號，意即$(x_i-x_j)=(-1)(x_j-x_i)$。由此可知，兩個不同定向所得的圖多項式有很大的相關性。令D_1與D_2皆為圖G的定向，我們用符號『$\boldsymbol{g(D_1,D_2)}$』表示D_1與D_2相反方向的邊數量，意即$g(D_1,D_2)=|E(D_1)|-|E(D_1)\cap E(D_2)|$。然而在固定一個有向圖$D_G$時，$f_{D_G}$展開式中的任意一項，其係數應與其它的定向有特別的關係，因此我們有以下引理：

Lemma 2：相異定向與圖多項式的關係

給定圖G，點集合$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。令$D_1$與$D_2$皆為$G$的定向，點$v_i$在有向圖$D_1$與$D_2$的外度數分別記為$d^+_{D_1}(v_i)=d_i^{(1)}$與$d^+_{D_2}(v_i)=d_i^{(2)}$，其中$i=1,2,\cdots,n$。定義$g(D_1,D_2)=|E(D_1)|-|E(D_1)\cap E(D_2)|$，則：

1. $f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$；
2. $f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中$x_1^{d_1^{(2)}}x_2^{d_2^{(2)}}\cdots x_n^{d_n^{(2)}}$的係數為$(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|)$。

【證明】:

1. 對於圖G，點集合$V(D_G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，因為$D_1$與$D_2$為兩個不同的定向，我們考慮$E(D_1)$與$E(D_2)$的交集，$E(D_1)\cap E(D_2)$表示$D_1$與$D_2$中相同方向的有向邊集合，可知$D_1$與$D_2$有向邊為相反方向的數量為$g(D_1,D_2)=|E(D_1)|-|E(D_1)\cap E(D_2)|$。因為$D_2$中每一個與$D_1$相反方向的邊皆會造成$f_{D_1}$中對應的二元一次式變號，所以$f_{D_1}$與$f_{D_2}$共有$g(D_1,D_2)$個二元一次式為相差一個負號，即可知$f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

2. 因為$x_1^{d_1^{(2)}}x_2^{d_2^{(2)}}\cdots x_n^{d_n^{(2)}}$為$f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的特殊項，根據 Theorem 2 的結論可知，特殊項$x_1^{d_1^{(2)}}x_2^{d_2^{(2)}}\cdots x_n^{d_n^{(2)}}$在$f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的係數為$|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|$。由 Lemma 2 的結論 1 可知，$f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，因此$x_1^{d_1^{(2)}}x_2^{d_2^{(2)}}\cdots x_n^{d_n^{(2)}}$在$f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的係數即為$(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|)$。 ■

給定圖G，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令$D$為圖$G$的一個定向，點$v_i$在有向圖$D$的外度數分別記為$d^+_D(v_i)=d_i$，其中$i=1,2,\cdots,n$。我們將$n$元序列『$\boldsymbol{(d_1,d_2,\cdots,d_n)}$』稱為圖$G$以有向圖$D$決定的『**外度數序列**』，並以符號記為『$\boldsymbol{d(D)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)}$』。考慮圖$G$所有的定向，令『$\boldsymbol{Out(G)}$』為圖$G$所有外度數序列所形成的集合，意即$Out(G)=\{(d_1,d_2,\cdots,d_n):\text{圖}G\text{存在一個定向}D\text{，滿足}d(D)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\}$。透過上述的符號，探討具有相同外度數序列的不同定向與歐拉有向子圖的數量關係，進一步利用不同的定向來刻畫圖多項式展開的各項係數，我們首先推得以下引理：

Lemma 3：相異定向與歐拉有向子圖的定量關係

給定圖 G ，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。若 D_1 與 D_2 為圖 G 不同的定向且滿足 $d(D_1)=d(D_2)$ ，則：

1. $E(D_1)-E(D_1)\cap E(D_2)$ 所形成的圖為 D_1 的歐拉有向子圖；

2. $|\varepsilon_{even}(D_1)|-|\varepsilon_{odd}(D_1)|=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot\left(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|\right)$；

3. $|\varepsilon(D_1)|=|\varepsilon(D_2)|$；

4. 當 $g(D_1,D_2)$ 為偶數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$；

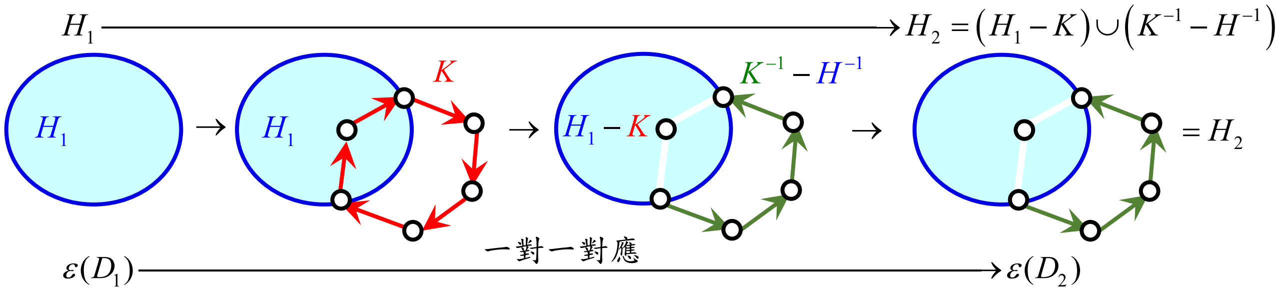
   當 $g(D_1,D_2)$ 為奇數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$。

【證明】：

1. 令 D_1' 為有向邊 $E(D_1)-E(D_1)\cap E(D_2)$ 所形成 D_1 的有向子圖；D_2' 為 $E(D_2)-E(D_1)\cap E(D_2)$ 所形成 D_2 的有向子圖，可知 D_1' 與 D_2' 的有向邊皆為相反方向，故對任意點 $v\in V(G)$ ，$d^+_{D_1'}(v)=d^-_{D_2'}(v)$ 且 $d^-_{D_1'}(v)=d^+_{D_2'}(v)$ 。因為 $d(D_1)=d(D_2)$ ，所以對任意點 $v\in V(G)$ ，$d^+_{D_1'}(v)=d^+_{D_2'}(v)$ 且 $d^-_{D_1'}(v)=d^-_{D_2'}(v)$ 。可知對任意點 $v\in V(G)$ ，$d^+_{D_1'}(v)=d^-_{D_1'}(v)$ 且 $d^+_{D_2'}(v)=d^-_{D_2'}(v)$ ，意即 D_1' 與 D_2' 分別為 D_1 與 D_2 的歐拉有向子圖，此外 D_1' 與 D_2' 的有向邊皆為相反方向。

2. 令 D_1 與 D_2 為圖 G 不同的定向，因為 $d(D_1)=d(D_2)$ ，所以 D_1 與 D_2 擁有相同的外度數序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ ，這表示 f_{D_1} 與 f_{D_2} 有相同的特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ ，根據 Theorem 2 可知特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 在 f_{D_1} 與 f_{D_2} 中的係數分別為 $|\varepsilon_{even}(D_1)|-|\varepsilon_{odd}(D_1)|$ 與 $|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|$。再根據 Lemma 2 的結論 1 可知 $f_{D_1}=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot f_{D_2}$ ，由此可推得 $|\varepsilon_{even}(D_1)|-|\varepsilon_{odd}(D_1)|=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot\left(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|\right)$。

3. 令 K 為 $E(D_1)-E(D_1)\cap E(D_2)$ 所形成 D_1 的歐拉有向子圖。從 D_1 中任取一個歐拉有向子圖 H_1 ，定義 H_2 為 $\left(E(H_1)-E(K)\right)\cup\left(E(K^{-1})-E(H_1^{-1})\right)$ 所形成的有向圖，H_2 即為 D_2 的有向子圖。因為對任意 $v\in V(H_2)$ ，$d^+_{H_2}(v)=d^-_{H_2}(v)$ 恆成立，可知 H_2 必為 D_2 的歐拉有向子圖。由此可知，D_1 的一個歐拉有向子圖 H_1 可對應 D_2 的一個歐拉有向子圖 H_2。同理，D_2 的歐拉有向子圖亦可對應至 D_1 的歐拉有向子圖。由此可建立 $\varepsilon(D_1)$ 與 $\varepsilon(D_2)$ 之間的一一對應關係，故得知 D_1 與 D_2 有相同數量的歐拉有向子圖，意即 $|\varepsilon(D_1)|=|\varepsilon(D_2)|$。



4. 因為$|\varepsilon(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_1)|+|\varepsilon_{odd}(D_1)|$且$|\varepsilon(D_2)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|+|\varepsilon_{odd}(D_2)|$。根據 Lemma 3 的結論 2 可知$|\varepsilon_{even}(D_1)|-|\varepsilon_{odd}(D_1)|=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|)$。根據 Lemma 3 的結論 3 可知$|\varepsilon_{even}(D_1)|+|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|+|\varepsilon_{odd}(D_2)|$。因此根據$g(D_1,D_2)$的奇偶性，即可得當$g(D_1,D_2)$為偶數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$；當$g(D_1,D_2)$為奇數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$。 ■

利用 Lemma 2 與 Lemma 3，針對圖多項式的各項係數，我們有以下定理：

Theorem 3：圖多項式的各項係數

給定圖G，點集合$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。令$D_G$為圖$G$的一個定向，則：

1. 若$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$為圖G以某個有向圖D決定的外度數序列，則圖G共有$|\varepsilon(D)|$個不同的定向，使其外度數序列皆為$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$；
2. $f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{\substack{(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)\\(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d(D)}}(-1)^{g(D_G,D)}\cdot(|\varepsilon_{even}(D)|-|\varepsilon_{odd}(D)|)\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{d_i}$。

【證明】：

1. 已知$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$為圖G以某個有向圖D決定的外度數序列。令D_1為G另一個定向，其中D_1所決定的外度數序列亦為$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，意即$d(D)=d(D_1)$。根據 Lemma 3 的結論 1 可知，若D'為有向邊$E(D)-E(D)\cap E(D_1)$所形成的有向子圖，D_1'為有向邊$E(D_1)-E(D)\cap E(D_1)$所形成的有向子圖，則D'與D_1'皆為歐拉有向子圖，其中D'與D_1'的有向邊皆為相反方向。此外不難得知，若有向圖D存在一個歐拉子圖D'，則將$E(D')$中的有向邊全部改變方向之後，即可獲得另一個圖G的定向D_1，滿足$d(D)=d(D_1)$。綜合上述討論，針對定向圖D，可知圖G共有$|\varepsilon(D)|$個不同的定向D_1，使得$d(D)=d(D_1)$。

2. 令$(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)$，其中$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$為圖$G$以有向圖$D$決定的外度數序列，意即

$d(D)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$。由　　　　　的結論 1 與結論 2 可知，$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 為 f_{D_G} 展開式中的一項且係數為 $(-1)^{g(D_G,D)}\cdot\left(\left|\varepsilon_{even}(D)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D)\right|\right)$。整體來說，考慮 f_{D_G} 展開式中的任意一項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$，其各變數的指數即決定一個外度數序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，然而這個外度數序列將存在一個定向 D 使得 $d(D)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，由 Lemma 2 的結論 2 可知，透過有向圖 D 即可得知 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 在 f_{D_G} 中的係數為 $(-1)^{g(D_G,D)}\cdot\left(\left|\varepsilon_{even}(D)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D)\right|\right)$。因此考慮圖 G 所有可能形成的外度數序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)$，進一步可知 $f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的展開式即為 $\displaystyle\sum_{\substack{(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)\\(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d(D)}}(-1)^{g(D_G,D)}\cdot\left(\left|\varepsilon_{even}(D)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D)\right|\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{d_i}$。 ■

Theorem 3 說明了圖中的不同定向，若有相同的外度數序列，則在歐拉有向子圖的數量上具有特殊的不變量關係，因此我們可以將所有的定向以外度數序列做為群組分類，進一步對應回圖多項式中的代數式，利用歐拉有向子圖的數量來刻畫圖多項式中各項的係數，並獲得展開式。

有向圖列表著色定理

我們可以將 Theorem 1 應用在圖多項式 f_{D_G}，因為 f_{D_G} 的特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 是由各點 v_i 的外度數 $d_{D_G}^{+}(v_i)=d_i$ 決定各變數的指數，而 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數由 D_G 的歐拉有向子圖來決定，這表示，若圖 G 的定向可以保證 f_{D_G} 中 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數不為零，則可透過 Theorem 1 來設計顏色列表 A_i 數量的下界之充分條件。根據上述的討論則有以下定理：

Theorem 4：有向圖列表著色定理

給定有向圖 D_G，點集合 $V(D_G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其中點 v_i 的外度數 $d_{D_G}^{+}(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

令 $L(v_i)$ 為點 v_i 可以使用的顏色列表且 $\left|L(v_i)\right|\ge d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$。

若 $\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|\ne\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$，則：

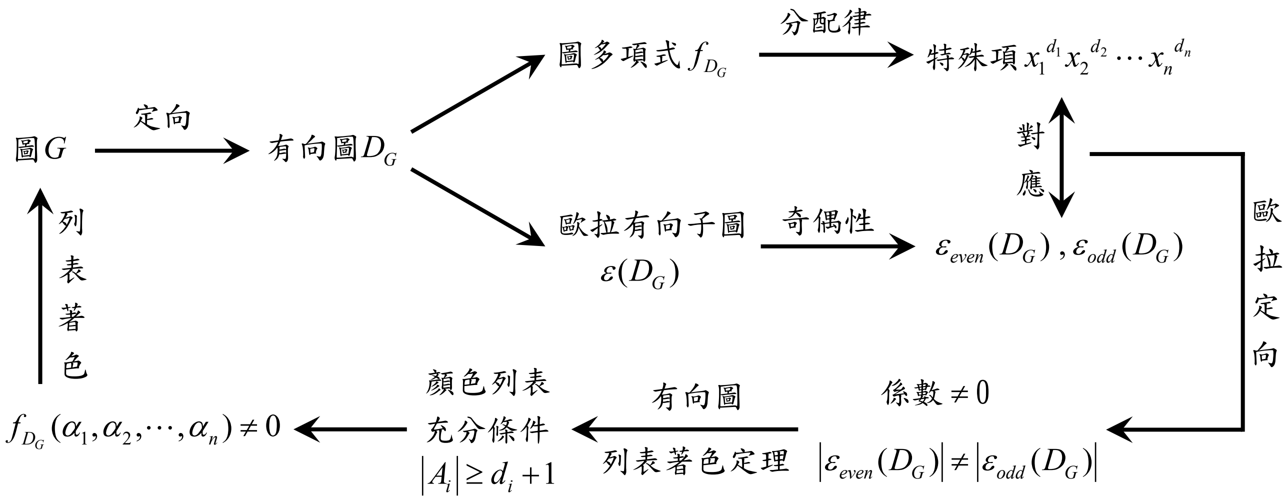
1. 圖多項式 f_{D_G} 中的特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 係數不為零；
2. 對任意 $i=1,2,\cdots,n$，存在 $\alpha_i\in L(v_i)$，使得圖 G 有 L-$coloring$；
3. 圖 G 為可 ℓ-列表著色，其中 ℓ：$V(G)\to$□，$\ell(v_i)\ge d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$。

【證明】：

1. 根據 Theorem 2 已知圖多項式 f_{D_G} 中特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數為 $\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$。因為 $\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|\neq\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$，所以 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數不為零。

2. 因為圖多項式 f_{D_G} 中特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數不為零，且 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 為最高次項，根據 Theorem 1 可知，當 $\left|A_i\right|\geq d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$ 時，則存在 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 能使得 $f_{D_G}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。對 $i=1,2,\cdots,n$，令顏色列表 $L(v_i)=A_i$，則存在 $\alpha_i\in L(v_i)$，使得著色函數 $c(v_i)=\alpha_i$。這表示函數 $c:V(G)\to\mathbb{N}$ 為圖 G 的 L-*coloring*。

3. 因為當 $\left|A_i\right|\geq d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$ 時，存在 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 能使得圖多項式的函數值 $f_{D_G}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$。令顏色數量函數 $\ell(v_i)=\left|A_i\right|$，可知 $\ell(v_i)\geq d_i+1$，將集合 A_i 視為點 v_i 的顏色列表 $L(v_i)$，α_i 視為點 v_i 使用的顏色，則 $f_{D_G}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$ 表示圖 G 在顏色列表為 $L(v_1),L(v_2),\cdots,L(v_n)$ 的情況下，可完成列表著色。這表示圖 G 為可 ℓ-列表著色。 ■



四、可約構形與演算法的設計

給定圖 G 與列表數量函數 $\ell_G:V(G)\to\mathbb{N}$，當 G 的結構很龐大時，判定 G 是否為可 ℓ_G-列表著色為一個有難度的問題。因此我們試圖透過簡化圖形的規模，降低列表著色的難度，希望能夠設計一個演算法，將問題化繁為簡，進一步能完成列表著色。

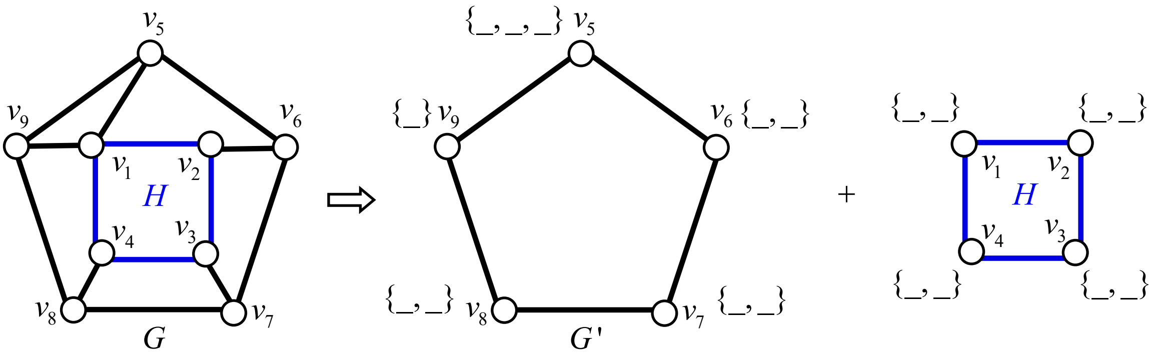
可約構形 ***reducible configuration***

對於圖 G，將列表數量函數特別記為 $\ell_G:V(G)\to\mathbb{N}$，在考慮 G 是否為可 ℓ_G-列表著色的前提下，若 H 為 G 的子圖，對 $v\in V(H)$，為了迴避 v 在 $V(G)\setminus V(H)$ 中相鄰的點未來所使用的顏色，則我們將 v 原本有的列表數量 $\ell_G(v)$ 減去 $\left(d_G(v)-d_H(v)\right)$。因此對於 $v\in V(H)$，我們設計

新的顏色數量函數$\ell_{G,H}:V(H)\to$□ ，其定義為『$\boldsymbol{\ell_{G,H}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_H(v)\right)}$』。此外對於新的顏色數量函數$\ell_{G,H}$，若$H$為可$\ell_{G,H}$-列表著色，則稱$H$搭配函數$\ell_{G,H}$為$G$的『**可約構形**（***reducible configuration***）』，並將此構形記為『$\boldsymbol{\left(H,\ell_{G,H}\right)}$』。

例如：給定下圖G，令$\ell_G:V(G)\to$□ ，其中$\ell_G(v_i)=\begin{cases}4, & 當 i=1; \\ 3, & 當 i=2,3,4,5; \\ 2, & 當 i=6,7,8; \\ 1, & 當 i=9.\end{cases}$。令子圖$H$的頂點為

$V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，邊為$E(H)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4,v_4v_1\}$。對任意$v_i\in V(H)$，定義$\ell_{G,H}(v_i)=\ell_G(v_i)-\left(d_G(v_i)-d_H(v_i)\right)$，可知$\ell_{G,H}(v_i)=2$，$i=1,2,3,4$。因為$H$是可$\ell_{G,H}$-列表著色，所以$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為$G$的一個可約構形。



圖G的一個可約構形$\left(H,\ell_{G,H}\right)$除了與子圖$H$的結構有關以外，對點$v\in V(H)$而言，亦跟點$v$分別在$G$與$H$的『度數差$d_G(v)-d_H(v)$』，以及『函數$\ell_G(v)$的值』有密切關係。以下引理將用來說明我們如何利用可約構形來化簡圖形：

Lemma 4：**利用可約構形化簡圖形**

給定圖G與列表數量函數ℓ_G，令H為G的子圖，且$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為$G$的可約構形，令$G$刪除$H$之後的剩餘圖形為$G'$。若$G'$為可$\ell_G$-列表著色，則$G$亦為可$\ell_G$-列表著色。

【證明】：

給定任意ℓ_G-列表$L:V(G)\to 2^{□}$ $u\in V(G)$，皆滿足$|L(u)|=\ell_G(u)$。令

$G'=G-H$為圖G H G'為可ℓ_G- L-列表著色

$c':V(G')\to$□ $c'(u)\in L(u)$ $u\in V(G')$。考慮任意點$v\in V(H)$

$L^*(v)=L(v)\setminus\{c'(u):u\in V(G')且u\in N_G(v)\}$。因為集合$\{c'(u):u\in V(G')且u\in N_G(v)\}$

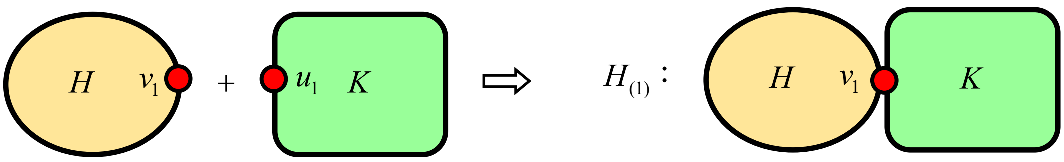
$d_G(v)-d_H(v)$且$|L(v)|=\ell_G(v)$，所以$\left|L^*(v)\right|\ge\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_H(v)\right)=\ell_{G,H}(v)$。因為

$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為 G 的可約構形，所以 H 為可 $\ell_{G,H}$-列表著色，由此可知 H 存在一個 L^*-列表著色 $c^*:V(H)\to\mathbb{N}$ 使得 $c^*(v)\in L^*(v)$，其中 $v\in V(H)$。整合著色函數 c' 與 c^*，定義 $c:V(G)\to\mathbb{N}$，其中 $c(v)=\begin{cases} c'(v), & 當 v\in V(G'); \\ c^*(v), & 當 v\in V(H). \end{cases}$，可知 c 為圖 G 的 L-列表著色，故 G 亦為可 ℓ_G-列表著色。■

對於圖 G，給定列表數量函數 $\ell_G:V(G)\to\mathbb{N}$，考慮 G 的可約構形$\left(H,\ell_{G,H}\right)$，可知任意 $v\in V(H)$，其中函數 $\ell_{G,H}$ 定義為 $\ell_{G,H}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_H(v)\right)$。由於可約構形中的各點度數是重要的資訊，對於可約構形$\left(H,\ell_{G,H}\right)$，令 $v\in V(H)$，我們欲討論 $\ell_G(v)$ 與 $d_G(v)$ 所需滿足的條件。若 G 的一個定向 D_G 滿足$\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|\neq\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$，則特別稱此定向 D_G 為**『歐拉定向』**。我們將設計一套方法，可以建構一系列的可約構形。以下特別介紹其中兩種建構類型。

給定圖 G 與列表數量函數 $\ell_G:V(G)\to\mathbb{N}$。令 H 為 G 的子圖，若 H 存在歐拉定向 D_H，根據 Theorem 4 的結論 3，欲使 H 為可 $\ell_{G,H}$-列表著色，其充分條件為『對任意 $v\in V(H)$，$\ell_{G,H}(v)\geq d^+_{D_H}(v)+1$ 恆成立』。由此可知『v 在 G 中的度數 $d_G(v)$』與『v 的列表數量 $\ell_G(v)$』將能決定$\left(H,\ell_{G,H}\right)$是否能成為圖 G 的可約構形。然而 $\ell_{G,H}(v)\geq d^+_{D_H}(v)+1 \Leftrightarrow \ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_H(v)\right)\geq d^+_{D_H}(v)+1 \Leftrightarrow d_G(v)-\ell_G(v)\leq d_H(v)-d^+_{D_H}(v)-1=d^-_{D_H}(v)-1$。這意味著『$d_G(v)-\ell_G(v)$』的值能成為$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為 G 的可約構形的充分條件。以下我們將依照上述的概念，設計兩種建構可約構形的方法。

令圖 H 與圖 K 分別存在歐拉定向 D_H 與 D_K。令 $v_1\in V(H)$，$u_1\in V(K)$，將 v_1 與 u_1 合併為同一點，合併後的點記為 v_1，將所得的新圖形特別記為『$\boldsymbol{H_{(1)}}$』。令 K' 為圖 K 刪除點 u_1 後的剩餘圖形。我們定義圖 $H_{(1)}$ 的點集合為 $V(H_{(1)})=V(H)\cup V(K')$，邊集合為 $E(H_{(1)})=E(H)\cup E(K')\cup\{v_1r : u_1r\in E(K)\}$。



對於圖 $H_{(1)}$，各點的度數為 $d_{H_{(1)}}(v)=\begin{cases} d_H(v), & 當 v\in V(H)\setminus\{v_1\}; \\ d_K(v), & 當 v\in V(K'); \\ d_H(v_1)+d_K(u_1), & 當 v=v_1. \end{cases}$。以下我們將建立充分條件，使得$\left(H_{(1)},\ell_{G,H_{(1)}}\right)$為圖 G 的一個可約構形。

Theorem 5：建構可約構形-I

給定圖G，列表數量函數ℓ_G，令H與K分別存在歐拉定向D_H與D_K，且$H_{(1)}$為G的子圖。

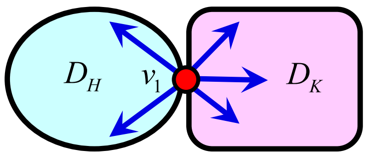
若$d_G(v)-\ell_G(v)\le\begin{cases} d^-_{D_H}(v)-1, & 當 v\in V(H)\setminus\{v_1\}; \\ d^-_{D_K}(v)-1, & 當 v\in V(K'); \\ d^-_{D_H}(v_1)+d^-_{D_K}(u_1)-1, & 當 v=v_1. \end{cases}$，則$\left(H_{(1)},\ell_{G,H_{(1)}}\right)$為$G$的可約構形。

【證明】：

因為D_H與D_K皆為歐拉定向，所以$|\varepsilon_{even}(D_H)|\ne|\varepsilon_{odd}(D_H)|$且$|\varepsilon_{even}(D_K)|\ne|\varepsilon_{odd}(D_K)|$。令$|\varepsilon_{even}(D_H)|=x_1$、$|\varepsilon_{odd}(D_H)|=y_1$、$|\varepsilon_{even}(D_K)|=x_2$與$|\varepsilon_{odd}(D_K)|=y_2$，故$x_1\ne y_1$與$x_2\ne y_2$。考慮$H_{(1)}$的一個定向$D_{(1)}$，其中$E(D_{(1)})=E(D_H)\cup E(D_K)$。令$D_{H^*}$與$D_{K^*}$分別為$D_H$與$D_K$的歐拉有向子圖，可知$D_{H^*}\cup D_{K^*}$亦為$D_{(1)}$的歐拉有向子圖。根據$|E(D_{H^*})|$與$|E(D_{K^*})|$的奇偶性，可知當$D_{H^*}\in\varepsilon_{even}(D_H)$且$D_{K^*}\in\varepsilon_{even}(D_K)$時，則$D_{H^*}\cup D_{K^*}\in\varepsilon_{even}(D_{(1)})$；當$D_{H^*}\in\varepsilon_{odd}(D_H)$且$D_{K^*}\in\varepsilon_{odd}(D_K)$時，則$D_{H^*}\cup D_{K^*}\in\varepsilon_{even}(D_{(1)})$；當$D_{H^*}\in\varepsilon_{even}(D_H)$且$D_{K^*}\in\varepsilon_{odd}(D_K)$時，則$D_{H^*}\cup D_{K^*}\in\varepsilon_{odd}(D_{(1)})$；當$D_{H^*}\in\varepsilon_{odd}(D_H)$且$D_{K^*}\in\varepsilon_{even}(D_K)$時，則$D_{H^*}\cup D_{K^*}\in\varepsilon_{odd}(D_{(1)})$。由此可知$|\varepsilon_{even}(D_{(1)})|=x_1x_2+y_1y_2$與$|\varepsilon_{odd}(D_{(1)})|=x_1y_2+x_2y_1$。以下考慮$|\varepsilon_{even}(D_{(1)})|$與$|\varepsilon_{odd}(D_{(1)})|$的差，因為$|\varepsilon_{even}(D_{(1)})|-|\varepsilon_{odd}(D_{(1)})|=(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1-y_1)(x_2-y_2)\ne 0$，這表示有向圖$D_{(1)}$為$H_{(1)}$的一個歐拉定向，其中$D_{(1)}$的各點外度數為

$$d^+_{D_{(1)}}(v)=\begin{cases} d^+_{D_H}(v), & 當 v\in V(H)\setminus\{v_1\}; \\ d^+_{D_K}(v), & 當 v\in V(K'); \\ d^+_{D_H}(v_1)+d^+_{D_K}(u_1), & 當 v=v_1. \end{cases}。$$

$D_{(1)}$：



考慮各點$v\in V(H_{(1)})$的列表數量函數$\ell_{G,H_{(1)}}(v)$值：

當$v\in V(H)\setminus\{v_1\}$時，則$\ell_{G,H_{(1)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(1)}}(v)\right)\ge 1-d^-_{D_H}(v)+d_H(v)=d^+_{D_H}(v)+1$；

當$v\in V(K')$時，則$\ell_{G,H_{(1)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(1)}}(v)\right)\ge 1-d^-_{D_K}(v)+d_K(v)=d^+_{D_K}(v)+1$；

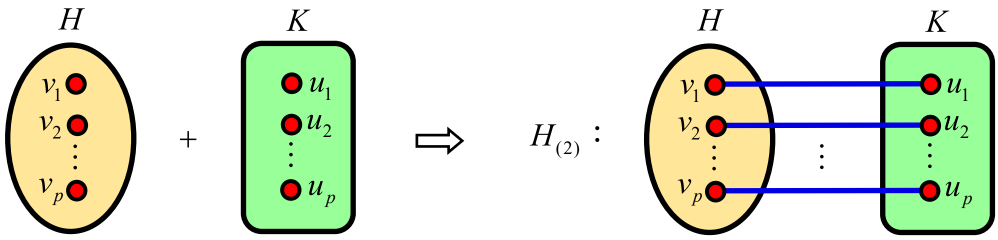
當$v=v_1$時，則$\ell_{G,H_{(1)}}(v_1)=\ell_G(v_1)-\left(d_G(v_1)-d_{H_{(1)}}(v_1)\right)\ge 1-d^-_{D_H}(v_1)-d^-_{D_K}(u_1)+d_{H_{(1)}}(v_1)$

$$=1-d^-_{D_H}(v_1)-d^-_{D_K}(u_1)+d_H(v_1)+d_K(u_1)=d^+_{D_H}(v_1)+d^+_{D_K}(u_1)+1。$$

故$\ell_{G,H_{(1)}}(v)\ge\begin{cases} d^+_{D_H}(v)+1, & 當 v\in V(H)\setminus\{v_1\}; \\ d^+_{D_K}(v)+1, & 當 v\in V(K'); \\ d^+_{D_H}(v_1)+d^+_{D_K}(u_1)+1, & 當 v=v_1. \end{cases}。$

上述討論可知對任意 $v\in V(H_{(1)})$，列表數量函數 $\ell_{G,H_{(1)}}(v)\ge d^{+}_{D_{(1)}}(v)+1$ 恆成立。根據 Theorem 4 的結論 3，可知 $H_{(1)}$ 為可 $\ell_{G,H_{(1)}}$-列表著色，所以 $\left(H_{(1)},\ell_{G,H_{(1)}}\right)$ 為圖 G 的可約構形。■

令圖 H 與圖 K 分別存在歐拉定向 D_H 與 D_K。令 $\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}\subseteq V(H)$，$\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}\subseteq V(K)$，在 H 與 K 之間新增 p 條邊 $\{v_iu_i:i=1,2,\cdots,p\}$，將所得的新圖形特別記為『$\boldsymbol{H_{(2)}}$』。定義圖 $H_{(2)}$ 的點集合為 $V(H_{(2)})=V(H)\cup V(K)$，邊集合為 $E(H_{(2)})=E(H)\cup E(K)\cup\{v_iu_i:i=1,2,\cdots,p\}$。



對於圖 $H_{(2)}$，各點的度數為 $d_{H_{(2)}}(v)=\begin{cases} d_H(v), & 當 v\in V(H)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d_H(v)+1, & 當 v\in\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d_K(v), & 當 v\in V(K)\setminus\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}; \\ d_K(v)+1, & 當 v\in\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}. \end{cases}$。以下我們將建立充分條件，使得 $\left(H_{(2)},\ell_{G,H_{(2)}}\right)$ 為圖 G 的一個可約構形。

Theorem 6：建構可約構形-II

給定圖 G，列表數量函數 ℓ_G，令 H 與 K 分別存在歐拉定向 D_H 與 D_K，且 $H_{(2)}$ 為 G 的子圖。

若 $d_G(v)-\ell_G(v)\le\begin{cases} d^{-}_{D_H}(v)-1, & 當 v\in V(H); \\ d^{-}_{D_K}(v)-1, & 當 v\in V(K)\setminus\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}; \\ d^{-}_{D_K}(v), & 當 v\in\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}. \end{cases}$，則 $\left(H_{(2)},\ell_{G,H_{(2)}}\right)$ 為 G 的可約構形。

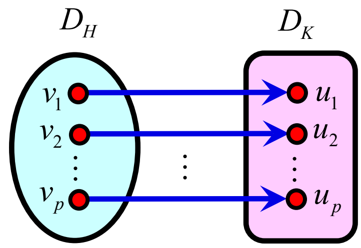
【證明】:

因為 D_H 與 D_K 皆為歐拉定向，所以 $|\varepsilon_{even}(D_H)|\ne|\varepsilon_{odd}(D_H)|$ 且 $|\varepsilon_{even}(D_K)|\ne|\varepsilon_{odd}(D_K)|$。令 $|\varepsilon_{even}(D_H)|=x_1$、$|\varepsilon_{odd}(D_H)|=y_1$、$|\varepsilon_{even}(D_K)|=x_2$ 與 $|\varepsilon_{odd}(D_K)|=y_2$，故 $x_1\ne y_1$ 與 $x_2\ne y_2$。考慮 $H_{(2)}$ 的一個定向 $D_{(2)}$，其中 $E(D_{(2)})=E(D_H)\cup E(D_K)\cup\{(v_i,u_i):i=1,2,\cdots,p\}$。因為 $D_{(2)}$ 的歐拉有向子圖必由 D_H 與 D_K 的歐拉有向子圖所構成，根據歐拉有向子圖邊的奇偶性進行分類，則可知 $|\varepsilon_{even}(D_{(2)})|=x_1x_2+y_1y_2$ 且 $|\varepsilon_{odd}(D_{(2)})|=x_1y_2+x_2y_1$。以下考慮 $|\varepsilon_{even}(D_{(2)})|$ 與 $|\varepsilon_{odd}(D_{(2)})|$ 的差，因為 $|\varepsilon_{even}(D_{(2)})|-|\varepsilon_{odd}(D_{(2)})|=(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1-y_1)(x_2-y_2)\ne 0$，這表示有向圖 $D_{(2)}$ 為

$H_{(2)}$ 的一個歐拉定向，其中 $D_{(2)}$ 的各點外度數為

$$d^+_{D_{(2)}}(v)=\begin{cases} d^+_{D_H}(v), & \text{當} v\in V(H)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d^+_{D_H}(v)+1, & \text{當} v\in \{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d^+_{D_K}(v), & \text{當} v\in V(K). \end{cases}$$ 。

$D_{(2)}$：



考慮各點 $v\in V(H_{(2)})$ 的函數 $\ell_{G,H_{(2)}}(v)$ 值：

當 $v\in V(H)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$\ell_{G,H_{(2)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(2)}}(v)\right)\geq 1-d^-_{D_H}(v)+d_H(v)=d^+_{D_H}(v)+1$；

當 $v\in \{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$\ell_{G,H_{(2)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(2)}}(v)\right)\geq 1-d^-_{D_H}(v)+d_H(v)+1=d^+_{D_H}(v)+2$；

當 $v\in V(K)\setminus\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$，$\ell_{G,H_{(2)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(2)}}(v)\right)\geq 1-d^-_{D_K}(v)+d_K(v)=d^+_{D_K}(v)+1$；

當 $v\in \{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$，$\ell_{G,H_{(2)}}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_{H_{(2)}}(v)\right)\geq -d^-_{D_K}(v)+d_K(v)+1=d^+_{D_K}(v)+1$。

故 $$\ell_{G,H_{(2)}}(v)\geq\begin{cases} d^+_{D_H}(v)+1, & \text{當} v\in V(H)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d^+_{D_H}(v)+2, & \text{當} v\in \{v_1,v_2,\cdots,v_p\}; \\ d^+_{D_K}(v)+1, & \text{當} v\in V(K). \end{cases}$$ 。

上述討論可知對任意 $v\in V(H_{(2)})$，列表數量函數 $\ell_{G,H_{(2)}}(v)\geq d^+_{D_{(2)}}(v)+1$ 恆成立。根據 Theorem 4 的結論 3，可知 $H_{(2)}$ 為可 $\ell_{G,H_{(2)}}$-列表著色，故 $\left(H_{(2)},\ell_{G,H_{(2)}}\right)$ 為圖 G 的可約構形。 ■

列表著色演算法 *algorithm*

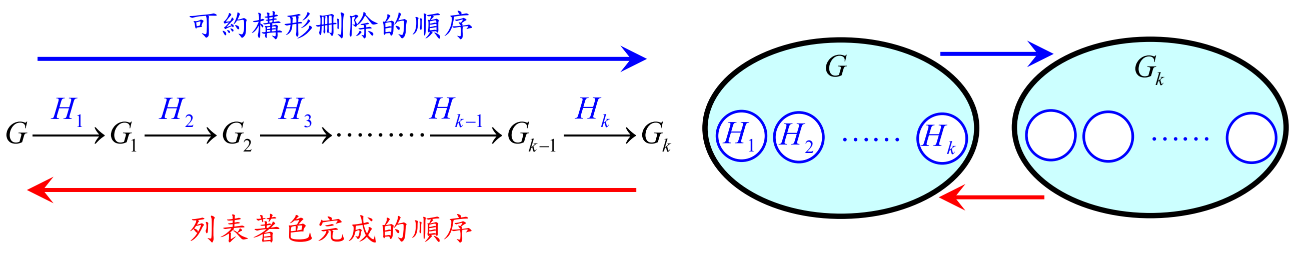
透過 Theorem 5 與 Theorem 6，我們可以建立可約構形的資料庫 H，利用資料庫 H 內的資訊，嘗試將圖 G 依序分解成許多的可約構形，持續利用 Lemma 4 的結論，試圖說明 G 為可 ℓ_G-列表著色。以下介紹如何利用可約構形資料庫來化簡圖 G 的列表著色問題：

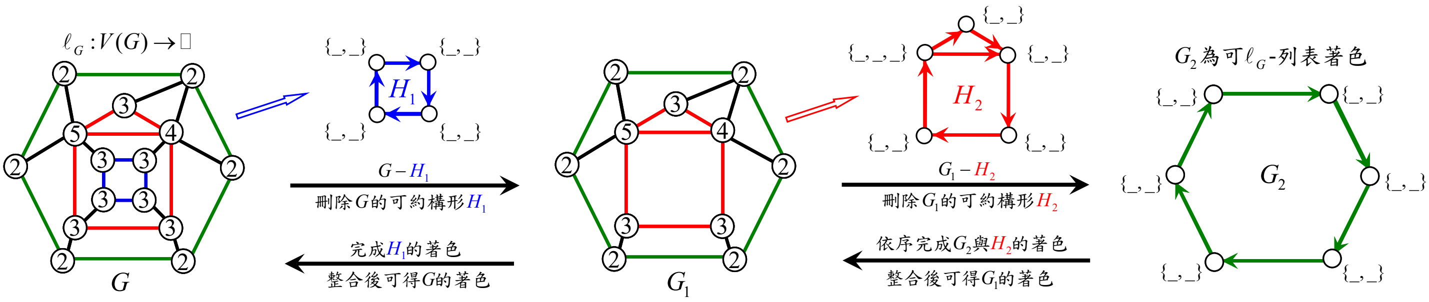
Step 1：給定圖 G 與列表數量函數 ℓ_G。令圖 $G=G_0$；

Step 2：對於 $i\geq 0$，在圖 G_i 中搜尋可約構形 $\left(H_{i+1},\ell_{G,H_{i+1}}\right)$，令 $G_{i+1}=G_i-H_{i+1}$；

Step 3：持續 Step 2 直到獲得 G_k，使得 G_k 為可 ℓ_G-列表著色；

Step 4：根據 Lemma 4 可得知，G_k 為可 ℓ_G-列表著色 $\Rightarrow$ G 亦為可 ℓ_G-列表著色。





上述的列表著色演算法，其概念如同在解方程式時，若能利用因式分解，簡化方程式的結構，則可依序求出方程式的解。兩者之間有著異曲同工之妙。

伍、研究結果

給定圖 G，考慮定向圖 D_G，可以建構有向圖多項式 f_{D_G}，其中 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 為 D_G 的外度數序列，$Out(G)$ 為所有外度數序列所形成的集合，$\varepsilon_{even}(D_G)$ 與 $\varepsilon_{odd}(D_G)$ 分別為歐拉偶子圖與歐拉奇子圖所形成的集合。我們有以下結果：

（1）f_{D_G} 中特殊項 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的係數為 $\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$；

（2）考慮有相同外度數序列的定向 D_1 與 D_2，則刻畫兩者歐拉有向子圖的定量關係；

（3）圖 G 共有 $\left|\varepsilon(D_G)\right|$ 個不同的定向，使其外度數序列皆為 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$；

（4）f_{D_G} 的展開式為 $f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{\substack{(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)\\(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d(D)}}(-1)^{g(D_G,D)}\cdot\left(\left|\varepsilon_{even}(D)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D)\right|\right)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{d_i}$；

（5）利用圖 G 的定向 D_G，設計各點的列表數量函數 $\ell(v_i)\geq d_i+1$，使其為可 ℓ-列表著色；

（6）若 H 與 K 皆存在歐拉定向，則建構 $\left(H_{(1)},\ell_{G,H_{(1)}}\right)$ 與 $\left(H_{(2)},\ell_{G,H_{(2)}}\right)$ 為 G 的可約構形；

陸、討論

列表著色問題為一般著色問題的進階版本，給定圖 G 與列表數量函數 ℓ_G，探討 G 是否可 ℓ_G-列表著色為我們的研究目標。在此研究說明書中，我們展現如何設計可列表著色的充分條件，並透過設計一系列的可約構形，幫助我們能夠化簡圖形，進一步能完成列表著色。

研究過程中。我們將圖 G 中的點與邊的結構，轉換為一個圖多項式 f_G，透過鴿籠原理，探討 n 元 k 次多項式函數值不為零的充分條件，可以透過圖多項式 f_G 的最高次項中各變數的指數，來設計出列表數量函數 ℓ_G，使得圖 G 為可 ℓ_G-列表著色。由於圖多項式 f_G 展開後的每一項皆為最高次項，因此我們透過賦予圖 G 一個定向 D_G，對應到一個有向圖多項式 f_{D_G}，利用外度數序列，指定其特殊項，並發現循環因式中『一次式數量的奇偶性』與『不同循環因式的組合』皆會影響到特殊項的係數，藉由將『f_{D_G} 中循環因式的各種組合』與『有向圖 D_G 中

所有歐拉有向子圖』建立一一對應關係，從中得知特殊項的係數必為$\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|-\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$，從而區別使用分配律展開圖多項式的繁瑣計算過程。利用$\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|\neq\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$的特性，根據圖多項式函數值不為零的條件，設計出列表數量函數的下界，使其能夠完成列表著色。此外，對於圖G不同的定向，我們藉由探討相反邊的數量來刻畫不同定向的圖多項式中各項係數的對應關係，從中刻畫圖多項式f_{D_G}展開式中一般項的係數。

給定圖G與列表數量函數ℓ_G，我們希望透過可約構形的概念來化簡圖形，用以降低列表著色的難度。我們希望子圖H的列表數量函數$\ell_{G,H}(v)\geq d_{D_H}^{+}(v)+1$，滿足可列表著色的數量下界，使得$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為可約構形並將其從圖$G$中移除，不斷的利用可約構形持續化簡的過程，進而能完成圖G的列表著色。為此，我們可建立可約構形的條件資料庫，未來希望能透過演算法來處理複雜圖形的列表著色問題。

柒、結論

利用圖的定向關係，創造一個多變數的多項式，運用鴿籠原理，藉著尋求多項式函數值為非零的可能，證明列表著色方法的存在性，並能有程序性設計一系列在列表著色中的可約構形。透過有向圖的結構，從圖多項式f_{D_G}中，觀察並推論循環因式各種組合對特殊項係數的影響，進而利用歐拉有向子圖中$\left|\varepsilon_{even}(D_G)\right|\neq\left|\varepsilon_{odd}(D_G)\right|$能使特殊項係數不為零的特性，設計列表數量函數下界的充分條件，每個點的列表數量若為$\ell_G(v)\geq d_{D_G}^{+}(v)+1$，則圖$G$必為可$\ell_G$-列表著色。最後透過組合的方式，設計出兩種不同系列的可約構形，可用來化簡圖形，進而確保能完成圖的列表著色。最後關於列表著色與可約構形之建構法還有許多研究的空間，除了找到可列表著色的充分條件外，如何廣泛的建構可約構形資料庫，將更加掌握列表著色的方法，並應用於一些資源分配的相關議題。

捌、參考文獻資料

1. 林芮吟（2017）。平面圖的四元列表著色。2017 年臺灣國際科學展覽會。
2. Noga Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, Combin. Probab. Comput., vol. 8 (1999), 7-29.
3. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. 26 (1979), 125-157.
4. Mateusz Michałek, *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz,* Amer. Math. Monthly, vol. 117 (2010), 821-823.
5. V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors*, Metody Diskret. Anal., 19 (1976), 3-10. (in Russian)
6. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd , Pearson Education Taiwan 2008.

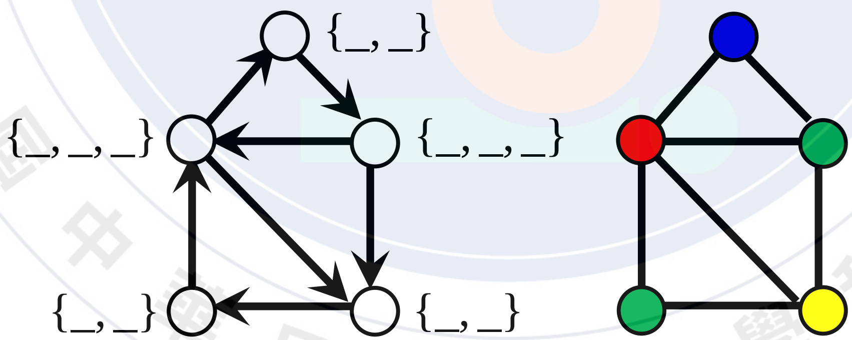
【評語】050413

作者考慮列表著色方法的存在性問題，先將每個邊對應到一個一次多項式(x_i-x_j)，再全部連乘起來成為一個高次多項式。利用鴿籠原理，以及組合零點定理給出可著色的充分條件。作者同時探討了歐拉奇、偶子圖的數量與可著色之間的關聯性(亦為充分條件)。並嘗試利用那些性質去得出一些可約構型的充分條件，據此建立一套演算法希望先將圖形簡化到一個容易判別著色的子圖上。整個作品說明書寫得很清楚，複雜的數學被表達的很清晰，對於一個困難的問題，同學們展現出豐富的數學知識去面對。然而，本作品的結果對於這個難題的進展推進有限，這是比較可惜的地方。

作品簡報

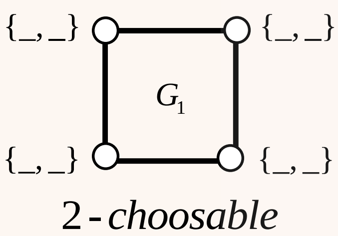
列表著色可約構形之建構法

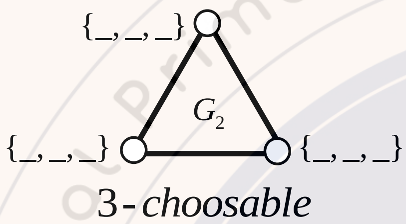
高級中等學校組　數學科



- 列表數量函數ℓ決定顏色數量
- 顏色列表函數L決定列表內容

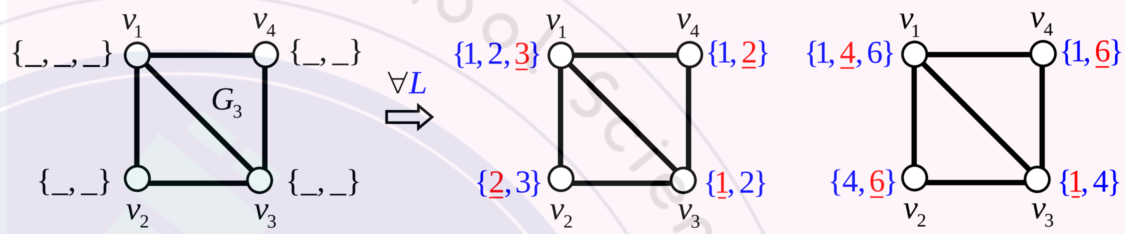
- ***k - choosable***





Every Planar Graph is 5 - *choosable*

- ***ℓ - choosable***

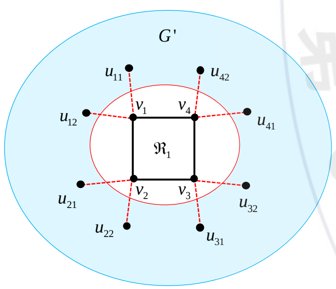


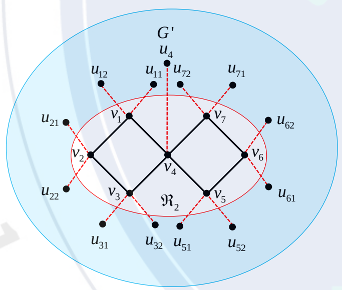
$$\ell(v_i)=\begin{cases}3, & \text{當 } i=1;\\ 2, & \text{當 } i=2,3,4.\end{cases}$$

(ℓ-*choosable*)

- 若$v\in V(G)$皆滿足$|L(v)|=\ell(v)$，則稱此L函數為ℓ-列表

- 可約構形





- 可約構形可以在證明的過程中化簡圖形

希望可以有程序性的設計一系列的可約構形，使得未來在探討著色問題時可以有足夠的資訊完成相關的證明，以及化簡列表著色問題。

- 研究目標

1.利用有向圖D_G的$\varepsilon_{even}(D_G)$和$\varepsilon_{odd}(D_G)$的數量，刻劃f_{D_G}中特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$的係數

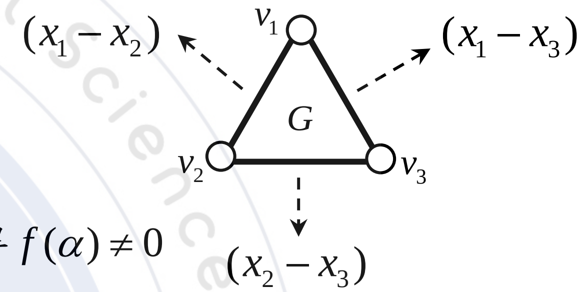
2.利用圖G的定向D_G，透過外度數序列，設計各點的列表數量函數$\ell:V(G)\to\mathbb{N}$，使圖G為ℓ-*choosable*

3.令圖H與K皆存在歐拉定向，則研究如何透過H與K建構圖G的可約構形，並設計列表著色演算法

4. 透過非定向圖的方式，設計可約構形

- 給定圖G，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$
  定義G的圖多項式為 $f_G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{v_iv_j\in E(G)}(x_i-x_j)$ 。

$f_G(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)$



- 對於 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$，且$\deg(f(x))=n$:
  代數基本定理: 方程式 $f(x)=0$ 至多有n個相異的複數根
  鴿籠原理觀點: 任意集合$A\subseteq\mathbb{C}$，其中$|A|\geq n+1$，則必存在$\alpha\in A$，使得 $f(\alpha)\neq 0$

Lemma 1

令$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b$ 為複係數n元一次多項式，其中$a_j\neq 0$。對於$i=1,2,\cdots,n$ ，考慮複數子集合$A_i\subseteq\mathbb{C}$。

若 $|A_i|\geq\begin{cases}2, & 當 i=j;\\ 1, & 當 i\neq j\end{cases}$ 時，則對於 $i=1,2,\cdots,n$，存在$\alpha_i\in A_i$，使得$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$

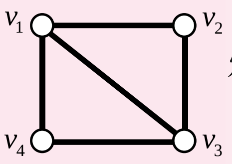
Theorem 1 組合零點定理 *Combinatorial Nullstellensatz*

令$f\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，其中$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$為最高次項，$A_1,A_2,\cdots,A_n\subseteq\mathbb{C}$。若$|A_i|\geq k_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$ ，則必存在n元序列$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ ，使得函數值$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$

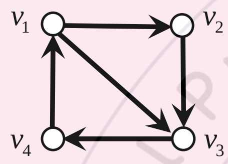
Reference: Mateusz Michałek, *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, Amer. Math. Monthly, vol. 117 (2010), 821-823.

Notation

• 有向圖



定向 $\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$

$d^+_{D_G}(v_1)=2\ \ d^-_{D_G}(v_1)=1$

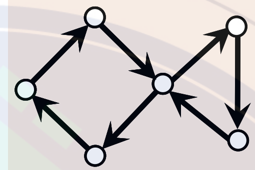
$d^+_{D_G}(v_2)=1\ \ d^-_{D_G}(v_2)=1$

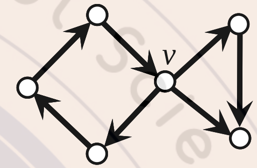
$d^+_{D_G}(v_3)=1\ \ d^-_{D_G}(v_3)=2$

$d^+_{D_G}(v_4)=1\ \ d^-_{D_G}(v_4)=1$

$$\sum_{i=1}^{4} d^+_{D_G}(v_i)=\sum_{i=1}^{4} d^-_{D_G}(v_i)=5$$

• 歐拉有向圖

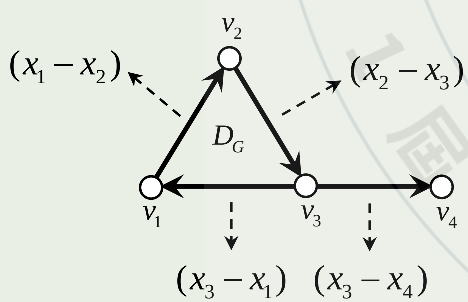




$\Longrightarrow d^+_{D_G}(v)=3\neq 1=d^-_{D_G}(v)$

• 有向圖多項式

- 有向圖多項式為$f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{(v_i,v_j)\in E(D_G)}(x_i-x_j)$
- 特殊項$x_1^{\,d_1}x_2^{\,d_2}\cdots x_n^{\,d_n}$為所有一次式前項相乘的乘積

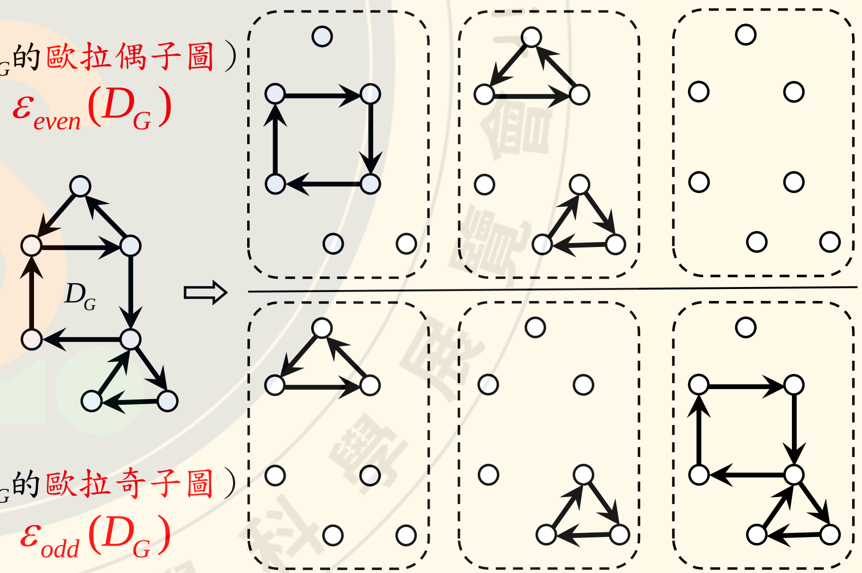


特殊項$x_1x_2x_3^{\,2}$

$$f_{D_G}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_4)$$

• 歐拉有向子圖

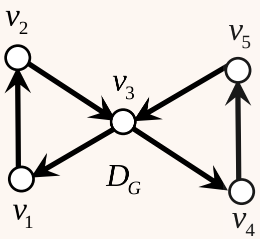
(D_G的歐拉偶子圖)
$\varepsilon_{even}(D_G)$



(D_G的歐拉奇子圖)
$\varepsilon_{odd}(D_G)$

- 若D_G的子圖D_H滿足$V(D_G)=V(D_H)$，且每個點的$d^+_{D_G}(v)=d^-_{D_G}(v)$，則稱$D_H$為$D_G$的歐拉有向子圖

歐拉有向子圖決定特殊項的係數



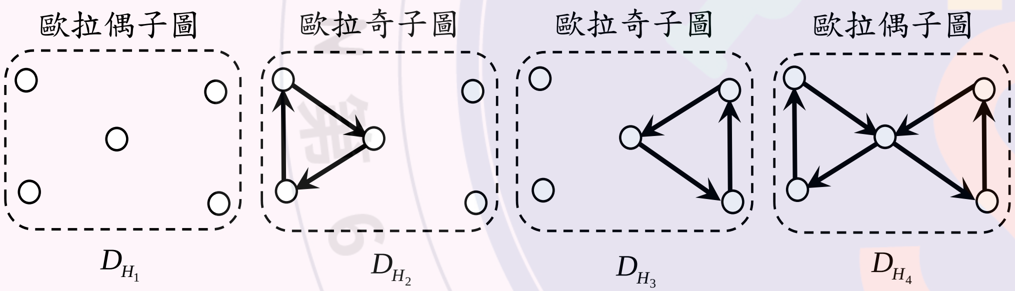
$$\Leftrightarrow f_{D_G}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\times(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)$$

Choosing from each factor upward: x_1, x_2, x_3, x_3, x_4, x_5; downward: $-x_2$, $-x_3$, $-x_1$, $-x_4$, $-x_5$, $-x_3$

特殊項$x_1x_2x_3^2x_4x_5$

分配律可得特殊項		貢獻係數
$\Rightarrow (x_1x_2x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Rightarrow$	$+1$
$\Rightarrow (-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Rightarrow$	-1
$\Rightarrow (x_1x_2x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Rightarrow$	-1
$\Rightarrow (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Rightarrow$	$+1$

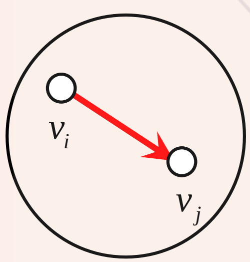
- f_{D_G}中循環因式的各種組合，可與D_G所有歐拉有向子圖$\varepsilon(D_G)$建立一一對應關係。



分配律可得特殊項		歐拉有向子圖		貢獻係數
$(x_1x_2x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_1}\in\varepsilon_{even}(D_G)$	$\Rightarrow$	$+1$
$(-x_1)(-x_2)(-x_3)(x_3x_4x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_2}\in\varepsilon_{odd}(D_G)$	$\Rightarrow$	-1
$(x_1x_2x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_3}\in\varepsilon_{odd}(D_G)$	$\Rightarrow$	-1
$(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_3)(-x_4)(-x_5)$	$\Leftrightarrow$	$D_{H_4}\in\varepsilon_{even}(D_G)$	$\Rightarrow$	$+1$

- 歐拉偶子圖貢獻係數 1，歐拉奇子圖貢獻係數 -1

歐拉有向子圖D_H　　圖多項式 f_{D_G}　　貢獻$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$係數



$$\Leftrightarrow (\quad)(\quad)\cdots(x_i \underset{\uparrow\ -x_j}{-x_j})\cdots(\quad) \Leftrightarrow (-1)^{|E(D_H)|}=\begin{cases}1 & ,D_H\in\varepsilon_{even}(D_G)\\ -1 & ,D_H\in\varepsilon_{odd}(D_G)\end{cases}$$

Main Theorem

若滿足$|\varepsilon_{even}(D_G)|\neq|\varepsilon_{odd}(D_G)|$，則稱$D_G$為$G$的歐拉定向

Theorem 2

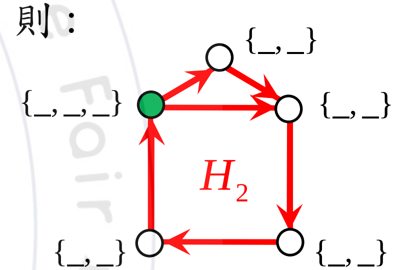
給定有向圖D_G，其圖多項式f_{D_G}中的特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$係數為$|\varepsilon_{even}(D_G)|-|\varepsilon_{odd}(D_G)|$。

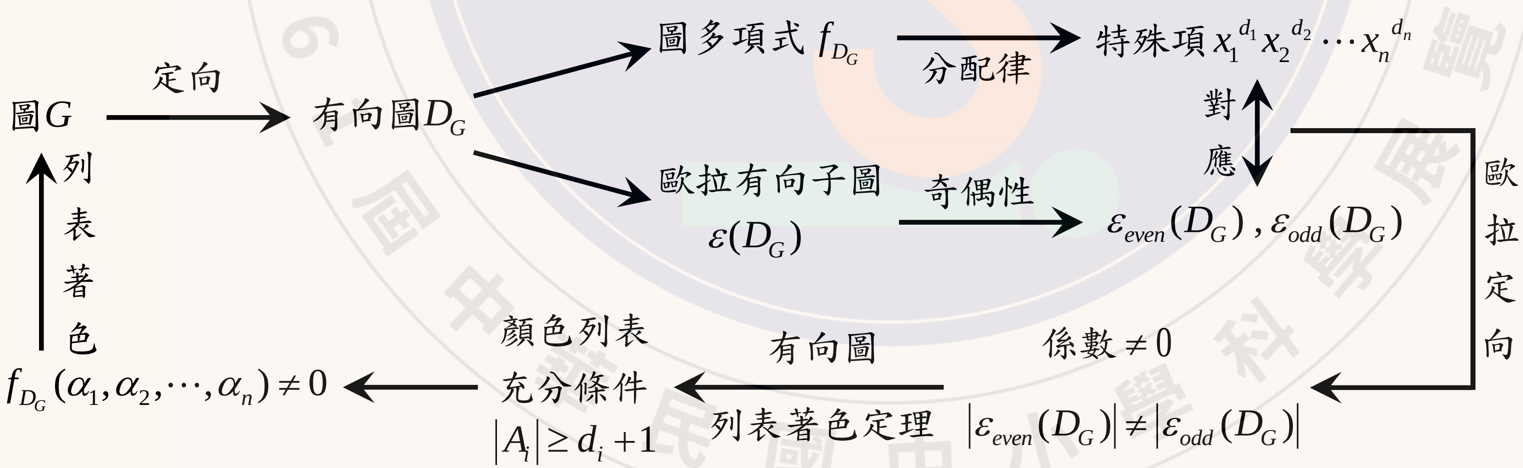
Theorem 4

給定有向圖D_G，點集合$V(D_G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其中點$v_i$的外度數$d_{D_G}^{+}(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

令$L(v_i)$為點v_i的顏色列表且$|L(v_i)|\geq d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$。若$|\varepsilon_{even}(D_G)|\neq|\varepsilon_{odd}(D_G)|$，則：

1. 圖多項式f_{D_G}中的特殊項$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$係數不為零；
2. 對任意$i=1,2,\cdots,n$，存在$\alpha_i\in L(v_i)$，使得圖G有L-coloring；
3. 圖G為可$\ell-choosable$，其中$\ell: V(G)\rightarrow\mathbb{N}$，$\ell(v_i)\geq d_i+1$，$i=1,2,\cdots,n$。





$g(D_1,D_2)=|E(D_1)|-|E(D_1)\cap E(D_2)|$

Lemma 2

令D_1與D_2皆為G的定向，點v_i在有向圖D_2的外度數記為$d_{D_2}^{+}(v_i)=d_i^{(2)}$，其中$i=1,2,\cdots,n$，則：

1. $f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot f_{D_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$；
2. $f_{D_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中$x_1^{d_1^{(2)}}x_2^{d_2^{(2)}}\cdots x_n^{d_n^{(2)}}$的係數為$(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot\left(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|\right)$。

Lemma 3

令D_1與D_2為G的不同定向，滿足$d(D_1)=d(D_2)$，則：

1. $E(D_1)-E(D_1)\cap E(D_2)$所形成的圖為D_1的歐拉有向子圖；
2. $|\varepsilon_{even}(D_1)|-|\varepsilon_{odd}(D_1)|=(-1)^{g(D_1,D_2)}\cdot\left(|\varepsilon_{even}(D_2)|-|\varepsilon_{odd}(D_2)|\right)$；
3. $|\varepsilon(D_1)|=|\varepsilon(D_2)|$；
4. 當$g(D_1,D_2)$為偶數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$；
   當$g(D_1,D_2)$為奇數時，$|\varepsilon_{even}(D_1)|=|\varepsilon_{odd}(D_2)|$、$|\varepsilon_{odd}(D_1)|=|\varepsilon_{even}(D_2)|$。

- $d(D_G)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$為$D_G$的外度數序列
  其中$\forall v\in V(D_G)$，$d_{D_G}^{+}(v_i)=d_i$
- $Out(D_G)$為所有外度數序列所成的集合

Theorem 3

給定圖G，點集合$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。令$D_G$為圖$G$的一個定向，則：

1. 若$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$為圖G以某個有向圖D決定的外度數序列，則圖G共有$|\varepsilon(D)|$個不同的定向，使其外度數序列皆為$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$；
2. $f_{D_G}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{\substack{(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in Out(G)\\(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d(D)}}(-1)^{g(D_G,D)}\cdot\left(|\varepsilon_{even}(D)|-|\varepsilon_{odd}(D)|\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{d_i}$。

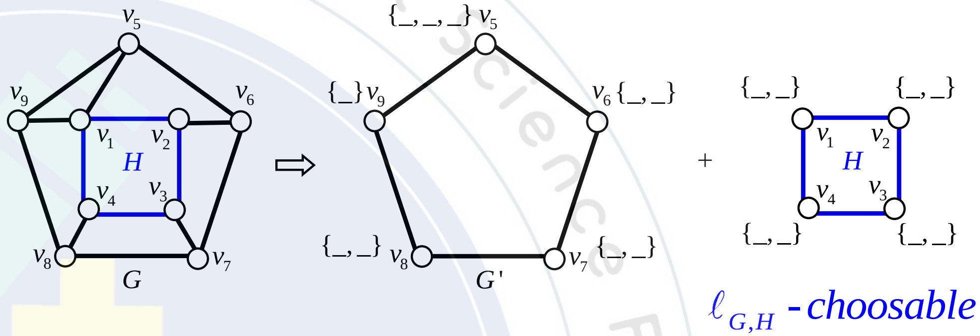
原本的顏色數量減掉鄰居使用的顏色數量

$$\ell_{G,H}(v)=\ell_G(v)-\left(d_G(v)-d_H(v)\right)$$

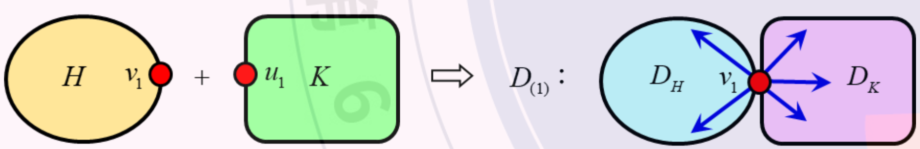
Lemma 4

給定圖G與列表數量函數ℓ_G，令H為G的子圖，且$\left(H,\ell_{G,H}\right)$為$G$的可約構形，令$G$刪除$H$之後的剩餘圖形為$G'$。

G'為ℓ_G-*choosable* $\Leftrightarrow$ G為ℓ_G-*choosable*



Theorem 5



令H與K分別存在歐拉定向D_H與D_K，且$H_{(1)}$為G的子圖。

$$\text{若}\,d_G(v)-\ell_G(v)\le\begin{cases}d^-_{D_H}(v)-1, & \text{當}\,v\in V(H)\setminus\{v_1\};\\ d^-_{D_K}(v)-1, & \text{當}\,v\in V(K');\\ d^-_{D_H}(v_1)+d^-_{D_K}(u_1)-1, & \text{當}\,v=v_1.\end{cases}$$

則$\left(H_{(1)},\ell_{G,H_{(1)}}\right)$為$G$的可約構形

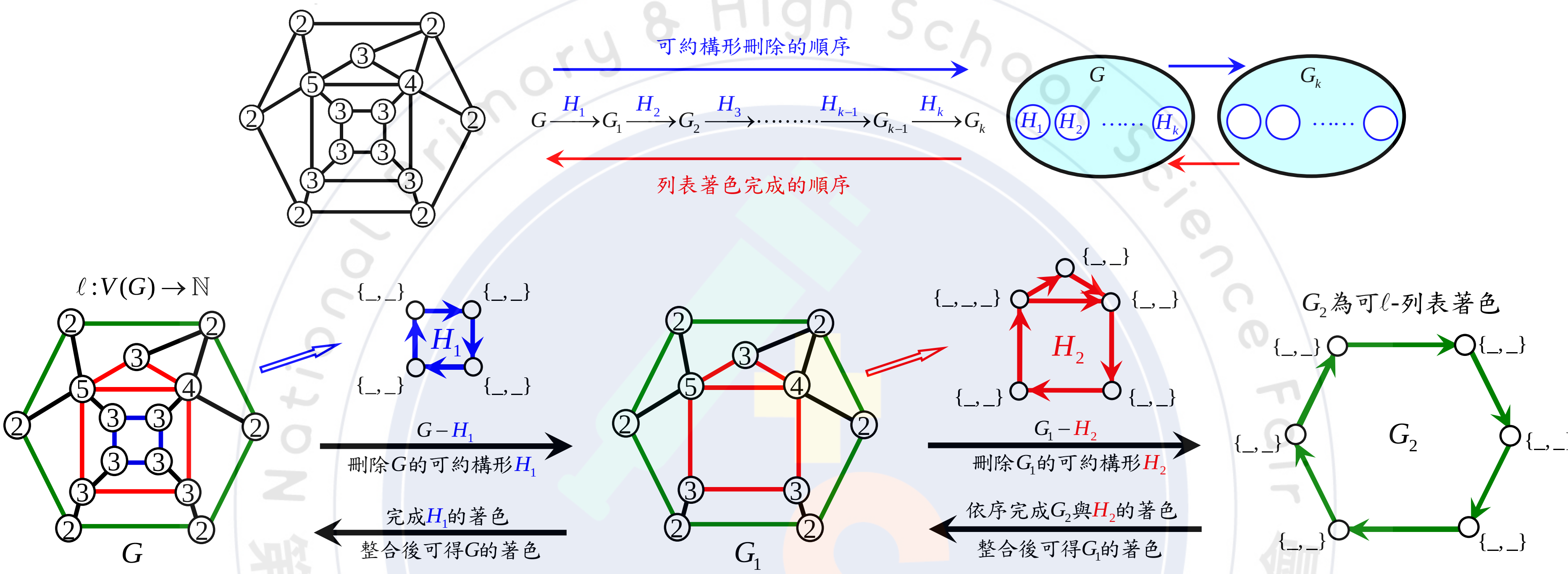
Theorem 6

令H與K分別存在歐拉定向D_H與D_K，且$H_{(2)}$為G的子圖。

$$\text{若}\,d_G(v)-\ell_G(v)\le\begin{cases}d^-_{D_H}(v)-1, & \text{當}\,v\in V(H);\\ d^-_{D_K}(v)-1, & \text{當}\,v\in V(K)\setminus\{u_1,u_2,\cdots,u_p\};\\ d^-_{D_K}(v), & \text{當}\,v\in\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}.\end{cases}$$

則$\left(H_{(2)},\ell_{G,H_{(2)}}\right)$為$G$的可約構形

列表著色演算法

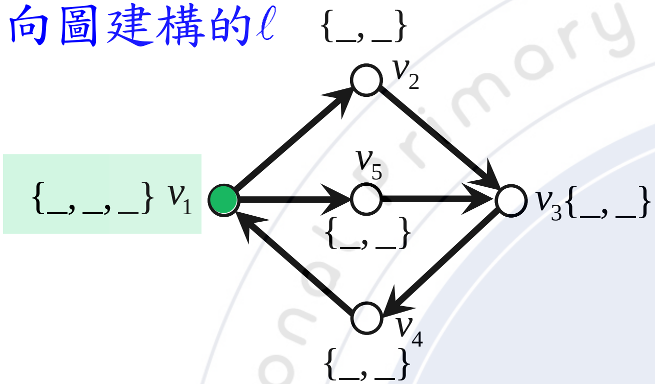


References

1. 林芮吟。平面圖的四元列表著色。2017年臺灣國際科學展覽會。
2. Noga Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, Combin. Probab. Comput.
3. P.Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. 26 (1979).
4. Mateusz Michałek, *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, Amer. Math. Monthly.
5. V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors*, Metody Diskret. Anal.
6. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd, Pearson Education Taiwan 2008.
7. Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6th, CRC Press 2016.

非定向圖所建構的列表數量函數

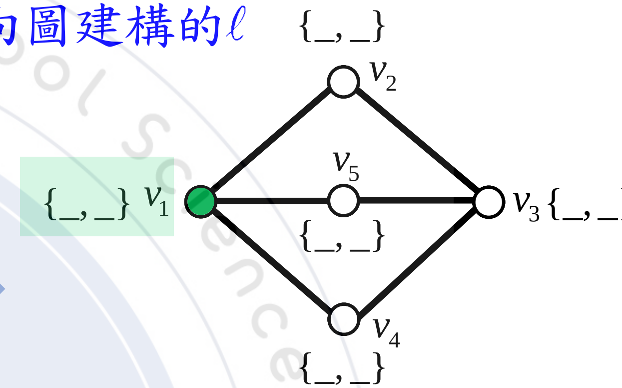
- 有向圖建構的ℓ



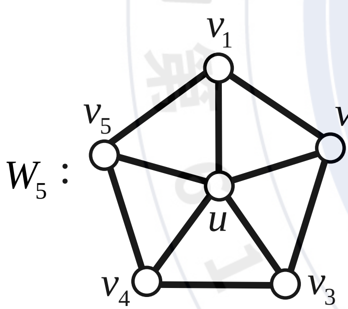
$\ell(v_1)$可由3下降為2

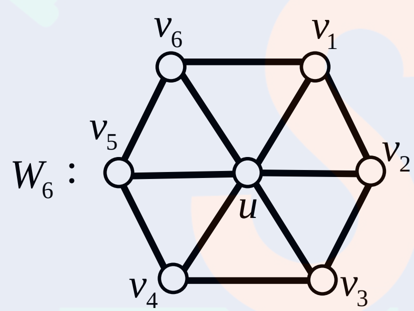
ℓ有優化的可能性

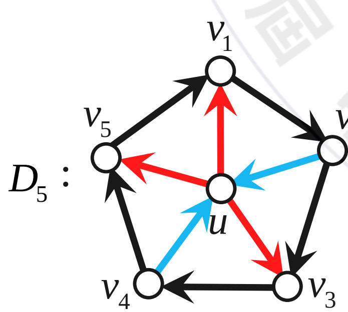
- 非有向圖建構的ℓ

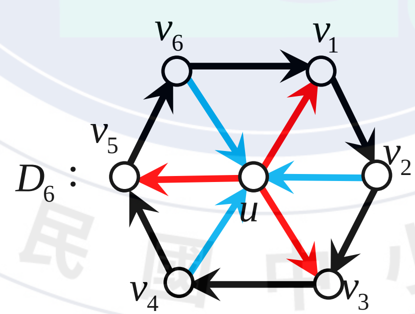


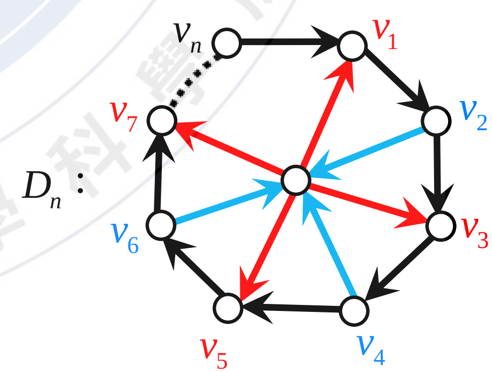
特殊圖類——Wheel









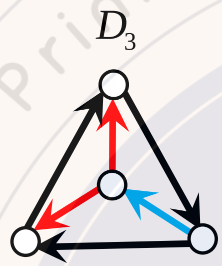


特殊圖類──Wheel

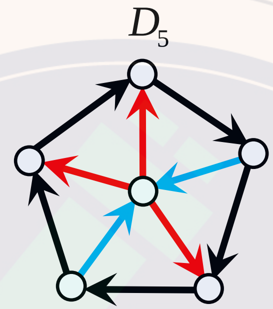
- n為奇數時

$$\left|\varepsilon_{even}(D_n)\right| = \left|\varepsilon_{even}(D_n)\right|$$

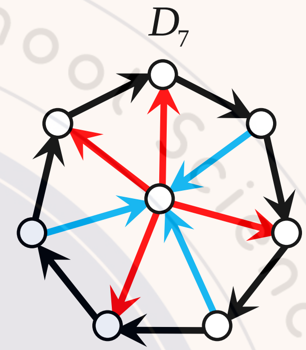
且等於費氏數列中第n項元素



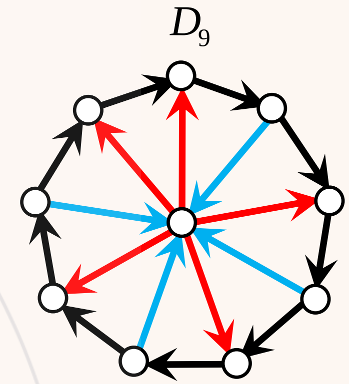
Odd	Even
2	2



Odd	Even
5	5



Odd	Even
13	13



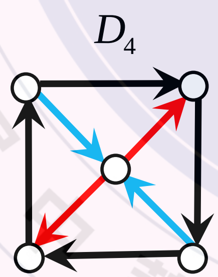
Odd	Even
34	34

費氏數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

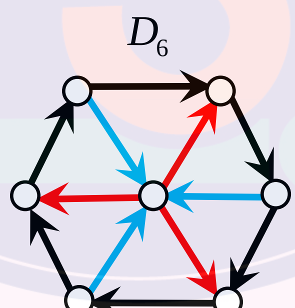
- n為偶數時

$$\left|\varepsilon_{even}(D_n)\right| \neq \left|\varepsilon_{even}(D_n)\right|$$

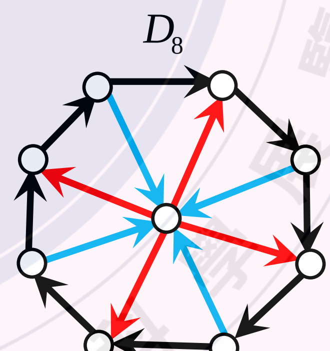
D_n皆為歐拉定向



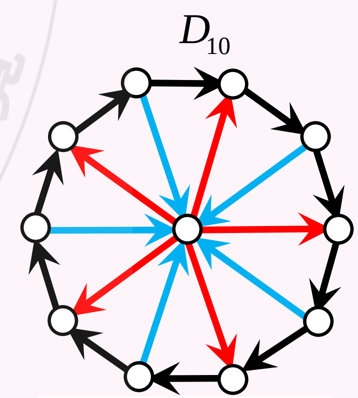
Odd	Even
4	3



Odd	Even
10	8

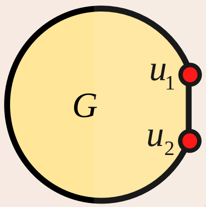


Odd	Even
24	23



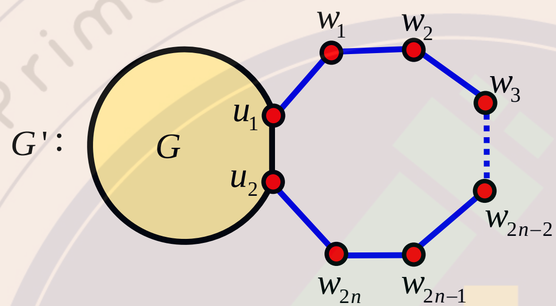
Odd	Even
61	62

Theorem 7



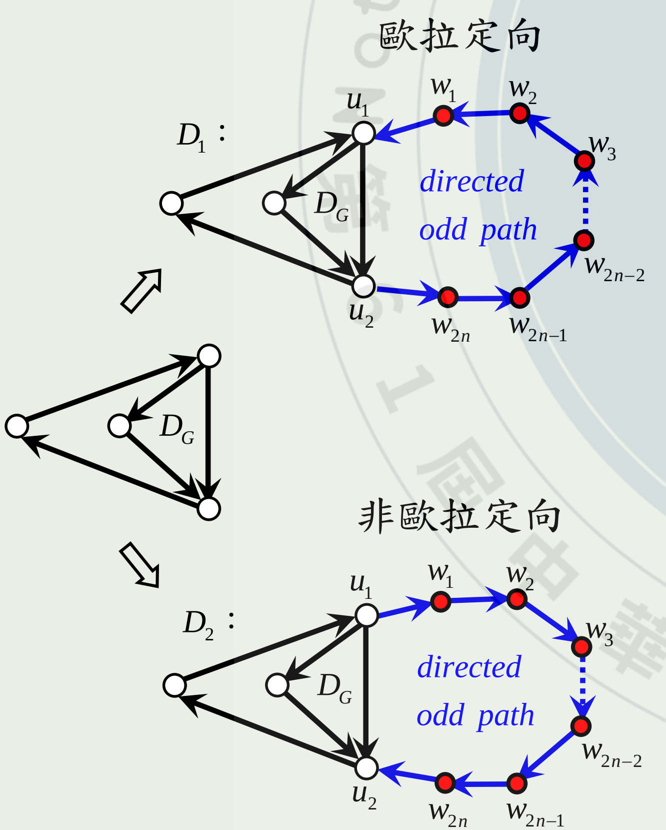
G為ℓ-choosable

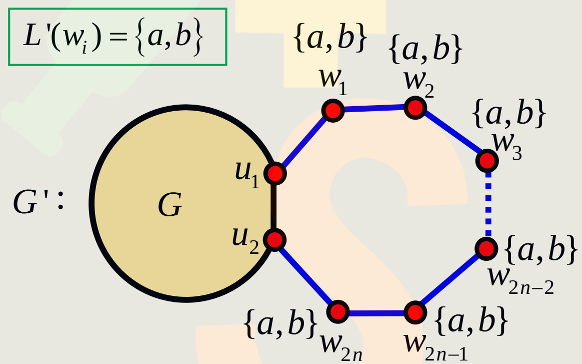
⇨



，其中$\ell'(v) \geq \begin{cases} \ell(v)+1, & 當 v = u_1; \\ \ell(v), & 當 v \in V(G) \setminus \{u_1\}; \\ 2, & 當 v \in \{w_1, w_2, \cdots, w_{2n}\}. \end{cases}$

，則G'為ℓ'-choosable





⇨