中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050412

我能搭到「他」的機車嗎？抽鑰匙的機率問題

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳聖喬 高二 萬庭禎	姜焙元

關鍵詞：條件機率、矩陣

摘要

設有 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 共 n 人及 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n$ 共 n 把鑰匙，其中 n 為正整數。現在依照 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的順序來抽鑰匙。在 n 人中除了 $A_r(1 \le r < n)$ 認得某一把鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個人抽到這些鑰匙的機會都均等。令 $P(A_i, K_j)$ 表 A_i 抽到 K_j 的機率 $(1 \le i, j \le n)$。在這篇研究中我們得到了 $P(A_i, K_j)$ 的一般式，並且利用程式模擬驗證。此外我們也將問題推廣到 n 人中恰有 m 個人必不選某把鑰匙的情況，並得到對應的機率通式與遞迴關係。

壹、前言

一、研究動機

我們在數學課上接觸機率這個單元，在參考書裡看到了 105 年學測一道關於機率的多選題，問題如下。

> 甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B 、C 、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B 、C 、D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。 [105 年學測多選]
>
> 1. A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
> 2. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
> 3. A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
> 4. B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
> 5. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

我們想要知道在此情況下每個人抽到每支鑰匙的機率，並用程式進行模擬試驗，確認計算的機率是正確的，接著推廣這個問題。

二、研究目的

1. 解原始問題中每個人抽到鑰匙的機率。
2. 設有 n 個人依序抽鑰匙且第 r 個人不選第一把鑰匙，求每個人抽到每把鑰匙的機率。
3. 設有 n 個人依序抽鑰匙且恰有 m 個人不選第一把鑰匙，求每個人抽到每把鑰匙的機率。

4. 設有 n 個人依序抽鑰匙，恰有 m 個人不選某一把鑰匙，且這 m 個人不選的鑰匙均相異，求每個人抽到每把鑰匙的機率。

5. 設計程式模擬抽鑰匙過程，輔助觀察定理的結果。

貳、研究過程與方法

一、原始問題的求解過程與程式模擬

我們要計算 A, B, C, D 分別抽到甲、乙、丙、丁的機率為多少，討論過程如下：

1. A 抽選鑰匙的情況
   因為每支鑰匙被選取的機會均等，所以 A 抽到甲、乙、丙、丁之機率皆為 $\frac{1}{4}$。

2. B 抽選鑰匙的情況
   因為 B 知道甲的鑰匙，所以 B 抽到甲的機率為 0，而 B 抽到乙、丙、丁之機率皆相等，故機率為 $\frac{1}{3}$。

3. C 抽選鑰匙的情況
   C 抽到甲的鑰匙的情況為：A 沒抽到甲且 B 沒抽到甲。A 沒抽到甲的機率為 $\frac{3}{4}$，當 A 沒抽到甲時，剩下三支鑰匙，其中有一支是甲。因為 B 認得甲的鑰匙，所以他只會從兩支鑰匙中選擇。不管選中哪一支，輪到 C 抽時，剩下的兩支一定有一支是甲，所以 C 抽到甲的鑰匙的機率為 $\frac{3}{4} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
   C 抽到乙的鑰匙的情況有兩種，分別為：
   (1) 在 A 抽到甲且 B 抽到丙或丁的情況下，因為 A 抽到甲的機率為 $\frac{1}{4}$，此時 B 抽到丙或丁的機率為 $\frac{2}{3}$，接著 C 抽到乙的機率為 $\frac{1}{2}$，由機率的乘法可知「A 抽到甲且 B 抽到丙或丁且 C 抽到乙」的機率為 $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$。
   (2) 在 A 抽到丙或丁且 B 不抽到乙的情況下，因為 A 抽到丙或丁的機率為 $\frac{2}{4}$，此時 B 不抽到乙的機率為 $\frac{1}{2}$，接著 C 抽到乙的機率為 $\frac{1}{2}$，由機率的乘法可知「A 抽到丙或丁且 B 不抽到乙且 C 抽到乙」的機率為 $\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
   由上述討論可知 $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$

   C 抽到丙和丁的情況與 C 抽到乙的情況相同，故皆為 $\frac{5}{24}$

4. D 抽選鑰匙的情況
   因為 C 抽完鑰匙後只剩下一支鑰匙，且 C 和 D 都沒有特殊條件，所以 D 抽選鑰匙的機率為 C 抽選鑰匙的機率再乘以 1，即 C、D 的機率分布相同。

綜合上述的討論，我們可以得到如下的機率表 (每個人抽到每支鑰匙的對應機率)

	甲	乙	丙	丁
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$
D	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$

我們用 python 來模擬 4 人抽鑰匙的情況並計算每個人抽到每支鑰匙的機率。模擬執行 1000 次抽鑰匙的結果如下

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	.269	.241	.230	.260
A_2	.000	.335	.340	.325
A_3	.400	.201	.208	.191
A_4	.331	.223	.222	.224

表格 1: 原始問題模擬 1000 次的相對次數

二、n 個人抽鑰匙且恰有一人必不選某把鑰匙

我們將問題推廣如下：假設有 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 共 n 人，鑰匙記為 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n$，其中 n 為正整數，現在依 $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots \to A_n$ 的順序來選擇鑰匙，並以

$$P(A_i, K_j) \text{ 表 } A_i \text{ 抽到 } K_j \text{ 的機率。}$$

不失一般性，我們設 A_r 知道 K_1 且一定不選，其中 r 為滿足 $1 \leq r < n$ 的正整數。以原始問題來說，相當於 $n = 4$ 且 $P(A_2, K_1) = 0$，其中 K_1 代表甲的鑰匙。**為了避免出現有人沒有鑰匙可選的情況，我們規定 $r \neq n$，即不考慮 A_n 知道 K_1 且一定不抽的情況。**

引理 1

對於滿足 $1 \le i < r$ 的任意正整數 i，$P(A_i, K_j) = \dfrac{1}{n}$，其中 $1 \le j \le n$。

證明：

由機率的乘法可知

$$\begin{aligned}
P(A_i, K_j) &= (A_1, A_2, \cdots, A_{i-1} \text{ 均不抽到 } K_j \text{ 的機率}) \times (A_i \text{ 抽到 } K_j \text{ 的機率}) \\
&= \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \frac{n-i+1}{n-i+2}\right) \times \left(\frac{1}{n-i+1}\right) \\
&= \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

□

引理 2

$$P(A_r, K_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & \text{當 } j \ne 1, 1 \le j \le n \\ 0 & \text{當 } j = 1 \end{cases}$$

證明：

由題設可知 A_r 知道 K_1 且一定不選，故 $P(A_r, K_1) = 0$。另一方面，當 $j \ne 1$ 時，我們分成兩種情況討論

1. $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 與 K_1，且 A_r 抽到 K_j：$A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_1 與 K_j 的機率為 $\dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{n-r}{n-r+2} = \dfrac{(n-r+1)(n-r)}{n(n-1)}$，當 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 與 K_1 時，A_r 抽到 K_j 的機率為 $\dfrac{1}{n-r}$。由機率乘法可知此時的機率為
$$\frac{(n-r+1)(n-r)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-r} = \frac{n-r+1}{n(n-1)}$$

2. $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 但有其中一人抽到 K_1，且 A_r 抽到 K_j：$A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 但有其中一人抽到 K_1 的機率等於 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 的機率減去 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 與 K_1 的機率，故 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 但有其中一人抽到 K_1 的機率為
$$\frac{n-r+1}{n} - \frac{(n-r+1)(n-r)}{n(n-1)} = \left(\frac{n-r+1}{n}\right)\left(1 - \frac{n-r}{n-1}\right) = \frac{(n-r+1)(r-1)}{n(n-1)}$$
當 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 均沒有抽到 K_j 但有其中一人抽到 K_1 時，A_r 抽到 K_j 的機率為 $\dfrac{1}{n-r+1}$，由機率乘法可知此時的機率為
$$\frac{(n-r+1)(r-1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-r+1} = \frac{r-1}{n(n-1)}$$

綜合上述討論可知若 $j \neq 1$，則

$$P(A_r, K_1) = \frac{n-r+1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}$$

$\square$

引理 3

對於滿足 $r < i \leq n$ 的任意正整數 i，有 $P(A_i, K_j) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{n-r}\right)\dfrac{1}{n} & \text{若 } j = 1 \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n-1)(n-r)} & \text{若 } j \neq 1 \end{cases}$

證明：

對於 $r < i \leq n$ 的 i 而言，

$P(A_i, K_1) = (A_1, A_2, \cdots, A_r, \cdots, A_{i-1}$ 均不抽到 K_1 的機率$) \times (A_i$ 抽到 K_1 的機率$)$

$$= \left(\underbrace{\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-r+1}{n-r+2}}_{A_1, \cdots, A_{r-1} \text{ 不抽到 } K_1} \times \underbrace{1}_{A_r \text{ 不抽到 } K_1} \times \underbrace{\frac{n-r-1}{n-r} \times \cdots \times \frac{n-i+1}{n-i+2}}_{A_r, A_{r+1}, \cdots, A_{i-1} \text{ 不抽到 } K_1} \right) \times \underbrace{\frac{1}{n-i+1}}_{A_i \text{ 抽到 } K_1}$$

$$= \left(\frac{n-r+1}{n} \times 1 \times \frac{n-i+1}{n-r}\right) \times \frac{1}{n-i+1}$$

$$= \frac{n-r+1}{n(n-r)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-r)} = \left(1 + \frac{1}{n-r}\right)\frac{1}{n}$$

而對於 $j \neq 1$ 而言，$A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 不抽到 K_j 的機率為 $\dfrac{n-r+1}{n}$，而 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 不抽到 K_1 與 K_j 的機率為 $\dfrac{(n-r+1)(n-r)}{n(n-1)}$。為了計算 $P(A_i, K_j)$，以下我們分兩種情況討論：

情況 1: 在 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 不抽到 K_1 與 K_j 的條件下，此時 A_r 不抽到 K_j 的機率為 $\dfrac{n-r-1}{n-r}$，而 $A_{r+1}, \cdots, A_{i-1}$ 不抽到 K_j 且 A_i 抽到 K_j 的機率為

$$\frac{n-r-1}{n-r} \times \frac{n-r-2}{n-r-1} \times \cdots \times \frac{n-i+1}{n-i+2} \times \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n-r}$$

故 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 不抽到 K_1 與 K_j 且 A_i 抽到 K_j 的機率為

$$\frac{(n-r+1)(n-r)}{n(n-1)} \times \frac{n-r-1}{n-r} \times \frac{1}{n-r} = \frac{(n-r+1)(n-r-1)}{n(n-1)(n-r)}$$

情況 2: 在 $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ 不抽到 K_j 但有一人抽到 K_1 的條件下，這個機率由之前的討論可知為 $\dfrac{(n-r+1)(r-1)}{n(n-1)}$。此時 A_r 不抽到 K_j 的機率為 $\dfrac{n-r}{n-r+1}$，而

$A_{r+1},\cdots,A_{i-1}$ 不抽到 K_j 且 A_i 抽到 K_j 的機率仍為 $\dfrac{1}{n-r}$，故 $A_1,A_2,\cdots,A_{r-1}$ 不抽到 K_j 但有一人抽到 K_1 且 A_i 抽到 K_j 的機率為

$$\frac{(n-r+1)(r-1)}{n(n-1)}\times\frac{n-r}{n-r+1}\times\frac{1}{n-r}=\frac{r-1}{n(n-1)}$$

綜合上述討論，$P(A_i,K_j)=\dfrac{(n-r+1)(n-r-1)}{n(n-1)(n-r)}+\dfrac{r-1}{n(n-1)}=\left(1-\dfrac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\dfrac{1}{n}$ $\square$

前面三個引理的結果對於 $r=1$ 也成立，因此，我們有以下的定理：

定理 1: n 人中恰有一人必不選某一支鑰匙

設有 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共 n 人依序選取 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 共 n 把鑰匙，若第 r 人知道第一把鑰匙且一定不選，其中 $1\le r<n$，以 $P(A_i,K_j)$ 表 A_i 抽到鑰匙 K_j 的機率，則

1. 對於滿足 $1\le i<r$ 的任意正整數 i，$P(A_i,K_j)=\dfrac{1}{n}$，其中 $1\le j\le n$。

2. $P(A_r,K_j)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1} & 當\ j\neq 1,1\le j\le n\\ 0 & 當\ j=1\end{cases}$

3. 對於滿足 $r<i\le n$ 的任意正整數 i，有
$$P(A_i,K_j)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{n-r}\right)\dfrac{1}{n} & 若\ j=1\\ \left(1-\dfrac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\dfrac{1}{n} & 若\ j\neq 1\end{cases}$$

我們用以下的表格來表示定理1的結果。

<table>
<tr><td></td><td>K_1</td><td>K_2</td><td>$\dots$</td><td>K_n</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td colspan="4" rowspan="3">$\dfrac{1}{n}$</td></tr>
<tr><td>A_2</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_r</td><td>0</td><td colspan="3">$\dfrac{1}{n-1}$</td></tr>
<tr><td>A_{r+1}</td><td rowspan="3">$\left(1+\dfrac{1}{n-r}\right)\dfrac{1}{n}$</td><td colspan="3" rowspan="3">$\left(1-\dfrac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\dfrac{1}{n}$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_n</td></tr>
</table>

此外從上面的結果中，我們也可以發現：表格中每一行的機率和均為 1，且每一列的機率和也均為 1，即對於任意的正整數 i,j 恆有

$$\sum_{j=1}^{n}P(A_i,K_j)=1\ 且\sum_{i=1}^{n}P(A_i,K_j)=1$$

其中 $1\le i,j\le n$，而這個性質顯然是正確的。所以我們可以利用這個性質來重新證明定理1

$\boxed{\text{定理1 的另一種證明}}$

證明：

我們分成三種情況討論：$1 \leq i < r, i = r, r < i \leq n$

1. 對於 $1 \leq i < r$ 的 i，
顯然 $P(A_i, K_1) = P(A_i, K_2) = \cdots = P(A_i, K_n)$，因為 $\sum_{j=1}^{n} P(A_i, K_j) = 1$，所以 $P(A_i, K_j) = \frac{1}{n}$

2. 當 $i = r$ 時，因為 $P(A_r, K_1) = 0$ 且顯然 $P(A_r, K_2) = P(A_r, K_3) = \cdots = P(A_r, K_n)$，又 $\sum_{j=1}^{n} P(A_r, K_j) = 1$，可得 $P(A_r, K_j) = \frac{1}{n-1}$，其中 $2 \leq j \leq n$。

3. 由參考文獻 [2] 的定理 1 可知 $P(A_{r+1}, K_1) = P(A_{r+2}, K_1) = \cdots = P(A_n, K_1)$。由 $\sum_{i=1}^{n} P(A_i, K_j) = 1$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i, K_j) = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{r-1\text{ 項}} + \underbrace{0}_{=P(A_r, K_1)} + (n-r)P(A_{r+1}, K_1) = 1$$

解得 $P(A_{r+1}, K_1) = \frac{1}{n-r}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-r+1}{n(n-r)} = \left(1 + \frac{1}{n-r}\right)\frac{1}{n}$

再由 $P(A_{r+1}, K_2) = P(A_{r+1}, K_3) = \cdots = P(A_{r+1}, K_n)$ 且 $\sum_{j=1}^{n} P(A_{r+1}, K_j) = 1$ 可知

$$P(A_{r+1}, K_2) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-r)}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\frac{1}{n}$$

所以對於 $r < i \leq n$ 的 i 而言，$P(A_i, K_j) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n-r}\right)\frac{1}{n} & \text{若 } j = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\frac{1}{n} & \text{若 } j \neq 1 \end{cases}$

$\square$

用定理1計算當 $n = 7$ 且 $r = 3$ 的結果與使用 python 模擬的數據如附錄。

三、n 個人抽鑰匙且其中恰有 m 個人一定不選 K_1

為了簡化符號表示，我們將 n 人抽鑰匙中每個人抽到每把鑰匙的機率情況以矩陣

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

來表示，其中 $p_{ij}=P(A_i,K_j)$ 為 A_i 抽到 K_j 的機率，簡稱此矩陣為對應的抽鑰匙「機率矩陣」。

我們將原始問題推廣如下：設有 n 個人依序抽鑰匙，且 $A_{r_1},A_{r_2},\cdots,A_{r_m}$ 必不選 K_1，其中 $1\le r_1<r_2<\cdots<r_m<n$，這裡同樣因為避免有人無鑰匙可抽，所以假設 $r_m\ne n$。當 $A_{r_1},A_{r_2},\cdots,A_{r_m}$ 必不選 K_1 時，所得的機率矩陣為

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{r_1 1}=0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{r_2 1}=0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{r_m 1}=0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

考慮第一個人 A_1 的抽鑰匙情況，如果 A_1 一定不選 K_1(即 $r_1=1$)，此時 A_1 會選到 $K_2,K_3,\cdots,K_n$ 這 $n-1$ 把鑰匙中的其中一把，且選到每一把的機率都是 $\dfrac{1}{n-1}$。當 A_1 抽完鑰匙後，還剩 $n-1$ 個人 $(A_2,A_3,\cdots,A_n)$ 尚未選取，在這 $n-1$ 個人中，第 $r_2-1,r_3-1,\cdots,r_m-1$ 個人不選 K_1，也就是說我們可以將情況降為 $n-1$ 個人且恰有 $m-1$ 個人不選 K_1 的情況。

以 $n=4,r_1=1,r_2=3$ 這個特例來說明這個遞迴關係，經過計算 $n=4,r_1=1,r_2=3$ 的機率矩陣為

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

當 A_1 抽到 K_4 時，在此情況下，還有 A_2,A_3,A_4 共 3 人要抽鑰匙，且第 2 個人 A_3 不選 K_1。而我們已經知道 3 個人抽鑰匙中第 2 個人不選 K_1 的機率矩陣為

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

我們將這個三階方陣組合成一個四階方陣如下

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

上面這個矩陣的想法如下：當 A_1 抽到 K_4 時，我們想成 A_1 抽到 K_4 的機率為 1，此時剩下的三個人不可能再抽到 K_4 了，所以上面矩陣中第 1 列的列向量為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，而第 4 行的行向量為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。此外，上面這個矩陣的左下有一個三階方陣，這個三階方陣是 3 人抽鑰匙且第 2 個人不選 K_1 的機率矩陣。我們把這個矩陣稱為在已知 A_1 抽到 K_4 的條件下，4 個人抽鑰匙的機率矩陣。依此類推，

已知 A_1 抽到 K_3 的條件下，4 個人抽鑰匙的機率矩陣為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$，

已知 A_1 抽到 K_2 的條件下，4 個人抽鑰匙的機率矩陣為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$。

因為 A_1 抽到 K_2, K_3, K_4 的機率都是 $\frac{1}{3}$，利用機率的乘法可知

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰匙且}\\ \text{第 1,3 個人不選}\\ K_1 \text{ 的機率矩陣}\end{array}} = \frac{1}{3} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰匙且}\\ \text{已知第 1 個人選}\\ K_2 \text{ 的情況下的}\\ \text{機率矩陣}\end{array}} + \frac{1}{3} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰匙且}\\ \text{已知第 1 個人選}\\ K_3 \text{ 的情況下的}\\ \text{機率矩陣}\end{array}} + \frac{1}{3} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰匙且}\\ \text{已知第 1 個人選}\\ K_4 \text{ 的情況下的}\\ \text{機率矩陣}\end{array}}$$

用矩陣加法表示如下

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

很容易檢查上面這個等式是正確的。

如果 A_1 沒有任何不選的鑰匙 (即 $r_1 > 1$)，則 A_1 抽到 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 的機率都是 $\frac{1}{n}$。當 A_1 抽完鑰匙後，還剩 $n-1$ 個人 $(A_2, A_3, \cdots, A_n)$ 尚未選取，在這 $n-1$ 個人中，第 $r_1-1, r_2-1, \cdots, r_m-1$ 個人不選 K_1，表示我們可以將情況降為 $n-1$ 個人且恰有 m 個人不選 K_1 的情況。

以 $n=4, r_1=2, r_2=3$ 這個特例來說明這個遞迴關係，經過計算 $n=4, r_1=2, r_2=3$ 的機率矩陣為

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

當 A_1 抽到 K_4 時，情況變成 A_2, A_3, A_4 三個人且第 1、2 個人 A_2, A_3 不選 K_1。而 3 個人中第 1、2 個人不選 K_1 的機率矩陣為

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我們將這個 3 階方陣組成以下的 4 階方陣

$$\begin{bmatrix} 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上面這個矩陣表示在已知 A_1 選到 K_4 的情況下，4 個人抽鑰匙所對應的機率矩陣。

當 A_1 抽到 K_1 時，此時剩下三把鑰匙 K_2, K_3, K_4。對於剩下的三人 A_2, A_3, A_4 來說，已經沒有任何不選的鑰匙，所以對於剩下的三人而言，選到任何一把鑰匙的機率均為 $\frac{1}{3}$。換句

話說，情況變為 3 個人且每個人抽到每把鑰匙的機會均等。對應的三階機率矩陣為

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

同樣地將這個 3 階方陣組成 4 階方陣

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

上面這個矩陣表示在已知 A_1 選到 K_1 的情況下，4 個人抽鑰匙所對應的機率矩陣。因此有

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰}\\\text{匙且第 2,3}\\\text{個人不選}\\K_1\text{ 的機率}\\\text{矩陣}\end{array}} = \frac{1}{4} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰}\\\text{匙且已知}\\\text{第 1 個人}\\\text{選 }K_1\text{ 的情}\\\text{況下的機}\\\text{率矩陣}\end{array}} + \frac{1}{4} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰}\\\text{匙且已知}\\\text{第 1 個人}\\\text{選 }K_2\text{ 的情}\\\text{況下的機}\\\text{率矩陣}\end{array}} + \frac{1}{4} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰}\\\text{匙且已知}\\\text{第 1 個人}\\\text{選 }K_3\text{ 的情}\\\text{況下的機}\\\text{率矩陣}\end{array}} + \frac{1}{4} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{4 個人抽鑰}\\\text{匙且已知}\\\text{第 1 個人}\\\text{選 }K_4\text{ 的情}\\\text{況下的機}\\\text{率矩陣}\end{array}}$$

以矩陣加法表示如下

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

很容易檢查上面的等式是正確的。

綜合以上的討論，我們可以用這個遞迴方法來求在 n 人抽鑰匙中，恰有 m 人 $A_{r_1}, A_{r_2}, A_{r_3}, \cdots, A_{r_m}$ 不選 K_1 的機率矩陣。

定義 1

設有 n 人抽 n 把鑰匙，且第 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 個人不選 K_1，其中 $1\le r_1<r_2<\cdots<r_m<n$。令 $[v]$ 是一個 $n\times 1$ 的矩陣，且此矩陣中第 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 列位置的元素為 0，其餘為 1。即

$$v_{i1}=\begin{cases}0 & ,\text{若 } i=r_k\\ 1 & ,\text{若 } i\neq r_k\end{cases}$$

其中 $k=1,2,3,\cdots,m$。且定義

$$F([v])=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

是 n 人抽鑰匙且第 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 個人不選 K_1 的條件下，n 個人抽鑰匙所對應的機率矩陣。

而

$$F([v]\Big|p_{1j}=1)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & p_{1j}=1 & \cdots & 0\\ p_{21} & \cdots & p_{2j}=0 & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{i1} & \cdots & p_{ij}=0 & \cdots & p_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nj}=0 & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

表示在已知 A_1 選到 K_j 的條件下所對應的機率矩陣。

特別規定當 $r_m=0$，即沒有任何人有不選鑰匙的情況時，$F(\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix})=\dfrac{1}{n}[\mathbf{1}_n]$，其中 $[\mathbf{1}_n]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ 是一個每一行每一列的元素都是 1 的 n 階方陣。

以 4 人抽鑰匙且 $r_1=1, r_2=3$ 為例，

$$F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\middle| p_{14}=1\right)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\end{bmatrix}$$

對於 n 個人中恰有 m 個人不選 K_1 的機率矩陣而言，因為機率矩陣中每一行與每一列的和皆為 1，所以機率矩陣的形式為

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\ \vdots\\1\\0\\1\\ \vdots\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}p_{11}&\frac{1-p_{11}}{n-1}&\frac{1-p_{11}}{n-1}&\cdots&\frac{1-p_{11}}{n-1}\\ \text{同第一列}&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ p_{r_11}=0&\frac{1}{n-1}&\frac{1}{n-1}&\cdots&\frac{1}{n-1}\\ p_{(r_1+1)1}&\frac{1-p_{(r_1+1)1}}{n-1}&\frac{1-p_{(r_1+1)1}}{n-1}&\cdots&\frac{1-p_{(r_1+1)1}}{n-1}\\ \text{同第 }r_1+1\text{ 列}&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ p_{r_21}=0&\frac{1}{n-1}&\frac{1}{n-1}&\cdots&\frac{1}{n-1}\\ p_{(r_2+1)1}&\frac{1-p_{(r_2+1)1}}{n-1}&\frac{1-p_{(r_2+1)1}}{n-1}&\cdots&\frac{1-p_{(r_2+1)1}}{n-1}\\ \text{同第 }r_2+1\text{ 列}&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ p_{r_m1}=0&\frac{1}{n-1}&\frac{1}{n-1}&\cdots&\frac{1}{n-1}\\ p_{(r_m+1)1}&\frac{1-p_{(r_m+1)1}}{n-1}&\frac{1-p_{(r_m+1)1}}{n-1}&\cdots&\frac{1-p_{(r_m+1)1}}{n-1}\\ \text{同第 }r_m+1\text{ 列}&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}$$

換句話說，只要確定上述矩陣中第一行的所有元素，就能確定這個矩陣的所有元素。因此接下來我們僅須考慮機率矩陣的第一行。

定理 2

對於任意大於 1 的正整數 n，令 $[v]$ 為一個 $n\times 1$ 的矩陣，且 $v_{i1}=\begin{cases}0 & \text{若 } i=r_k\\ 1 & \text{若 } i\neq r_k\end{cases}$，

其中 $1\le r_k<r_{k+1}, k=1,2,3,\cdots,m$ 且 $r_m\neq n$，**並規定** $r_{m+1}=n$

則 $F([v])_{i1}=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{，若 } 1\le i<r_1\\ 0 & \text{，若 } i=r_k\\ \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{n-r_j}\right)\frac{1}{n} & \text{，若 } r_k<i<r_{k+1}\end{cases}$

證明：

我們對 n 使用數學歸納法來證明。當 $n=2$ 時，r_m 僅能為 0 或 1。
而 $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 都滿足敘述，因此對於 $n=2$ 敘述成立。

假設當 $n=N$ 時敘述成立。則當 $n=N+1$ 時，令 $[v]$ 是一個 $(N+1)\times 1$ 的矩陣，滿足 $[v]_{i1} = \begin{cases} 0 & ,\text{若 } i = r_k \\ 1 & ,\text{若 } i \neq r_k \end{cases}$ 其中 $k=1,2,3\cdots,m$
考慮以下兩種情況

1. 第一個人 A_1 不選 K_1 時，此時 A_1 抽到 $K_2, K_3, \cdots, K_{N+1}$ 的機率均為 $\dfrac{1}{N}$。在 A_1 抽到 K_2 的情況下，對於 $A_2, A_3, \cdots, A_{N+1}$ 而言，第 $r_2-1, r_3-1, \cdots, r_m-1$ 個人不選 K_1。
則 $[v] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline v' \end{array}\right]$，其中 $v'_{i1} = \begin{cases} 0 & ,\text{若 } i = r_k - 1 \\ 1 & ,\text{若 } i \neq r_k - 1 \end{cases}$ 其中 $k=2,3\cdots,m$
令 $F([v']) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underbrace{F([v'])[1]}_{\text{第 1 行}} & \underbrace{F([v'])[2]}_{\text{第 2 行}} & \cdots & \underbrace{F([v'])[N]}_{\text{第 } N \text{ 行}} \end{array}\right]$，其中 $F([v'])[i]$ 是矩陣 $F([v'])$ 中第 i 行的向量，由前面討論的遞迴關係，我們知道

$$
\begin{aligned}
F([v]) &= \frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N+1} F([v] \Big| p_{1j}=1) \\
&= \frac{1}{N}\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline F([v'])[1] & [0]_{N\times 1} & F([v'])[3] & \cdots & F([v'])[N] \end{array}\right] \\
&+ \frac{1}{N}\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & [0]_{N\times 1} & \cdots & F([v'])[N] \end{array}\right] \\
&+ \frac{1}{N}\left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & F([v'])[3] & [0]_{N\times 1} & \cdots & F([v'])[N] \end{array}\right] \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{N}\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & F([v'])[3] & \cdots & [0]_{N\times 1} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

化簡可得

$$
F([v]) = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ F([v'])[1] & * & * & \cdots & * \end{array}\right] \qquad \ldots(1)
$$

若 $r_2 = 1$，即僅有第一個人不選 K_1，此時

$$
F([v']) = \frac{1}{N}[\mathbf{1}_N]
$$

顯然 $F([v])_{i1} = \begin{cases} 0 & ,\text{若 } i=1 \\ \dfrac{1}{N} = \left(1 + \dfrac{1}{(N+1)-1}\right)\dfrac{1}{N+1} & ,\text{若 } 1 < i \leq n \end{cases}$ 敘述成立。

若 $r_2>1$，即除了第一個人外還有人不選 K_1，則

$$F([v'])_{i1}=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & \text{，若 } 1\le i<r_2-1\\ 0 & \text{，若 } i=r_k-1\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N-(r_j-1)}\right)\frac{1}{N} & \text{，若 } r_k-1<i<r_{k+1}-1\end{cases}$$

其中 $k=2,3,\cdots,m$。代入 (1) 可得

$$F([v])_{i1}=\begin{cases}0 & \text{，若 } i=1\\ \dfrac{1}{N} & \text{，若 } 2\le i<r_2\\ 0 & \text{，若 } i=r_k\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\frac{1}{N} & \text{，若 } r_k<i<r_{k+1}\end{cases}$$

因為 $\dfrac{1}{N}=\left(1+\dfrac{1}{(N+1)-1}\right)\dfrac{1}{N+1}$，

所以 $\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\frac{1}{N}=\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\left(1+\frac{1}{(N+1)-1}\right)\frac{1}{N+1}$

對於 $k=2,3,\cdots,m$，若 $r_k<i<r_{k+1}$，則 $F([v])_{i1}=\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\frac{1}{N+1}$

從而

$$F([v])_{i1}=\begin{cases}0 & \text{，若 } i=r_k\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\frac{1}{N+1} & \text{，若 } r_k<i<r_{k+1}\end{cases}$$

其中 $k=1,2,3,\cdots,m$。

2. 當 A_1 沒有不選的鑰匙時，A_1 抽到 $K_1,K_2,\cdots,K_m$ 的機率都是 $\dfrac{1}{N+1}$。
同樣地由前面的遞迴關係討論可知

$$F([v])=\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}F([v]\Big|p_{1j}=1)$$

當 A_1 抽到 K_1 時，對於 $A_2,A_3,\cdots,A_{N+1}$ 來說，已經沒有不選的鑰匙，可以視為 N 個人依序隨機抽取鑰匙。故 $F([v]\Big|p_{11}=1)=\left[\begin{array}{c|c}1 & [0]_{1\times N}\\ \hline [0]_{N\times 1} & \frac{1}{N}[\mathbf{1}_N]\end{array}\right]$。若 A_1 沒有抽到 K_1，在 A_1 抽到 K_2 的情況下，對於 $A_2,A_3,\cdots,A_{N+1}$ 而言，第 $r_1-1,r_2-1,\cdots,r_m-1$ 個人不選 K_1。令 $N\times 1$ 階矩陣 $[v']$ 滿足 $v'_{i1}=\begin{cases}0 & \text{, 若 } i=r_k-1\\ 1 & \text{, 若 } i\neq r_k-1\end{cases}$ 其中 $k=1,2,3\cdots,m$

若 $F([v'])=\left[\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{F([v'])[1]}_{\text{第 }1\text{ 行}} & \underbrace{F([v'])[2]}_{\text{第 }2\text{ 行}} & \cdots & \underbrace{F([v'])[N]}_{\text{第 }N\text{ 行}}\end{array}\right]$，其中 $F([v'])[i]$ 是第 i 行向量。則

$$
\begin{aligned}
F([v]) &= \frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} F([v]\Big|p_{1j}=1) \\
&= \frac{1}{N+1}\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{array}\right] \\
&+ \frac{1}{N+1}\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & [0]_{N\times 1} & \cdots & F([v'])[N] \end{array}\right] \\
&+ \frac{1}{N+1}\left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & F([v'])[3] & [0]_{N\times 1} & \cdots & F([v'])[N] \end{array}\right] \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{N+1}\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline F([v'])[1] & F([v'])[2] & F([v'])[3] & \cdots & [0]_{N\times 1} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

化簡可得

$$
\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{N}{N+1}F([v'])[1] & * & * & * \end{array}\right] \qquad \ldots(2)
$$

由歸納假設 $F([v'])_{i1} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{，若 } 1 \le i < r_1 - 1 \\ 0 & \text{，若 } i = r_k - 1 \\ \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N-(r_j-1)}\right)\frac{1}{N} & \text{，若 } r_k - 1 < i < r_{k+1} - 1 \end{cases}$

所以 $\frac{N}{N+1}F([v'])[1] = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & \text{，若 } 1 \le i < r_1 - 1 \\ 0 & \text{，若 } i = r_k - 1 \\ \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N-(r_j-1)}\right)\frac{1}{N+1} & \text{，若 } r_k - 1 < i < r_{k+1} - 1 \end{cases}$

代入 (2) 可得 $F([v])_{i1} = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & \text{，若 } 1 \le i < r_1 \\ 0 & \text{，若 } i = r_k \\ \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{N+1-r_j}\right)\frac{1}{N+1} & \text{，若 } r_k < i < r_{k+1} \end{cases}$

其中 $k = 1, 2, 3, \cdots, m$。

綜合 1,2 可知對於 $n = N+1$ 時敘述成立，由數學歸納法可知此敘述對於所有大於 1 的正整數 n 都成立。 $\square$

使用定理2計算 $n = 7, P(A_2, K_1) = P(A_5, K_1) = 0$ 的結果與 python 模擬數據如附錄。

四、n 人中恰有 m 個人不選某一把鑰匙，且這 m 個人不選的鑰匙均相異

設有 n 個人 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 依序抽鑰匙 $K_1, K_2, \cdots, K_m$ 且 $A_{r_1}, A_{r_2}, \cdots, A_{r_m}$ 不選某一把鑰匙。假設這 m 個人不選的鑰匙都是相異的，令 A_{r_1} 不選 K_{j_1}、A_{r_2} 不選 K_{j_2}、$\cdots$、A_{r_m} 不選 K_{j_m}，其中 $r_k < r_{k+1}, k = 1, 2, \cdots, m-1$。同樣地為了避免最後一人無鑰匙可抽，規定 $r_m \neq n$。

定義 2

令 n 階方陣 X 滿足第 (r_i, i) 元 $X_{r_i i} = 0, i = 1, 2, 3, \cdots, m$，其餘元為 1。定義 $F(X)$ 為 n 人抽鑰匙且 A_{r_1} 不選 K_1、A_{r_2} 不選 K_2、$\cdots$、A_{r_m} 不選 K_m，所對應的機率矩陣。

例如：$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$F(X)$ 是 4 人抽鑰匙且 A_1 不選 K_1，A_3 不選 K_2 所對應的機率矩陣。由前面的討論可知，

$$F(X) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

因為當 m 個人不選的鑰匙均相異時，要討論的情況很多，不容易像前面一樣找到每個人抽到每把鑰匙的機率通式，所以我們想建立容易讓電腦計算的遞迴關係式。

引理 4

令 $Q_n = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{0}]_{n\times 1} & I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$ 為一個 $n\times(n+1)$ 的矩陣，其中 $[\mathbf{0}]_{n\times 1}$ 是一個 $n\times 1$ 的零矩陣，而 I_n 是一個 n 階單位方陣。則對於任意的 n 階方陣 X_n，有

$$Q_n^T X_n Q_n = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ [\mathbf{0}]_{n\times 1} & X_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & X_n & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

其中 Q_n^T 是 Q_n 的轉置矩陣。

證明：

由矩陣的分割與乘法性質可知

$Q_n^T X_n = \left[\begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ \hline I_n \end{array}\right] X_n = \left[\begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{1\times n} X_n \\ \hline I_n X_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ \hline X_n \end{array}\right]$

而 $Q_n^T X_n Q_n = \left[\begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ \hline X_n \end{array}\right] Q_n = \left[\begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ \hline X_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{0}]_{n\times 1} & I_n \end{array}\right]$

$= \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{0}]_{1\times n}[\mathbf{0}]_{n\times 1} & [\mathbf{0}]_{1\times n} I_n \\ \hline X_n [\mathbf{0}]_{n\times 1} & X_n I_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ [\mathbf{0}]_{n\times 1} & X_n \end{bmatrix}$ □

例如：若 $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則 $Q_2^T X_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

由參考文獻 [3] 可知矩陣的行運算有以下的性質

引理 5

令 A 為 n 階方陣，定義 $C_{ij}(n)$ 為一個將 n 階單位方陣 I_n 中第 i 行與第 j 行交換後所得的矩陣，則 $AC_{ij}(n)$ 的運算結果是將矩陣 A 中的第 i 行與第 j 行交換。

例如：若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, C_{12}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 $AC_{12}(3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$。

顯然 $C_{ij}(n)$ 的乘法反方陣 $C_{ij}(n)^{-1} = C_{ji}(n)$

有了前面的引理，我們可以對之前發現的遞迴關係進行改寫。為了說明我們的想法，考慮 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的 $F(X)$。我們的方法是考慮第一個人抽到什麼鑰匙，也就是在第一

列中哪一個位置為 0，而且 0 所在的位置其下方的元素都是 0。接著對剩下 3 人考慮第一個抽走鑰匙後的 3 階機率方陣，再組合成 4 階方陣。過程如下：

當 A_1 抽到 K_2 時，剩下 3 人的機率方陣可以從 3 人抽鑰匙且第 2 人不選 K_2 得到，在 A_1 抽到 K_2 的條件下，機率矩陣為

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

我們將上面這個矩陣拆解為

$$\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(P_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \ldots ①$$

如果欲將 P_2 的第二行與第一行交換，由引理5 可知

$$P_2C_{21}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

，再由引理4得

$$P_2C_{21}(4) = Q_3^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} Q_3$$

其中 $X_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = F(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix})$。又 $C_{ij}(4)^{-1} = C_{ji}(4)$，因此

$$P_2 = Q_3^T F(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}) Q_3 C_{12}(4)$$

將上式代入①得到 $\frac{1}{3}\left(Q_3^T F(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix})Q_3C_{12}(4)+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$

同理，當 A_1 抽到 K_3 時，對應的機率矩陣為 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，可拆解為

$$\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(P_3+\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

先將 P_3 的第三行與第二行交換，再將第二行與第一行交換可得 $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，根據引理4與引理5可得

$$P_3C_{32}(4)C_{21}(4)=Q_3^T\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}Q_3\Rightarrow P_3=Q_3^TF(\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix})Q_3C_{12}(4)C_{23}(4)$$

因此 A_1 抽到 K_3 的機率矩陣為 $\frac{1}{3}\left(Q_3^TF(\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix})Q_3C_{12}(4)C_{23}(4)+\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$

同理在 A_1 抽到 K_4 時的機率矩陣為

$$\frac{1}{3}\left(Q_3^TF(\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix})Q_3C_{12}(4)C_{23}(4)C_{34}(4)+\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

定義 3

定義

$$S_k(n) = C_{12}(n)C_{23}(n)C_{34}(n)\cdots C_{k-1,k}(n) = \prod_{i=1}^{k-1} C_{i,i+1}(n)$$

並規定 $S_1(n) = I_n$

由 $S_k(n) = S_{k-1}(n)C_{k-1,k}(n)$ 可推得此結果。

定義 4

令 X 為 n 階方陣，定義 $M_{ij}(X)$ 是將矩陣 X 中刪除第 i 列與第 j 行後，所形成的 $n-1$ 階方陣。例如 $M_{12}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

利用新的定義，若 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則 $F(X)$ 可表示為

$$\begin{aligned} F(X) =& \frac{1}{3}\left(Q_3^T F(M_{12}(X))Q_3S_2(4) + Q_3^T F(M_{13}(X))Q_3S_3(4) + Q_3^T F(M_{14}(X))Q_3S_4(4)\right) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{4} & \frac{7}{18} & \frac{5}{36} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

將上述討論的結果一般化，可得到以下定理

定理 3: n 人抽鑰匙且其中 m 人不選的鑰匙均相異之遞迴關係

設 n 階方陣 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ 中每個元為 0 或 1，除第 n 列必須都為 1 外，其餘各列中每一列最多只有一個元為 0。$F(X)$ 表對應的抽鑰匙機率矩陣，則

1. $F\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 當 $n \geq 3$ 時，令 $b_k = \dfrac{x_{1k}}{x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}} = \dfrac{x_{1k}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}}$，則

$$F(X) = \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} & \cdots & Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} b_1 S_1(n) \\ \hline b_2 S_2(n) \\ \hline \vdots \\ \hline b_n S_n(n) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline \multicolumn{4}{c}{[\mathbf{0}]_{(n-1)\times(n-1)}} \end{array}\right]$$

證明：

由前面的討論過程可知，若 X 的第一列元素都是 1，則

$$F(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} S_i(n)\right) + \frac{1}{n}\left[\begin{array}{c} [\mathbf{1}]_{1\times n} \\ \hline [\mathbf{0}]_{(n-1)\times n} \end{array}\right]$$

此時 $b_i = \dfrac{x_{1i}}{x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}} = \dfrac{1}{n}, i = 1, 2, 3, \cdots, n$，而利用矩陣的分割與乘法可得

$$F(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} S_i(n)\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} S_i(n)$$
$$= b_1 Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} S_1(n) + b_2 Q_{n-1}^T F(M_{12}(X)) Q_{n-1} S_2(n) + \cdots + b_n Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1} S_n(n)$$
$$= Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} b_1 S_1(n) + Q_{n-1}^T F(M_{12}(X)) Q_{n-1} b_2 S_2(n) + \cdots + Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1} b_n S_n(n)$$
$$= \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} & \cdots & Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} b_1 S_1(n) \\ \hline b_2 S_2(n) \\ \hline \vdots \\ \hline b_n S_n(n) \end{array}\right]$$

若 X 的第一列中恰有某個元素為 0，令 $x_{1k} = 0$，則 $b_k = 0$。

其餘 $b_i = \dfrac{x_{1i}}{x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}} = \dfrac{1}{n-1}$，因此同理

$$F(X) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i\in\{1,2,3,\cdots,n\}, i\neq k} Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} S_i(n)\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} b_i S_i(n)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} & \cdots & Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} b_1 S_1(n) \\ \hline b_2 S_2(n) \\ \hline \vdots \\ \hline b_n S_n(n) \end{array}\right] \qquad \square$$

以 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 來說明上面定理的結果，$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \dfrac{1}{4}$，$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

$$F(M_{11}(X)) = F(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$F(M_{12}(X)) = F(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$F(M_{13}(X)) = F(M_{14}(X)) = F(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_3^T F(M_{11}(X)) Q_3 & Q_3^T F(M_{12}(X)) Q_3 & Q_3^T F(M_{13}(X)) Q_3 & Q_3^T F(M_{14}(X)) Q_3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

而 $$\left[\begin{array}{c} b_1 S_1(4) \\ \hline b_2 S_2(4) \\ \hline b_3 S_3(4) \\ \hline b_4 S_4(4) \end{array}\right] = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

故 $\left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_3^T F(M_{11}(X))Q_3 & Q_3^T F(M_{12}(X))Q_3 & Q_3^T F(M_{13}(X))Q_3 & Q_3^T F(M_{14}(X))Q_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} b_1S_1(4) \\ \hline b_2S_2(4) \\ \hline b_3S_3(4) \\ \hline b_4S_4(4) \end{array}\right]$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$，因此 $F(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

我們利用上面的定理，搭配動態規劃 (Dynamic programming) 的方法，實現了這個遞迴算法 (程式構想見附錄)，以 6 個人為例，若第 i 個人不選第 i 把鑰匙，$i = 1, 2, 3, 4, 5$，得出機率矩陣

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.24 & 0 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 \\ 0.225 & 0.2375 & 0 & 0.17916666 & 0.17916666 & 0.17916666 \\ 0.20833333 & 0.21944445 & 0.23888889 & 0 & 0.16666666 & 0.16666666 \\ 0.1875 & 0.19722222 & 0.21388889 & 0.25 & 0 & 0.15138889 \\ 0.13916667 & 0.14583334 & 0.15722222 & 0.18083333 & 0.26416667 & 0.11277778 \end{bmatrix}$$

而模擬抽鑰匙的機率如表格2

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
A_1	.000	.201	.201	.199	.200	.199
A_2	.242	.000	.188	.190	.189	.191
A_3	.225	.237	.000	.180	.178	.180
A_4	.209	.218	.238	.000	.168	.167
A_5	.186	.198	.216	.250	.000	.150
A_6	.139	.145	.157	.181	.264	.114

表格 2: $n = 6, P(A_i, K_i) = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 模擬 100000 次的相對次數

參、研究結果

1. 設有 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共 n 人依序選取 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 共 n 把鑰匙，若第 r 人知道第一把鑰匙且一定不選，其中 $1 \le r < n$，以 $P(A_i, K_j)$ 表 A_i 抽到鑰匙 K_j 的機率，則

   (1) 對於滿足 $1 \le i < r$ 的任意正整數 i，$P(A_i, K_j) = \dfrac{1}{n}$，其中 $1 \le j \le n$。

   (2) $P(A_r, K_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & \text{當 } j \ne 1, 1 \le j \le n \\ 0 & \text{當 } j = 1 \end{cases}$

   (3) 對於滿足 $r < i \le n$ 的任意正整數 i，有

   $$P(A_i, K_j) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{n-r}\right)\dfrac{1}{n} & \text{若 } j = 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\dfrac{1}{n} & \text{若 } j \ne 1 \end{cases}$$

2. 對於任意大於 1 的正整數 n，令 $[v]$ 為一個 $n \times 1$ 的矩陣，且 $v_{i1} = \begin{cases} 0 & \text{若 } i = r_k \\ 1 & \text{若 } i \ne r_k \end{cases}$，

   其中 $1 \le r_k < r_{k+1}, k = 1, 2, 3, \cdots, m$ 且 $r_m \ne n$，**並規定** $r_{m+1} = n$

   則 $F([v])_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{，若 } 1 \le i < r_1 \\ 0 & \text{，若 } i = r_k \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \dfrac{1}{n - r_j}\right)\dfrac{1}{n} & \text{，若 } r_k < i < r_{k+1} \end{cases}$

3. 設 n 階方陣 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ 中每個元為 0 或 1，除第 n 列必須都為 1 外，

   其餘各列中每一列最多只有一個元為 0。$F(X)$ 表對應的抽鑰匙機率矩陣，則

   (1) $F\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (2) 當 $n \ge 3$ 時，令 $b_k = \dfrac{x_{1k}}{x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}} = \dfrac{x_{1k}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{1i}}$，則

$$F(X) = \left[\ Q_{n-1}^T F(M_{11}(X)) Q_{n-1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; Q_{n-1}^T F(M_{1n}(X)) Q_{n-1}\ \right] \begin{bmatrix} b_1 S_1(n) \\ \hline b_2 S_2(n) \\ \hline \vdots \\ \hline b_n S_n(n) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline \multicolumn{4}{c}{[\mathbf{0}]_{(n-1)\times(n-1)}} \end{array}\right]$$

肆、 未來展望

我們對於本研究的未來展望如下

1. 當 n 人中 m 人所不選的鑰匙均相異時，是否能求出 $P(A_i, K_j)$ 的一般式，或可將定理3所得到的遞迴關係式進一步簡化。

2. 改編原始問題並加入機會成本的概念，例如：付出 10 元可換得重新抽取鑰匙的機會。

伍、 附錄

1. 定理1可知當有 7 個人抽鑰匙且第三人 A_3 必不選 K_1 時，每個人抽到每把鑰匙的機率如下表

<table>
<tr><th></th><th>K_1</th><th>K_2</th><th>K_3</th><th>K_4</th><th>K_5</th><th>K_6</th><th>K_7</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td colspan="7" rowspan="2">$\frac{1}{7}$</td></tr>
<tr><td>A_2</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>0</td><td colspan="6">$\frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td rowspan="4">$\frac{5}{28}$</td><td colspan="6" rowspan="4">$\frac{23}{168}$</td></tr>
<tr><td>A_5</td></tr>
<tr><td>A_6</td></tr>
<tr><td>A_7</td></tr>
</table>

將程式的參數設定 $n = 7, r = 3$ 模擬 100000 次結果如表格3

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
A_1	.148	.143	.139	.144	.139	.144	.143
A_2	.140	.139	.141	.142	.148	.145	.146
A_3	.000	.168	.165	.168	.167	.167	.166
A_4	.176	.139	.141	.138	.137	.138	.132
A_5	.179	.138	.133	.137	.133	.138	.142
A_6	.179	.137	.141	.133	.137	.135	.138
A_7	.178	.135	.141	.139	.140	.133	.133

表格 3: 以 $n = 7, r = 3$ 模擬 100000 次的相對次數

2. 以下是當 $n=7, P(A_2,K_1)=P(A_5,K_1)=0$ 時，用定理2 所求得的機率矩陣為

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\left[\begin{array}{c|cccccc}\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \left(1+\frac{1}{7-2}\right)\frac{1}{7}=\frac{6}{35} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210}\\ \frac{6}{35} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210} & \frac{29}{210}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \left(1+\frac{1}{7-2}\right)\left(1+\frac{1}{7-5}\right)\frac{1}{7}=\frac{9}{35} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105}\\ \frac{9}{35} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105} & \frac{13}{105}\end{array}\right]$$

以 $n=7, P(A_2,K_1)=P(A_5,K_1)=0$ 執行 100000 次模擬的結果如表格4

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
A_1	.142	.143	.142	.142	.143	.143	.145
A_2	.000	.168	.168	.167	.166	.165	.166
A_3	.172	.138	.139	.139	.138	.136	.136
A_4	.172	.137	.138	.137	.140	.139	.138
A_5	.000	.166	.166	.169	.166	.166	.166
A_6	.256	.124	.124	.123	.124	.124	.125
A_7	.258	.123	.123	.124	.123	.125	.125

表格 4: $n=7, P(A_2,K_1)=P(A_5,K_1)=0$ 模擬 100000 次的相對次數

3. 定理3的遞迴關係之函式 $F(X)$ 實作構想：根據參考文獻 [7]，我們採用由下而上 (Bottom-up) 的方式實作，先求出所有 $n-1$ 人抽鑰匙的情況，再解 n 人的情況。此外由於矩陣乘法的程式執行速度較慢，所以我們用 $F(X)=\sum b_i Q_{n-1}^T F(M_{1i}(X)) Q_{n-1} S_i(n)$ 來實作矩陣乘法。

參考文獻

[1] 大學入學考試中心 105 學年度學科能力測驗試題。
`https://www.ceec.edu.tw/xmfile?xsmsid=0J052424829869345634`

[2] 周伯欣 (2019)。抽籤的公平性。數學傳播 43 卷 2 期, pp. 49-54

[3] Row and column operations。
`https://tartarus.org/gareth/maths/Linear_Algebra/row_operations.pdf`

[4] 使用 Python 來認識矩陣。
`https://tinyurl.com/ydebxzkk`

[5] Swap two rows in a numpy array in python.
`https://tinyurl.com/4fd2spjz`

[6] NumPy 1.14 教學–05 形狀操作、矩陣互相堆疊 (Stacking)、矩陣切割 (Splitting)。
`https://tinyurl.com/y9wpd252`

[7] 演算法筆記 (Dynamic Programming)
`http://web.ntnu.edu.tw/~algo/DynamicProgramming.html`

【評語】050412

這個抽鑰匙的問題，來自於 105 學測的推廣。問題有趣自然，且逐步推廣到 n 人中恰有 m 個人不選某一把鑰匙，且這 m 個人不選的鑰匙均相異時。作品利用了矩陣的方式，和矩陣分割的方法來分析問題。相關的結果和方法應該可以應用至其他科學模型上。書面報告非常詳細清楚，口頭報告亦佳。

作品簡報

我能搭到「他」的機車嗎？

抽鑰匙的機率問題

高級中等學校組

數學科

研究動機

我們在課堂上看到一道關於機率的試題如下

105 年學測多選第 13 題

甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B、C、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B、C、D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。

1. A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
2. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
3. A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
4. B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
5. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

我們想要知道在此情況下每個人抽到每支鑰匙的機率，並且推廣這個問題。

研究目的與方法

1. 找出原始問題中每個人抽到每一把鑰匙的機率。
2. 設有 n 個人依序抽鑰匙，其中第 r 個人必不選第一把鑰匙，求每個人抽到每把鑰匙的機率公式 (定理 1)。
3. 設有 n 個人依序抽鑰匙，其中恰有 m 個人必不選第一把鑰匙，求出每個人抽到每把鑰匙的機率公式 (定理 2)。
4. 設有 n 個人依序抽鑰匙，其中恰有 m 個人必不選某一把鑰匙，且這 m 個人不選的鑰匙均相異，求出機率矩陣的遞迴關係 (定理 3)。
5. 設計程式模擬抽鑰匙過程，輔助觀察定理二和定理三的結果。

n 個人中第 r 個人必不選第一把鑰匙的抽鑰匙機率對應表格

4 人中第 2 個人必不選第一把鑰匙 (原始問題)

	甲	乙	丙	丁
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$
D	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$

定理 1：n 人中第 r 個人必不選第一把鑰匙

人：A_i　　鑰匙：K_j，其中 $1 \leq i, j \leq n$

且 A_r 必不選 K_1

<table>
<tr><th></th><th>K_1</th><th>K_2</th><th>$\dots$</th><th>K_n</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td rowspan="3">$\frac{1}{n}$</td><td colspan="3" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>A_2</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_r</td><td>0</td><td colspan="3">$\frac{1}{n-1}$</td></tr>
<tr><td>A_{r+1}</td><td rowspan="3">$\left(1+\frac{1}{n-r}\right)\frac{1}{n}$</td><td colspan="3" rowspan="3">$\left(1-\frac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\frac{1}{n}$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_n</td></tr>
</table>

符號說明 (PART 1)

定義

1. A_i 代表人，K_j 代表鑰匙，$P(A_i, K_j)$ 為 A_i 抽到 K_j 的機率，其中 $1 \le i, j \le n$。
2. 機率矩陣：將 n 個人抽鑰匙的機率對應表格以 n 階方陣 $P = [p_{ij}]$ 來表示，其中 $p_{ij} = P(A_i, K_j)$。
3. $[v]$ 是一個 $n \times 1$ 的矩陣，且 $[v]$ 的第 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 列位置的元為 0，其餘為 1。即
$$v_{i1} = \begin{cases} 0 & ,若\ i = r_k \\ 1 & ,若\ i \ne r_k \end{cases}, k = 1, 2, 3, \cdots, m$$
4. $F([v])$ 為 n 人抽鑰匙且第 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 個人不選 K_1 的條件下，n 個人抽鑰匙的機率矩陣。且 $F([v])_{ij}$ 表此機率矩陣的第 (i, j) 元。

說明

4 個人 A_1, A_2, A_3, A_4 抽 K_1, K_2, K_3, K_4

已知 A_1 與 A_3 必不選 K_1，則取 $[v] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

經過計算可得此時的機率矩陣

$$F([v]) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

所以 $F([v])_{32} = \frac{1}{3} = P(A_3, K_2)$

機率矩陣的分割 (n 階機率矩陣可寫成若干個 $n-1$ 階機率矩陣之線性組合)

$n=4, P(A_1,K_1)=P(A_3,K_1)=0$

$\boxed{\text{4 個人抽籤且第 1,3 個人不選 } K_1 \text{ 的機率矩陣}} = \frac{1}{3} \times \boxed{\text{4 個人抽籤且已知第 1 個人選 } K_2 \text{ 的情況下的機率矩陣}} + \frac{1}{3} \times \boxed{\text{4 個人抽籤且已知第 1 個人選 } K_3 \text{ 的情況下的機率矩陣}} + \frac{1}{3} \times \boxed{\text{4 個人抽籤且已知第 1 個人選 } K_4 \text{ 的情況下的機率矩陣}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

n 人中恰有 m 個人必不選第一把鑰匙的機率矩陣

用機率矩陣的分割和數學歸納法，我們證明了以下的定理

定理 2

對於任意大於 1 的正整數 n，令 $[v]$ 為一個 $n \times 1$ 的矩陣，且 $v_{i1} = \begin{cases} 0 & 若\ i = r_k \\ 1 & 若\ i \neq r_k \end{cases}$，

其中 $1 \leq r_k < r_{k+1}, k = 1, 2, 3, \cdots, m$ 且 $r_m \neq n$，**並規定** $r_{m+1} = n$

$$則\ F([v])_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & ，若\ 1 \leq i < r_1 \\ 0 & ，若\ i = r_k \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{n - r_j}\right) \frac{1}{n} & ，若\ r_k < i < r_{k+1} \end{cases}$$

符號說明 (PART 2)

定義

令 n 階方陣 X 滿足第 (r_i, i) 元 $X_{r_i i} = 0, i = 1, 2, 3, \cdots, m$，其餘元為 1。則 $F(X)$ 為 n 人抽鑰匙且 A_{r_1} 不選 K_1、A_{r_2} 不選 K_2、$\cdots$、A_{r_m} 不選 K_m，所對應的機率矩陣。

說明 (4 人抽鑰匙且 A_1 不選 K_1，A_3 不選 K_2)

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

引理 4

令 $Q_n = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{0}]_{n\times 1} & I_n \end{array}\right]$，其中 $[\mathbf{0}]_{n\times 1}$ 是一個 $n \times 1$ 的零矩陣，而 I_n 是一個 n 階單位方陣。則對於任意的 n 階方陣 X_n，有

$$Q_n^T X_n Q_n = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ [\mathbf{0}]_{n\times 1} & X_n \end{bmatrix}$$

其中 Q_n^T 是 Q_n 的轉置矩陣。

說明

$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則

$$Q_2^T X_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

符號說明 (PART 3)

定義
$C_{ij}(n)$ 是將 n 階單位方陣 I_n 中第 i 行與第 j 行交換後所得的矩陣。

定義
$$S_k(n) = C_{12}(n)C_{23}(n)\cdots C_{k-1,k}(n) = \prod_{i=1}^{k-1} C_{i,i+1}(n)$$
。
並規定 $S_1(n) = I_n$

定義
令 X 為 n 階方陣，定義 $M_{ij}(X)$ 是將矩陣 X 中刪除第 i 列與第 j 行後，所形成的 $n-1$ 階方陣。

說明
$$M_{12}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

n 人中恰有 m 個人必不選某把鑰匙且不選的鑰匙皆相異的遞迴關係式

定理 3

1. $F\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
2. 當 $n\geq 3$ 時，已知 n 階方陣 $X=[x_{ij}]$ 中 x_{ij} 不是 1 就是 0。令 $b_k=\dfrac{x_{1k}}{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}}$，則

$$F(X)=\left[\begin{array}{c|c|c} Q_{n-1}^{T}F(M_{11}(X))Q_{n-1} & \cdots & Q_{n-1}^{T}F(M_{1n}(X))Q_{n-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} b_1S_1(n)\\ \hline b_2S_2(n)\\ \hline \vdots\\ \hline b_nS_n(n)\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ \hline \multicolumn{4}{c}{[\mathbf{0}]_{(n-1)\times(n-1)}}\end{array}\right]$$

定理 3 的程式實作構想與結果

定理 3 的程式實作構想

使用動態規劃 (dynamic programming)，採由下而上的順序解題，即先解 $n-1$ 個人抽籤匙的機率矩陣並存入表格，再解 n 個人抽籤匙的機率矩陣。

當 $n=6, P(A_i, K_i)=0, i=1,2,3,4,5$ 的程式實作結果

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.24 & 0 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 \\ 0.225 & 0.2375 & 0 & 0.17916666 & 0.17916666 & 0.17916666 \\ 0.20833333 & 0.21944445 & 0.23888889 & 0 & 0.16666666 & 0.16666666 \\ 0.1875 & 0.19722222 & 0.21388889 & 0.25 & 0 & 0.15138889 \\ 0.13916667 & 0.14583334 & 0.15722222 & 0.18083333 & 0.26416667 & 0.11277778 \end{bmatrix}$$

我們可以看出用程式實作的計算結果與模擬抽籤匙試驗所得的相對次數很接近。(參見作品說明書第 25 頁表格 4)

未來展望與參考文獻

未來展望

1. 當 n 人中 m 人所不選的鑰匙均相異時，是否能求出 $P(A_i, K_j)$ 的一般式，或可將定理 3 所得到的遞迴關係式進一步簡化。
2. 改編原始問題並加入機會成本的概念，例如：付出 10 元可換得重新抽取鑰匙的機會。

參考文獻

- 周伯欣 (2019)。抽籤的公平性。數學傳播 43 卷 2 期, pp. 49-54
- Row and column operations。
  https://tartarus.org/gareth/maths/Linear_Algebra/row_operations.pdf
- 使用 Python 來認識矩陣。
  https://tinyurl.com/ydebxzkk
- 演算法筆記 (Dynamic Programming)
  http://web.ntnu.edu.tw/~algo/DynamicProgramming.html